UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

Non ridere, non lugere, neque detestari, sed intellegere. Baruch Spinoza (1632-1677)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le lendemain, Aymery prit la ville. Victor Hugo (1802-1885)

Le séminaire TAD & IDD, animé par Yves Chevallard, a une double ambition solidaire : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment des professions de professeur, de formateur et de chercheur en didactique. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des praxéologies mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 16 h 30 à 18 h 30, la séance pouvant être suivie à distance par visioconférence.

➔ Séance 5 – Vendredi 17 mai 2013

LE RAPPORT AUX MATHÉMATIQUES : CONDITIONS ET CONTRAINTES

1. Une thèse en cours

a) Le 17 avril, Sineae Kim (SK dans ce qui suit) a présenté pendant une vingtaine de minutes un état du travail conduit sous ma direction pour sa thèse de doctorat. La chose prenait place lors des *journées doctorales* organisées chaque année, depuis quelques années, afin que les doctorants puissent rendre compte de l'avancée de leur travail (ce qui est supposé limiter les abandons furtifs).

b) Ce travail de thèse se situe dans le cadre de l'école doctorale 356, « Cognition, Langage, Éducation » dirigée actuellement par Patrick Lemaire. Sur le site Web consacré à l'école doctorale (voir http://gsite.univ-provence.fr/gsite/document.php?project=ed356), sous le titre « Comité de suivi des thèses », on peut lire ceci :

> Dans le cadre d'un dispositif de lutte contre l'échec en cours de thèse, **le collège doctoral d'Aix-Marseille Université** a préconisé la mise en place de « Comités de suivi de thèse » chargés d'évaluer à mi-parcours (à la fin de la deuxième année ou en début de la troisième année) l'état d'avancement de la thèse et ses difficultés éventuelles (Article 9, Charte des thèses, Collège doctoral d'Aix-Marseille Université, septembre 2008).

La « procédure » de ce suivi des thèses en cours est détaillée dans un texte qu'on trouvera sur le même site, à l'adresse suivante : http://gsite.univ-provence.fr/gsite/Local/ed356/dir/Comite_de_suivi_des_theses/Comite-Suivi-these-ED356.pdf.

c) Le texte de présentation sur lequel SK s'est appuyée le 17 avril dernier est en anglais. À cet égard, il est pertinent de souligner que le procès-verbal du conseil scientifique de l'université d'Aix-Marseille, réuni le 9 avril 2013, comporte cette indication : « La soutenance et la rédaction de thèse sont autorisées en langue anglaise, avec l'obligation d'un résumé en français (environ d'une dizaine de pages), non conditionnées par la composition du jury. » En d'autres termes, le choix de la langue anglaise est libre et n'a pas à être justifié par le fait que le jury comporterait un ou plusieurs membres non francophones. Ce détail participe – certains en seront scandalisés – d'un changement *dans* la civilisation, ce mot étant bien évidemment entendu au sens où il est utilisé, en TAD, dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique.

d) Vous trouverez ce texte de présentation sur mon site, mais j'en donnerai dans ce qui suit quelques-uns des éléments. Vous y verrez au reste apparaître certains matériaux déjà rassemblés dans le cadre de ce Séminaire depuis l'année 2010-2011. Avant cela, je rappelle à nouveau le projet de recherche initialement déposé le 25 octobre 2010. Tout d'abord, le sujet y était libellé ainsi :

> Contribution à l'étude de l'économie et de l'écologie didactiques des connaissances mathématiques et scientifiques dans les études scolaires et universitaires en sciences humaines et sociales et en particulier en sciences de l'éducation.

Ce sujet de recherche était alors développé dans le commentaire que voici :

> La recherche que nous nous proposons de mener à bien se situe dans le cadre de la *théorie anthropologique du didactique* (TAD). Élaborée à propos de la diffusion sociale des connaissances mathématiques, notamment dans le cadre

scolaire et universitaire, cette théorie a, depuis une dizaine d'années, été mise en œuvre dans l'étude de la diffusion sociale d'autres types de connaissances, en particulier celles relevant de diverses disciplines scolaires.

La problématique générale dans laquelle s'inscrit cette recherche vise à faire progresser notre connaissance fine de ce que l'on nomme en TAD *l'économie et de l'écologie institutionnelles* des connaissances mathématiques et scientifiques, que celles-ci apparaissent pour elles-mêmes ou, plus généralement, en relation avec des outils qui les mobilisent de façon explicite (comme dans certains modèles) ou incorporée (comme dans certains logiciels).

Les institutions étudiées appartiennent à l'univers des sciences sociales et humaines dans l'enseignement scolaire et universitaire et tout particulièrement à celui des sciences de l'éducation dans l'enseignement universitaire. À leur propos, une tradition ancienne, illustrée par l'ouvrage classique de C. P. Snow, *The Two Cultures* (1960), a souligné le divorce contemporain entre cultures « humanistiques » et cultures scientifiques, divorce qui affecte une majorité d'institutions appartenant globalement au monde dit des *humanités*.

En un temps où le projet plus que séculaire (1902) de constituer, à côté des humanités classiques, des *humanités scientifiques* semble reprendre vie, notre recherche vise plus concrètement à analyser les conditions et contraintes de la vie des connaissances scientifiques (et en particulier mathématiques) dans les institutions humanistiques, en vue d'éclairer les possibilités d'évolution de ces conditions et contraintes.

À cet égard, nous examinerons tout particulièrement les stratégies institutionnelles (et personnelles) par lesquelles se construit le déficit fonctionnel apparent de connaissances scientifiques – marqué notamment par la rareté, voire l'absence de formalismes de type scientifique – dans les sciences humaines et sociales, où nous nous efforcerons d'identifier les divers effets praxéologiques du phénomène crucial d'édulcoration (*fading*) des connaissances scientifiques.

e) Le travail conduit depuis deux ans et demi, non sans plusieurs interruptions dues notamment à la situation personnelle de la candidate ainsi qu'à l'état de santé du directeur de thèse, a fait évoluer le projet de recherche sans toutefois en changer fondamentalement la nature.

2. L'objet de la recherche

a) L'objet de la recherche doctorale de SK peut être spécifié à partir de deux points de vue.

1. Le premier point de vue concerne la *position* adoptée par la doctorante, choix forcé qui réalise une rupture franche avec les positions classiquement adoptées dans la recherche en didactique, où le chercheur se place, souvent tacitement et parfois non sans ambiguïtés, du coté des « connaisseurs » du champ praxéologique – ici, « les mathématiques » – à propos duquel certaines phénomènes d'enseignement et d'apprentissage sont étudiés. Cette rupture consiste à assumer la position d'*outsider*, c'est-à-dire à la fois de personne extérieure au champ praxéologique concerné, de « profane », et, dans une certaine mesure, d'« intrus », éventuellement jugé indiscret, voire illégitime, relativement à ce champ. En pratique, il s'agit pour d'assumer, sous ma direction, la position de personne extérieure, de non-initiée en mathématiques, au lieu de se positionner, selon l'usage le plus classique, quoique généralement mal défini, comme un *insider*, un « initié », ayant reçu « l'onction mathématique ». Ce choix, imposé de fait par la formation de SK, qui s'est accomplie pour l'essentiel dans le champ des humanités, et en particulier dans le sous-champ des sciences de l'éducation, a été poussé en avant par ce qui motive tout chercheur : le désir de comprendre des phénomènes à la fois prégnants dans leurs effets et obscurs dans leur genèse, phénomènes que SK a abordés dans ses travaux antérieurs et que deux expressions connues dans le monde entier symbolisent : celle, déjà mentionnée, des *two cultures*, et celle des *Science wars* (sur laquelle on pourra voir l'article homonyme de *Wikipedia*), par laquelle on a désigné un acmé du conflit supposé entre « sciences dures » ou « exactes » et « sciences humaines et sociales » (voir l'article « Hard and soft science » de *Wikipedia* ainsi que l'article « Sciences dures » de *Wikipédia*). Cette position d'extranéité *initiale* assumée par la doctorante est sans doute *la rupture principale qui fonde le travail de thèse en cours*.

2. Le second point de vue qu'il convient de préciser ici trouve de façon naturelle sa place dans certains développements récents de la TAD : il est fait d'une succession de « zooms avant » sur l'objet spécifique de la recherche doctorale. Je le présenterai dans les sous-sections suivantes.

b) Le point de départ du processus de définition de l'objet de la recherche se trouve dans la problématique *primordiale* en didactique, que l'on peut formuler ainsi : « Étant donné un domaine d'activité humaine $@$, quel est l'équipement praxéologique utile ou indispensable aux acteurs et aux institutions impliquées dans ce type d'activité ? » Cette problématique se déploie en deux questions non indépendantes.

1. La première question est la suivante :

> Q_1. Quelles sont les praxéologies *ordinairement utilisées* par les acteurs (personnels et institutionnels) de $@$?

Une réponse R_1 a cette question, qui dépend de la *position* occupée par les acteurs examinés au sein des institutions où s'exerce l'activité $\mathcal{Q}$, constituerait un *exposé descriptif*, écrit ou oral, portant sur les *praxéologies ordinaires* de ces acteurs.

2. La seconde question s'énonce alors ainsi :

> Q_2. Quelles sont les praxéologies *potentiellement utiles* aux acteurs (personnels et institutionnels) de $\mathcal{Q}$?

Une réponse R_2 à cette question constituerait un *exposé propositif* portant sur les *praxéologies « possiblement ordinaires »* de ces mêmes acteurs. Ainsi un exposé propositif énoncerait-il *ce que pourrait être*, selon les auteurs de l'exposé, les praxéologies ordinaires des acteurs de $\mathcal{Q}$.

3. Notons que, quelles qu'en soient les causes, l'évolution praxéologique permanente qui affecte les institutions et les personnes fait continuellement passer des praxéologies du statut de praxéologies *potentiellement* ordinaires à celui de praxéologies *effectivement* « ordinaires » ; et réciproquement (lorsque, par exemple, certaines praxéologies tombent en désuétude). À titre d'illustration, on trouvera ci-après les premières lignes d'un tel exposé propositif, celui d'un ouvrage intitulé *Basic Math for Social Scientists*, dû à Timothy M. Hagle (Sage, 1995) (Voir à l'adresse http://www.amazon.com/Basic-Math-Social-Scientists-Quantitative/dp/0803958757#reader_0803958757.)

1. INTRODUCTION

This chapter contains a review of some topics with which one should be familiar before proceeding to the calculus material. The chapter begins with a brief algebra review followed by sections discussing sets and combinations.

1.1 Algebra Review

1.1.1 Exponents

An exponent is a number placed in a superscript position immediately following another number or variable to indicate repeated multiplication. Thus $2 \times 2 \times 2 = 2^3$. More generally, $a \times a \times a = a^3$ and $a \times a \times \ldots \times a$ (n times) $= a^n$. Here are 12 rules for using exponents:

1. $a = a^1$; if the exponent is 1, it is usually assumed and not written, e.g., $2^1 = 2$
2. $a^m \times a^n = a^{m+n}$; e.g., $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32 = 4 \times 8 = 2^2 \times 2^3$
3. $(a^m)^n = a^{m \times n}$; e.g., $(2^2)^3 = 2^6 = 64 = (4)^3 = (2^2)^3$

4. Un troisième type d'exposés, que l'on trouve dans les institutions de formation et dans leurs noosphères, est connu de tous : il s'agit des *exposés prescriptifs*, qui, quel que soit le nom qu'on leur donne (programme ou plan d'études, curriculums, syllabus, etc.), désignent *ce que devraient être*

certaines des praxéologies ordinaires des acteurs de $\mathcal{A}$. On notera que la frontière entre exposés *propositifs* et exposés *prescriptifs* est souvent fragile. C'est ainsi que l'ouvrage *Basic Math for Social Scientists* déjà mentionné, qui est à proprement parler un exposé *propositif*, pourrait se voir conférer le statut d'exposé *prescriptif* en telle institution d'enseignement ou de recherche qui l'adopterait comme « manuel de référence ».

5. D'une manière générale, on parlera, de façon métaphorique, pour tout champ praxéologique $\mathcal{C}$, et pour toute personne x, du *livre ordinaire* $L(x ; \mathcal{C})$ recensant les praxéologies ordinaires relevant du champ $\mathcal{C}$ pour x ; pour faire court, on parlera aussi du « livre ordinaire de $\mathcal{C}$ de x ». De même, on parlera du livre ordinaire de $\mathcal{C}$, noté $L_I(p ; \mathcal{C})$, pour les personnes occupant la position p dans l'institution I : on pourra ainsi parler du « livre ordinaire de mathématiques » des *professeurs de mathématiques* enseignant en collège. Plus généralement, pour toute personne x ou toute institution I, on pourra parler de son « livre ordinaire de grammaire du français », ou « de génétique », ou « de statistique », ou « de latin », etc. Il est clair que, pour la plupart des personnes x et des institutions I, et pour la plupart des champs praxéologiques $\mathcal{C}$, les livres ordinaires $L(x ; \mathcal{C})$ et $L_I(p ; \mathcal{C})$ sont quasi vides.

c) Dans une deuxième étape du processus de définition de l'objet de la recherche, on restreint le champ de recherche en supposant que $\mathcal{A}$ est une activité *professionnelle*, cette expression devant être entendue au sens large, de façon à inclure l'activité de *formation* initiale et continue, formelle et informelle, à ladite activité professionnelle. Cette restriction implique en pratique que les praxéologies ordinairement cultivées par une personne ou une institution ne le soient pas à titre de *hobby*, même si, souvent, elles peuvent l'être pour leur valeur institutionnelle *identitaire* ou *distinctive*.

d) Dans une troisième étape, on prend pour $\mathcal{A}$ l'activité de formation et de recherche en *sciences humaines et sociales* et, en particulier, en *sciences de l'éducation*, domaine d'activité qu'on notera ci-après $\mathcal{E}$. Bien entendu, on pourra par ailleurs se référer à l'ensemble des activités humaines et en particulier aux sciences de la nature ou encore de ce qu'on nomme aux États-Unis les « STEM fields », notion qu'explicitent comme suit les premières lignes de l'article de même nom de *Wikipedia*, lequel suggère (a) un lien entre besoins de formation et activité professionnelle, et (b) une synergie entre divers champs praxéologiques, dont les mathématiques :

> **STEM fields** or **STEM education** is an acronym for the fields of study in the categories of science, technology, engineering, and mathematics. The acronym has been used regarding access to United States work visas for immigrants who are skilled in these fields. It has also become commonplace in education

discussions as a reference to the shortage of skilled workers and inadequate education in these areas. The initiative began to address the perceived lack of qualified candidates for high-tech jobs. It also addresses concern that the subjects are often taught in isolation, instead of as an integrated curriculum. Maintaining a citizenry that is well versed in the STEM fields is a key portion of the public education agenda of the United States.

e) La dernière étape du processus de définition de l'objet de la recherche doctorale – à l'étude duquel la recherche en cours ambitionne seulement d'apporter une contribution non vide, quoique significative – consiste alors à identifier pour l'étudier le *complexe dynamique des conditions et contraintes* sous lesquelles se forme, se déforme, se réforme le livre ordinaire de *mathématiques* des acteurs, et en particulier des acteurs *en formation*, dans le domaine noté $\mathfrak{E}$ ci-dessus, ces conditions et contraintes s'étageant sur les différents niveaux de l'échelle *de codétermination didactique* reproduite ci-après :

Humanité
↓↑
Civilisations
↓↑
Sociétés
↓↑
Écoles
↓↑
Pédagogies
↓↑
Systèmes didactiques

Un système didactique $S(X\,;\,Y\,;\,\blacktriangledown)$, on le sait, est formé par un collectif d'*étudiants X* (qui peuvent être de jeunes élèves, des étudiants d'université, des adultes en formation, etc.) et une équipe *Y* d'*aides à l'étude* (qui peuvent être des professeurs, des tuteurs, des parents d'élèves, etc.). Dans le cadre scolaire le plus répandu, les systèmes didactiques se forment au sein de *classes*, c'est-à-dire de systèmes $C(X\,;\,Y\,;\,P)$, où *P* est le programme d'études de la classe : en principe, pour tout $\blacktriangledown \in P$, la classe $C(X\,;\,Y\,;\,P)$ engendre un système didactique $S(X'\,;\,Y'\,;\,\blacktriangledown)$, où $X' \subset X$ et $Y' \subset Y$, qui vivra un certain temps au sein de la classe.

f) Dans ce qui suit, nous présenterons de façon résumée *quelques* exemples de conditions susceptibles d'influer – dans un sens ou dans un autre – sur la composition actuelle des livres de mathématiques $L(x\,;\,\mathfrak{M})$ ou $L_I(p\,;\,\mathfrak{M})$, au

moins pour certains personnes x ou pour certaines institutions I et pour certaines positions p en leur sein.

3. Le niveau de la civilisation

a) Arrêtons-nous d'abord sur les conditions et contraintes que l'on peut repérer dans la *civilisation gréco-latine*. À titre d'exemple, voici d'abord une première description due à l'historien américain d'origine néerlandaise Dirk J. Struik (1894-2000) dans son livre classique intitulé *A Concise History of Mathematics* (Dover, 4e édition révisée, 1987) :

> Typical of this new period in Greek history was the increasing wealth of certain sections of the ruling classes combined with equally increased misery and insecurity of the poor. The ruling classes based their material existence more and more upon slavery, which allowed them leisure to cultivate arts and sciences, but made them also more and more averse to all manual work. A gentleman of leisure looked down upon the work of slaves and craftsmen and sought relief from worry in the study of philosophy and of personal ethics. Plato and Aristotle expressed this attitude; and it is in Plato's *Republic* (written, perhaps, *c.* 360 B.C.) that we find the clearest expression of the ideals of the slave-owning ruling class. The "guards" of Plato's *Republic* must study the *quadrivium,* consisting of arithmetic, geometry, astronomy, and music, in order to understand the laws of the universe. Such an intellectual atmosphere was conducive (in its earlier period, at any rate) to a discussion of the foundations of mathematics and to speculative cosmogony. (p. 44)

Les mathématiques apparaissent ici d'emblée comme une *activité pour privilégiés*, et en tout cas comme n'étant pas faites pour les personnes « ordinaires ». Ajoutons à cela un autre tableau du même auteur, qui montre la *fragilité sociale* de ces mathématiques pour privilégiés :

> Despite the growth of some cities and a commerce embracing the whole of the known Western World, the entire economic structure of the Roman Empire remained based on agriculture. The spread of a slave economy in such a society was fatal to all original scientific work. Slave owners as a class were seldom interested in technical discoveries, partly because slaves could do all the work cheaply, and partly because they feared to place any tool in the hands of slaves which might sharpen their intelligence. There were, however, also learned slaves. Whoever wanted serious learning in philosophy and science studied Greek. Many members of the ruling class thus dabbled in the arts and sciences, but this very dabbling promoted mediocrity rather than productive thinking. When with the decline of the slave market the Roman economy declined, there were few men to cultivate even the mediocre science

of the past centuries. (p. 56)

Le verbe *to dabble* utilisé par l'auteur signifie, selon le dictionnaire en ligne Macmillan, « to be involved in an activity for a short time in a way that is not very serious ». L'ambiguïté culturelle à propos des mathématiques était ancienne. Un autre historien des mathématiques, l'Américain Morris Kline (1908-1992), dans son livre *Mathematics in Western Culture* (Oxford University Press, 1953), brosse ce rapide tableau du point de vue platonicien à leur endroit :

> To sum up Plato's position: a modicum of geometry and calculation suffice for practical needs; however, the higher and more advanced portions tend to lift the mind above mundane considerations and enable it to apprehend the final aims of philosophy, the idea of the Good. For this reason Plato recommended that the future philosopher-kings be trained for ten years, from the age of twenty to the age of thirty, in the study of the exact sciences: arithmetic, plane geometry, solid geometry, astronomy and harmonics. In his stress on mathematics as a preparation for philosophy, Plato spoke not merely for his followers and for his generation but for the whole classical Greek age. (p. 52)

c) Dans le livre VII de la *République*, Platon fait dialoguer Socrate et son élève Glaucon (voir http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/platon/rep7.htm). De ce dialogue il résulte que, selon Platon, les mathématiques sont la préparation par excellence à une formation plus haute que les mots de *dialectique* et de *philosophie* concrétisent. Tout cela sera condensé ici deux énoncés qui participent d'un modèle anthropologique du champ des mathématiques dans la civilisation occidentale :

> **E_1**. Hormis dans leurs parties les plus rudimentaires, les mathématiques sont dès l'Antiquité l'affaire presque exclusive d'un petit nombre de « privilégiés » d'un genre particulier : les « mathématiciens ».
>
> **E_2.** L'étude des mathématiques est toutefois tenue pour une propédeutique essentielle à des savoirs plus hauts et plus décisifs.

d) On sait que, pour l'essentiel, ce schéma s'applique aujourd'hui encore, dans le cas de la France, à l'organisation de la formation des élites « scientifiques » par la voie des CPGE (classes préparatoires – scientifiques – aux grandes écoles : voir l'article « Classes préparatoires aux grandes écoles » de *Wikipédia*). Par contraste, dans la Grèce de Platon, l'étude des mathématiques était une préparation à ce que nous appellerions aujourd'hui les *humanités*. Mais l'injonction platonicienne va au fil des siècles perdre de sa force, au point que les mathématiques seront délaissées par nombre d'intellectuels plus soucieux de belles-lettres que de sciences. Prenons à

nouveau un exemple : celui du mathématicien et astronome jésuite Christoph Scheiner (1575-1650). Dans un texte intitulé « Les chaires de mathématiques », contribution à l'ouvrage intitulé *Les jésuites à la Renaissance. Système éducatif et production du savoir* dirigé par Luce Giard (PUF, 1995), l'historien américain Steven J. Harris écrit ainsi :

> Pour le dire simplement, Scheiner, comme d'autres jésuites après lui, poursuit la réalisation d'un programme ambitieux de mathématiques appliquées. En même temps, il entretient une correspondance étendue avec ses anciens étudiants, dans et hors de la Compagnie, et avec des jésuites animés des mêmes intentions qui enseignent dans toute l'Europe centrale. De ces correspondances, 170 lettres sont conservées, elles font connaître un cercle d'environ quinze jésuites mathématiciens, dont plusieurs avaient étudié à Ingolstadt et qui sont tous désireux d'échanger des informations techniques sur un vaste éventail de sujets en mathématiques et en astronomie. Quoique Scheiner fût sans nul doute au centre de ce réseau de correspondance et qu'il travaillât dur pour éduquer en mathématiques de jeunes jésuites, il jugeait que, pour soutenir les mathématiques, la Compagnie n'en faisait pas assez, qu'elle devait ou pouvait faire davantage. Deux extraits de ses lettres nous font connaître les sentiments de Scheiner et la manière dont il critique ouvertement son Ordre. Dans une lettre (3 juillet 1613) à Johannes Rader, un jésuite qui avait étudié les mathématiques à Ingolstadt, Scheiner souligne que « l'étude des mathématiques devrait être plus grandement estimée par les nôtres. Je serais fort dans l'erreur si vos gens d'université ne l'ont pas encore appris, ou alors ils l'apprendront bientôt ». (p. 253)

La seconde missive de Scheiner annoncée par Harris est envoyée quatre ans plus tard à Paul Guldin (1577-1643), jésuite et mathématicien en résidence à Rome, pour lui raconter un voyage qu'il a récemment accompli et les conclusions que ce voyage lui a inspirées :

> « À présent, il n'y a pas de mathématicien dans cette province, on doit vraiment se désoler de ce que l'étude de cette discipline soit si peu prisée dans la Compagnie. À ce que je vois et j'entends, en voici la cause : que nos philosophes, et par là ils ne sont aucunement philosophes, dénigrent [les mathématiques] oralement et par écrit, même dans leurs publications… Il est indigne tout simplement que nos gens écrivent contre cette science sans rien savoir et sans réfléchir, même s'il est évident que [les mathématiques] sont l'hameçon avec lequel attraper les magnats et les nobles et les attirer au service de Dieu. J'en dirai plus là-dessus en un autre lieu selon le plan. » (p. 254).

L'historien cité apporte alors ce commentaire :

> Il est aussi remarquable que Scheiner critique nettement le dédain de ses compagnons pour les mathématiques et, ce qui intrigue encore plus, qu'il croie les mathématiques utiles à la cause jésuite et fasse référence en passant à un « plan », Il ne faut pas chercher bien loin pour découvrir quelle était sa stratégie.

Cette stratégie au service de la Compagnie de Jésus consistait pour l'essentiel à pénétrer le cercle étroit des familiers de puissants, ces derniers étant supposés désireux de fréquenter des mathématiciens. Cela dit, on croirait ici déclarée une « guerre des sciences ».

e) L'exemple de Scheiner rejoint des conclusions que bien d'autres données confortent et que l'on peut condenser en deux nouveaux énoncés :

> **E_3.** La plupart des gens, y compris parmi les lettrés, demeurent résolument étrangers aux mathématiques et leur préfèrent les « humanités ».
>
> **E_4.** Historiquement, les puissants ne détestent pas la fréquentation des mathématiciens, laquelle accroît leur sentiment de puissance.

Ajoutons que le mot de *mathématicien* reçut longtemps une acception imprécise et, surtout, *large*. Selon le dictionnaire d'Émile Littré (1863-1877), ce nom « s'est dit anciennement pour astrologue », affirmation à l'appui de laquelle Littré cite ce passage emprunté à Gabriel Naudé (1600-1653) : « Le vulgaire a confondu par abus les astrologues sous le nom de mathématiciens. »

f) La relation tout à la fois ancienne et ambiguë des mathématiques et des mathématiciens aux différents pouvoirs survit jusqu'à aujourd'hui dans les *discours apologétiques* souvent passionnés que la « puissante secte » des mathématiciens – *the mighty sect of mathematicians* –, pour parler comme l'évêque George Berkeley (1685-1753), élève régulièrement pour louer leur discipline et gagner à leur cause le grand public cultivé. Lors du lancement récent d'une collection d'ouvrages de haute vulgarisation mathématique (traduite de l'espagnol) intitulée *Le Monde est mathématique* (en partenariat avec le quotidien *Le Monde*), Cédric Villani, mathématicien lauréat de la médaille Fields 2010 et directeur de l'Institut Henri Poincaré, répondant, dans *Le Monde* du 21 mars 2013, à la question « Pourquoi l'Institut Henri Poincaré (IHP) a-t-il parrainé cette collection ? », tient les propos suivants :

> Les raisons sont multiples mais tournent toutes autour de l'importance de la vulgarisation scientifique.

D'abord, il faut veiller à susciter des vocations en nombre suffisant parmi les jeunes, à une époque où l'on ne pense pas naturellement à une carrière de mathématicien, ou plus généralement de scientifique, comme à un métier qui a de quoi faire rêver. C'est pourtant le cas ! C'est un métier dans lequel subsiste une grande part d'aventure. A quelques exceptions près, ce n'est pas un moyen de faire fortune, mais c'est un métier qui apporte une excellente combinaison d'éléments matériels confortables et de stimulation, de valorisation intellectuelle. C'est un bon métier, utile à l'individu et à la société.
Il est très important qu'un nombre suffisant de jeunes embrasse cette carrière. Pour cela, il faut leur apporter un éclair de rêve, afin de les inciter à se lancer dans des études qui peuvent sembler longues et pénibles, mais qui le sont moins qu'il n'y paraît, et se révèlent souvent très gratifiantes.
Ensuite, il faut aussi s'adresser à tous ceux qui ne feront pas des sciences leur métier, mais qui sont curieux de savoir à quoi ça sert. La vulgarisation remplit la fonction de rapprocher au niveau intellectuel et sensible les chercheurs et les autres. C'est important aussi pour des raisons très pratiques : le jour où les gens ne comprendront plus à quoi servent les scientifiques, les politiques couperont les subventions correspondantes et la recherche s'arrêtera. La communauté scientifique a donc le devoir naturel d'expliquer ce qu'elle fait aux gens qui la soutiennent.

On notera qu'est absent, ici, le souci des besoins mathématiques ordinaires des gens ordinaires, lesquels ne sont pas nécessairement curieux de savoir à quoi servent les mathématiques mais qui pourraient *se servir* si peu que ce soit de mathématiques, Ajoutons donc un énoncé encore à la liste ébauchée jusqu'ici :

E_5. La corporation des mathématiciens tient à l'adresse de publics choisis des discours apologétiques attrayants, pour, d'un même mouvement, recruter de futurs mathématiciens (au sens large du mot) et créer un environnement de non-mathématiciens favorables (ou non défavorables) au développement des mathématiques.

4. Le niveau de la société

a) Dans les sociétés européennes, la diffusion scolaire des connaissances mathématiques commence grâce à la création de chaires de mathématiques, notamment dans les collèges de jésuites. Tel est le point de départ d'un fait *qui a prévalu jusqu'à nos jours*, et que nous pouvons énoncer ainsi :

E_6. L'étude graduée des mathématiques a été depuis des siècles un invariant de l'exigence scolaire des sociétés européennes : nul ne doit entrer dans la vie sans être ou avoir été un tant soit peu « géomètre ».

1. Le mot de « géomètre » est employé ici en son sens ancien, qui prévalait encore au XVIII[e] siècle en France, où il avait le sens de *mathématicien*. Le *Webster's Revised Unabridged Dictionary*, encore dans son édition de 1913, définit ainsi le mot *geometer* : « One skilled in geometry; a geometrician; a mathematician. »

2. L'énoncé E_6 fait écho à la célèbre légende selon laquelle figurait, à l'entrée de l'Académie de Platon à Athènes, la phrase « Nul n'entre ici s'il n'est géomètre » ; ou plutôt, selon un commentateur actuel, Bernard Suzanne, ce que l'helléniste Robert Baccou restituait en ces termes (http://plato-dialogues.org/fr/faq/faq009.htm) : *mèdeis ageômetrètos eisitô mou tèn stegèn*, c'est-à-dire « Que personne n'entre sous mon toit s'il n'est géomètre ». Dans le cadre de cette présentation, il est utile de noter la remarque suivante, proposée par Bernard Suzanne, concernant la formulation de l'interdit platonicien :

> … il serait préférable de traduire l'inscription supposée par « *que pas un inapte à la géométrie n'entre* » plutôt que par « *que nul n'entre s'il n'est géomètre* ». L'avertissement ne vise pas tant ceux qui ne sont pas déjà géomètres confirmés que ceux qui n'ont pas, comme aurait dit Pascal, l'esprit de géométrie, ou du moins une aptitude à pratiquer la géométrie.

L'exigence posée n'aurait donc pas été d'être géomètre *avant* d'entrer mais d'être capable de *le devenir*.

b) Au niveau de la société, ce qui s'observe, hier comme aujourd'hui, est *un double phénomène* : d'une part, la formidable *résilience praxéologique* des mathématiques saisies dans leur développement ininterrompu ; d'autre part, l'*effroi culturel* devant les mathématiques. On peut à cet égard avancer les « hypothèses » suivantes, en anticipant quelque peu sur des développements à venir (à propos des formalismes en mathématiques) :

> **E_7.** Les mathématiques sont un auxiliaire obligé de nombre de champs praxéologiques et entrent donc *de facto*, de manière visible ou invisible (« cristallisée »), dans l'outillage d'un grand nombre d'activités sociales.
>
> **E_8.** Les mathématiques vivantes, reconnues notamment à l'usage qu'elles font de formalismes divers, suscitent crainte et rejet chez un grand nombre de gens « ordinaires ».

S'agissant de E_8, on peut reprendre le passage ci-après du célèbre essai *A Mathematician's Apology* (1940) de Godfrey H. Hardy (1877-1947), où l'illustre mathématicien anglais avance habilement, et non sans provocation

« culturelle », un paradoxe auquel on peut ne pas forcément adhérer (voir http://www.math.ualberta.ca/~mss/misc/A%20Mathematician%27s%20Apology.pdf) :

> The fact is that there are few more "popular" subjects than mathematics. Most people have some appreciation of mathematics, just as most people can enjoy a pleasant tune; and there are probably more people really interested in mathematics than in music. Appearances may suggest the contrary, but there are easy explanations. Music can be used to stimulate mass emotion, while mathematics cannot; and musical incapacity is recognized (no doubt rightly) as mildly discreditable, whereas most people are so frightened of the name of mathematics that they are ready, quite unaffectedly, to exaggerate their own mathematical stupidity. (p. 15)

c) Au niveau de la société, un phénomène crucial est celui indiqué par l'énoncé E_7 : le besoin de mathématiques de nombreux champs ou sous-champs praxéologiques existant dans la société. La « satisfaction » de ce besoin se réalise par une pluralité de stratégies possibles.

1. La première d'entre elles sans doute consiste simplement à désigner les mathématiques utiles à l'activité $\mathcal{A}$ comme étant les mathématiques *pour* $\mathcal{A}$. En nombre de cas, la spécificité des mathématiques en cause est faible. La table des matières de l'ouvrage *Basic Math for Social Scientists* (cité plus haut) comporte (voir l'annexe 1) ce qui se révèle – par comparaison – être le « menu » commun à un certain niveau de formation mathématique, sans grande spécificité apparente – bien qu'il puisse apparaître, aux « connaisseurs », plutôt orienté vers la science économique que vers la sociologie par exemple.

2. On notera que d'autres ouvrages, du type « Mathématiques pour… », présentent un corpus de mathématiques qui paraît davantage spécifique de l'activité à laquelle il est censé être approprié. Dans ce cas, un mot clé essentiel est celui d'*application*. Tel est le cas par exemple de l'ouvrage *Introductory Mathematics for Earth Scientists* de Xin-Che Yang (Dunedin Academic Press, 2009 ; http://www.amazon.fr/Introductory-Mathematics-Earth-Scientists-Xin-She/dp/1906716005#reader_1906716005), dont on trouvera la table des matières dans l'annexe 2. Tel est aussi le cas d'un ouvrage intitulé *Statistics for the Teacher* dû à Douglas M. McIntosh (Oxford, Pergamon Press, 2nd edition, 1967), dont voici *in extenso* la table des matières :

CONTENTS

I Measurement in education 1

II	Interpretation of Marks	5
III	Arranging Marks	8
IV	Average, or Mean	21
V	Scatter of Marks	36
VI	Comparison and Addition of Marks	49
VII	Percentiles	58
VIII	The Normal Curve	72
IX	Correlation	85
X	Difference Between Means	112
	APPENDICES	
I	Formula for Standard Deviation	120
II	Areas under the Normal Curve	122
III	Ordinates under the Normal Curve	123
IV	Tables of Squares and Square Roots of the Numbers from 1 to 200	124
	Answers	126

Ainsi qu'on le voit, les données sont ici des notes scolaires (*marks*), puisque c'est de cela qu'il s'agit : telle est l'unique « spécificité » visible à ce niveau de l'exposé proposé.

3. Désignant par $\mathcal{M}$ le champ des mathématiques et par $\mathcal{A}$ le champ d'activité où des mathématiques interviennent ou sont censées le faire, on parle de l'*amalgamation* de praxéologies mathématiques et de praxéologies de $\mathcal{A}$, processus dont le résultat – l'*amalgame* – peut être noté génériquement $\nabla(\mathcal{M} ; \mathcal{A})$, en utilisant le symbole *nabla*, ∇ (voir l'article homonyme de *Wikipedia*). Ce processus peut aboutir à diverses formes d'*exposition* ou, au contraire, de *dissimulation* des mathématiques. Une deuxième stratégie consiste ainsi à faire apparaître des éléments mathématiques présents dans $\nabla(\mathcal{M} ; \mathcal{A})$ comme appartenant plus proprement à $\mathcal{A}$, *alors même qu'il n'en est rien*. La table des matières de l'ouvrage *Introductory Mathematics for Earth Scientists* contient ainsi un chapitre intitulé « Geostatistics », qui semble bien être – au niveau de description que fournit la table des matières de l'ouvrage – un exposé de probabilités et de statistique presque « standard » :

13	**Geostatistics**		**179**
13.1	Random Variables		179
	13.1.1	Probability	179
	13.1.2	Mean and Variance	181
13.2	Sample Mean and Variance		183
13.3	Propagation of errors		184
13.4	Linear Regression		188
13.5	Correlation Coefficient		191

13.6 Brownian Motion 192

4. Une troisième stratégie, qui est un renforcement de la stratégie précédente, consiste tout bonnement en un « vol » de mathématiques, où des éléments de $\mathcal{M}$ sont présentés comme appartenant pleinement à $\mathcal{A}$! C'est ainsi que, dans l'ouvrage *Physics Essentials for Dummies* (Wiley, 2010), l'auteur, Stephen Holzner, résolvant un problème de calcul de distance à l'aide du théorème de Pythagore, n'hésite pas à conclure son développement en ces termes : « Another physics triumph! » (voir l'annexe 3 ; ce document a été commenté dans la séance 5 du séminaire TAD/IDD 2011-2012).

5. D'autres stratégies existent qui, toutes, tendent soit à dissimuler la nature mathématique des éléments amalgamés au champ $\mathcal{A}$, comme on vient de le voir, soit à *diminuer la charge mathématique* de l'exposé relatif à $\nabla(\mathcal{M} ; \mathcal{A})$. Nous en mentionnerons ici un seul exemple, qui concerne l'amalgame entre mathématiques et sciences humaines et sociales. Dans un ouvrage d'excellente facture intitulé *Seeing through Statistics* (Brooks/Cole, 3rd edition 2005), l'auteure, Jessica M. Utts, utilise la très ancienne distinction entre « formulation en mots », sous la forme de *règles*, et emploi de symboles mathématiques pour écrire des *formules*. Bien que nous l'ayons déjà examiné dans la séance 2 du Séminaire TAD/IDD 2011-2012, nous reprenons le passage où l'auteure précise à son lecteur le mode de calcul de l'*écart-type* (2e éd., 1999) :

Computing the Standard Deviation

Here are the steps necessary to compute the standard deviation:

1. Find the mean.
2. Find the deviation of each value from the mean = value − mean.
3. Square the deviations.
4. Sum the squared deviations.
5. Divide the sum by #Values (the number of values) −1, resulting in the variance.
6. Take the square root of the variance. The result is the standard deviation.

Let's try this for the set of values 90, 90, 100, 110, 110.

1. The mean is 100.
2. The deviations are −10, −10, 0, 10, 10.
3. The squared deviations are 100, 100, 0, 100, 100.
4. The sum of the squared deviations is 400.
5. The #Values −1 = 5 −1 = 4, so the variance is 400/4 = 100.
6. The standard deviation is the square root of 100, or 10.

> Although it may seem more logical in step 5 to divide by the number of values, rather than by the number of values minus 1, there is a technical reason for subtracting 1. The reason is beyond the level of this discussion but concerns statistical bias, as discussed in Chapter 3. (2e éd., p. 121)

La remarque sur l'étape 5 (le fait de diviser par $n - 1$, où n est le nombre de valeurs, au lieu de diviser par n) laisse apparaître qu'il existerait un savoir statistique *plus avancé*, auquel le lecteur de l'ouvrage *ne sera pas initié*. Cela noté, l'auteure introduit aussi en certains chapitres, on le sait, une section intitulée *For those who like formulas*, ce qui souligne une fois encore que les mathématiques seraient quelque chose qu'on « aime » ou qu'on aime *moins*, voire qui insupporte, mais dont, *in fine*, on n'aurait pas fondamentalement besoin, même si les « amateurs » de formules peuvent trouver plaisir à les manipuler, ainsi que le leur permet ce « supplément » offert par l'auteure :

> **For those Who Like Formulas**
>
> **The Data**
>
> n = number of observations
>
> x_i = the *ith* observation, $I = 1, 2, \ldots, n$
>
> **The Mean**
>
> $$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
>
> **The Variance**
>
> $$s^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$
>
> **The Computational Formula for the Variance** (easier to compute directly with a calculator)
>
> $$s^2 = \frac{1}{(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n}\right)$$
>
> **The Standard Deviation**
>
> Use either formula to find s^2, then take the square root to get the standard deviation s. (3rd ed., pp. 140-141)

d) L'importance des mathématiques dans le fonctionnement des sociétés contemporaines va croissant : c'est un aspect de ce qu'on a nommé plus haut leur *résilience praxéologique*. Nous citerons ici le cas d'un livre récent, intitulé *Les mathématiques du vivant ou la clef des mystères de l'existence*, dû au mathématicien Ian Stewart (Flammarion, 2011), qui écrit d'abord :

> Après avoir longtemps été inséparable de l'observation des plantes et des animaux, la biologie a connu cinq grandes révolutions qui, toutes, ont bouleversé notre conception du vivant.
>
> Une sixième est en marche.
>
> Voici les cinq premières : invention du microscope, classification systématique des êtres vivants, théorie de l'évolution, découverte du gène et découverte de la structure de l'ADN. Passons-les rapidement en revue avant de nous arrêter sur la dernière, qui demandera sans doute plus d'explications. (p. 11)

Quelle est donc cette sixième révolution de la biologie ? Voici la réponse qu'apporte l'auteur :

> Voici donc exposées mes cinq révolutions.
>
> Compte tenu du temps qu'il a fallu pour apprécier ces découvertes à leur juste valeur (notamment celle de Mendel), un demi-siècle grosso modo s'est écoulé entre chacune d'entre elles ; pour la troisième, il a même fallu patienter une centaine d'années. La cinquième s'est produite il y a tout juste cinquante ans. Sachant que le monde évolue toujours plus rapidement, la sixième révolution en biologie ne devrait plus tarder. Je pense en réalité qu'elle s'est déjà produite. La vie n'est pas seulement une question de biochimie. De nombreuses autres disciplines scientifiques participent à son explication. Ce qui les unit toutes et dégage de nouveaux horizons ? La sixième révolution : les mathématiques. (p 19)

Après avoir conquis la physique, les mathématiques seraient maintenant sur le seuil de conquérir la biologie : *de nouveaux amalgames mathématisés se forment ainsi constamment*. Tout cela mériterait bien sûr de longs développements, dans lesquels on n'entrera pas ici.

e) Dans le même temps, ce que j'ai appelé la *péjoration culturelle* des mathématiques continue de faire des ravages au sein de la société française. On peut citer à l'appui de ce constat le dossier réuni par Vincent Jullien, professeur d'histoire et de philosophie des sciences à l'université de Bretagne occidentale, dans le chapitre 2, intitulé « Le rejet des sciences », de son livre *Sciences agents doubles* (Stock, 2002) : on le trouvera dans le *Journal* de la séance 5 du Séminaire TAD/IDD 2011-2012.

f) À l'aversion « littéraire » pour la science et en particulier pour les mathématiques répond très classiquement, en miroir, une arrogance opposée de la part des mathématiciens et des scientifiques « durs ». Un cas « récent » est celui du conflit survenu entre le mathématicien américain

d'origine française Serge Lang (1925-2005) et le politologue américain Samuel P. Huntington (1927-2008), conflit que l'article « Hard and soft science » de *Wikipedia* rapporte dans les termes suivants :

> In the 1980s mathematician Serge Lang's successfully blocked influential political scientist Samuel P. Huntington's admission to the US National Academy of Sciences on the allegation that his use of mathematics to quantify the relationship between factors such as "social frustration" (Lang asked Huntington if he possessed a "social-frustration meter") rendered his work "pseudoscience". During the late 2000s recessions, social science was disproportionately targeted for funding cuts compared to mathematics and natural science, and proposals were made for the United States' National Science Foundation to cease funding disciplines such as political science altogether. Both of these incidents prompted complaints about the distinction between hard and soft sciences.

On rencontre ici une attitude qui n'est pas rarissime chez la gent mathématicienne : elle consiste à louer les mathématiques prises en soi et pour soi, mais à mettre en garde avec la dernière rigueur contre le commerce que pourraient avoir avec elles les non-mathématiciens. Les mathématiques seraient donc un objet excellentissime entre les mains d'initiés, mais un objet des plus suspects quand il tombe entre les griffes de non-initiés. (On retrouvera cette tentation de confinement dans le petit livre de Marc Delepouve, *Une société intoxiquée par les chiffres*, paru en 2011 chez L'Harmattan.) Cela souligné, l'article de *Wikipedia* consacré à Serge Lang en dit plus long sur le comportement récurrent de ce mathématicien à l'endroit des spécialistes des sciences « molles » :

> Lang engaged in several efforts to challenge anyone he believed was spreading misinformation or misusing science or mathematics to further their own goals. He attacked the 1977 Survey of the American Professoriate, an opinion questionnaire that Seymour Martin Lipset and E. C. Ladd had sent to thousands of college professors in the United States, accusing it of containing numerous biased and loaded questions. This led to a public and highly acrimonious conflict.
>
> In 1986, Lang mounted what the *New York Times* described as a "one-man challenge" against the nomination of political scientist Samuel P. Huntington to the National Academy of Sciences.[2] Lang described Huntington's research, in particular his use of mathematical equations to demonstrate that South Africa was a "satisfied society", as "pseudoscience", arguing that it gave "the illusion of science without any of its substance." Despite support for Huntington from the Academy's social and behavioral scientists, Lang's challenge was successful, and Huntington was twice rejected for Academy

membership. Huntington's supporters argued that Lang's opposition was political rather than scientific in nature.
Lang kept his political correspondence and related documentation in extensive "files". He would send letters or publish articles, wait for responses, engage the writers in further correspondence, collect all these writings together and point out what he considered contradictions. He often mailed these files to people he considered important; some of them were also published in his books *Challenges* (ISBN 0-387-94861-9) and *The File* (ISBN 0-387-90607-X). His extensive file criticizing Nobel laureate David Baltimore was published in the journal *Ethics and Behaviour* in January 1993. Lang fought the decision by Yale University to hire Daniel Kevles, a historian of science, because Lang disagreed with Kevles' analysis in *The Baltimore Case*.
Lang's most controversial political stance was as an AIDS denialist; he maintained that the prevailing scientific consensus that HIV causes AIDS has not been backed up by reliable scientific research, yet for political/commercial reasons further research questioning the current point of view is suppressed. In public he was very outspoken about this point and a portion of *Challenges* is devoted to this issue.

L'affaire du VIH montre que les conflits « automatiques » entre sciences dures et sciences molles peuvent être irréparablement contre-productifs. Jared Diamond, qui s'est rendu célèbre par des livres tels *Guns, Germs, and Steel* (1997) ou *Collapse* (2005), a rendu public en août 1987 un texte qu'il a intitulé *Soft sciences are often harder than hard sciences*, que le lecteur intéressé pourra consulter (http://bama.ua.edu/~sprentic/607%20Diamond%201987.htm). On condense ce qui précède dans les énoncés suivants :

E₉. L'emploi des mathématiques dans une activité $\mathcal{A}$ gagne à être discret, à ne pas se faire remarquer, pour ne pas risquer d'être critiqué, voire vilipendé.

E₁₀. L'effort de dissimulation de l'emploi des mathématiques dans une activité $\mathcal{A}$, qui peut dénaturer cet emploi, voire conduire à sa disparition quasi complète, peut dans tous les cas mettre en danger la qualité des services que les mathématiques sont censées rendre à cette activité.

Nous allons voir maintenant que le niveau suivant – celui de l'*école* – est fortement tributaire du niveau de la société.

5. Le niveau de l'école

a) Dans l'échelle de codétermination didactique, le niveau de l'école désigne implicitement tous les types et tous les « niveaux » d'école. Nous considérons dans ce qui suit, selon le cas, l'école primaire, l'école secondaire (le collège et le lycée français, la *junior high school* et la *senior high school* états-uniennes

notamment) ainsi que l'université (le *college* états-unien en particulier). L'ambiguïté des rapports culturels aux mathématiques, qui produit aussi bien une péjoration latente ou, parfois, manifeste des mathématiques, et, de façon réactionnelle, des discours apologétiques à la fois enflammés et teintés de ressentiment, semble être une condition clé de la diffusion ou de la non-diffusion des mathématiques dans l'école primaire et secondaire, phénomène à propos duquel nous ne ferons ici que quelques remarques.

1. Il s'agit là d'un aspect qui n'importe, dans le travail doctoral évoqué ici, que par ses effets sur les étudiants (et leurs enseignants) qui poursuivent à l'université des études de sciences humaines et sociales et en particulier de sciences de l'éducation, puisque, ainsi qu'on l'a signalé, l'injonction platonicienne de faire de l'étude des mathématiques la base et le fondement des études avancées continue d'être observée dans le cadre des classes préparatoires *scientifiques* aux grandes écoles françaises. Par contraste, les étudiants arrivant à l'université en sciences humaines et sociales, en-dehors des études d'économie, et en particulier les étudiants qui choisiront de poursuivre leurs études en sciences de l'éducation, sont généralement « peu mathématiciens », sinon « anti-mathématiciens ». On ne rappellera que pour mémoire, ici, les évaluations à 15 ans des élèves français réalisées dans le cadre du *Programme for International Student Assessment* (PISA) : en mathématiques, les élèves français ont perdu 14 points en moyenne entre 2003 et 2009, ce qui constitue une baisse significative (voir Georges Felouzis et Samuel Charmillot, *Les enquêtes PISA*, Paris, PUF, pp. 102-103). En 2009, la France se classait au 23^{e} rang des pays concernés par cette enquête, les États-Unis se classant au 30^{e} rang et la Corée du sud au 4^{e} (voir l'article « Programme PISA » de *Wikipédia*).

2. Là n'est pas, cependant, le phénomène clé du point de vue qui est le nôtre ici. Ce qui importe davantage, dans le cas français au moins, est ce fait qu'une partie sans doute majoritaire de la population scolaire *s'attend à ne pas avoir à continuer l'étude de matières qui, du point de vue des étudiants concernés, ne relèveraient pas de la filière d'études qu'ils ont choisie après le diplôme du baccalauréat*. Ce sera en particulier le cas des mathématiques (en général) pour les étudiants de SHS et, notamment, de sciences de l'éducation. Nous rappellerons ici un exemple typique, présenté dans la séance 7 du Séminaire TAD/IDD 2010-2011, celui des masters « Sciences de l'environnement, du territoire et de l'économie » de l'université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, dont le responsable, Jean-Paul Vanderlinden, commentant l'attitude des étudiants à l'endroit de l'une des matières dont l'étude leur est imposée, déclarait ceci :

Certains étudiants ne voient pas l'intérêt et se plaignent dès le premier cours : « M'sieur, l'épistémologie et l'histoire, ça ne nous intéresse pas ; nous ne devions plus faire de philo après le bac. Pour travailler dans la physique du climat, la philosophie ne nous servira à rien. » On essaie de les convaincre : « Vous ne pourrez pas travailler sans vous demander d'où vient la science, où elle va ; l'histoire a façonné notre perception du monde ; la philosophie est fondamentale, maîtriser les concepts, c'est maîtriser notre existence. »

Tout cela conduit à un nouvel énoncé :

E$_{11}$. Dès lors qu'un élève x a obtenu le baccalauréat, ses livres ordinaires $L(x\,;\,\mathcal{C})$ de différentes matières $\mathcal{C}$ étudiées jusque-là se trouvent souvent vidés de l'essentiel du contenu que l'éducation scolaire y avait progressivement inscrit, du fait notamment que le futur étudiant x anticipe et, souvent, espère, n'avoir plus désormais à cultiver les matières $\mathcal{C}$.

3. Notons, cependant, que cette « loi » ne vaut pas sans restriction, en principe, pour les étudiants désireux de s'orienter vers le professorat des écoles, dont nous parlerons plus loin. Ce qui est peut-être plus important, ici, c'est la *mauvaise image des mathématiques*, et en particulier de la *statistique*, chez ce type d'étudiants. Dans un article intitulé « Enquêter avec Internet. Études pour une didactique de l'enquête » paru en 2011 dans la revue *Éducation & didactique* (*5*(2), 85-116), où est utilisée la technique du différentiateur sémantique, Caroline Ladage et moi-même écrivons ceci, à propos d'un certain choix de mots évalués, sur un ensemble d'échelles bipolaires, par des étudiants en sciences de l'éducation :

Le mot qui a la meilleure image est « éducation » : il obtient 92 % du maximum sur deux échelles : superficiel/profond et peu utile/utile ; mais il obtient encore 90 % du maximum sur l'échelle passif/actif. Son portrait : *très profond*, *très utile*, *très actif*, mais *difficile* aussi (82 %), *chaud* (80 %), de loin le plus *beau* de tous les mots proposés (78 %), loin devant ses suivants (dont le score est inférieur ou égal à 60 % du maximum), et aussi *le plus concret* (avec « Internet »), et le *moins irritant*. Seule ombre au tableau : il n'est que moyennement *fiable* et moyennement *organisé*. Pour « université », le tableau est plus contrasté : nous laisserons le lecteur en examiner le profil par lui-même.

Les mots « statistique » et « Internet » n'appartiennent pas, à l'évidence, à la même famille que « éducation » et « université ». Ce sont, grosso modo, d'assez « mauvais objets » : ainsi sont-ils respectivement *dernier* et *avant-dernier* sur les échelles superficiel/profond, peu fiable/fiable, passif/actif, facile/difficile : *superficiels*, *peu fiables*, *passifs*, et, coup de pied de l'âne, *faciles !* Le portrait n'est pas flatteur. Bien entendu, l'un et l'autre sont *utiles*.

> Ils ne se séparent guère non plus sur l'échelle laid/beau : s'ils se positionnent entre les deux extrêmes, ils sont toutefois nettement moins beaux que « éducation ». Cela dit, « Internet » l'emporte sur « statistique » sur l'échelle froid/chaud (« statistique » est sensiblement *plus froid*), sur l'échelle irritant/apaisant (c'est « statistique » qui irrite le plus), sur l'échelle abstrait/concret (« Internet » est le plus concret des mots proposés). Une seule inversion, qui n'est véritablement à l'avantage d'aucun des deux mots : « statistique » est très *organisé* (son score est de 83 %), « Internet » l'est beaucoup moins (60 %). Si le meilleur des mots est « éducation », le pire est donc « statistique ». (pp. 95-96)

On pourrait montrer plus généralement ceci :

> **E_{12}**. Les étudiants en sciences humaines et sociales et en particulier en sciences l'éducation ont en règle générale une image négative des mathématiques en général et de la statistique en particulier.

b) L'un des ensembles de conditions regardés comme déterminants pour la diffusion scolaire des connaissances mathématiques est tout simplement le *corpus mathématique à étudier*. Il existe aux États-Unis depuis plusieurs années un débat public autour de cette question.

1. Dans son numéro du 24 août 2011, le *New York Times* publiait ainsi, dans ses « Opinion pages », un article intitulé *How to Fix Our Math Education*, signé de deux mathématiciens, dont l'un, David Mumford (né en 1937), a reçu la médaille Fields en 1974 et a été, entre autres choses, président de l'IPA (*International Mathematical Union*) de 1995 à 1999. Quant au second auteur, Solomon Garfunkel, la notice que lui consacre *Wikipedia* indique que « Solomon "Sol" Garfunkel PhD born 1943, in Brooklyn, New York, is an American mathematician who has dedicated his career to mathematics education. » On trouvera leur article dans l'annexe 4 ci-après ou à l'adresse http://www.nytimes.com/2011/08/25/opinion/how-to-fix-our-math-education.html?_r=0. Leur proposition d'un curriculum mathématique rénové tient pour l'essentiel dans les lignes suivantes :

> A math curriculum that focused on real-life problems would still expose students to the abstract tools of mathematics, especially the manipulation of unknown quantities. But there is a world of difference between teaching "pure" math, with no context, and teaching relevant problems that will lead students to appreciate how a mathematical formula models and clarifies real-world situations. The former is how algebra courses currently proceed — introducing the mysterious variable x, which many students struggle to understand. By contrast, a contextual approach, in the style of all working scientists, would

introduce formulas using abbreviations for simple quantities — for instance, Einstein's famous equation $E = mc^2$, where E stands for energy, m for mass and c for the speed of light.

Imagine replacing the sequence of algebra, geometry and calculus with a sequence of finance, data and basic engineering. In the finance course, students would learn the exponential function, use formulas in spreadsheets and study the budgets of people, companies and governments. In the data course, students would gather their own data sets and learn how, in fields as diverse as sports and medicine, larger samples give better estimates of averages. In the basic engineering course, students would learn the workings of engines, sound waves, TV signals and computers. Science and math were originally discovered together, and they are best learned together now.

2. Un autre article a été publié dans le *New York Times (Sunday Review)* presque un an plus tard, le 28 juillet 2012, par un auteur, Andrew Hacker, qui n'est pas un mathématicien mais un spécialiste de science politique, et cela sous un titre provocateur : *Is Algebra Necessary?* Nous en avons déjà parlé lors de la séance 1 de ce séminaire, mais il n'est pas inutile d'y revenir ici. (Le lecteur en trouvera le texte dans l'annexe 5 ci-après ; voir aussi à l'adresse suivante : http://www.nytimes.com/2012/07/29/opinion/sunday/is-algebra-necessary.html?_r=4&smid=fb-share&pagewanted=all&.) L'auteur a coécrit (avec Claudia Dreifus) un livre intitulé *Higher Education? How Colleges Are Wasting Our Money and Failing Our Kids—and What We Can Do About It*. Dans son article, il souligne en particulier que l'effort en mathématiques traditionnellement demandé, au secondaire comme à l'université, à *tous* les étudiants, a des effets dévastateurs :

The toll mathematics takes begins early. To our nation's shame, one in four ninth graders fail to finish high school. In South Carolina, 34 percent fell away in 2008-9, according to national data released last year; for Nevada, it was 45 percent. Most of the educators I've talked with cite algebra as the major academic reason.

Shirley Bagwell, a longtime Tennessee teacher, warns that "to expect all students to master algebra will cause more students to drop out." For those who stay in school, there are often "exit exams," almost all of which contain an algebra component. In Oklahoma, 33 percent failed to pass last year, as did 35 percent in West Virginia.

Algebra is an onerous stumbling block for all kinds of students: disadvantaged and affluent, black and white. In New Mexico, 43 percent of white students fell below "proficient," along with 39 percent in Tennessee. Even well-endowed schools have otherwise talented students who are impeded by algebra, to say nothing of calculus and trigonometry.

> California's two university systems, for instance, consider applications only from students who have taken three years of mathematics and in that way exclude many applicants who might excel in fields like art or history. Community college students face an equally prohibitive mathematics wall. A study of two-year schools found that fewer than a quarter of their entrants passed the algebra classes they were required to take.
> "There are students taking these courses three, four, five times," says Barbara Bonham of Appalachian State University. While some ultimately pass, she adds, "many drop out."
> Another dropout statistic should cause equal chagrin. Of all who embark on higher education, only 58 percent end up with bachelor's degrees. The main impediment to graduation: freshman math. The City University of New York, where I have taught since 1971, found that 57 percent of its students didn't pass its mandated algebra course. The depressing conclusion of a faculty report: "failing math at all levels affects retention more than any other academic factor." A national sample of transcripts found mathematics had twice as many F's and D's compared as other subjects.
> Nor will just passing grades suffice. Many colleges seek to raise their status by setting a high mathematics bar. Hence, they look for 700 on the math section of the SAT, a height attained in 2009 by only 9 percent of men and 4 percent of women. And it's not just Ivy League colleges that do this: at schools like Vanderbilt, Rice and Washington University in St. Louis, applicants had best be legacies or athletes if they have scored less than 700 on their math SATs.
> It's true that students in Finland, South Korea and Canada score better on mathematics tests. But it's their perseverance, not their classroom algebra, that fits them for demanding jobs.

Hacker avance un argument de poids : l'inadéquation des mathématiques traditionnellement enseignées aux besoins mathématiques des divers métiers et souligne que c'est *autrement* qu'une telle adéquation doit se construire :

> Nor is it clear that the math we learn in the classroom has any relation to the quantitative reasoning we need on the job. John P. Smith III, an educational psychologist at Michigan State University who has studied math education, has found that "mathematical reasoning in workplaces differs markedly from the algorithms taught in school." Even in jobs that rely on so-called STEM credentials — science, technology, engineering, math — considerable training occurs after hiring, including the kinds of computations that will be required. Toyota, for example, recently chose to locate a plant in a remote Mississippi county, even though its schools are far from stellar. It works with a nearby community college, which has tailored classes in "machine tool mathematics."

> That sort of collaboration has long undergirded German apprenticeship programs. I fully concur that high-tech knowledge is needed to sustain an advanced industrial economy. But we're deluding ourselves if we believe the solution is largely academic.

Que devrait être le curriculum nouveau que Hacker a en tête ? Voici sa réponse en quelques lignes :

> Quantitative literacy clearly is useful in weighing all manner of public policies, from the Affordable Care Act, to the costs and benefits of environmental regulation, to the impact of climate change. Being able to detect and identify ideology at work behind the numbers is of obvious use. Ours is fast becoming a statistical age, which raises the bar for informed citizenship. What is needed is not textbook formulas but greater understanding of where various numbers come from, and what they actually convey.
>
> .....
>
> Instead of investing so much of our academic energy in a subject that blocks further attainment for much of our population, I propose that we start thinking about alternatives. Thus mathematics teachers at every level could create exciting courses in what I call "citizen statistics." This would not be a backdoor version of algebra, as in the Advanced Placement syllabus. Nor would it focus on equations used by scholars when they write for one another. Instead, it would familiarize students with the kinds of numbers that describe and delineate our personal and public lives.
>
> It could, for example, teach students how the Consumer price Index is computed, what is included and how each item in the index is weighted — and include discussion about which items should be included and what weights they should be given.
>
> This need not involve dumbing down. Researching the reliability of numbers can be as demanding as geometry. More and more colleges are requiring courses in "quantitative reasoning." In fact, we should be starting that in kindergarten.

Andrew Tucker conclut enfin en ces termes :

> Yes, young people should learn to read and write and do long division, whether they want to or not. But there is no reason to force them to grasp vectorial angles and discontinuous functions. Think of math as a huge boulder we make everyone pull, without assessing what all this pain achieves. So why require it, without alternatives or exceptions? Thus far I haven't found a compelling answer.

3. Ajoutons à cela un autre aspect des efforts envisagés pour améliorer la réception des mathématiques par la masse des élèves et étudiants, aspect présent de fait tant dans l'article de Mumford et Garfunkel que dans celui de Hacker : le fait de passer à un enseignement *intégré* des mathématiques, qui est la façon traditionnelle de procéder en France et dans beaucoup d'autres pays. L'expression clé est ici celle de « mathématiques intégrées », comme l'indique l'article homonyme de *Wikipedia* (où l'expression *eighth grade* renvoie aux élèves de 13-14 ans, soit la fin du collège en France) :

> **Integrated mathematics** is the term used in the United States to describe the style of mathematics education which integrates many topics or strands of mathematics throughout each year of secondary school. Each math course in secondary school covers topics in algebra, geometry, trigonometry and analysis. Nearly all countries throughout the world, except the United States, follow this type of curriculum.
> In the United States, topics are usually integrated throughout elementary school up to the eighth grade. Beginning with high school level courses, topics are usually separated so that one year a student focuses entirely on algebra, the next year entirely on geometry, and then another year of algebra and later an optional fifth year of analysis (calculus). The one exception in the American high school curriculum would be the fourth year of math, typically referred to as precalculus, which usually integrates algebra, analysis, trigonometry, and geometry topics. Statistics may be integrated into all the courses or presented as a separate course.

4. Nous donnerons maintenant un exemple qui est en fait un *contre-exemple* à un cas classique de *dénégation* de la présence de mathématiques dans l'amalgame $\nabla(\mathfrak{M} ; \mathfrak{H})$, où $\mathfrak{H}$ désigne en l'espèce la musique, domaine à propos duquel on entend parfois, aujourd'hui, que le terme de *fraction* qui y est employé ne désigne pas une fraction au sens mathématique du terme, voire que le Pythagore de la « gamme pythagoricienne » n'a rien à voir avec le Pythagore des mathématiciens… Rappelons que, durant des siècles, la musique fit partie du *quadrivium*, comme le rappelle l'article homonyme de *Wikipedia* :

> The **quadrivium** (rarely: quadrivia) comprised the four subjects, or arts, taught in the Renaissance Period, after teaching the trivium. The word is Latin, meaning "the four ways" (or a "place where four roads meet"), and its use for the 4 subjects has been attributed to Boethius or Cassiodorus in the 6th century. Together, the trivium and the quadrivium comprised the seven liberal arts (based on thinking skills), as opposed to the practical arts (such as medicine and architecture).

> The quadrivium consisted of arithmetic, geometry, music, and astronomy. These followed the preparatory work of the trivium made up of grammar, logic, and rhetoric. In turn, the quadrivium was considered preparatory work for the serious study of philosophy (sometimes called the "liberal art *par excellence*") and theology. The word "trivia" has been rarely used to refer to the trivium.

Voici maintenant un bref exposé propositif figurant sur le site d'une organisation caritative britannique, le *CfBT Education Trust* (CfBT signifie « Centre for British Teachers »), que le lecteur intéressé retrouvera à l'adresse http://www.cfbt.com/lincs/pdf/qca-06-2361_opportunities_to_embed_mathematics_in_music.pdf :

> In mathematics children learn the vocabulary associated with the passing of time and the relationships between units of time. This can support them when they are studying music.
> Children often use mathematical skills when they analyse and interpret music forms. In addition, understanding mathematical concepts and properties can help children explore and develop ideas in their music making.
> In common with mathematics, a language of formulae and symbols is used in music, for example to transcribe sounds and describe pitch and duration. In some cases, there is an element of crossover into mathematical language. For example, music notation uses simple fractions, such as three-quarters and six-eighths, while all notes are simple fractions of the 'whole'.
> Developments in musical understanding can provide alternative ways for children to learn mathematical concepts. Meanwhile, learning composition skills can develop children's confidence in communicating this understanding.
> These experiences can inform and enhance children's learning in music and mathematics.

L'idée est ici de greffer – plus ou moins subrepticement – l'étude des mathématiques, matière rebutante pour beaucoup, sur l'étude de la musique, matière réputée attirante pour beaucoup aussi. Bien que l'on puisse penser qu'il s'agit là de conceptions didactiques bien naïves, le *principe* de l'intégration par la greffe, qui peut être mis en œuvre à des degrés divers d'amalgamation, mérite d'être gardé en mémoire. L'ensemble précédent donne lieu à deux nouveaux énoncés théoriques :

> **E$_{13}$**. Le contenu de l'éducation mathématique scolaire du citoyen ordinaire (qui n'est pas ou qui ne se destine pas à devenir un mathématicien professionnel) est aujourd'hui vivement débattu notamment aux États-Unis : au curriculum traditionnel (arithmétique, algèbre, géométrie, analyse, etc.), on oppose un curriculum rénové, donnant lieu à l'étude fortement intégrée des méthodes quantitatives utiles en divers domaines d'activité (finance, statistique et analyse de données, etc.).

E14. La formation mathématique utile dans un domaine d'activité $\mathcal{Q}$ a été longtemps conçue comme *préalable* à l'entrée dans ce domaine d'activité. L'observation semble montrer aujourd'hui que cette formation préliminaire ne peut être que partielle, lacunaire par rapport aux besoins réels des praticiens, et doit donc être complétée en relation étroite avec la pratique de l'activité $\mathcal{Q}$.

c) Si, comme on l'a dit plus haut, les étudiants en SHS abordent leurs études supérieures dans une perspective qui tend à leur faire oublier, voire à leur faire ostraciser les sciences de la nature et les mathématiques (y compris la statistique), une autre condition doit être mise en avant, dont l'importance ne saurait être exagérée : il s'agit de la *pénurie relative de l'offre praxéologique*, dont nous parlerons maintenant.

6. Le niveau de la pédagogie

a) En se référant métaphoriquement à l'étymologie du mot, la TAD définit une *pédagogie* comme étant le système des conditions qui gouvernent la manière dont l'étudiant x est conduit, presque physiquement, jusqu'à l'enjeu didactique ♥ qu'il doit étudier.

1. La disponibilité pour x d'un livre de statistique pour les SHS, tel par exemple l'ouvrage *Statistics for the Social Sciences* de R. Mark Sirkin (Sage, 3rd ed., 2006) (voir http://www.amazon.com/Statistics-Social-Sciences-Mark-Sirkin/dp/141290546X#reader_141290546X), constitue une telle condition. De même, l'obligation pour x de suivre et d'obtenir une unité d'enseignement du type « Statistique pour les sciences de l'éducation », telle celle assumée par Éric Roditi à l'université Paris-Descartes (dont nous reproduisons ci-après la présentation : voir http://eroditi.free.fr/sitewp/?page_id=2331), constitue une condition importante de l'économie et de l'écologie des connaissances statistiques, susceptibles de « recharger » ou de compléter le « livre de statistique » $L(x\,;\,\mathbb{S})$ de l'étudiant x.

Statistiques descriptives et inférentielles

pour les sciences de l'éducation

Page de téléchargement des documents

Actualités

Les séances de cet enseignement auront lieu le mercredi de 15h30 à 17h00 en J202.

L'évaluation se déroulera le mercredi 24 avril de 15h30 à 17h.

Objectifs et modalités pédagogiques

Objectifs : Apprendre à lire, de manière critique, des documents comportant des statistiques, des tableaux et des graphiques : études, ouvrages ou articles

de recherche en sciences de l'éducation. Comprendre les enjeux des tests statistiques pour apprécier la significativité de comparaisons de données.

Modalités pédagogiques : Étude d'écrits comportant des tableaux, des graphiques et des analyses statistiques. Apports théoriques classiques de statistique descriptive et inférentielle. Aucune connaissance mathématique n'est requise pour cet enseignement. Documents, notes de cours et exemples sur tableur seront mis en ligne à disposition des étudiants. Possibilité de suivre l'enseignement à distance en prévenant l'enseignant.

Plan du cours

I. Statistiques descriptives

A. Généralités : variable et distribution statistique

B. Caractéristiques de position d'une variable statistique

C. Caractéristiques de dispersion d'une variable statistique

D. Corrélation de deux variables

II. Statistiques inférentielles

A. Introduction à l'inférence statistique

B. Comparaison de deux pourcentages

C. Comparaison de deux moyennes

Validation

Examen terminal

2. En ce qui concerne les sciences humaines et sociales et la statistique, il existe, en français, un nombre raisonnable d'ouvrages plus ou moins spécialisés parmi lesquels on peut citer – de façon un peu arbitraire, certes – le livre *Statistique en psychologie* de Nathalie Rude et Olivier Retel (In Press, 2000) ou encore l'ouvrage intitulé *L'analyse de données en psychologie* de Denis Corroyer et Marion Wolff (Armand Colin, 2003), sans oublier le livre plus récent de Luc-Olivier Pochon, *Raisonnements dans l'analyse de données expérimentales en sciences de l'éducation* (L'Harmattan, 2012). Mais cela paraît insuffisant pour combattre la *pénurie mathématique* dont souffre aujourd'hui le secteur des études en sciences humaines et sociales.

b) Nous prendrons (ou reprendrons) à cet égard deux exemples qui suggèrent qu'il s'est produit en France, en l'espace de quelques décennies, une perte d'ambition et, en conséquence, de « culture » mathématico-statistique en sciences humaines et sociales.

1. Le premier exemple a été présenté dans la séance 3 de ce séminaire : il est relatif à l'ouvrage en deux volumes intitulé *Mathématiques des sciences humaines* de Marc Barbut (1928-2011), dont le premier volume était intitulé « Combinatoire et Algèbre » (1967) et le second « Nombres et mesures »

(1968). On se reportera à cette présentation. Soulignons que, préfaçant le premier volume de ce cours, le psychologue Paul Fraisse disait y voir « un essai pour mettre à la disposition des étudiants *les connaissances indispensables* » (c'est moi qui souligne).

2. Notre deuxième exemple renvoie à une étude présentée lors de la séance du 3 juillet 2012 du Séminaire TAD/IDD. On y montre comment, dans un ouvrage intitulé *Introduction empirique à la statistique. Statlab*, signé de J. L. Hodges, David Krech et Richard S. Crutchfield (le premier est statisticien, les deux autres psychologues), paru en 1979 dans une traduction de Maurice Desplas (1937-2012), alors professeur à l'université Paris 10, les auteurs, traitant dans l'Unité 22 de leur livre du test du χ^2, entreprennent d'expliquer de façon détaillée à leurs lecteurs, *qui sont donc censés pouvoir suivre leurs explications*, les raisons sous-tendant la considération de l'expression mathématique notée usuellement χ^2, un fait dont l'explication ne se rencontre à peu près plus aujourd'hui (ainsi qu'il en va aussi s'agissant de l'expression « degrés de liberté » par exemple).

4. On doit ajouter ici un fait peu niable : depuis 1979, une révolution s'est produite : celle de l'*informatique* et des *logiciels de calcul* de toutes natures, dont beaucoup sont gratuits et en ligne. Dans un ouvrage tout récent intitulé *Statistique pour les infirmières* (Maloine, 2013), les auteurs, Thierry Ancelle et Monique Rothan-Tondeur, tous deux professeurs à l'École des hautes études en santé publique, le premier praticien hospitalier et maître de conférences à la faculté de médecine de l'université Paris-Descartes, la seconde titulaire de la chaire de recherche infirmière AP-HP/EHESP et responsable de « l'équipe émergente de recherche infirmière », écrivent ainsi dans leur introduction :

> Cet ouvrage est écrit pour les infirmières et, plus largement, pour tous les personnels de santé qui sont impliqués dans des travaux d'analyse de données médicales ou qui collaborent à des activités de recherche dans le domaine des soins ou de la santé publique.
> La statistique s'est répandue dans tous les champs de la recherche en santé et aucun travail sérieux portant sur des séries d'individus ne peut être envisagé aujourd'hui sans analyse statistique venant appuyer les résultats. Cette exigence s'applique aussi bien à la recherche médicale fondamentale et clinique qu'aux soins infirmiers, aux techniques paramédicales, aux recherches en psychologie, en éducation pour la santé, etc.
> Ainsi, de très nombreux utilisateurs potentiels, dépassant largement le cadre traditionnel des chercheurs médecins ou biologistes, demandent à bénéficier d'une initiation aux techniques statistiques dans le but de les appliquer à leurs propres travaux, de collaborer efficacement avec des équipes pluridisciplinaires, de présenter leurs résultats dans des colloques et enfin de

comprendre les publications scientifiques qu'ils devront lire.
Certes, il existe déjà de nombreux ouvrages de statistiques. Beaucoup abordent le sujet sous forme théorique et utilisent le formalisme propre à cette discipline. Ce formalisme austère est indispensable aux spécialistes de la recherche en statistique. C'est le langage de cette discipline. Mais il n'est pas indispensable à la pratique. Depuis la révolution engendrée par l'avènement des micro-ordinateurs, l'élaboration de très nombreux logiciels a considérablement simplifié les calculs statistiques qui représentaient l'obstacle principal à la généralisation de cette pratique par des non-spécialistes.
Malgré la suppression de cette difficulté, il reste un ensemble de connaissances fondamentales qui doit toujours être enseigné: c'est celui de la démarche et du raisonnement statistique. Ces approches ne sont pas résolues par les logiciels. On peut même dire que face à leur foisonnement et aux difficultés de choix que leurs menus déroulants proposent, face au danger de leur mauvaise utilisation, une connaissance de base solide et claire de la méthode statistique reste indispensable.
Cet ouvrage aborde la discipline sous un angle pragmatique en utilisant systématiquement des exemples concrets pris dans le champ des sciences infirmières et paramédicales. Son cadre se limite volontairement aux aspects élémentaires de l'analyse statistique qui seront suffisants dans un très grand nombre de situations courantes. Lorsque le niveau de difficulté sort de ce cadre d'initiation, nous avons fourni les éléments de langage qui permettront au lecteur de demander avec pertinence une aide à un spécialiste. Les inévitables recours au formalisme mathématique et statistique ont été limités et isolés dans des encarts aisément identifiables. Ils peuvent être ignorés par les lecteurs rétifs à ces formulations sans inconvénient pour la compréhension générale du chapitre. De façon systématique, il a été pour la réalisation des calculs l'utilisation de logiciels communs comme Excel® ou de logiciels gratuits et d'utilisation très simple comme BiostaTGV.

On retrouve ici une mise à jour du contrat classique avec le lecteur, que l'on a déjà rencontré dans le livre de Jessica M. Utts, *Seeing through Statistics*. Voici par exemple l'un des « encarts » qui figurent dans l'ouvrage d'Ancelle et Rothan-Tondeur :

Pour les matheux

Calcul

Si l'on appelle :
– $\boldsymbol{x}$: les différentes valeurs de la variable quantitative étudiée dans l'échantillon ;
– $\boldsymbol{n}$: la taille de l'échantillon ;
– $\boldsymbol{m}$: la moyenne de l'échantillon,

la variance s^2 de l'échantillon est égale à $s^2 = \frac{\sum(x - m)^2}{n - 1}$.

On note que le dénominateur de la variance de l'échantillon est ici $n - 1$ au lieu de n au dénominateur de la variance d'une distribution donnée au chapitre « Paramètres de dispersion ». Cela provient du fait que la variance d'un échantillon est utilisée comme un estimateur de la variance inconnue s^2. On démontre que pour que cet estimateur soit non biaisé, la somme des carrés des écarts à la moyenne doit être divisée par $n - 1$.

On observera que les auteurs vont un pas plus loin que ne le faisait Jessica Utts (ils tentent d'expliquer à leur lecteur le quotient par $n - 1$) et que pourtant, sauf erreur de notre part, la notion d'estimateur « non biaisé » doit être prise ici en un sens intuitif, non mathématisé.

c) L'ensemble des observations précédentes conduisent à deux nouveaux énoncés :

E_{15}. La teneur en mathématiques des amalgames $\nabla(\mathcal{M} ; \mathcal{A})$, où le domaine $\mathcal{A}$ relève des sciences humaines et sociales, paraît avoir notablement diminué au cours des dernières décennies, appauvrissant ainsi la culture mathématique du « monde vécu » des sciences humaines et sociales.

E_{16}. L'affaiblissement de la présence de mathématiques vivantes, explicites, semble actuellement conforté par l'apparition de logiciels de calcul largement disponibles pour la plupart des analyses quantitatives réalisées en sciences humaines et sociales, en même temps que ces logiciels tendent à dissimuler les connaissances mathématiques qui y sont mises en œuvre.

7. Le niveau des systèmes didactiques

a) Rappelons que l'étude d'un enjeu didactique ♥ se ramène dans tous les cas à l'étude de questions Q, en sorte qu'un système didactique s'écrit alors $S(X ; Y ; Q)$. L'étude de la question Q est formalisée par le schéma herbartien semi-développé : $[S(X ; Y ; Q) \rightharpoonup M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$, où $R^{\heartsuit}$ est la réponse qui sera apportée à la question Q et où M est le milieu didactique qui réunit l'ensemble évolutif des moyens de l'étude de Q, milieu que l'on écrit de façon générique ainsi : $M = \{R_1^{\diamondsuit}, R_2^{\diamondsuit}, \ldots, R_n^{\diamondsuit}, Q_{n+1}, \ldots, Q_m, O_{m+1}, \ldots, O_p\}$. On distingue donc des réponses « toutes faites » $R_i^{\diamondsuit}$ existant « dans la littérature », des questions Q_j engendrées par l'étude de Q, ainsi que d'autres outils O_k qui peuvent être des théories, des expérimentations, des questionnaires, etc. C'est par rapport à ce schéma que nous nous situerons dans ce qui suit, en supposant qu'un étudiant $x \in X$ doit étudier une certaine question Q, ce qui, seul ou en collaboration avec d'autres étudiants x', x'', …, et avec l'aide de quelque $y \in Y$, va l'amener à utiliser peut-être des outils explicitement ou

implicitement mathématiques, par exemple dans le cadre de travaux d'analyse de données.

b) Le travail réalisé depuis quelques années a conduit à mettre en avant l'un des actes indispensables pour réamorcer une relation solide et vivante avec les mathématiques même les plus élémentaires : le fait de *lire complètement* un texte contenant des « morceaux » visibles de mathématiques, ce qui suppose une attitude d'ouverture – et non de fuite – face aux signes concrets qui manifestent ces mathématiques. Sans revenir sur les exemples de textes rencontrés plus haut, nous donnerons ici un exemple simple concernant un domaine étudié dans l'enseignement secondaire, tiré d'un ouvrage intitulé *Des idées toutes faites et pas forcément toutes fausses en sciences physiques* (Ellipses, 2012), dû à une professeure honoraire du Lycée Henri-IV à Paris, Florence Messinao. À propos de « l'idée toute faite » selon laquelle « la matière est faite surtout de vide », cette auteure écrit :

> **Les gaz**
> Étudions par exemple l'argon, gaz de l'air constitué de molécules monoatomiques (= d'atomes) d'argon de rayon r voisin de 1 Å. À la pression atmosphérique normale et à la température ordinaire, par exemple la pression atmosphérique de 10^5 Pascal et à 25 °C, la loi d'Avogadro-Ampère stipule qu'une mole de gaz contient $6 \cdot 10^{23}$ particules (le nombre d'Avogadro N) et occupe un volume V de 24 litres. Dans ces conditions, le volume υ des molécules contenues dans ces 24 litres est égal à $\upsilon = N \cdot \upsilon_0$ où υ_0 est le volume d'une molécule.
> $V = N \cdot 4\pi \cdot r^3/3 = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\ m^3 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ L.
> On a alors $V/\upsilon = 24/2{,}5 \cdot 10^3 = 9{,}6 \cdot 10^3 \approx 10^4$.
> Le volume occupé par les molécules est dix mille fois moindre que le volume offert au gaz. Là encore on voit que la matière est faite surtout de vide. (p. 11)

Pour être tout à fait concret, j'ajoute que ce type de tâches – la lecture « excriptrice » d'un texte comportant des morceaux de mathématiques et de sciences – devrait être mis au cœur de la formation mathématique *notamment* des futurs professeurs des écoles et pourrait constituer légitimement une *partie* des épreuves de leur concours de recrutement.

b) Une des difficultés de cette recherche tient au fait qu'il n'est pas aisé d'observer des étudiants « aux prises » avec des éléments mathématiques, et cela dans la mesure où, on l'a vu, de nombreux facteurs concourent à organiser un *évitement systématique* de tels éléments. Le travail à poursuivre comportera plusieurs axes. Nous citerons ici trois d'entre eux.

1. L'observation et l'analyse de l'*offre praxéologique* effective en matière de mathématiques et de statistique pour les sciences humaines et sociales, en particulier en ligne (site Quanti [http://quanti.hypotheses.org/], site SciencesPo./DIME-SHS [http://www.sciencespo.fr/dime-shs/], etc.) seront poursuivies.

2. On observera notamment dans le corpus accessible en ligne des *mémoires de recherche* (de master ou de doctorat), les rencontres effectives et, chaque fois que cela est possible, les rencontres évitées – les non-rencontres – avec des mathématiques et les conditions dans lesquelles ces événements se produisent.

3. Pour les raisons évoquées plus haut – liées au phénomène d'évitement et de refoulement des besoins mathématiques –, il a fallu se tourner vers un public qui doit nécessairement affronter des mathématiques du fait de contraintes institutionnelles peu évitables : les étudiants de première année des masters associés à la préparation au concours de recrutement de professeurs des écoles. Une des techniques utilisées en ce cas est celle des *séries d'entretiens coopératifs*, où le chercheur travaille pendant plusieurs séances successives avec des étudiantes volontaires sur les questions de mathématiques qu'elles ont dû aborder dans leur formation en vue du concours, et cela afin de saisir et d'analyser les obstacles que masquent quelquefois une attitude globale de refus des mathématiques.

c) Le travail accompli permet d'avancer quelques constats et quelques conjectures qu'on résume rapidement.

1. Les entretiens coopératifs réalisés tendent à montrer que les obstacles rencontrés dans la maîtrise des praxéologies mathématiques étudiées reposent en règle générale sur une absence de maîtrise, non pas tant de la *praxis* elle-même (qui serait marquée par des comportements inadéquats) que du *logos*, et cela à propos de notions regardées ordinairement comme « élémentaires mais dont la bonne maîtrise conditionne la qualité de *l'activité mathématique visible* requise.

2. Les difficultés touchant le *logos* mathématique ne semblent pas pouvoir être traitées *préventivement*, « une fois pour toutes » : le travail utile doit se faire de façon récurrente chaque fois qu'une situation coopérative révèle des déficits « gnosiques » (i.e. relatifs au *logos*) souvent inattendus et mal prévisibles pour une personne *x* donnée.

3. La pauvreté de l'environnement en occasions de pratiques mathématiques significatives pour les étudiants considérés pourrait être combattue sur

plusieurs plans, par exemple par le moyen d'ateliers reprenant le principe des suites d'entretiens coopératifs évoquées précédemment, qui permettent d'enclencher une évolution du rapport aux mathématiques devant figurer dans le « livre ordinaire de mathématiques » du type d'étudiants considérés (aspirantes professeures des écoles, aspirantes infirmières, etc.), en visant à créer, contre l'héroïsation des mathématiques chères à certains apologistes, un rapport ordinaire, banal, simplement serein à ces mathématiques ordinaires.

d) Nous condenserons certains des éléments précédents dans un ultime énoncé :

> **E$_{17}$**. Les difficultés rencontrées par les non-mathématiciens x dans leur rapport aux praxéologies qui pourraient ou devraient constituer leur livre ordinaire de mathématiques $L(x\,;\,\mathcal{M})$ se situent généralement, au-delà d'une *praxis* hésitante ou erronée, dans des anomalies souvent cachées affectant le *logos* correspondant, anomalies dont le repérage et le traitement semblent ne pouvoir se réaliser que par un « coaching » méticuleux poursuivis dans la durée.

APRÈS LE CONGRÈS DE TOULOUSE : *VARIA*

1. Champs praxéologiques, disciplines, canons

a) Le développement de la TAD doit identifier et dépasser de nombreux obstacles. Certains sont permanents : ainsi en va-t-il de l'usage d'un symbolisme simple et inoffensif, mais très utile, qui effraie et tourmente les philistins parfois « mathématiciens », ce qui est un symptôme à bas bruit de la commotion culturelle infligée au logocentrisme occidental par l'irruption toujours recommencée du mathématique. D'autres obstacles apparaissent souvent lorsqu'un développement inédit – ou, jusque-là, encore inaudible – se fait nouvellement entendre à travers des mots et (souvent) des symboles inattendus. Je voudrais m'arrêter ici sur un cas récent et essentiel.

b) Je partirai de la notion (floue) de *champ praxéologique*, que je note génériquement $\mathcal{C}$. C'est là un type d'entités que l'usage commun, et l'usage *scolaire* en particulier, désigne souvent sous le nom de *discipline*, un mot dont nous avons discuté bien des fois dans ce séminaire mais dont je rappellerai encore une fois les racines en reproduisant ici le *Dictionnaire étymologique du français* de Jacqueline Picoche (Les usuels du Robert, Paris, 1979), ouvert à l'entrée « Docte » :

> **DOCTE** Famille d'une racine I-E **dek*-, *dok*-, *dk*- « acquérir – ou faire

acquérir – une connaissance», comportant aussi en grec une variante **dak-*.

En grec ◊ **1**. La forme à redoublement *didaskein*, issue de **di-dak-sk-* « enseigner », d'où *autodidaktos* « qui s'est instruit lui-même » et *didaktikos* « propre à instruire ». ◊ **2**. *Dokein* « sembler » et « penser », d'où *dogma, -atos* « opinion, doctrine, décret », *doxa* « opinion » et « bonne réputation » et leurs dér.

En lat ◊ **1**. *Discere* « apprendre », probablement issu de *di-dk-sc-*, parallèle à *didaskein*, et auquel se rattachent : **a)** *Discipulus* « élève » et *condiscipulus* « condisciple » ; **b)** *Disciplina* « enseignement », « règle de vie ». ◊ **2**. *Docere, doctus* « faire apprendre », d'où **a)** *Doctor, -oris* « celui qui enseigne » ; **b)** *Doctrina* « enseignement », « doctrine » ; **c)** *Docilis* « apte à recevoir un enseignement », *docilitas* « aptitude à apprendre » ; *indocilis* « qu'on ne peut instruire » et bas lat. *indocilitas* « incapacité à être instruit » ; **d)** *Documentum* « enseignement », « leçon, modèle, démonstration », et bas lat. *documentare* « avertir », *documentatio* « avertissement ».

I. – Traces d'évolution populaire Le verbe *dŏcēre,* devenu en lat. vulgaire * *dŏcĕre* sous l'influence de *dicĕre* « dire », a abouti en anc. fr. à *duire* « éduquer » ; il subsiste de ce verbe le patronyme **Mauduit**, littéralement « mal élevé » ; son homonymie avec *duire* issu de *ducĕre* (→ CONDUIRE) a favorisé sa disparition.

II. – Mots savants issus du latin

A. – BASE ***-doct-*** **1**. **Docte** XVIe s. a éliminé l'anc. fr. *duit* de *doctus*. **2**. **Docteur** XIIe s. « docteur de la loi » : *doctor, -oris ;* à la même époque, sous forme lat. le titre universitaire de *doctor* a remplacé celui de *magister* qui s'était déprécié : en fr. XVe s., surtout à propos des docteurs en théologie ; employé couramment pour les docteurs en médecine, comme synonyme de « médecin », surtout à partir du XIXe s. ; **Doctorat** XVIe s. : lat. médiéval *doctoratus* ; **Doctoral** XIVe s. ; **Doctoresse** XVIe s., ironiquement jusqu'au XIXe s. **3**. **Doctrine** XIIe- XVIIe s. « science », « enseignement » et « doctrine ». le seul qui ait survécu ; **Doctrinaire** XIVe s. « qui enseigne », fin XVIIIe s. pol. ; **Doctrinal** XIIe s. : bas lat. *doctrinalis* ; **Endoctriner** XIIe s.

B. – BASE ***-doc-*** **1**. **Docile** XIVe s. : *docilis* ; **Indocile**, **Docilité** XVe s. : *indocilis, docilitas ;* **Indocilité** XVIe s. : *indocilitas*. **2**. **Document** XIIV s., d'abord surtout jur. : *documentum ;* **Documenter** XVIIIe s. dér. de *document*, plutôt qu'empr. au bas lat. ; **Documentation** XIXe s. ; **Documentaire** XIXe s. adj., XXe s. subst., cinéma ; **Documentaliste** XXe s.

C. – BASE ***-disc-*** **1**. **Disciple** XIIe s., *discipulus*, d'abord en parlant de ceux du Christ ; **Condisciple** XVe s. : *condiscipulus*. **2**. **Discipline** XIe s.- XIVe s. « punition ». « massacre » et « instrument de flagellation » ; le sens d'« éducation » apparaît fin XIIIe s.- XIVe s. « règle de mœurs », « matière

d'enseignement », « discipline militaire », par relatinisation : *disciplina ;* **Discipliner** XII^e s. « punir », XIV' s. sens mod. ; **Disciplinable** XIV^e s. ; **Indiscipliné** XIV^e s. ; **Indiscipline**, **Indisciplinable** XVI^e s. ; **Disciplinaire** XVII^e s., rare avant le XIX^e s.
III. – Mots issus du grec **1**. **Didactique** XVI^e s. : *didaktikos ;* **Autodidacte** XVI^e s. : *autodidaktos*. **2**. **Dogme** XVI^e s. : *dogma;* Dogmatique XVI' s. : *dogmatikos*, par le lat. : **Dogmatiser** XIIIX s. : *dogmatizein* « soutenir une opinion », « enseigner une doctrine », par le bas lat. **3**. **Doxologie** XVII^e s. « prière de louange » : gr. eccl. *doxologia*, littéralement « parole de gloire ». **4**. **-doxe** et **-doxie** se rattachent à *doxa* au sens d'« opinion » ; 2^e élément de composés sav. dans **Hétérodoxe** et **Hétérodoxie** XVII^e s. : *heterodoxos*, *-ia* « (qui est d'une) opinion différente » ; **Orthodoxe** XV^e s. : gr. eccl. *orthodoxos* « conforme à la vraie foi » ; **Orthodoxie** XVI^e s. ; **Paradoxe** XV^e s. : *paradoxos* « contraire à l'opinion commune » ; **Paradoxal** XVI^e s.

Comme on peut en juger, ce type de textes permet une utile traversée « civilisationnelle », à propos d'une société donnée, la société « française ».

c) Chaque champ praxéologique $\mathcal{C}$ est « discipliné », c'est-à-dire qu'il est gouverné par un système (plus ou moins rapidement évolutif) de conditions et de contraintes qui lui sont propres (ou qui, du moins, sont tenues pour telles). Ce phénomène indépassable – qui tient à ceci que ce champ comporte des praxéologies « à respecter », dont certaines sont regardées comme emblématiques du champ – fait qu'un champ praxéologique $\mathcal{C}$ est souvent désigné, par métonymie, comme une *discipline*. Bien entendu, il y a en plus dans « discipline » l'idée que le champ praxéologique en question peut être « enseigné ». Voici plus généralement quelques exemples d'emplois recensés, à l'entrée « Discipline », par le *TLFi* :

A.— 1. *Vx.* Instruction, direction morale. *J'appris à lire sous la discipline d'un maître qui s'appelait Amicus* (FRANCE, *Île ping.,* 1908, p. 142)
♦*Se mettre en discipline.* Se mettre à l'étude. *J'ai donc recommencé* [*à étudier*], *(...) J'ai remis mon oreille énorme en discipline* (HUGO, *Âne,* 1880, p. 265).
2. *Mod.* Science, matière pouvant faire l'objet d'un enseignement spécifique. *Disciplines historiques, humaines, littéraires, médicales, scientifiques. C'est par réaction contre les insuffisances de la psychologie et du psychologisme que s'est constituée, il y a environ une trentaine d'années, une discipline nouvelle, la phénoménologie* (SARTRE, *Esq. théorie émot.,* 1939, p. 7). *Mes parents (...) eurent le bon esprit de m'engager dans des disciplines solides* (BOSCO, *Mas Théot.,* 1945, p. 27) :
• ... à Oak-Ridge et Los Alamos, furent créés pour la première fois des établissements scientifiques géants groupant des milliers de techniciens,

savants et ingénieurs spécialistes de toutes les **disciplines** depuis les mathématiques pures jusqu'à la biologie, en passant par la physique, la chimie, l'électronique, et la métallurgie.
GOLDSCHMIDT, *L'Aventure atomique,* 1962, p. 40.
SYNT. *Discipline autonome, auxiliaire, connexe, voisine; carrefour de disciplines; interpénétration des disciplines.*
✦ *Discipline d'éveil.* Activité qui vise à révéler chez l'élève des goûts et des capacités que la contrainte des leçons et des devoirs du programme commun ne laisse pas apparaître (d'apr. FOULQ. 1971). *Les disciplines d'éveil risquaient alors de constituer un ensemble confus* (*Les activités d'éveil à dominante intellectuelle au cours préparatoire,* Paris, I.N.R.D.P., 1974, p. 9).
– *SPORT.* Type de pratique sportive. Synon. *épreuve (sportive), sport. À Kitzbuehel, dans le cadre de la semaine internationale du ski, l'Autrichien Hans Eder a remporté l'épreuve de saut des disciplines nordiques* (*Combat,* 19-20 janv., 1952, p. 6, col. 6).
B. – Règle imposée.
……

c) Un champ praxéologique $\mathcal{C}$ existe en diverses institutions *I*, où il diffuse (en totalité ou en partie) par transposition institutionnelle. Ce qui est considéré comme une praxéologie du champ $\mathcal{C}$ dans une institution *I* dépend en partie de *I*, qui définit les *canons* de l'appartenance à $\mathcal{C}$ dans *I*. On doit considérer que, s'il existe des tensions polémiques entre institutions (« Ce qu'ils font, ce n'est pas des maths ! Enfin, ce n'est pas des maths «"propres" », « Ça, c'est une bien étrange conception de la grammaire ! », etc.), aucune d'entre elles ne doit être regardée comme « sans accent » (pour prendre une comparaison langagière), c'est-à-dire absolument « pure », même lorsqu'elle le prétend. Sur le mot de *canon* que je viens d'employer, je ne citerai ici que le *Online Etymology Dictionary* :

canon (n.1)
"church law," Old English *canon*, from Old French *canon* or directly from Late Latin *canon* "Church law," in classical Latin, "measuring line, rule," from Greek *kanon* "any straight rod or bar; rule; standard of excellence," perhaps from *kanna* "reed" (see cane (n.)). Taken in ecclesiastical sense for "decree of the Church." General sense of "standard of judging" is from c.1600. Related: *Canonicity*.

2. Pluridisciplinaires ou monodisciplinaires ?

a) Dans l'enseignement français, la formation donnée aux élèves est pluridisciplinaire : ceux-ci doivent étudier la grammaire du français, l'histoire, l'algèbre, la biologie, la géologie, l'anglais, etc. Par contraste, les

professeurs sont « monodisciplinaires », avec cette bizarrerie maintenue que certaines monodisciplines sont des *« bidisciplines »* : physique-chimie, histoire-géographie, etc. Cette monodisciplinarité de principe (semble se conformer aux *principes* suivants :

MD_1. Un professeur d'une discipline $\mathcal{D}$ est légitime – sinon compétent – pour enseigner tout thème ou sujet assigné à cette discipline, du point de vue de la connaissance de ce thème ou sujet ;

MD_2. Le professeur de $\mathcal{D}$ est illégitime pour enseigner, et même déjà pour mentionner dans son enseignement, tout thème ou sujet relevant (selon l'ordre scolaire existant) d'une autre discipline $\mathcal{D}'$, thème ou sujet sur lequel il est supposé *a priori* incompétent. L'assomption de ce principe par le professeur de $\mathcal{D}$ lui-même conduit celui-ci à s'interdire de mentionner tout thème ou sujet relevant de $\mathcal{D}' \neq \mathcal{D}$ et, en règle générale, à considérer qu'il est incompétent pour ce faire.

MD_3. Lorsqu'un professeur de $\mathcal{D}$ est conduit, par la tradition de sa discipline, à manipuler certains éléments d'une discipline $\mathcal{D}' \neq \mathcal{D}$ dans le cadre d'un amalgame $\nabla(\mathcal{D} ; \mathcal{D}')$, deux stratégies prévalent, parfois simultanément : (a) faire apparaître $\nabla(\mathcal{D} ; \mathcal{D}')$ comme relevant de $\mathcal{D}$, y compris s'agissant de certains éléments de $\mathcal{D}'$ qui y apparaissent ; et (b) en sens inverse, situer les éléments de $\mathcal{D}'$ « résistant » à ce travestissement – à cette phagocytose – comme relevant entièrement de la responsabilité de $\mathcal{D}'$ et n'engageant en rien la discipline $\mathcal{D}$, qui n'en serait qu'un usager « neutre » et indifférent (« On démontre en mathématiques que… », « On établit en physique que… », etc.).

b) Ces principes organisent la vie interne et la vie de relation des disciplines scolaires. Subjectivement, pour qui occupe la position de professeur de $\mathcal{D}$, rien ne compte que $\mathcal{D}$: rien de ce qui n'est pas $\mathcal{D}$ ne compte pour lui, quel que soit son rapport *personnel* à telle ou telle discipline $\mathcal{D}'$, par exemple en tant que parent d'élève, etc.

c) Une question *ouverte*, mais des plus intéressantes à cet égard, concerne les bouleversements qui peuvent, au fil de l'histoire du système scolaire, modifier le tracé des disciplines établies, en assignant tel sujet, thème, secteur ou domaine, relevant antérieurement d'une discipline $\mathcal{D}'$, à une autre discipline $\mathcal{D}''$. C'est là un phénomène sur lequel il conviendra de se pencher.

3. Le professeur et l'honnête homme

a) L'enseignement tel que nous le connaissons au collège et au lycée, qui devrait diffuser des connaissances assignées à de multiples disciplines,

réussit ce tour de force d'être *interdicteur*, d'enfermer les professeurs dans une *monomanie disciplinaire* et, d'une façon générale, de confiner le citoyen ordinaire à l'intérieur des étroites limites de son *métier*. Il en résulte une *illégitimité épistémologique* illimitée (on pourrait parler plus concrètement d'illégitimité *praxéologique* illimitée). Il s'agit là d'un fait *de civilisation*, qui oppose la figure actuelle du professeur (du secondaire) à la figure ancienne de l'*honnête homme*.

b) Dans l'article de *Wikipédia* intitulé « Honnête homme », on trouve cette « pensée » de Blaise Pascal (1623-1662) : « il est bien plus beau de savoir quelque chose de tout que de savoir tout d'une chose. Cette universalité est la plus belle. » La « pensée » ainsi partiellement citée mérite d'être lue dans son entier (http://www.ub.uni-freiburg.de/fileadmin/ub/referate/04/pascal/pensees.pdf) :

> (Peu de tout). Puisqu'on ne peut être universel en sachant tout ce qui se peut savoir sur tout, il faut savoir peu de tout, car il est bien plus beau de savoir quelque chose de tout que de savoir tout d'une chose. Cette universalité est la plus belle. Si on pouvait avoir les deux encore mieux, mais s'il faut choisir il faut choisir il celle-là. Et le monde le sait et le fait, car le monde est un bon juge souvent.

Dans son livre *La vie de Blaise Pascal* (Beauchesne, 2000), André Bord écrit :

> Pascal est agacé quand Méré le salue : Monsieur le mathématicien. Car « il est bien plus beau de savoir quelque chose de tout que de savoir tout d'une chose ». Il méprise la spécialisation, dénonce la déformation de ce docteur qui a tout dit et qui parle encore un quart d'heure, tant il est plein du désir de dire *(581)*. Il est contre tout ce qui réduit la personne au personnage et apprécie sans doute Montaigne qui se *prêtait* à sa mairie. « C'est un bon mathématicien, dira-t-on, mais je n'ai que faire de mathématique ; il me prendrait pour une proposition. [...] Il faut donc un honnête homme qui puisse s'accommoder à tous mes besoins généralement » *(605)*. « Il faut qu'on n'en puisse [dire] ni il est mathématicien, ni prédicateur, ni éloquent, mais il est honnête homme. Cette qualité, universelle, me plaît seule » *(647)*. Aussi dédaigne-t-il ceux qui ont besoin d'une enseigne : poète, mathématicien, brodeur. Les gens universels sont poètes, mathématiciens, etc., et de plus juges de tous ceux-là *(581, 132)*. « Quand on voit le style naturel, on est tout étonné et ravi, car on s'attendait de voir un auteur et on trouve un homme » *(675)*. (p. 106)

On a là une bonne description du phénomène, non tant de spécialisation, que de « porte-enseigne ». Bien entendu, une même personne peut porter plusieurs enseignes, être plusieurs « personnages ». Le *TLFi* précise qu'un spécialiste est une « personne qui peut se prévaloir d'une compétence particulière dans un domaine déterminé ». Et de citer les exemples suivants :

Spécialiste du grec ancien, de l'histoire médiévale, de la physique des plasmas. On peut sans doute être un multi-spécialiste. Mais l'unicité (à un instant donné, sinon parfois au long d'une vie humaine) semble la règle. C'est alors là que le problème se pose.

c) Lors du congrès de Toulouse, la question suivante m'a été posée (je la résume et la condense) : « Alors que nous vivons en un temps de spécialisation toujours croissante, tu sembles prôner, à l'inverse, une culture généraliste, et tu parais ainsi verser dans l'autre extrême, qui conduirait à bannir les spécialistes et la spécialisation. » C'est là un reproche étrange parce que logiquement biaisé : si je dis que j'aime passer mes vacances à la montagne, n'en « déduisez » pas, s'il vous plaît, que je *n'aime pas* passer mes vacances à la mer ! Pour le dire autrement, ce que j'énonce ne va aucunement contre la « spécialisation » mais demande simplement que chaque citoyen puisse, en dehors même de ses « spécialités » éventuelles (précieuses sans doute pour la société où il vit), devenir *le détenteur et l'usager légitimes* d'un ensemble non vide de connaissances en une multitude de disciplines – scolaires et non scolaires – dont il n'est pas regardé pour autant comme un « spécialiste » (je vais revenir sur l'ambiguïté de ce mot).

d) Comment dire cela en termes de connaissances *ordinaires* ? Je reviens ici à la notion de livre « ordinaire » de $\mathcal{C}$ de x ou de la position p dans l'institution I, livres notés respectivement $L(x\,;\,\mathcal{C})$ et $L_I(p\,;\,\mathcal{C})$. Ce qu'on doit constater, c'est que, en un collectif $\mathcal{K}$ donné, constitué des personnes occupant une même position p au sein d'une institution I, il existe un livre « ordinaire » $L(\mathcal{K}\,;\,\mathcal{C}) = L_I(p\,;\,\mathcal{C})$ des connaissances en telle discipline $\mathcal{C}$, même si l'une ou l'autre des personnes $x \in \mathcal{K}$ peut en même temps avoir un livre *personnel*, $L(x\,;\,\mathcal{C})$, qui, à côté des connaissances ordinaires figurant dans $L(\mathcal{K}\,;\,\mathcal{C})$, contient des connaissances *extraordinaires*, qui ne sont peut-être que des connaissances *ordinaires* pour une position q de quelque institution J, et donc figurant comme telles dans le livre $L_J(q\,;\,\mathcal{C})$, et cela parce que x a occupé autrefois, ou se prépare à occuper, ou occupe simultanément la position q dans J.

e) Pour toute discipline, ce qu'on rencontre d'abord, institutionnellement, ce sont des « porte-enseignes » de la discipline, dont on dira *alors* qu'ils en sont des « spécialistes », c'est-à-dire que leur livre ordinaire relatif à ladite discipline comporte – en principe – certaines connaissances extraordinaires par rapport aux livres de la même discipline d'autres collectifs proches. Bien des exemples montrent cependant que ce livre n'inclut pas totalement le contenu des livres ordinaires de tels collectifs : les mathématiques que doit manipuler, à un certain niveau, le professeur de physique comporte des éléments qu'ignore le livre de mathématiques des professeurs de

mathématiques, par exemple. Les « spécialistes » apparaissent ainsi comme ayant un livre ordinaire dont d'assez nombreux chapitres sont vides ou quasi vides. Il en résulte une itération bien connue de la notion de spécialiste : si tel thème θ n'est pas développé dans le livre des spécialistes, il faudra alors rechercher le collectif des spécialistes de θ, et peut être ensuite les spécialistes de tel sous-thème θ' de θ, etc.

f) Cette incomplétude indéfinie du livre ordinaire de $\mathcal{C}$ de tel collectif de spécialistes-porte-enseignes de $\mathcal{C}$ est l'une des raisons pour lesquelles, lorsqu'on enquête sur une question qui paraît relever au moins en partie du champ $\mathcal{C}$, la technique consistant à interroger « *un* spécialiste de $\mathcal{C}$ » est contre-indiquée : un tel geste, dûment répété, permet seulement d'explorer ce que contient le livre de $\mathcal{C}$ desdits spécialistes. En outre et surtout, les spécialistes-porte-enseignes se caractérisent moins par l'extension ou la profondeur de leur connaissance de $\mathcal{C}$ que par leur promptitude à faire connaître les *canons* propres à la « secte » (pour parler comme Berkeley) dont ils sont membres, soit l'*orthodoxie* dont l'inobservance démasque *ipso facto*, à leurs yeux, l'étranger, le forain, le vagabond : que l'on dit comme-ci, que l'on agit comme-ça, etc. En d'autres termes, cela revient à nouveau à faire entendre un ton interdicteur, en exprimant *volens nolens* qu'on ne saurait « manipuler » la matière de $\mathcal{C}$ que d'une seule manière, selon des canons présentés comme rigoureusement définis, alors même qu'ils évoluent dans le temps et puissent différer d'institution « spécialiste » à institution « spécialiste ». C'est ainsi, mais c'est bien dommage.

That's all, folks!

Annexe 1

Hagle, T. M. (1995). *Basic Math for Social Scientists : Concepts* (Sage Univeristy Paper series on Qunatitative Applications in the Social Sciences, series no. 07-1908). Thousand Oaks, CA: Sage.

CONTENTS

Series Editor's Introduction v

Math Symbols and Expressions vii

Greek Letters vii

Preface viii

1. Introduction 1

1.1. Algebra Review 1

1.1.1. Exponents 1

1.1.2. Logarithms 2

1.1.3. Relations and Functions 4

1.2. Sets 13

1.3. Permutations and Combinations 17

2. Limits and Continuity 22

2.1. The Concept of a Limit 22

2.2. Infinite Limits and Limits at Infinity 25

2.3. Properties of Finite Limits 27

2.4. Continuity 30

3. Differential Calculus 31

3.1. Tangents to Curves 33

3.2. Differential Rules 36

3.3. Extrema of Functions 42

4. Multivariate Functions and Partial Derivatives 47

4.1. Partial Derivatives 47

4.2. Extrema of Multivariate Functions 50

4.2.1. The Method of Least Squares 54

4.2.2. Constrained Optimization (Method of Lagrange Multipliers) 56

5. Integral Calculus 58

5.1. Integration Rules 59

5.2. The Theory of Integration and Definite Integrals 65

6. Matrix Algebra 71

6.1. Matrices 71

6.1.1. Matrix Rules 72

6.1.2. Representing a System of Equations in Matrix Form 76

6.2. Determinants 76

6.3. Inverses of Matrices 83

6.4. Cramer's Rules 86
6.5. Eigenvalues and Eigenvectors 89
6.6. Multivariate Extrema and Matrix Algebra 91

Annexe 2

Xin-Che Yang. (2009). *Introductory Mathematics for Earth Scientists*. Edinburgh: Dunedin Academic Press, 2009.

Preface ix

1 Preliminary Mathematics I 1

1.1 Functions 2

1.1.1 Real Numbers 2

1.1.2 Functions 3

1.2 Equations 10

1.3 Index Notation 13

1.3.1 Notations of Indices 13

1.3.2 Graphs and Functions 16

1.4 Applications 16

1.4.1 Greenhouse Effect 17

1.4.2 Glacier Flow 18

1.4.3 Airy Isostasy 19

1.4.4 Size of an Impact Crater 20

2 Preliminary Mathematics II 21

2.1 Polynomials 21

2.2 Roots 21

2.3 Descartes' Theorem 25

2.4 Applications 27

2.4.1 Stokes' Flow 27

2.4.2 Velocity of a Raindrop 29

3 Binomial Theorem and Sequences 31

3.1 The Binomial Theorem 21

3.1.1 Factorials 32

3.1.2 Binomial Theorem and Pascal's Triangle 33

3.2 Sequences 34

3.2.1 Fibonacci Sequence 36

3.2.2 Sum of a Series 38

3.2.3 Infinite Series 41

3.3 Exponentials and Logarithms 42

3.4 Applications 44

3.4.1 Carbon Dioxide 44

3.4.2 Folds 45

3.4.3 Gutenberg-Richter Law 45

3.4.4 Distribution of Near-Earth Objects 47

4 Trigonometry and Spherical Trigonometry 49

4.1 Plane Trigonometry 49

4.1.1 Trigonometrical Functions 49
4.1.2 Sine Rule 57
4.1.3 Cosine Rule 58
4.2 Spherical Trigonometry 59
4.3 Applications 61
4.3.1 Travel-Time Curves of Seismic Waves 61
4.3.2 Great-Circle Distance 63
4.3.3 Bubbles and Surface Tension 64
5 Complex Numbers 67
5.1 Complex Numbers 67
5.1.1 Imaginary Numbers 67
5.1.2 Polar Form 70
5.2 Hyperbolic Functions 72
5.2.1 Hyperbolic Sine and Cosine 72
5.2.2 Hyperbolic Identities 73
5.2.3 Inverse Hyperbolic Functions 74
5.3 Water Waves 75
6 Differentiation 77
6.1 Gradient 77
6.2 Differentiation Rules 82
6.3 Partial Derivatives 85
6.4 Maxima or Minima 87
6.5 Series Expansions 89
6.6 Applications 91
6.6.1 Free-Air Gravity 91
6.6.2 Mantle Convection 92
7 Integration 95
7.1 Integration 95
7.2 Integration by Parts 100
7.3 Integration by Substitution 103
7.4 Bouguer Gravity 105
8 Fourier Transform 107
8.1 Fourier Series 107
8.2 Fourier Transforms 111
8.3 DFT and FFT 112
8.4 Milankovitch Cycles 114
9 Vectors 117
9.1 Vector Algebra 117
9.1.1 Vectors 117
9.1.2 Product of Vectors 122
9.2 Gradient and Laplace Operators 126
9.3 Applications 129
9.3.1 Mohr-Coulomb Criterion 129

9.3.2 Thrusts Faults 131
9.3.3 Electrical Method in Prospecting 132
10 Matrix Algebra 135
10.1 Matrices 135
10.2 Transformation and Inverse 138
10.3 Eigenvalues and Eigenvectors 144
10.4 Harmonic Motion 147
11 Ordinary Differential Equations 149
11.1 Differential Equations 149
11.2 First-Order Equations 150
11.3 Second-Order Equations 156
11.4 Higher-Order ODEs 161
11.5 Applications 163
11.5.1 Climate Changes 163
11.5.2 Flexural Deflection of Lithosphere 165
11.5.3 Glacial Isostatic Adjustment 168
12 Partial Differential Equations 171
12.1 Introduction 171
12.2 Classic Equations 172
12.3 Heat Conduction 173
12.4 Cooling of the Lithosphere 176
13 Geostatistics 179
13.1 Random Variables 179
13.1.1 Probability 179
13.1.2 Mean and Variance 181
13.2 Sample Mean and Variance 183
13.3 Propagation of errors 184
13.4 Linear Regression 188
13.5 Correlation Coefficient 191
13.6 Brownian Motion 192
14 Numerical Methods 192
14.1 Finding the roots 195
14.2 Newton-Raphson Method 196
14.3 Numerical Integration 198
14.4 Numerical Solutions of ODEs 201
14.4.1 Euler Scheme 202
14.4.2 Runge-Kutta Method 203
Bibliography 207
A Glossary 211
B Mathematical Formulae 217
Epilogue 221
Index 223

Annexe 3

Holzner, S. (2010). *Physics Essentials for Dummies*. Hoboke, NJ: Wiley.

The question wants to know the angle the hotel is at from your present location and how far away it is. In other words, looking at Figure 2-7, the problem asks, "What's *h* and what's θ?"

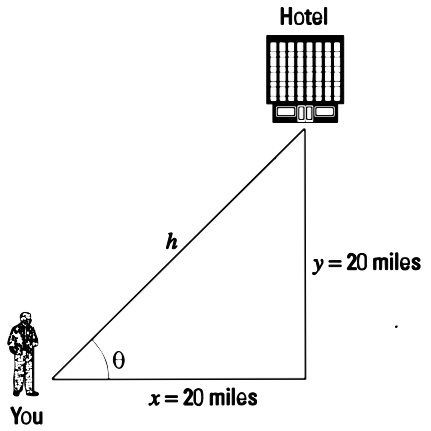

Figure 2-7: Using the angle created by a vector to get to a hotel.

Finding *h* isn't so hard because you can use the Pythagorean theorem:

$$h = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Plugging in the numbers gives you

$$h = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(20 \text{ mi})^2 + (20 \text{ mi})^2} = 28.3 \text{ mi}$$

The hotel is 28.3 miles away. What about the angle θ? Because of your superior knowledge of trigonometry, you know that

$$y = h \sin \theta$$

In other words, you know that

$$y / h = \sin \theta$$

Now all you have to do is take the inverse sine:

$$\theta = \sin^{-1} (y / h) = \sin^{-1} [(20 \text{ mi})/(20 \text{ mi})] = 45°$$

You now know all there is to know. The hotel is 28.3 miles away, at an angle of 45°. Another physics triumph! (pp. 23-24)

Annexe 4

The New York Times – Opinion pages

How to Fix Our Math Education

By SOL GARFUNKEL and DAVID MUMFORD

Published: August 24, 2011

THERE is widespread alarm in the United States about the state of our math education. The anxiety can be traced to the poor performance of American students on various international tests, and it is now embodied in George W. Bush's No Child Left Behind law, which requires public school students to pass standardized math tests by the year 2014 and punishes their schools or their teachers if they do not.

ll this worry, however, is based on the assumption that there is a single established body of mathematical skills that everyone needs to know to be prepared for 21st-century careers. This assumption is wrong. The truth is that different sets of math skills are useful for different careers, and our math education should be changed to reflect this fact.

Today, American high schools offer a sequence of algebra, geometry, more algebra, pre-calculus and calculus (or a "reform" version in which these topics are interwoven). This has been codified by the Common Core State Standards, recently adopted by more than 40 states. This highly abstract curriculum is simply not the best way to prepare a vast majority of high school students for life.

For instance, how often do most adults encounter a situation in which they need to solve a quadratic equation? Do they need to know what constitutes a "group of transformations" or a "complex number"? Of course professional mathematicians, physicists and engineers need to know all this, but most citizens would be better served by studying how mortgages are priced, how computers are programmed and how the statistical results of a medical trial are to be understood.

A math curriculum that focused on real-life problems would still expose students to the abstract tools of mathematics, especially the manipulation of unknown quantities. But there is a world of difference between teaching "pure" math, with no context, and teaching relevant problems that will lead students to appreciate how a mathematical formula models and clarifies real-world situations. The former is how algebra courses currently proceed — introducing the mysterious variable x, which many students struggle to understand. By contrast, a contextual approach, in the style of all working scientists, would introduce formulas using abbreviations for simple quantities — for instance, Einstein's famous equation $E=mc^2$, where E stands for energy, m for mass and c for the speed of light.

Imagine replacing the sequence of algebra, geometry and calculus with a sequence of finance, data and basic engineering. In the finance course, students would learn the exponential function, use formulas in spreadsheets and study the budgets of people, companies and governments. In the data course, students would gather their own data sets and learn how, in fields as diverse as sports and medicine, larger samples

give better estimates of averages. In the basic engineering course, students would learn the workings of engines, sound waves, TV signals and computers. Science and math were originally discovered together, and they are best learned together now.

Traditionalists will object that the standard curriculum teaches valuable abstract reasoning, even if the specific skills acquired are not immediately useful in later life. A generation ago, traditionalists were also arguing that studying Latin, though it had no practical application, helped students develop unique linguistic skills. We believe that studying applied math, like learning living languages, provides *both* useable knowledge and abstract skills.

In math, what we need is "quantitative literacy," the ability to make quantitative connections whenever life requires (as when we are confronted with conflicting medical test results but need to decide whether to undergo a further procedure) and "mathematical modeling," the ability to move practically between everyday problems and mathematical formulations (as when we decide whether it is better to buy or lease a new car).

Parents, state education boards and colleges have a real choice. The traditional high school math sequence is not the only road to mathematical competence. It is true that our students' proficiency, measured by traditional standards, has fallen behind that of other countries' students, but we believe that the best way for the United States to compete globally is to strive for universal quantitative literacy: teaching topics that make sense to all students and can be used by them throughout their lives.

It is through real-life applications that mathematics emerged in the past, has flourished for centuries and connects to our culture now.

Sol Garfunkel is the executive director of the Consortium for Mathematics and Its Applications. David Mumford is an emeritus professor of mathematics at Brown.

Annexe 5

The New York Times (Sunday Review)
July 28, 2012
Is Algebra Necessary?
By ANDREW HACKER

A TYPICAL American school day finds some six million high school students and two million college freshmen struggling with algebra. In both high school and college, all too many students are expected to fail. Why do we subject American students to this ordeal? I've found myself moving toward the strong view that we shouldn't.

My question extends beyond algebra and applies more broadly to the usual mathematics sequence, from geometry through calculus. State regents and legislators — and much of the public — take it as self-evident that every young person should be made to master polynomial functions and parametric equations.

There are many defenses of algebra and the virtue of learning it. Most of them sound reasonable on first hearing; many of them I once accepted. But the more I examine them, the clearer it seems that they are largely or wholly wrong — unsupported by research or evidence, or based on wishful logic. (I'm not talking about quantitative skills, critical for informed citizenship and personal finance, but a very different ballgame.)

This debate matters. Making mathematics mandatory prevents us from discovering and developing young talent. In the interest of maintaining rigor, we're actually depleting our pool of brainpower. I say this as a writer and social scientist whose work relies heavily on the use of numbers. My aim is not to spare students from a difficult subject, but to call attention to the real problems we are causing by misdirecting precious resources.

The toll mathematics takes begins early. To our nation's shame, one in four ninth graders fail to finish high school. In South Carolina, 34 percent fell away in 2008-9, according to national data released last year; for Nevada, it was 45 percent. Most of the educators I've talked with cite algebra as the major academic reason.

Shirley Bagwell, a longtime Tennessee teacher, warns that "to expect all students to master algebra will cause more students to drop out." For those who stay in school, there are often "exit exams," almost all of which contain an algebra component. In Oklahoma, 33 percent failed to pass last year, as did 35 percent in West Virginia.

Algebra is an onerous stumbling block for all kinds of students: disadvantaged and affluent, black and white. In New Mexico, 43 percent of white students fell below "proficient," along with 39 percent in Tennessee. Even well-endowed schools have otherwise talented students who are impeded by algebra, to say nothing of calculus and trigonometry.

California's two university systems, for instance, consider applications only from students who have taken three years of mathematics and in that way exclude many applicants who might excel in fields like art or history. Community college students

face an equally prohibitive mathematics wall. A study of two-year schools found that fewer than a quarter of their entrants passed the algebra classes they were required to take.

“There are students taking these courses three, four, five times,” says Barbara Bonham of Appalachian State University. While some ultimately pass, she adds, “many drop out.”

Another dropout statistic should cause equal chagrin. Of all who embark on higher education, only 58 percent end up with bachelor’s degrees. The main impediment to graduation: freshman math. The City University of New York, where I have taught since 1971, found that 57 percent of its students didn’t pass its mandated algebra course. The depressing conclusion of a faculty report: “failing math at all levels affects retention more than any other academic factor.” A national sample of transcripts found mathematics had twice as many F’s and D’s compared as other subjects.

Nor will just passing grades suffice. Many colleges seek to raise their status by setting a high mathematics bar. Hence, they look for 700 on the math section of the SAT, a height attained in 2009 by only 9 percent of men and 4 percent of women. And it’s not just Ivy League colleges that do this: at schools like Vanderbilt, Rice and Washington University in St. Louis, applicants had best be legacies or athletes if they have scored less than 700 on their math SATs.

It’s true that students in Finland, South Korea and Canada score better on mathematics tests. But it’s their perseverance, not their classroom algebra, that fits them for demanding jobs.

Nor is it clear that the math we learn in the classroom has any relation to the quantitative reasoning we need on the job. John P. Smith III, an educational psychologist at Michigan State University who has studied math education, has found that “mathematical reasoning in workplaces differs markedly from the algorithms taught in school.” Even in jobs that rely on so-called STEM credentials — science, technology, engineering, math — considerable training occurs after hiring, including the kinds of computations that will be required. Toyota, for example, recently chose to locate a plant in a remote Mississippi county, even though its schools are far from stellar. It works with a nearby community college, which has tailored classes in “machine tool mathematics.”

That sort of collaboration has long undergirded German apprenticeship programs. I fully concur that high-tech knowledge is needed to sustain an advanced industrial economy. But we’re deluding ourselves if we believe the solution is largely academic.

A skeptic might argue that, even if our current mathematics education discourages large numbers of students, math itself isn’t to blame. Isn’t this discipline a critical part of education, providing quantitative tools and honing conceptual abilities that are indispensable — especially in our high tech age? In fact, we hear it argued that we have a shortage of graduates with STEM credentials.

Of course, people should learn basic numerical skills: decimals, ratios and estimating, sharpened by a good grounding in arithmetic. But a definitive analysis by the Georgetown Center on Education and the Workforce forecasts that in the decade

ahead a mere 5 percent of entry-level workers will need to be proficient in algebra or above. And if there is a shortage of STEM graduates, an equally crucial issue is how many available positions there are for men and women with these skills. A January 2012 analysis from the Georgetown center found 7.5 percent unemployment for engineering graduates and 8.2 percent among computer scientists.

Peter Braunfeld of the University of Illinois tells his students, “Our civilization would collapse without mathematics.” He’s absolutely right.

Algebraic algorithms underpin animated movies, investment strategies and airline ticket prices. And we need people to understand how those things work and to advance our frontiers.

Quantitative literacy clearly is useful in weighing all manner of public policies, from the Affordable Care Act, to the costs and benefits of environmental regulation, to the impact of climate change. Being able to detect and identify ideology at work behind the numbers is of obvious use. Ours is fast becoming a statistical age, which raises the bar for informed citizenship. What is needed is not textbook formulas but greater understanding of where various numbers come from, and what they actually convey.

What of the claim that mathematics sharpens our minds and makes us more intellectually adept as individuals and a citizen body? It’s true that mathematics requires mental exertion. But there’s no evidence that being able to prove $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$ leads to more credible political opinions or social analysis.

Many of those who struggled through a traditional math regimen feel that doing so annealed their character. This may or may not speak to the fact that institutions and occupations often install prerequisites just to look rigorous — hardly a rational justification for maintaining so many mathematics mandates. Certification programs for veterinary technicians require algebra, although none of the graduates I’ve met have ever used it in diagnosing or treating their patients. Medical schools like Harvard and Johns Hopkins demand calculus of all their applicants, even if it doesn’t figure in the clinical curriculum, let alone in subsequent practice. Mathematics is used as a hoop, a badge, a totem to impress outsiders and elevate a profession’s status.

It’s not hard to understand why Caltech and M.I.T. want everyone to be proficient in mathematics. But it’s not easy to see why potential poets and philosophers face a lofty mathematics bar. Demanding algebra across the board actually skews a student body, not necessarily for the better.

I WANT to end on a positive note. Mathematics, both pure and applied, is integral to our civilization, whether the realm is aesthetic or electronic. But for most adults, it is more feared or revered than understood. It’s clear that requiring algebra for everyone has not increased our appreciation of a calling someone once called “the poetry of the universe.” (How many college graduates remember what Fermat’s dilemma was all about?)

Instead of investing so much of our academic energy in a subject that blocks further attainment for much of our population, I propose that we start thinking about alternatives. Thus mathematics teachers at every level could create exciting courses in what I call “citizen statistics.” This would not be a backdoor version of algebra, as in

the Advanced Placement syllabus. Nor would it focus on equations used by scholars when they write for one another. Instead, it would familiarize students with the kinds of numbers that describe and delineate our personal and public lives.

It could, for example, teach students how the Consumer price Index is computed, what is included and how each item in the index is weighted — and include discussion about which items should be included and what weights they should be given.

This need not involve dumbing down. Researching the reliability of numbers can be as demanding as geometry. More and more colleges are requiring courses in "quantitative reasoning." In fact, we should be starting that in kindergarten.

I hope that mathematics departments can also create courses in the history and philosophy of their discipline, as well as its applications in early cultures. Why not mathematics in art and music — even poetry — along with its role in assorted sciences? The aim would be to treat mathematics as a liberal art, making it as accessible and welcoming as sculpture or ballet. If we rethink how the discipline is conceived, word will get around and math enrollments are bound to rise. It can only help. Of the 1.7 million bachelor's degrees awarded in 2010, only 15,396 — less than 1 percent — were in mathematics.

I've observed a host of high school and college classes, from Michigan to Mississippi, and have been impressed by conscientious teaching and dutiful students. I'll grant that with an outpouring of resources, we could reclaim many dropouts and help them get through quadratic equations. But that would misuse teaching talent and student effort. It would be far better to reduce, not expand, the mathematics we ask young people to imbibe. (That said, I do not advocate vocational tracks for students considered, almost always unfairly, as less studious.)

Yes, young people should learn to read and write and do long division, whether they want to or not. But there is no reason to force them to grasp vectorial angles and discontinuous functions. Think of math as a huge boulder we make everyone pull, without assessing what all this pain achieves. So why require it, without alternatives or exceptions? Thus far I haven't found a compelling answer.

Andrew Hacker is an emeritus professor of political science at Queens College, City University of New York, and a co-author of "Higher Education? How Colleges Are Wasting Our Money and Failing Our Kids — and What We Can Do About It."