UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

Non ridere, non lugere, neque detestari, sed intellegere. Baruch Spinoza (1632-1677)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le lendemain, Aymery prit la ville. Victor Hugo (1802-1885)

Le séminaire TAD & IDD, animé par Yves Chevallard, a une double ambition solidaire : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment des professions de professeur, de formateur et de chercheur en didactique. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des praxéologies mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 16 h 30 à 18 h 30, la séance pouvant être suivie à distance par visioconférence.

➔ Séance 2 – Vendredi 15 février 2013

« MÉTHODOLOGIES » DE LA RECHERCHE EN DIDACTIQUE

1. Les questions du didacticien : un tableau

a) Il m'est arrivé de formuler de façons diverses la manière dont le didacticien questionne le monde. Je voudrais tenter ici de commencer à rassembler et, autant qu'il me sera possible, de mettre en cohérence ces abords divers d'une même réalité.

b) Je partirai pour cela des quatre *problématiques de la didactique*, que je suppose « bien connues », mais que je vais rappeler sommairement. La première est la problématique dite *primordiale*, consistant à explorer l'ensemble $\{\wp \ / \ \Im(\wp, \Pi_0, U_0)\}$ des entités praxéologiques $\wp$ pertinentes pour que l'instance U_0 puisse concevoir et mener à bien le projet Π_0. Cette problématique peut être formulée ainsi :

> Étant donné un projet d'activité Π_0 dans lequel telle institution ou telle personne U_0 envisage de s'engager, quel est, pour cette institution ou cette personne, l'équipement praxéologique $\{\wp\}$ qui peut être jugé indispensable ou simplement utile dans la conception et l'accomplissement de ce projet ?

Vous n'ignorez pas que j'ai donné, depuis plusieurs années, dans le cadre d'une unité d'enseignement optionnelle de la licence de sciences de l'éducation de l'Université d'Aix-Marseille, un enseignement intitulé *Éléments de didactique du développement durable* (EDDD), mini-enseignement qui représente seulement 7,5 heures de cours « en présence ». Cet enseignement m'a amené à formuler trois questions, ou plutôt trois *schémas* de questions. Dans ce qui suit, la lettre $\mathcal{A}$ désigne un domaine déterminé de l'activité humaine : on pourra songer ici, notamment, aux activités (dites ou prétendues) de « développement durable » aussi bien qu'aux activités (dites ou prétendues) « mathématiques ». Cela précisé, voici la formulation de la première de ces trois questions :

> Q^{∂}_1. Que sont ou que pourraient être les praxéologies personnelles et institutionnelles de $\mathcal{A}$? En d'autres termes, quels *types de tâches* T accomplir ? Et *comment*, c'est-à-dire selon quelles *techniques* τ ? Et encore *pourquoi*, c'est-à-dire en vertu de quelles *technologies* θ et de quelles *théories* Θ ?

On voit que si le « projet Π_0 » de la problématique primordiale a bien, dans la question Q^{∂}_1, un homologue – le « domaine d'activité $\mathcal{A}$ », auquel il s'agirait d'accéder –, « l'instance » U_0 (qui peut être une personne ou une institution), en revanche, n'y apparaît pas *explicitement*. La question Q^{∂}_1 a donc été complétée (récemment) par une autre question, que je note ici Q^{∂}_2. (Pour des raisons d'ordre de « découverte », elle a été notée Q^{∂}_3 dans le cours de didactique du développement durable que j'ai donné cette année.) La voici :

> Q^{∂}_2. Quelles positions p de quelles institutions I sont-elles concernées ou pourraient-elles l'être, dans des conditions adéquates, par quelles praxéologies $\wp$ du domaine d'activité $\mathcal{A}$?

La raison de cet ajout tient notamment à un fait massif : l'abord spontanément *individualiste* des questions de développement durable, sur lequel j'aurai l'occasion de revenir dans ce séminaire.

c) La problématique *duale* de la problématique *primordiale* est la problématique dite *interventionniste* : elle appelle l'étude de l'ensemble $\{\Pi \,/\, \Im(\wp_0, \Pi, U_0)\}$, en sorte qu'on peut l'énoncer ainsi :

> Étant donné une entité praxéologique $\wp_0$ et une personne ou une institution U_0, à la conception et à la réalisation par U_0 de quels projets Π l'entité $\wp_0$ peut-elle être utile ou indispensable ?

Cette problématique n'est pas « contenue » dans les questions Q_1^{∂} et Q_2^{∂}, où le domaine d'activité est en quelque sorte « bloqué » (leur formulation ayant eu pour visée le domaine @ du développement durable). On verra un peu plus loin que la situation est plus complexe cependant qu'elle apparaît jusqu'ici.

c) La problématique *de base* en didactique conduit à étudier les ensembles de la forme $\{C \,/\, \partial\vee\Re(K_0, C, \wp_0, U_0)\}$, en sorte qu'on peut l'énoncer ainsi :

> Étant donné certaines contraintes pesant sur telle institution ou telle personne, sous quelles conditions cette institution ou cette personne pourrait-elle intégrer à son équipement praxéologique telle entité praxéologique donnée ?

Il n'y a là rien que de classique en didactique, je le répète. On ne doit donc pas s'étonner de retrouver cette problématique dans le schéma de questions Q_3^{∂} annoncé plus haut, qui se formule ainsi :

> Q_3^{∂}. Par quels systèmes de conditions et de contraintes, c'est-à-dire à travers quelles successions de situations, telle praxéologie de @ parvient-elle ou pourrait-elle parvenir à s'intégrer à l'équipement praxéologique de telle institution ou de telle personne ?

La problématique de base en didactique admet également une problématique duale, dite problématique *possibiliste* qui conduit à étudier l'ensemble $\{\wp \,/\, \partial\vee\Re(K_0, C_0, \wp, U_0)\}$, et se laisse formuler ainsi :

> Étant donné un certain ensemble de contraintes et de conditions auxquelles telle institution ou telle personne est soumise, à quelles entités praxéologiques est-il possible que cette institution ou cette personne accède ?

Cette problématique n'a pas non plus d'homologue explicite dans le système des schémas de questions Q_1^{∂}, Q_2^{∂} et Q_3^{∂}. Toutefois, dans le cadre de l'enseignement de didactique du développement durable déjà mentionné, j'ai été conduit à mettre en avant les deux types de tâches suivants, dont les motifs de l'introduction devraient être évidents :

> T_1. Déterminer les effets d'un fonctionnement praxéologique donné (personnel ou institutionnel), sur tel ou tel complexe de systèmes.

T_2. Changer un fonctionnement praxéologique donné (personnel ou institutionnel) – et, en deçà, changer l'équipement praxéologique (personnel ou institutionnel) qu'il sollicite – pour modifier d'une façon déterminée l'état d'un complexe donné de systèmes.

À ces deux types de tâches correspondent les schémas de questions ci-après :

Q_{T_1}. Comment déterminer les effets d'un fonctionnement praxéologique donné (personnel ou institutionnel) sur tel ou tel complexe de systèmes ?

Q_{T_2}. Comment changer un fonctionnement praxéologique donné (personnel ou institutionnel) – et, en deçà, l'équipement praxéologique qu'il sollicite – pour modifier d'une façon déterminée l'état d'un complexe donné de systèmes ?

Ces questions ne sont pas sans lien avec les problématiques primales et duales rappelées dans ce qui précède. Considérons en effet ce qui est désigné ici comme les « effets d'un fonctionnement praxéologique donné (personnel ou institutionnel) sur tel ou tel complexe de systèmes ». Considérons alors un système didactique $S(X ; Y ; ♥)$, où l'enjeu didactique ♥ est une entité praxéologique $\wp_0$. Les conditions *C* créées notamment par *Y* et par *X* pour aider *X* à « apprendre » ♥ peuvent, de manière souvent non systématique mais effective, conduire *X* à rencontrer et à « apprendre » telle ou telle entité praxéologique $\wp^\# \neq \wp_0$, alors même que $\wp^\#$ *n'a pas* le statut d'enjeu didactique « officiel », non seulement dans la classe $(X ; Y)$ où s'est formé le système didactique $S(X ; Y ; ♥)$, mais même dans l'école qui lui sert d'habitat (et qui constitue « l'institution mandante » *proche* permettant à $S(X ; Y ; ♥)$ de se former et de fonctionner). Le phénomène est repéré sous une forme étendue dans le petit guide que j'ai utilisé pendant des années dans mon enseignement de « Didactique fondamentale » en licence de sciences de l'éducation et que je reproduis ci-après :

Σ_0. Quelle est l'institution mandante de $S(X ; Y ; ♥)$?
Σ_1. Qu'est-ce que *X* ?
Σ_2. Qu'est-ce que *Y* ?
Σ_3. Qu'est-ce que ♥ ?
Σ_4. Que font *X* et *Y* pour que *X* « apprenne » ♥ ?
Σ_5. Qu'est-ce que *X* aura-t-il pu apprendre, à court ou moyen terme, du fait du fonctionnement de $S(X ; Y ; ♥)$?
Σ_6. Qu'est-ce que *Y* et certains environnements éventuels de $S(X ; Y ; ♥)$ auront-ils pu apprendre, à court ou moyen terme, du fait du fonctionnement de $S(X ; Y ; ♥)$?

Σ_7. Quels changements le fonctionnement de $S(X\,;\, Y\,;\, \heartsuit)$ a-t-il pu apporter dans les conditions et les contraintes gouvernant son fonctionnement ultérieur ?

La question Σ_4 est clairement une version restreinte de la question Q_3^{∂} : elle participe de la problématique *de base* en didactique. Mais on aperçoit en outre, dans les questions Σ_5 à Σ_7, une part non négligeable de ce qui est explicité dans la question Q_{T_1}, du moins lorsque l'équipement praxéologique dont le fonctionnement est mentionné est l'équipement *didactique* (relatif à $\heartsuit$) de X, de Y et finalement du système didactique $S(X\,;\, Y\,;\, \heartsuit)$. De semblables remarques pourraient être faites à propos de la question Q_{T_2} ; mais alors que le cas évoqué par Q_{T_1} ainsi particularisé renvoie à une *analyse* didactique, le cas évoqué par Q_{T_2}, particularisé à l'équipement didactique d'une personne ou d'une institution, renverrait, lui, à une opération d'*ingénierie* ou de *design* didactique.

2. Les objets du didacticien : une esquisse

a) Le questionnement didacticien du monde porte sur de multiples *objets*, qui sont des *œuvres*, et notamment des *entités praxéologiques* $\wp$ et des *institutions I*, ainsi que sur des *personnes x*, *y*, etc., qui sont les *acteurs* de ces institutions – mais qui, nous le savons, ne se réduisent pas à être de tels acteurs, purs sujets supposés dans l'imaginaire de l'institution considérée. Pour des raisons de clarté, j'ai désigné ailleurs le *chercheur* en didactique « générique » par la lettre grecque ξ (Xi ou ksi), la 14[e] de l'alphabet grec ; et par la lettre ζ (Dzêta ou Zêta), la 6[e] du même alphabet, *l'aide à l'étude* « générique » du chercheur ξ (par exemple le directeur de thèse de l'apprenti chercheur ξ), en sorte que le système didactique de recherche en didactique à propos d'une question Q s'écrit génériquement $S(\Xi\,;\, \mathrm{Z}\,;\, Q)$, où Ξ et Z sont les majuscules de ξ et ζ respectivement, tandis que le schéma herbartien peut alors s'écrire :

$$[S(\Xi\,;\, \mathrm{Z}\,;\, Q) \curvearrowright \{ R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, Q_{n+1}, Q_{n+2}, \ldots\, Q_m, O_{m+1}, O_{m+2}, \ldots\, O_p\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}.$$

Le problème du rapport que le chercheur ξ doit se donner – au prix de grands efforts en général ! – à tel ou tel objet qu'il rencontre dans ses recherches est *de son entière responsabilité*. Sauf exception, au demeurant, il ne saurait être *un démarquage d'un rapport institutionnel allogène*. Cela vaut bien entendu pour l'ensemble des objets rencontrés, y compris les objets qui apparaissent comme enjeux didactiques dans le domaine de la didactique où opère ξ – par exemple les objets *mathématiques* si ξ travaille en didactique des mathématiques.

b) Je l'ai suggéré plus haut, on peut, sans appauvrissement, simplifier le champ de la clinique didactique que se donne ξ en y distinguant *trois* grands types d'objets : tout d'abord des *entités praxéologiques* $\wp$, ensuite des *institutions I*, enfin des *personnes x*, *y*, ξ, ζ, etc. Bien entendu, toutes ces réalités sont abordées avec les outils désormais classiques de la TAD, qui permettent l'analyse praxéologique d'une réalité donnée, qui distinguent des *positions* à l'intérieur des institutions et reconnaissent à une personne donnée une pluralité dynamique d'*assujettissements institutionnels*, à quoi s'ajoute l'*échelle des niveaux de codétermination didactique* que j'écrirai ainsi (dans une forme simplifiée, qui ignore l'existence de paradigmes de l'étude distincts) :

Humanité
↓↑
Civilisations
↓↑
Sociétés
↓↑
Écoles
↓↑
Pédagogies
↓↑
Systèmes didactiques

Bien entendu, d'autres entités doivent être évoquées en fonction des situations de recherche. Je vais y revenir, mais je voudrais maintenant m'engager plus avant dans une voie que nous avions empruntée brièvement lors de la séance précédente.

3. Le didacticien, ses objets d'étude et la contingence

a) Le « commerce » du didacticien ξ avec ses objets d'étude peut prendre des formes diverses. La forme la plus simple est sans doute celle où ξ observe l'objet « de loin », en quelque sorte « à l'insu » de cet objet, où, donc, ξ est un pur spectateur au regard de l'objet en question. Ainsi en va-t-il lorsque ξ travaille sur des documents écrits, voire sur des documents audio-visuels, issus de l'activité d'un système et auxquels il peut avoir accès sans qu'aucun des acteurs du système n'en soit informé. Avant d'illustrer et de commenter ce cas, je voudrais citer des auteurs, qui sont des sociologues – il s'agit de Stéphane Beaud et Florence Weber –, et qui ont écrit un *Guide de l'enquête de terrain* (La Découverte, 2010) où ils soulignent ceci :

> On s'aperçoit, lorsque l'on veut faire effectuer à des étudiants un travail ethnographique, que leur premier réflexe est toujours de choisir un objet où ils peuvent observer à distance, ne pas être pris dans des interactions, observer à couvert, ne pas avoir à s'impliquer dans des relations personnelles, à justifier leur présence. C'est cette crainte qui explique le choix spontané des lieux publics comme thème d'enquête, des interactions anonymes, entre inconnus : le modèle du genre est le (grand) café, mais on peut aussi citer les grands magasins, les *fast food*, les gares, des lieux de passage où les interactions sont sans lendemain, c'est-à-dire sans conséquences. Ce sont surtout des lieux où l'enquêteur peut passer inaperçu, ce qui révèle bien la situation d'enquête rêvée par les étudiants : celle qui permet à l'enquêteur débutant de rester à l'écart, observant de loin, sans risque de contamination par la situation sociale, dans une position de parfaite « neutralité ». (pp. 31-32)

Il est compréhensible que ξ profite des situations dont il est en quelque sorte un « pur spectateur », où tout le commerce qu'il entretient avec son objet d'étude consiste à le regarder sans en être vu, et même sans être vu, tout court, et de même à l'écouter sans (en) être entendu. En ce cas, pense-t-on à juste titre, ξ n'altèrera pas la « scène didactique »… Le problème est que ξ ignore généralement, au moins en partie, *les conditions et les contraintes* sous lesquelles ont été produits *les faits et les dits des acteurs* de la situation observée : *il ignore quelles conditions ou contraintes déterminent ces faits et ces dits*. Sans doute ξ voit-il ce qui est (sauf à commettre une bévue) et a-t-il connaissance de ce qui se dit (ou s'écrit) ; mais il ignore *ce qui a fait qu'il en a été ainsi qu'il a pu l'observer*, incognito, en sorte que son intelligence de la situation s'en trouve peut-être faussée. C'est là un obstacle toujours présent, potentiellement, et qu'il ne faut pas ignorer, quand bien même on doit prendre le risque (inévitable) d'une interprétation ou d'un système d'interprétations qui pourraient se révéler biaisées.

b) En didactique de la langue française, il est un domaine fort négligé, celui de la *prononciation* du français : ce n'est pas la première fois que nous y venons. La transmission des manières correctes ou, du moins, *admissibles*, de prononcer le français est une exigence elle aussi fort négligée de la formation des professeurs. Cela soulève évidemment une question qui relève de la problématique *primordiale* : quel équipement praxéologique en matière de prononciation du français est-il utile, voire indispensable, de maîtriser pour concevoir adéquatement et réaliser de façon satisfaisante le projet d'enseigner (les mathématiques par exemple) ? Je reprends ici un exemple qui n'est certes qu'un détail, mais un détail révélateur, que j'ai au reste déjà donné dans le Séminaire TAD/IDD de l'année 2008-2009 et encore dans celui de l'année dernière : l'emploi du *e* ouvert ou fermé. Le passage suivant de l'ouvrage de Maurice Grammont (1866-1946) intitulé *La prononciation* *française. Traité pratique*, paru en 1914 et consulté ici dans son édition de 1966, précise ceci :

> [Lorsque l'*e* fermé] est écrit –*ai*, il est fermé dans toutes les formes verbales, comme
>
> j'ai, j'aurai, je donnerai,
>
> mais dans une seule forme nominale avec ses quatre graphies :
>
> gai, gaie, gais, gaies.
>
> Écrit –*ais* ou –*ait*, il n'est fermé que dans les formes verbales *sais*, *sait*, *vais*. (p. 40)

On doit donc dire, selon Grammont, « Demain, quoiqu'il arrive, je *partiré* » et non « je *partirè* ». On doit dire aussi – à suivre Grammont, toujours – « je *sé* », « tu *sé* », « il *sé* » ; et aussi « je *vé* ». Et puis on devrait dire encore « Ce jeune homme me semble bien *gué* », c'est-à-dire joyeux, alors même que l'expression « être gay », qui appartient au français modernerisé, se prononcerait, on le verra, « être *guè* » : les deux adjectifs, non homographes, seraient donc aussi, *en principe*, non homophones. Ici, c'est la *prononciation* de certains mots qui est en cause. Comment donc vérifier ce qu'affirme Grammont ? Il existe à cela une première réponse très simple : on peut consulter des dictionnaires du français ou des dictionnaires français-anglais par exemple (car les dictionnaires du français les plus simples omettent souvent de préciser la prononciation des mots dont ils font leurs entrées). En l'espèce, les quelques dictionnaires que j'ai pu consulter donnent tous [ge], et non pas [gɛ], pour prononciation de l'adjectif *gai* : ils se conforment donc à l'indication donnée par Grammont. Un dictionnaire français-anglais assez récent pour posséder une entrée *gay* dans la partie française – il s'agit du Robert & Collins de 1987 – indique ceci :

> gay* [gɛ] **1** *adj* gay. **certains établissements ~s de Paris** some gay meeting places in Paris. **2** *nm* gay.

Mais les choses évoluent ; le *Trésor linguistique de la langue française informatisé*, déjà cité l'an dernier, indique en effet ceci à l'entrée *Gai* :

> **Prononc. et Orth. :** [ge], [gɛ]. Le masc. et le fém. sont parfois donnés comme distincts, quant à la durée et/ou quant au timbre de la voyelle : [e~ɛ:] (FÉR. 1768, FÉR. *Crit.* t. 2 1787), [e~e:] (NOD. 1844, LITTRÉ), [ɛ~e:] (GATTEL 1841). Voir, en dernier lieu, ROUSS.-LACL. 1927, p. 141 : « *gaie* a un *e* fermé comme le masc. à Paris, un *e* ouvert en province. » Forme en [ɛ] en progrès, tous genres confondus, « sous l'influence de l'écriture » (BUBEN 11935 § 5). MARTINET-WALTER : [ge] ou [gɛ] (9 et 8). Ds *Ac.* dep. 1694.

L'écoute attentive mais non systématique de nos contemporains ne permet guère de trancher : beaucoup n'ont que des *e* fermés (et pas seulement lorsqu'ils sont originaires du Midi de la France), tandis que d'autres ont tous leurs *e* ouverts (y compris, donc, dans *gai*). Pour retrouver la prononciation *fermée* indiquée par Grammont et par les dictionnaires, on peut tenter de *remonter dans le temps*, en utilisant des *enregistrements sonores* anciens dont on peut penser qu'ils n'ont pas été réalisés pour donner raison ou pour donner tort à Maurice Grammont ! Je prendrai ici l'exemple d'un enregistrement par la chanteuse Damia (Louise-Marie Damien, 1889-1978, voir ci-contre) d'une chanson qui eut son heure de gloire : « La guinguette a fermé ses volets ». Voici d'abord le texte de la chanson, où j'ai souligné certains *e* en principe *ouverts* et fait apparaître en italique l'unique occurrence de l'adjectif *gai* :

> La guinguette a fermé ses volets / Les joyeux triolets / De l'accordéon fusent / On voit comme sur un écran / Des profils inquiétants / Dont les ombres s'amusent. / On dit que pourtant un costaud, / Qui frisa l'échafaud / Pour des vendus qui rusent, / Vient d'entrer rageur. / En vengeur, / Oui, mais / La guinguette a fermé ses volets // Le rythme des pas incertains / Soudain, / Serait-ce l'heure ? / Et dans l'accordéon plaintif, / Craintif, un son demeure... / Des jurons de voix mâles / Et des râles, / La chute de corps lourds / hargneux, des coups sourds // La guinguette a fermé ses volets / Le même son inquiet / De l'accordéon glace. / On voit, comme sur un écran, / Des couples haletants / Dont les ombres grimacent, / On devine, aux chocs, la fureur / Des costauds en sueur / Qui roulent et s'enlacent, / On voudrait bien voir / Et savoir / Oui, mais... / La guinguette a fermé ses volets // Le calme revient brusquement. / Vraiment, / Était-ce un leurre ? / Pourquoi ces sanglots convulsifs, / Furtifs ?... / Des femmes pleurent. / Là-bas, un couple traîne / Vers la Seine / Quelque paquet maudit ! / Qui sombre en la nuit... // La guinguette a rouvert ses volets. / Les joyeux triolets / De l'accordéon fusent / Les lampions éclairent, discrets, / Les couples guillerets / En leurs ombres confuses. / On dit que ce soir, le costaud, / Qui frisa l'échafaud / Pour des vendus qui rusent, / Est sorti très *gai*. / Est-ce vrai ? / Oui, mais... / La guinguette avait mis ses volets.

Les paroles sont de Georges Swingek, la musique de Léon Montagné ; la chanson est de 1935, année où Damia l'enregistre. (La date de 1935 paraît plus probable que celle de 1934, donnée sur l'enregistrement que l'on trouvera à l'adresse http://www.youtube.com/watch?v=On5qXnwYOsI.) Chez Damia, les *e* ouverts sont très ouverts et le contraste avec les *e* fermés est donc, sauf exception, très net. La dernière strophe de la chanson permet de saisir ce contraste : on y dit qu'un « costaud qui frisa l'échafaud » « est sorti très *gai* / oui mais… / la guinguette a fermé ses volets ». Il apparaît

alors que Damia suit bien, sans ambiguïté aucune, la règle indiquée par Grammont. On trouve encore sur le Web un enregistrement d'une autre chanteuse naguère fort connue, Georgette Plana (née en 1917), qui, pour l'émission télévisée « Le palmarès des chansons », chante cette même chanson, en direct et en public, le 21 avril 1966, accompagnée par l'accordéoniste Aimable et par l'orchestre de Raymond Lefèvre. Plus de trente ans après Damia, Georgette Plana se conforme exactement aux règles rappelées par Maurice Grammont (voir http://www.youtube.com/watch?v=NyxHVUkDw9w). On notera en passant que Georgette Plana modifie un peu le texte original, notamment en le modernerisant : le costaud dont il est question ne *frisa* pas l'échafaud, mais *risqua* l'échafaud ; le paquet maudit ne sombre pas *en la nuit* mais *dans la nuit*. Pourtant, à l'instar de Damia, elle respecte encore les *h* aspirés : les deux chanteuses font une liaison marquée dans *profils inquiétants* et n'en font pas dans *couples haletants*.

c) Tout cela *semble* conforter la leçon de Grammont et des dictionnaires consultés : dans le français « standard », on prononçait bien le mot *gai*, « autrefois », *gué* et non pas *guè*. Mais nous nous trouvons alors devant un *problème très général* touchant les praxéologies de recherche et, plus précisément, les praxéologies qui gouvernent ou devraient gouverner le rapport de ξ à l'empirie et à la contingence : deux milieux « adidactiques », deux « cas » – constitués par les enregistrements de Damia et de Georgette Plana – suffisent-ils à emporter la conviction qu'il en était bien ainsi ? Supposons que nous disposions de cent « cas » au lieu de deux : le problème se poserait aussi, bien que moins nettement. D'une façon générale, et comme je l'ai dit plus haut, il faut invoquer, ici, *l'analyse des conditions et des contraintes*, qui affaiblit ou conforte les conclusions du message qu'un milieu consulté délivre. Ne se pourrait-il pas, par exemple, que nos chanteuses aient eu une manière de prononcer *en chantant* et une autre manière de prononcer *en parlant* ? (On sait que longtemps les chanteurs ont *roulé* certains *r*, par exemple : voir plus loin le cas de la chanteuse Fréhel.) Georgette Plana est née le 4 juillet 1917 à Agen. Sa notice dans *Wikipédia* indique qu'elle « débute comme danseuse de music-hall à Bordeaux, puis monte à Paris en 1941 comme chanteuse ». Son accent « d'origine », qui devrait avoir été un « accent d'oc », n'est sans doute pas celui des titis parisiens ! Sa prononciation « publique », peut-on penser encore, est *apprise* et peut-être même forcée, même si elle a pu devenir avec le temps une seconde nature : la même notice de *Wikipédia* ne dit-elle pas que la chanteuse agenaise « obtient un grand succès populaire avec son entrain et son timbre gouailleur » ? Son « accent d'oïl », quand elle chante, est-il spontané, comme c'était sans doute le cas de Fréhel (1891-1951), née et morte à Paris, dont au début de sa carrière parisienne Georgette Plana reprend certains succès ? (À titre d'exemple, on pourra trouver l'interprétation par Fréhel de la célèbre « Java bleue » à l'adresse suivante : http://www.youtube.com/watch?v=4XoRwFFJ28M.) Par ailleurs, Georgette Plana n'est-elle pas influencée, dans son interprétation de 1966, par son illustre aînée, Damia ? À l'heure où ces lignes sont écrites, Georgette Plana est toujours de ce monde : elle aura 96 ans le 4 juillet 2013. Prononce-t-elle encore *gué* comme en 1966 ? Ou bien, parce qu'elle vit en régionparisienne, a-t-elle avec le temps modernerisé sa prononciation ? Autant de questions qu'engendre la question initiale. Je noterai seulement, pour conclure provisoirement, que, dans leur livre *La prononciation du français* (Nathan, 1997), Monique et Pierre Léon notent ceci :

> … dans la communication ordinaire, il y a des Français pour qui le AI de *lirai* (é) est différent de celui de *lirais* (è). Pour eux, il s'agit de deux phonèmes ayant une fonction *distinctive*. On dira encore qu'ils ont un rôle *phonologique* (on dit aussi *phonémique*). Pour d'autres, cette différence n'existe pas et, s'ils la remarquent, ils l'interpréteront comme une variante individuelle, régionale ou stylistique d'un même phonème. (p. 10)

Pour ces auteurs, il apparaît donc que ce qui était hier – chez Grammont – la *norme* aurait aujourd'hui perdu son statut pour devenir une *variante* sémantiquement improductive parmi d'autres également possibles…

d) Il existe une large catégorie de situations où ξ peut faire son profit de documents écrits, sonores ou filmés « tout faits », disponibles sur Internet (à l'instar des enregistrements considérés dans ce qui précède) ou dans des ouvrages publiés (tels des livres scolaires ou parascolaires). Je ne prendrai ici qu'un exemple, tout différent de ce qui précède. Lisant un recueil de textes réunis par le mathématicien Misha Gromov (lauréat du prix Abel en 2009), ouvrage intitulé *Introduction aux mystères* (Actes sud/Fondation *Cartier* pour l'art contemporain, 2012), je tombe sur cet extrait du *Discours concernant deux sciences nouvelles* de Galilée (1564-1642) :

> Qui ne voit qu'un cheval se rompra les os, s'il tombe d'une hauteur de trois ou quatre coudées, mais qu'un chien, dans les mêmes conditions, ou un chat tombant d'une hauteur de huit ou dix coudées, ne se feront aucun mal, pas plus qu'un grillon lâché d'une tour ou une fourmi se précipitant depuis l'orbe lunaire ? […] Et comme les animaux plus petits sont proportionnellement plus robustes et plus forts que les plus grands, de même les plantes plus petites se soutiennent mieux ; vous comprenez tous deux désormais, je pense, qu'un

> chêne haut de deux cents coudées serait incapable de porter ses branches si elles se trouvaient disposées comme elles le sont sur un arbre de taille moyenne, que la nature ne saurait faire un cheval grand comme vingt chevaux, ni un géant dix fois plus grand qu'un homme ordinaire : il y faudrait un miracle ou alors altérer fortement les proportions des membres, notamment des os, et les accroître bien au-delà de ce que demanderait la seule symétrie.

Gromov apporte alors ce commentaire :

> La science de l'allométrie, à la naissance de laquelle vous assistez en lisant les lignes ci-[dessus], nous déconcerte encore par certains de ses résultats. Par exemple : pourquoi le taux métabolique R d'un animal de masse M suit-il étroitement la loi des 3/4 de Kleiber, $R \sim M^{3/4}$? Galilée serait ravi de réfléchir à cela.

La question de l'allométrie est une « grande question », proche certainement des *questions ombilicales* de la scolarité obligatoire, socle de la formation du futur citoyen si l'on se situe dans le paradigme du questionnement du monde. Dans son livre *Why size Matters. From bacteria to blue whales* (Princeton University Press, 2006), John Tyler Bonner, professeur au département d'écologie et de biologie évolutionniste de l'université de Princeton, note ainsi : « An examination of the effects of size is a way of bringing all life together » (p. X). Il écrit un peu plus loin :

> Size dictates the characteristics of all living forms. It is the supreme and universal determinant of what any organism can be and can do. Therefore, why is it a subject that always resides in the wings rather than center stage? (pp. 3-4)

Il semble en tout cas que ce « sujet » demeure jusqu'à aujourd'hui largement étranger aux programmes de l'Éducation nationale française. Par contraste, le Web regorge de documents sur cette question : les lecteurs intéressés pourront, bien sûr, commencer par ce que propose là-dessus l'encyclopédie *Wikipedia*. On pourrait en outre analyser des documents à visée didactique tel l'exposé de Stephen Trombulak (1991) intitulé *Allometry in Biological Systems* (http://www.ableweb.org/volumes/vol-12/3-trombulak.pdf). On pourra aussi examiner les « interventions » du concept d'allométrie en divers contextes, tel celui exploré dans l'article en ligne (signé de Michael Batty et al.) intitulé tout aussi explicitement *Geometric scaling and allometry in large cities* (http://www.spacesyntaxistanbul.itu.edu.tr/papers%5Cinvitedpapers%5Cbatty_carlavho_hudsonsmith_milton_smith_steadman.pdf). Mais je m'arrêterai ici sur un autre document, contenant un échange entre deux intervenants sur un forum de vulgarisation scientifique en ligne (http://forums.futura-sciences.com/physique/414375-loi-de-kleiber.html) :

Loi de Kleiber

Bonjour à tous,

Je suis tombé sur un document très intéressant sur les facteurs d'échelles : http://www.rpn.ch/lddr/physique/doss...eurEchelle.pdf (je me demandais justement comment un taux d'oxygène plus important dans l'air du paléozoïque avait permis l'augmentation de la taille des insectes), mais il y a un argument dans l'interprétation de la loi de Kleiber (page 5) que je ne vois pas comment justifier : d est proportionnel à $l^{3/2}$ (avec d le diamètre du muscle et l sa longueur).

Quelqu'un aurait une justification sous la main ?

Merci d'avance,
Phys2

Re : Loi de Kleiber

> *mais il y a un argument dans l'interprétation de la loi de Kleiber (page 5) que je ne vois pas comment justifier : d est proportionnel à $l^{3/2}$ (avec d le diamètre du muscle et l sa longueur).*

Bonjour,
moi non plus, surtout que lorsqu'on lit la ligne suivante, on en déduit que d varie comme $l^{3/4}$

eric

Re : Loi de Kleiber

Je ne vois pas où est marquée cette affirmation

Re : Loi de Kleiber

> Envoyé par **Phys2**
>
> *Je ne vois pas où est marquée cette affirmation*

A la ligne suivante, on lit : $l \cdot d^2 = d^{\frac{8}{3}}$
On en déduit $d = l^{\frac{3}{4}}$
Non?

Re : Loi de Kleiber

Pour moi $l = kd^{8/3-2} = kd^{2/3}$, d'où $d = k' l^{3/2}$

Re : Loi de Kleiber

Ahem... oui!!
Désolé...

eric

Le document auquel se réfèrent les deux intervenants est le chapitre 1, intitulé « Facteurs d'échelle » (qu'on trouvera à l'adresse suivante :

http://www.rpn.ch/lddr/physique/dossierMatiere/listeprofs/denise/OC_physique/pdfs/Chapitre1_FacteurEchelle.pdf) d'un cours sur le corps humain (http://www.rpn.ch/lddr/physique/dossierMatiere/listeprofs/denise/OC_physique/OC.html) dû à Denise Bovet, alors professeure de physique au lycée Denis-de-Rougemont de Neuchâtel. Le passage auquel fait référence le premier intervenant semble être le suivant :

> Lien entre ℓ et $s = \pi \frac{d^2}{4}$: les contraintes mécaniques font que $d \propto \ell^{3/2}$.
> La masse de l'animal est proportionnelle à son volume: $M \propto \ell \cdot d^2 = d^{8/3}$ soit $d \propto M^{3/8}$. Donc la puissance s'écrit:
> $P \propto s \propto d^2 \propto (M^{3/8}) = M^{3/4} = M^{0.75}$ ce qui confirme la relation mise en évidence expérimentalement (loi de Kleiber).

On notera que, là où la professeure utilise une vieille connaissance – le symbole de proportionnalité $\propto$ – pour noter des relations de *proportionnalité*, les intervenants reviennent, eux, à des *égalités*. En vérité, l'écriture du cours

$$M \propto \ell \cdot d^2 = d^{8/3}$$

qui s'appuie sur la proportionnalité $d \propto \ell^{3/2}$, ou plutôt sur la proportionnalité « inverse », $\ell \propto d^{2/3}$, devrait être réécrite sous la forme suivante :

$$M \propto \ell \cdot d^2 \propto d^{2/3} \cdot d^2 = d^{8/3}, \text{ en sorte que } M \propto d^{8/3}.$$

Le signe d'égalité utilisé par la professeure est, à strictement parler, fautif. Mais on observera surtout que les intervenants, qu'on peut supposer être des étudiants français (à l'époque, en 2010, le premier est âgé de 21 ans), sans doute peu familiers du « calcul de proportionnalité », reviennent à des égalités, le premier en substituant sans façon le signe d'égalité (=) au signe de proportionnalité ($\propto$), le second en prenant soin d'introduire un coefficient de proportionnalité (y compris à l'endroit où la professeure, elle, omet de le faire ou d'utiliser un signe de proportionnalité). Cette simple observation permet de *risquer* les conjectures suivantes : l'équipement *mathématique* utile pour aborder les phénomènes d'allométrie gagne *notamment* à contenir

1) le calcul de proportionnalité (les lois de manipulation du symbole $\propto$) ;
2) le calcul des puissances fractionnaires.

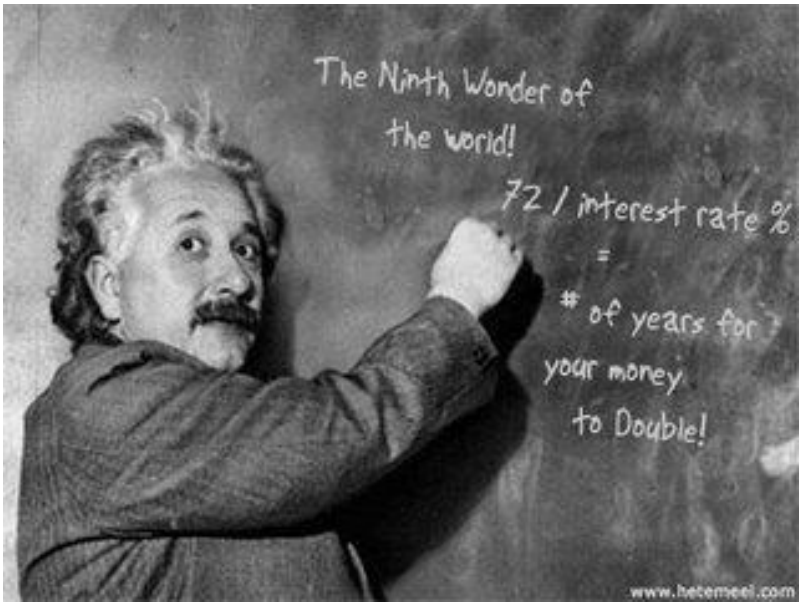
Il est vraisemblable que ce sont là deux ingrédients mathématiques fréquemment utiles dans certains domaines élémentaires des sciences de la nature. Bien d'autres documents pourraient l'attester.

4. Le didacticien et les contingences du rapport à l'empirie

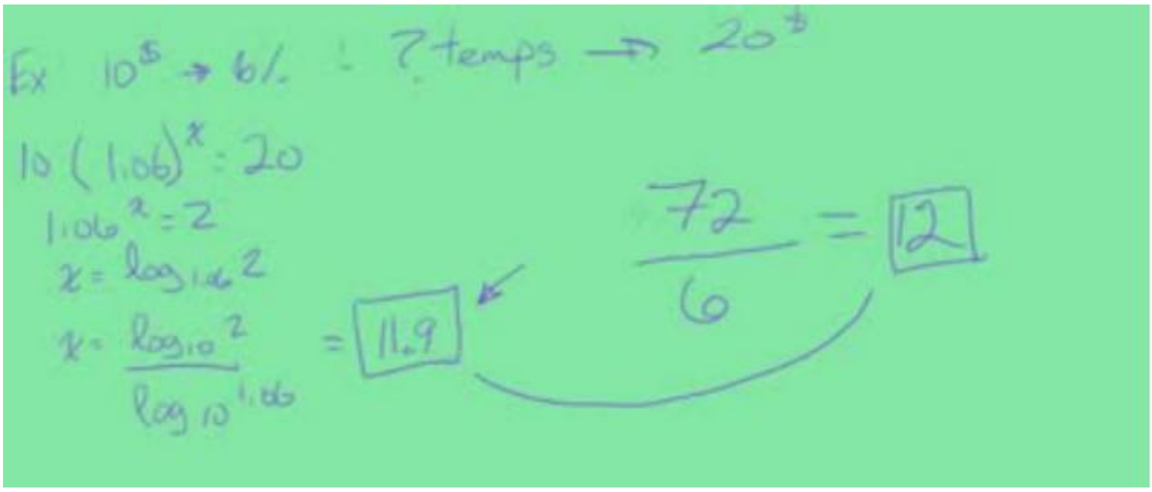
a) Je laisserai de côté – pour le moment – la question de l'allométrie. J'ajoute que le lecteur intéressé trouvera sur Internet une foule d'informations sur Max Kleiber (1893-1976) et sur la « loi » qui porte son nom. Cela dit, la facilité d'accès aux documents sonores ou écrits que nous avons visités jusqu'ici ne doit pas cacher que l'accès à de tels documents est aujourd'hui grandement facilité par Internet, même s'il suffit parfois d'un rien pour que l'on ne trouve pas ce que l'on y cherche. Nous sommes donc soumis aux contingences des données accessibles sur Internet ; et, bien sûr, à notre capacité à y accéder lorsque ces données s'y trouvent.

b) On aura noté que le premier intervenant de l'échange examiné ci-dessus avait bien *une question en cours d'étude*, une question *génératrice*, lorsqu'il s'est résolu à rechercher de l'aide sur un forum : « Je me demandais justement, écrit-il, comment un taux d'oxygène plus important dans l'air du paléozoïque avait permis l'augmentation de la taille des insectes. » (Le paléozoïque est « l'ère primaire », qui dura d'environ −542 à −250 millions d'années, dit-on.) On laissera cette question de côté aussi, pour revenir à une question mentionnée lors de la première séance de ce séminaire : d'où Hervé Kempf a-t-il tiré la règle approchée selon laquelle « une quantité qui croît de N % par an *double* en un nombre d'années égal au quotient de la division de 75 par N » ; et aussi : pourquoi l'a-t-il fait ?

c) Dans un tel cas, il est souvent possible de trouver l'origine de l'entité praxéologique objet de l'enquête dans une certaine tradition de diffusion scolaire-universitaire qui peut être soit *dominante* et bien visible (elle fait ou elle a fait classiquement l'objet d'un enseignement scolaire, dans l'enseignement général ou dans l'enseignement technique ou professionnel), soit *dominée* et à peu près invisible au premier regard (elle demeure confinée dans un domaine qui échappe à l'observateur « non initié »). Le moteur de recherche Google ne semble rien donner qui corresponde à ce qu'on pourrait appeler la « règle de 75 » (il existe une telle règle – une « rule of 75 » – aux États-Unis, mais elle a trait aux mécanismes de calcul des pensions de retraite). En revanche, la requête "règle de 72" suscite un certain nombre de réponses. Le nombre de résultats annoncé par Google le 3 février 2013, à savoir 9790, apparaît relativement faible. En outre, nombre des réponses à la requête "règle de 72" proviennent de Nord-Américains de langue française, comme l'illustrent les deux vidéos mentionnées ci-après, que l'on invite le lecteur à visionner afin de suivre le développement de notre enquête. Par contraste, la requête "rule of 72" met en évidence la bien plus grande diffusion de la règle de 72 dans le monde anglophone (Google annonce cette fois 3 390 000 résultats). La popularité de cette règle a même suscité une légende urbaine selon laquelle Einstein l'aurait inventée (ou du moins popularisée), parlant à son endroit de 8^{e} (ou de 9^{e}) merveille du monde, comme l'illustre le photomontage ci-après, lequel apparaît de multiples fois sur l'Internet (pour un exemple parmi d'autres, voir http://www.finir-riche.net/Blogue/images/einstein-72.jpg) :

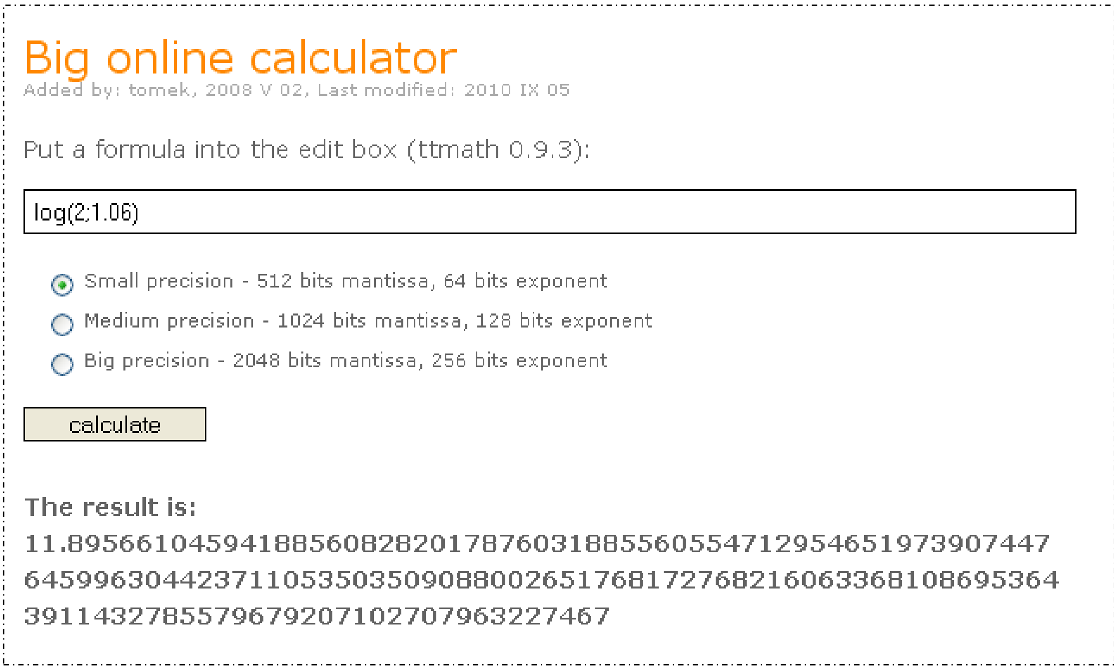


http://www.youtube.com/watch?v=sGFnvDXzwcs



http://www.youtube.com/watch?v=g-FK1HPmhI8

Notons encore, en relation avec le contenu de la seconde vidéo ci-dessus relative à la règle de 72, que le *Big Online Calculator* permet le calcul de logarithmes en toute base ; on a ainsi :



c) L'enquête relative à la « règle de Kempf » n'a guère progressé jusqu'ici – à ceci près que l'évidente non-diffusion de la règle de 72 en France est une condition favorisant le recours à une *autre* règle. Mais où Kempf a-t-il trouvé cette autre règle ? Faute de mieux, je me suis décidé à lui écrire ; voici le texte du courriel que je lui ai adressé le 19 janvier 2013 (j'y ai souligné, pour les mettre en évidence, les questions posées au destinataire) :

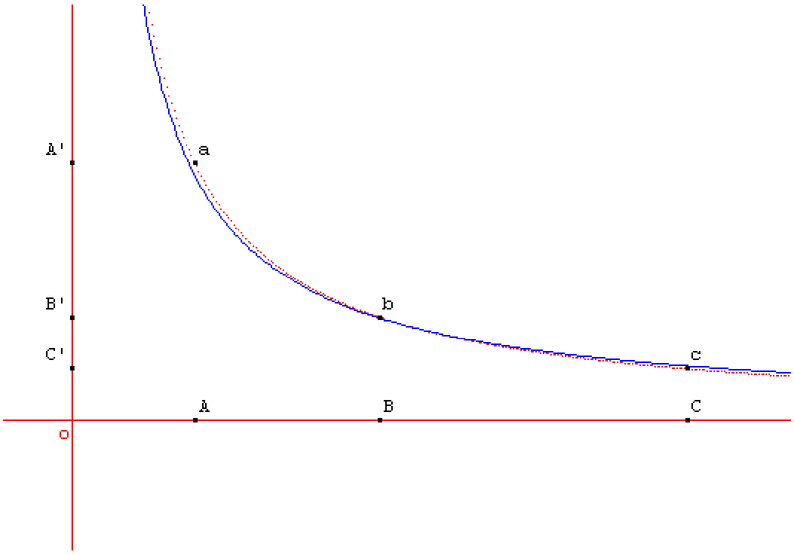
> Cher Monsieur,
> Je lis avec un grand intérêt vos multiples écrits, qui m'apparaissent toujours très informés, instructifs et clairement argumentés. Je me permets de vous écrire aujourd'hui à propos d'un détail bien prosaïque contenu dans votre livre récent, *Fin de l'Occident, naissance du monde*. À la page 40 de cet ouvrage, vous précisez qu'« une quantité qui croît de N % par an double en un nombre d'années égal au quotient de la division de 75 par N ». Engagé actuellement dans une recherche sur les « formations et activités potentiellement utilisatrices de mathématiques » (sujet sur lequel je dirige également une thèse), je souhaiterais simplement vous poser les questions suivantes : *quelle est la source (ou la référence) de la règle que vous énoncez ? Où et quand, dans quelles circonstances, l'avez-vous « trouvée », apprise, découverte ? Avez-vous hésité, en tenant compte de votre lectorat par exemple, entre cette règle et d'autres règles approchées, par exemple celle, en apparence mieux connue, dite « règle de 72 »* (à laquelle l'encyclopédie *Wikipedia* consacre un article fouillé à l'entrée « Rule of 72 ») ? Je serais très heureux si vous vouliez bien consacrer

quelques instants de votre activité, que j'imagine intense, à me faire connaître vos réponses et vos commentaires éventuels à ces questions. Soyez-en par avance remercié !
Bien à vous, etc.

On peut penser qu'il s'agit là d'une demande comme on en reçoit peu. (Les didacticiens ont, jusqu'à présent, conduit peu d'enquêtes didactiques « ouvertes » comme celle-ci, me semble-t-il.) Hervé Kempf m'a répondu par un courriel du 28 janvier 2013 dont voici le texte :

Bonjour,
Merci de votre intérêt pour « fin de l'Occident, naissance du monde ».
J'ai trouvé la règle « de 75 » dans le livre de Jean Fourastié, « Les Trente glorieuses » (Livre de poche, collection Pluriel, 1979), p. 250.
J'ai lu ce livre, et comme beaucoup de remarques intéressantes de Fourastié, j'ai retenu cette règle, qui est ensuite venue assez naturellement nourrir la réflexion sur la croissance et l'écologie.
Je ne connaissais pas la « rule of 72 », et en lisant l'article de Wikipedia, elle me parait plus compliquée que celle de Fourastié, qui était un bon statisticien, mais aussi un excellent vulgarisateur.
Avec mes meilleures salutations
Hervé Kempf

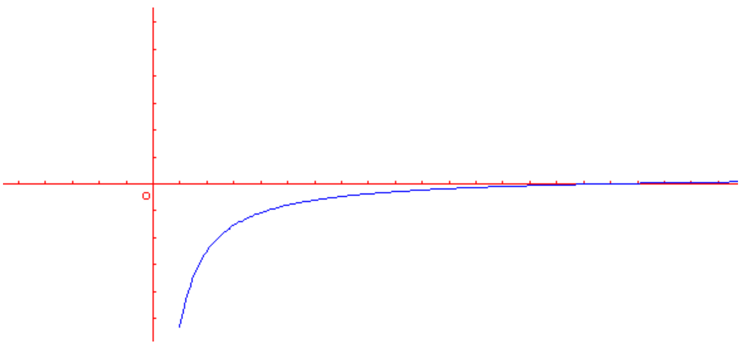
Cette réponse est précieuse. Je la commenterai en désignant quelquefois par la lettre grecque κ (kappa) son auteur. Il me semble qu'il faut d'abord souligner un fait remarquable (mais qui, à vrai dire, ne m'a guère étonné) : κ sait dire exactement où (et, implicitement, quand) il a rencontré la règle de 75 : dans un ouvrage célèbre de l'économiste Jean Fourastié (1907-1990) intitulé *Les Trente glorieuses* (plus complètement : *Les Trente glorieuses, ou la révolution invisible de 1946 à 1975*), paru chez Fayard en 1979. Kempf précise : page 250. Une des phrases clés de la réponse qu'il formule est celle-ci : « comme beaucoup de remarques intéressantes de Fourastié, j'ai retenu cette règle, qui est ensuite venue assez naturellement nourrir la réflexion sur la croissance et l'écologie ». La règle de 75, à l'instar de la règle de 72, est en effet un outil adéquat quand on réfléchit à la croissance, à la croissance *de tout*, parce qu'elle concrétise ce que Rostow appelait *the powerful arithmetic of compound interest*. Comme on l'a vu, lorsqu'une entité augmente de 6 % l'an, elle doublera en quelque 12 ans (la règle de 75 donne 12,5 ans, le calcul exact, on l'a vu, fournit 11,89566…). Lorsqu'on réfléchit aux phénomènes de croissance dans une optique plus ou moins « décroissanciste », l'approximation par *excès* obtenue suffit : en quelque 25 ans, peut-on estimer ainsi, l'entité aura quadruplé, etc. En d'autres termes, la règle de 75 (ou la règle de 72) permet de répondre à la question : comment estimer la rapidité de la croissance d'une entité donnée ? Or il semble bien que ce soit *cela* qui constitue une « grande question » (question secondaire, et non primaire, certes) pour κ, question à laquelle la « règle de Fourastié » apporte une réponse satisfaisante. J'ai représenté ci-après, sur l'intervalle [1 ; 30], les courbes donnant la valeur exacte (en bleu) et la valeur « de Kempf-Fourastié » (en pointillé rouge) du temps de doublement, et en situant sur cette dernière courbe les points $a(6\ ;\ 12{,}5)$, $b(15\ ;\ 5)$ et $c(30\ ;\ 2{,}5)$.



On voit que, pour les valeurs « petites » du taux de croissance, la fonction de Kempf-Fourastié surestime la valeur du temps de doublement, puis la sous-estime légèrement, le changement se faisant entre 16 et 17 % (il intervient vers 16,8409433…). Il est intéressant d'examiner l'écart entre la valeur exacte et la valeur de Kempf-Fourastié, soit la fonction

$$\delta(x) = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \dfrac{x}{100}\right)} - \frac{75}{x}.$$

Pour $x = 1$, on a $\ln(1 + x/100) \approx x/100$, en sorte que $\delta(1) \approx 100 \ln 2 - 75 \approx 69{,}3 - 75 = -5{,}7$ (on a exactement $\delta(1) = -5{,}3392831\ldots$). La fonction δ a, sur l'intervalle [1 ; 30], la représentation graphique suivante :



Nous savons que cette courbe coupe l'axe des abscisses en 16,8409433… On a par ailleurs (pour $x > 0$) :

$$\ln\left(1 + \frac{x}{100}\right) = \ln\left[x\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{x}\right)\right] = \ln x + \ln\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{x}\right).$$

Il en résulte que, pour x tendant vers l'infini, il vient :

$$\delta(x) = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{x}{100}\right)} - \frac{75}{x} = \frac{\ln 2}{\ln x}\left(\frac{\ln x}{\ln x + \ln\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{x}\right)} - \frac{75}{\ln 2}\frac{\ln x}{x}\right) \sim \frac{\ln 2}{\ln x}$$

en sorte que δ tend vers 0 par valeurs supérieures. Le maximum est atteint entre x = 165,4984591 et x = 165,4984592 : pour ces valeurs la dérivée

$$\delta'(x) = \frac{75}{x^2} - \frac{\ln 2}{(100 + x)\left(\ln\left(1 + \frac{x}{100}\right)\right)^2}$$

a respectivement pour valeur 0,00000000000003899865112891… et −0,00000000000012623709721… Le maximum atteint par δ vaut alors 0,2566961698249942 5127…

d) Que κ ignore la règle de 72 ne peut nous étonner : très populaire aujourd'hui dans le monde anglophone, elle semble *quasiment* inconnue en France (bien entendu, elle n'est pas *totalement* inconnue, nous allons le voir). Que x déclare la règle de 72 « plus compliquée » peut en revanche paraître plus surprenant. Peut-être est-ce sa nouveauté pour κ, ou encore la complexité formelle apparente de l'article « Rule of 72 » de *Wikipedia*, qui engendre ce sentiment. On peut imaginer cependant que la règle de 75 a le mérite de paraître moins particulière – 75 est un « nombre rond », du moins « plus rond » que 72 – et a surtout la vertu, quand le taux de croissance ne dépasse pas 16,8, de donner une valeur approchée *par excès* de la « vraie valeur », ce qui, dans une perspective où l'on se méfie d'une croissance trop forte, permettra de dire par exemple que si telle quantité croît chaque année d'environ 5 %, elle doublera *en moins de* 15 ans, quadruplera *en moins de* trente ans, etc. (les « vraies » valeurs étant respectivement 14,20669908289… et 28,41339816578…). Bien entendu, il convient, à titre d'éclairage complémentaire, d'aller voir ce que disait Jean Fourastié dans son livre de 1979. Dans sa réponse, Hervé Kempf mentionne la page 250 de ce livre ; mais dans l'édition de 1979, c'est à la page 256, dans le chapitre X intitulé « La fin des temps faciles », que l'on rencontre la « règle de 75 ». (C'est dans la réédition de 2011 contenant une préface de Daniel Cohen qu'on la trouvera à la page 250.) Je reproduis ci-après un assez long passage du chapitre pour qu'on saisisse mieux le motif de la présence de cette règle dans ce contexte (la référence est ici à l'édition de 1979) :

> Depuis 1968 ou 1970, j'attendais la fin des « trente glorieuses ». Ma raison était bien simple et je l'avais exposée publiquement à plusieurs reprises : c'est que 2^{10} = 1024 [Cf. J. Fourastié, *La grande métamorphose*, PUF ; 1961, p. 55. Texte repris dans le livre « poche », *Idées majeures*, p. 63 (1re éd., 1963)]. J'attendais donc, sans être capable d'en fixer la date, une inflexion radicale à la croissance occidentale et française ; à la vérité, je l'attendais plutôt de la désorganisation et de l'engorgement du crédit et du système monétaire

international. Mais lorsque la décision de hausse des prix du pétrole fut prise, et que rien ne vint rompre le monopole, je n'eus aucun doute sur la fin irrémédiable des temps faciles [Cf. J. Fourastié, *La fin des temps faciles*, éditorial du *Figaro* du 20 décembre 1973].

En effet, 2^{10} est un nombre supérieur à 1000. Une grandeur qui double dix fois de suite, devient plus de 1 000 plus forte qu'à son origine.

Or nous avons vu, tout au cours de ce livre, quantité de facteurs en croissance très rapide, augmentant qui de 2 % par an, qui de 3, qui de 5 ou 6, parfois plus… et l'on doit savoir qu'un phénomène qui croît de n % par an double au bout de $\frac{75}{n}$ années. Prenons l'exemple du niveau de vie (chapitre V). Nous avons vu les salaires horaires les plus faibles (salaires totaux, c'est-à-dire y compris les prestations sociales) plus que tripler en trente ans, c'est-à-dire croître au rythme du doublement chaque 20 ans. La perpétuation de ce mouvement serait une multiplication par 1024 en 200 ans. Voyez-vous les gens consommer 1 000 fois, ou seulement 500, ou seulement 60 fois plus qu'aujourd'hui ? Voyez-vous le nombre que cela suppose d'automobiles, de machines à laver, d'appartements, de résidences secondaires ou trentenaires, de bateaux de plaisance, de sucettes à la menthe et de leçons de mathématiques ? De quels sarcasmes, de telles consommations seraient-elles qualifiées, si elles étaient aujourd'hui le fait d'un multimilliardaire ? Or, pour multiplier par 64, il suffit de 6 doublements.

Plus encore, le revenu national réel (voir chapitre VII, *tableau 43*, p. 212) a été multiplié par 4 en 27 ans, de 1948 à 1975.

On pourrait multiplier les exemples, rendements des terres, nombre d'agriculteurs et nombre de personnes nourries, durée du travail, loisirs, tourisme… Donnons seulement un second exemple, celui de la production industrielle, celui que je donnais dès 1961. La production industrielle française a, d'après les indices de l'INSEE (cf. chapitre VII) été multipliée par 5 en 27 ans, de 1947 (niveau d'avant-guerre) à 1974. Cela fait une multiplication par 25 en 54 ans, par 125 en 81 ans, par 625 en 108 ans. Le maintien d'une telle croissance supposerait donc une production française de 100 milliards de tonnes d'acier vers l'an 2100, et mondiale de 10 ou 15 mille milliards de tonnes.

Je calculais, à ce train, la date à laquelle la masse même de la Lune, puis celle de Mars, de Vénus et encore de la Terre, seraient, en quelques années, transformées en réfrigérateurs, machines à laver, automobiles et immeubles de béton [La grande métamorphose, p. 58].(pp. 255-257)

Je note que nous avons là un texte dont la lecture excriptrice peut être un outil (parmi d'autres) pour explorer le rapport d'élèves ou d'étudiants (notamment) à des « mathématiques ordinaires ». Considérons ainsi le passage suivant : « Nous avons vu les salaires horaires les plus faibles (salaires totaux, c'est-à-dire y compris les prestations sociales) plus que tripler en trente ans, c'est-à-dire croître au rythme du doublement chaque 20 ans. » Si le multiplicateur $\lambda > 1$ est tel que $\lambda^{30} = 3$, il vient : $\lambda^{20} = (\lambda^{30})^{2/3} = 3^{2/3} = \sqrt[3]{9} = 2{,}080083823... \approx 2{,}08$, ce qui est proche de deux, en effet. L'auteur en déduit (en remplaçant $\sqrt[3]{9}$ par 2) que « la perpétuation de ce mouvement serait une multiplication par 1024 en 200 ans ». On aurait en fait exactement :

$$\lambda^{200} = (\lambda^{30})^{20/3} = 3^{20/3} = \sqrt[3]{3486784401} = 1516{,}381107... \approx 1516.$$

On voit que l'auteur procède à des estimations « à la louche », qui peuvent être faites « de tête » sans difficulté : c'est ainsi qu'on peut avancer que $\sqrt[3]{9} \approx \sqrt[3]{8} = 2$, puis procéder à partir de là de façon évidente pour aboutir à la conclusion que la grandeur considérée serait multiplié par 1024 – par plus de 1000 – en dix fois 20 ans, soit en 200 ans. Il y a là une « économie » (en partie factice) du travail mathématique qu'il convient de souligner : l'auteur aurait pu dire que, si une grandeur triple en trente ans, elle triplera 6 fois en 180 ans, c'est-à-dire sera multipliée par $3^6 = 729$ (pour 210 ans, elle triplerait 7 fois et serait donc multipliée par $3^7 = 2187$). Se ramener (sans l'expliciter) au *doublement* et avoir en tête le fait que $2^{10} = 1024$, voilà tout ce que demande l'auteur, semble-t-il. On observe ici un phénomène que l'on rencontre en d'autres domaines utilisant des mathématiques (par exemple la physique du secondaire) : le *figement* des mathématiques utilisées. Arrêtons-nous encore un instant sur le passage que voici :

> La production industrielle française a, d'après les indices de l'INSEE (cf. chapitre VII) été multipliée par 5 en 27 ans, de 1947 (niveau d'avant-guerre) à 1974. Cela fait une multiplication par 25 en 54 ans, par 125 en 81 ans, par 625 en 108 ans.

Là encore, les mathématiques à utiliser sont réduites au minimum : si une grandeur est multipliée par 5 en 27 ans, elle sera multipliée par $5^2 = 25$ en $27 \times 2 = 54$ ans, par $5^3 = 125$ en $27 \times 3 = 81$ ans, par $5^4 = 625$ en $27 \times 4 = 108$ ans, etc.

e) Jean Fourastié (1907-1990) était ingénieur de l'école centrale de Paris. La notice que *Wikipédia* lui consacre indique en particulier ceci :

> Nommé en 1947 professeur à l'Institut d'études politiques de Paris (jusqu'à sa retraite en 1978), il devient en 1953 directeur d'études à l'École pratique des Hautes Études.

> En 1964, il est nommé professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers, titulaire de la chaire d'Économie et statistiques industrielles.

(Pour plus d'informations sur sa biographie intellectuelle, voir l'article de Régis Boulat, *Jean Fourastié ou le prophète repenti*, disponible en ligne à l'adresse suivante : http://www.cairn.info/revue-vingtieme-siecle-revue-d-histoire-2006-3-page-111.htm.) Notons pour conclure que 1) la formule approchée $75/n$ n'est *jamais utilisée* (dans le passage cité) par l'auteur ; 2) elle n'est pas davantage *justifiée* par lui : Fourastié l'introduit *d'autorité* dans son exposé. D'où lui vient-elle ? Nous ne le savons pas. Il semble renvoyer à un ouvrage antérieur, *La grande métamorphose* (1961), publié en poche sous le titre *Idées majeures* (1963). L'enquête peut donc se poursuivre dans cette direction. J'ai pu consulter ce dernier ouvrage, dans son édition de 1966 (dans la collection Médiations des éditions Gonthier). Aucune règle n'est indiquée explicitement mais, page 67 de cette édition, on peut lire ceci :

> À très long terme toutefois, c'est-à-dire au-delà d'un siècle, il est clair que les taux de croissance de ce genre, c'est-à-dire de l'ordre de 6 à 8 % par an pour la production globale, de 8 à 12 % pour la production industrielle, ne peuvent plus être envisagés. En effet, au taux de 7 %, les volumes doublent en 10 ans et au taux de 10 % en 7 ans et demi. Si la production industrielle française continuait pendant 140 ans sa progression actuelle de 7 % l'an, nous produirions en l'an 2100 :
>
> $$12 \times 2^{14} \text{ millions de tonnes d'acier}$$
>
> chiffre voisin de 100 milliards de tonnes, et la production mondiale d'acier serait de l'ordre de 10 ou 15 mille milliards de tonnes. À ce train, la masse même de la lune puis celle de la terre, de Mars et de Vénus seraient en quelques années du milieu du prochain millénaire entièrement transformées en frigidaires, machines à laver et immeubles de béton. Si, au lieu de ne se référer qu'à la seule production d'acier et au rythme français, on prenait pour exemple la production industrielle totale de l'U.R.S.S. et son rythme de progrès de 10 % l'an, on constaterait évidemment que la limite physique des facteurs de production jouerait encore plus vite.
>
> De même, si l'on se réfère au passé, et si l'on évalue à 100 tonnes par an la production de minerais métalliques lors de la naissance du Christ, il aurait suffi d'un progrès de 2,7 % par an (3 doublements par siècle) pour que nous en soyons aujourd'hui à exploiter *chaque année* : $100 \cdot (1{,}027)^{2000} = 100 \cdot 2^{66}$ tonnes de minerai, c'est-à-dire environ 10^{13} milliards de tonnes, chiffre voisin de la masse totale de la terre.

On retrouve ici l'atmosphère déjà rencontrée plus haut. L'auteur indique d'abord que, « au taux de 7 %, les volumes doublent en 10 ans et au taux de 10 % en 7 ans et demi ». Dans le premier cas, il semble donc utiliser la

« règle de 70 », dans le second, « la règle de 75 » : il exhibe ici une certaine plasticité, que ne limite aucune règle « définitive » – contrairement à ce qu'il paraît faire dans les *Trente glorieuses* (c'est ainsi qu'Hervé Kempf l'a, semble-t-il, entendu). Plus loin, il dira qu'un taux de croissance de 2,7 % conduit à doubler la production considérée « 3 fois en un siècle ». Le temps de doublement exact est voisin de 26 ans, ce qu'on peut obtenir approximativement par la règle de 70 (on a $70/2{,}7 \approx 25{,}93$), trois doublements correspondant donc à 78 ans environ. En parlant de trois doublements « par siècle », Fourastié est évidemment en-dessous de la vérité : on a $1{,}027^{100} = 14{,}35636\ldots$ et, en fait, $1{,}027^{100} = 2^{100 \log_2 1{,}027} \approx 2^{3{,}8436\ldots} > 2^3$. Examinons rapidement les autres calculs présents dans le passage reproduit ci-dessus. Si une quantité qui vaut à l'instant initial $12 \cdot 10^6$ augmente de 7 % par an pendant 140 ans, elle est multipliée par $1{,}07^{140}$; on a : $(12 \cdot 10^6 \cdot 1{,}07^{140})/10^{11} = 1{,}559229784\ldots$, en sorte que la production atteint presque 160 milliards de tonnes (plutôt que les 100 milliards de tonnes indiqués par l'auteur). L'approximation utilisée par Fourastié conduit, quant à elle, à considérer que la quantité initiale ($12 \cdot 10^6$) doublera 14 fois en 140 ans – une fois tous les dix ans –, en sorte qu'elle sera multipliée par 2^{14} (= 16 384), pour atteindre donc $12 \cdot 10^6 \cdot 2^{14}$ (au lieu de $12 \cdot 10^6 \cdot 1{,}07^{140}$) ; on aura alors $12 \cdot 10^6 \cdot 2^{14}/10^{11} = 1{,}96608$. Fourastié aurait donc dû conclure que la production atteindrait presque 200 milliards de tonnes… Par ailleurs on a $100 \cdot (1{,}027)^{2000} = 100 \cdot 2^{2000 \log_2 1{,}027} \approx 100 \cdot 2^{76{,}87}$ (ce qui, à nouveau, diffère sensiblement du résultat donné par l'auteur, à savoir $100 \cdot 2^{66}$). Il vient $100 \cdot (1{,}027)^{2000}/10^{22} = 1383{,}207\ldots$, en sorte qu'il faudrait parler de plus de mille fois 10^{13} milliards de tonnes (et non de 10^{13} milliards = 10^{22}). On a encore : $100 \cdot 2^{66}/10^{22} = 0{,}73786\ldots$., ce qui conduit à une estimation de *moins* de 10^{13} milliards (= 10^{22}). La masse de la Terre, que l'on peut prendre égale $0{,}59736 \cdot 10^{22}$ tonnes, est en fait inférieure à cette estimation. En revanche, si l'on prend pour production (comme le fait l'auteur) $100 \cdot 2^{66}$ tonnes, on a $100 \cdot 2^{66}/0{,}59736\ 10^{22} \approx 1{,}235$, ce qui est grosso modo en accord avec la conclusion de J. Fourastié. On retrouve ici, en passant, ce fait massif : l'univers du calcul numérique « ordinaire » a fortement changé depuis cinquante ans.

POSITIONS DANS LA NOOSPHÈRE : UNE ÉTUDE DE CAS

1. Personnes et positions

a) J'entendais récemment la philosophe Cynthia Fleury déclarer que, si Andy Warhol avait pu dire que chacun de nous aurait quelque jour son quart d'heure de célébrité (voir l'article « 15 minutes of fame » de *Wikipedia*), on peut dire aujourd'hui que chacun de nous aura droit un jour ou l'autre à son quart d'heure de diffamation. C'est mon cas, comme vous savez. Donc β a répondu ; il n'apprécie guère le double sens (en français) du mot *bêta*. En conséquence, je l'appellerai ici μ_0 (la lettre μ est l'initiale du grec μαθηματιόζ), en espérant que, cette fois, il n'y verra pas malice.

b) Je rappelle les éléments d'analyse essentiels introduits lors de la séance précédente de ce séminaire. Je soulignerai d'abord l'idée du *conflit structurel potentiel* (qui peut être *actif* ou *désactivé*), au sein de la noosphère de l'enseignement des mathématiques, entre deux *positions* (au sens de la TAD) : celle des *didacticiens* et celle des *mathématiciens évergètes* (quel que soit le domaine des mathématiques où un tel mathématicien est ou a été productif). J'ai désigné ailleurs – et ci-dessus encore – les chercheurs en didactique par la lettre ξ. Il y a donc une tension générique entre les mathématiciens évergètes μ et les didacticiens ξ, dès lors du moins qu'un mathématicien évergète entend, *du fait de sa seule qualité de mathématicien*, gouverner un tant soit peu la noosphère de l'enseignement des mathématiques, et en particulier en imposer aux ξ – localement au moins, car hors de son canton μ risque fort de se heurter à d'autres mathématiciens évergètes non moins désireux de régner. C'est là bien sûr que le conflit structurel avec les ξ s'enracine : car pour avoir droit de cité parmi les ξ, et à plus forte raison pour prétendre leur « faire la leçon » (ce qui est déplacé, en vérité, au sein d'un champ scientifique), il faut, comme il en va partout ailleurs, avoir réalisé des travaux dans le champ concerné, connaître les travaux des autres, entrer dans un débat où l'on est au mieux un pair parmi d'autres : on reconnaît le pianiste lorsqu'il est au clavier.

c) Dans l'épisode conflictuel auquel je m'attache ici, un ξ a affaire à un μ, qui lui cherche querelle. Mais, comme tout autre membre de la noosphère, qu'il s'agisse par exemple d'un élève, d'un professeur du secondaire, d'un inspecteur de telle ou telle catégorie ou d'un mathématicien, je suis amené, en tant que ξ, à regarder ce μ, à savoir μ_0, comme *un objet d'étude*. Bien entendu, lorsque l'objet d'étude est ainsi une *personne* (ou encore une *institution*), cet objet peut se dérober, se refuser, se refermer quand un ξ tente d'entamer un commerce avec lui. C'est là une difficulté du rapport à l'empirie dans l'ensemble des SHS ; et, sur ce chapitre, la didactique ne fait pas exception. Dans tous les cas, en vérité, le rapport visé par le chercheur suppose un certain rapport de forces, par exemple lorsqu'un ξ observe une classe ou même visionne une vidéo de classe. Demander, comme je l'ai fait, à Hervé Kempf *où* il a trouvé la règle qu'il invoque, c'est tenter, *volens nolens*, de pénétrer son intimité didactique et cognitive ; c'est vouloir passer avec lui de l'intime à l'extime, ce à quoi il pourrait aussi bien se refuser. Le rapport qui parvient parfois à s'établir, mais qui recèle toujours quelque fragilité, peut, comme dans le cas de κ, être empreint de modération, de courtoisie, même s'il est presque toujours lapidaire et labile – il serait discourtois d'être insistant et l'on n'a droit souvent qu'à un coup (*one-shot*) : un entretien, un questionnaire rempli, etc. Dans le cas de μ_0, les choses sont bien différentes : ici, c'est μ_0 qui, de manière oblique, certes, ébauche un rapport foncièrement agonistique avec ξ, et cela avec une violence qu'on se perd à décrire : imputations controuvées, insultes, persiflages, admonestations arrogantes abondent, nous allons le voir.

d) Je ne suis pourtant pas sûr – j'ai eu l'occasion de le dire plus largement – que tout cela soit propre à μ_0 *uniquement*. J'y vois plutôt les manifestations d'une irritation qui procède en partie au moins d'une tension structurelle déjà soulignée, liée à une certaine *position* – celle occupée par μ_0 – *au sein de la noosphère*. Je rappelle un point de théorie. Une personne est la résultante d'un *nexus* d'assujettissements ; elle est le *sujet* (passé, présent ou à venir) d'une foule d'institutions. Ce qui intéresse ξ dans μ (et, en l'espèce, dans μ_0), comme ce qui pourrait l'intéresser dans κ, c'est de comprendre et d'analyser la position que μ (ou κ) occupe, autrement dit les assujettissements auxquels sa position l'expose, les conditions et les contraintes que ces assujettissements lui offrent ou lui imposent. Bien entendu, la personne ne se réduit pas à être le pur sujet qu'engendre telle position institutionnelle qu'elle vient occuper : les assujettissements « positionnels » sont mêlés à une grande variété d'assujettissements allogènes, qui font « du bruit sur le signal ». Comment faire alors ? La réponse est qu'on peut souvent regarder ces assujettissements allogènes comme permettant *une expression déterminée* des assujettissements positionnels qui nous intéressent au premier chef : c'est en synergie avec eux que les déterminants de la personne que le chercheur vise à élucider vont se manifester et c'est ainsi que ξ devra s'efforcer de les appréhender et de les analyser. Si ξ s'intéresse *en tant que* ξ à un μ, ou plutôt à son rapport à l'enseignement des mathématiques, ou encore – ce sera le cas ici – à son rapport à la recherche sur l'enseignement des mathématiques, il doit savoir qu'il devra en démêler les composants à travers le parasitage « existentiel » que la personne de μ ne manquera pas de manifester. Ainsi, μ pourra-t-il être aimable, courtois, sincère, obligeant, ou, à l'opposé, se comporter en butor insincère et désobligeant, en suivant une gamme de nuances qui vont de la cordialité à l'hostilité en passant par l'indifférence à peine polie. Les mêmes remarques vaudraient aussi bien si « l'objet d'étude » était un élève, un étudiant, un professeur, un parent d'élève, un principal de collège, un inspecteur, etc. : cela va sans dire.

2. Ce que ξ peut apprendre de μ : analyse d'un courriel

a) J'entame ici la lecture commentée du texte à moi adressé par μ_0 – texte qui, du même coup, été diffusé à *l'ensemble* des destinataires du mail précédent. Les commentaires que j'apporte (signalés par le symbole ☛) ont pour objet 1) de rectifier des interprétations erronées, qu'on peut croire inspirées ici par la volonté de blesser, mais qui pourraient cependant venir à l'esprit d'un lecteur bienveillant mais peu aguerri en matière de TAD, et 2) de dégager ce qui peut l'être quant à la position qu'occupe μ_0.

b) On examine ici une première partie, très brève, du long courriel de μ_0 (le découpage en parties et le numérotage des alinéas composant chaque partie sont de moi) :

> ⓿ Cher Yves Chevallard,
> ❶ Merci d'avoir pris la peine de répondre de façon aussi détaillée à mon message destiné au comité d'organisation du colloque ARCD. J'aurais aimé t'en rendre destinataire, mais je n'avais pas ton adresse électronique, cependant connaissant le « peuplement de la noosphère » je pensais qu'il te parviendrait rapidement par une voie ou par une autre.

☛ L'alinéa ⓿ a évidemment toutes les apparences de la civilité rituelle, qui n'engage pas à grand-chose, comme on le verra plus loin.

☛ L'alinéa ❶ poursuit formellement dans la même veine ; mais nous verrons que la référence à la *noosphère* – qui est un *concept de la TAD* – n'est guère, chez le scripteur, que persiflage. Comme va revenir plusieurs fois devant nous le problème que cela pose – la réception ironique, satirique et souvent erronée des *mots* de la TAD de la part de ceux qui voudraient que la science didactique n'existe pas –, je citerai en ce point un texte bref mais définitif que nous devons à Lavoisier (1743-1794) et que j'emprunte ici au livre déjà mentionné de Misha Gromov (où on le trouve p. 24) :

> L'impossibilité d'isoler la Nomenclature de la science et la science de la Nomenclature, tient à ce que toute science physique est nécessairement formée de trois choses : la série des faits qui constituent la science ; les idées qui les rappellent ; les mots qui les expriment. Le mot doit faire naître l'idée ; l'idée doit peindre le fait : ce sont trois empreintes d'un même cachet, et comme ce sont les mots qui conservent les idées et qui les transmettent, il en résulte qu'on ne peut perfectionner le langage sans perfectionner la science, ni la science sans le langage, et que quelque certains que fussent les faits, quelque justes que fussent les idées qu'ils auraient fait naître, ils ne transmettraient encore que des impressions fausses, si nous n'avions pas des expressions exactes pour les rendre.

c) Passons à la suite de la missive :

➓ Permets-moi tout d'abord de continuer à utiliser le tutoiement universitaire que nous avions spontanément adopté il y a bien longtemps, lors des « séminaires structurants » qui ont précédé la création des IUFM.

➊ Je suis sincèrement désolé que tu aies pu prendre mon message pour une grave diffamation de tes propos (car pour diffamer il faut déformer la réalité, et je n'ai pu réagir qu'à ce que tu as dit, pas à ce que tu as pensé dire : j'ai vérifié auprès d'autres universitaires présents que je n'ai pas inventé ceux que je te prêtais, « mathématiciens » n'est pas le terme consacré pour parler des professeurs de mathématiques du secondaire chers à ton cœur, mais il permet de mieux ridiculiser ces « ésotériques » que sont les mathématiciens, sortes de Professeurs Cosinus dans l'inconscient général).

➋ Pour ma part je ne tiendrai pas pour diffamatoire ta réponse et je ne m'offusquerai pas de son ton, ni des menaces (que tu viens de mettre à exécution sur ton blog cf. PS2) de me ridiculiser par un de tes prochains articles qu'elle contient, car je sais que parfois le Mistral souffle fort sur la Canebière et que les écrits qu'il emporte dépassent souvent les pensées de leurs auteurs.

➌ Mais quand même ne pas avoir vu que je faisais de l'autodérision quand j'ai écrit « pour ceux qui ont le vice des maths dans le sang » ! Fallait-il que le crime de lèse-majesté que je venais de commettre à tes yeux, t'aveuglât ! (Il est vrai que tu n'y es pas habitué, à ce qu'on me dit)

☛ L'alinéa ➓ semble à nouveau donner dans une politesse excessive. Outre que le tutoiement est d'usage entre collègues, μ_0 et moi nous sommes rencontrés pour la première fois, si ma mémoire ne me trahit pas, lorsque nous fûmes jadis convoqués à Paris devant une commission du CNU qui devait faire de nous des professeurs d'université – c'était en 1990-1991, il y a donc plus de vingt ans. Serais-je devenu depuis un « personnage » débordant tellement ma petite personne et qu'on ne tutoie qu'en hésitant ? Il y a là un point mineur mais qui a tout l'air d'un symptôme. De quoi, je l'ignore précisément.

☛ L'alinéa ➊ est autrement substantiel : là commencent les attaques explicites. L'exorde en est fort civil – « Je suis désolé, etc. » La longue parenthèse qui suit « évacue » la question de la « formule de Kempf-Fourastié » pour se centrer sur un point que μ_0 monte en épingle : j'ai certes suggéré qu'une certaine corporation « mathématicienne » ignorerait très majoritairement la formule de Kempf-Fourastié, mais cette corporation était-elle celle des professeurs de l'enseignement secondaire ou bien celle des mathématiciens d'université (ou du CNRS), auxquels beaucoup, à l'instar de μ_0, réservent le titre de mathématiciens ? Donc, μ_0 a enquêté « auprès d'autres universitaires présents ». J'ai enquêté de mon côté, tout simplement en écoutant l'enregistrement sonore de mon exposé ; et j'y dis exactement ceci, dans un style oral quelque peu relâché : *« par exemple je suppose que* *même les collègues matheux de formation ignorent cette règle »* – la règle de Kempf-Fourastié. En fait, selon les observations que j'ai pu conduire depuis bien longtemps, ni l'une ni l'autre des deux corporations ne connaît communément la « rule of 72 » (ou la règle de 75) : c'est un *fait* qui ne peut guère être contesté, même si la signification de ce fait n'est pas claire (il y a là un problème d'écologie des connaissances : pourquoi, par contraste, le monde de langue anglaise connaît-il donc massivement la « rule of 72 ?).

☛ L'alinéa ❶ appelle un autre commentaire. Le narcissisme corporatiste, tellement à vif chez μ_0, obscurcit souvent l'intelligence des choses. Je n'ai bien sûr jamais cherché à ridiculiser qui que ce soit en usant du mot *ésotérique* qui, comme *noosphère*, appartient à la « nomenclature », comme aurait dit Lavoisier, de la TAD. Il fait couple avec *exotérique* (employé lui aussi comme substantif, pas seulement comme adjectif) et renvoie comme lui à un *concept*. Or un concept n'est pas fait pour ridiculiser ou au contraire pour flatter qui que ce soit : il doit seulement permettre de mieux comprendre (*intelligere*, pour le dire en latin avec Spinoza). Bien entendu, on ne peut comprendre ce que désigne le mot *ésotérique* en TAD si on le prend à sa valeur faciale, de sens commun. Ce que dit la TAD à son propos tient au fond en deux assertions : 1) *il n'existe pas d'ésotérique*, il n'existe que de (rares) personnes (ou institutions) qui, en tel domaine, *se croient* ésotériques, c'est-à-dire maîtrisant sans faille ni lacune la totalité des connaissances en tel ou tel domaine ; 2) *nous sommes tous des exotériques*, en quelque domaine que ce soit, et même si le « degré d'exotéricité » n'est pas uniformément distribué, nous sommes tous appelés à continuer *à étudier* et (donc) *à apprendre*. J'ajoute que c'est là la raison *théorique* principale qui me conduit à désigner par la lettre β, la deuxième de l'alphabet grec, le noosphérien générique : car dans la noosphère comme ailleurs, selon la TAD, il n'y a pas de α, c'est-à-dire d'ésotérique (en quelque domaine que ce soit) ; il n'y a que de rares $\alpha^\#$, qui *se croient* des α, qui sont, pour parler le marseillais, des « encroyeurs » (des gens qui s'en croient). Bien entendu, chez μ_0, les deux points qu'il aborde dans sa parenthèse sont, *pour lui*, clairement liés : j'aurais mis en cause l'érudition *selon moi faillible* des « mathématiciens » – qui ignoreraient la règle de Kempf-Fourastié ! – et, pour faire bon marché, je les aurais moqués en les taxant d'ésotérisme… Que μ_0 ait pu penser que, sous le nom d'ésotériques, je ne pouvais désigner, par dérision, que les mathématiciens (donc, universitaires), est à mes yeux la méprise la plus significative, par ce qu'elle révèle l'image que μ_0 a des μ en général et sans doute de lui-même en particulier. La référence au Professeur Cosinus, allusion à la bande dessinée de Christophe intitulée *L'idée fixe du savant Cosinus* (qui a paru à partir de 1893), complète la signature du symptôme, qui découpe le monde en deux : les μ d'un côté, le reste du monde de l'autre (où, je suppose, μ_0 doit situer les ξ). On voit en ce point que le dialogue sincère et clairvoyant entre ξ et μ est dès lors plus qu'incertain.

☛ L'alinéa ❷ montre μ_0 d'abord magnanime avant d'être repris par ses démons. L'exploitation du matériau qu'il apporte, par ses missives, dans un article éventuel, et déjà ici même, ne saurait avoir pour but de le ridiculiser, même anonymement : un matériau *s'analyse*, des *conjectures* naissent de cette analyse, que l'on cherche à confronter à de nouveaux *milieux* « adidactiques ». Ce qui ne fait pas honneur à μ_0, toutefois, je ne peux l'ignorer, ce sont les dernières lignes de ce paragraphe : « … je sais que parfois le Mistral [*sic*] souffle fort sur la Canebière et que les écrits qu'il emporte dépassent souvent les pensées de leurs auteurs. » C'est là tout particulièrement que je dois invoquer la pluralité des assujettissements dont une personne est faite : il n'est pas dans le destin d'un mathématicien en général de se laisser emporter – par écrit, qui plus est – au point de stigmatiser un groupe social tout entier en taxant quasiment ses membres de dérangement mental. Cela n'est certes pas nécessaire pour pouvoir se dire mathématicien de plein exercice ! Les relents anti-marseillais qu'exhale ce passage sont une bien triste chose, dont μ_0 n'a pas le privilège exclusif, certes. Mais on aurait aimé qu'il s'épargne et que, en conséquence, il renonce à s'infliger la flétrissure morale qui frappe quiconque extravague ainsi. Je n'en dirai pas plus, laissant au lecteur le soin de juger.

☛ L'alinéa ❸ attaque un point important de ma réponse à la première des missives de μ_0 : je n'aurais pas compris que μ_0 plaisantait sur le mode de l'autodérision. Je continue de voir dans sa notation concernant ceux qui ont les « maths dans le sang » l'expression du sentiment de se situer à part du commun des mortels (en s'en excusant même : là serait « l'autodérision »), ce qui coextensif à l'attitude obsidionale commune à tous les groupes confinés dans leur estime de soi, qui se supposent incommensurables avec quiconque – toutes choses aux antipodes de la notion de « mathématiques ordinaires » sur laquelle je travaille actuellement. L'allusion à un « crime de lèse-majesté » que μ_0 aurait commis à mon encontre n'a de sens que dans son univers à lui, je le crains : qu'il y ait eu crime de lèse-majesté dépendrait au moins en partie de moi, et c'est pourquoi je compte cette affirmation pour rien. Qu'il manifeste de l'agressivité à mon encontre, en revanche, ne dépend que de lui, et c'est bien de cette agressivité, qui sourd d'un narcissisme blessé, que μ_0 ne parvient pas à s'échapper, allant jusqu'à faire courir des rumeurs à sa convenance – je ne serais pas habitué aux crimes de lèse-majesté qui me toucheraient personnellement. Et en effet je n'y suis pas habitué, ne me sentant en rien une « majesté », seulement un ξ, et qui travaille.

d) Poursuivons notre lecture :

❿ Je voudrais, sans continuer à polémiquer, exprimer quelques réflexions qui me viennent à l'esprit en lisant ta réponse et en analysant avec tout l'intérêt qu'ils méritent les arguments que tu avances.
❶ D'abord sur la forme de ton exposé. Il me semble que la rhétorique lorsqu'on en maîtrise comme toi les arcanes, permet d'enflammer les foules, de les faire adhérer facilement à parfois de fausses idées simples. Mais on est alors loin du discours neutre, habituel dans les colloques universitaires, qui seul permet d'exposer rigoureusement une démarche scientifique.
❷ Pourquoi avoir recours à de tels artifices locutoires (recherche de connivence avec la salle en stigmatisant les ésotériques par exemple) si l'argument théorique est solide ?
❸ Ce n'est pas la première fois que je t'entends te fourvoyer dans de tels excès.
❹ J'ai encore en mémoire ton exposé lors du dixième anniversaire de la création de l'IUFM d'Aix-Marseille qui commençait par ces propos à destination des représentants de l'Inspection Générale : « savez-vous ce qu'est la Skholè ?... Je vais vous dire ce qu'est la Skholè... », mais il est vrai que nous n'étions pas à la fin d'un colloque scientifique et que l'on pouvait comprendre que les propos (et leur forme) tenus ce jour là aient eu un but politique.

☛ Cette suite d'alinéas fait apparaître un thème essentiel dans le positionnement de μ_0 : sur une matière qui ne lui est pas familière, *il se pose en donneur de leçons*, et joue les *instances normatives*, ce qui est typique de la position d'ésotérique – ou plutôt, si vous me permettez le mot, de la position d'encroyeur. Je note ici – j'aurais pu le faire bien avant – un procédé rhétorique usité par μ_0 : il déclare qu'il va dire quelque chose ; et puis il dit la chose opposée. Ainsi alterne-t-il blandices et perfidies, avec toutefois un invariant : il ne comprend rien, quasiment, à ce que j'avance et, en conséquence, se méprend presque à chaque pas de sa diatribe.

☛ Dans l'alinéa ❿, il annonce qu'il ne veut plus continuer à polémiquer ; mais dès l'alinéa ❶, après une flatterie bien inutile – peut-il l'ignorer ? –, il me prend derechef à partie. Prétendant énoncer la norme de la scientificité, il juge mon exposé – qu'il ne comprend pas – étranger à cette norme.

☛ L'alinéa ❷ ramène sur le devant de la scène son incompréhension du concept d'*ésotérique* (et, implicitement, de la TAD et de sa dynamique). Le reproche est insistant, alors même que ni l'intelligence que μ_0 aurait de ce que j'avance, ni ses travaux, ni son travail (je vais y revenir) ne me semblent permettre de légitimer cette attitude satisfaite et contemptrice à la fois.

☛ L'alinéa ❸ voit μ_0 jouer au petit maître qui gourmande son monde : ce qui lui échappe ne peut être qu'excès où il perçoit les signes éclatants que je me fourvoierais en un domaine – la TAD – qui reste pourtant pour lui *terra incognita.*

☛ L'alinéa ❹ prolonge ce mouvement de réprobation en enrichissant un motif qui semble piquer au vif le scripteur. Étrangement, il se remémore un fait vieux de plus d'une dizaine d'années. J'ai, quant à moi, souvenir des circonstances qu'il évoque, bien entendu ; mais non du fait lui-même. J'aurais donc en quelque sorte nargué un auditoire (dont il semble s'exclure : car qu'on ne croie pas, surtout, qu'il ignorait la chose !) en évoquant de façon quasi exhibitionniste la notion de *skholè*. Autre blessure narcissique infligée à un infortuné *know-it-all* ? L'intention de blesser qui que ce soit, en tout cas, n'y était certainement pas, *et toujours pour la même raison* : la notion de *skholè*, empruntée, certes, au monde grec ancien, *est un concept de la TAD*, qui fonde toutes les variétés du didactique. Bien entendu, μ_0 n'a vu en tout cela qu'une menace (imaginaire) à son intégrité savante. Par contraste, qu'il ait recommencé ici à propos de la connaissance ou de l'ignorance de cette pauvre chose, l'approximation 75/N du temps de doublement d'une entité qui croît au taux de N %, laisse pantois. Qu'il considère que nous n'étions pas, alors, en un colloque « scientifique » est un mécanisme de défense que je lui laisse. Car ce qui détermine la scientificité d'un exposé se moque des circonstances mondaines où l'exposé se donne à entendre : il est toujours des esprits bien préparés, qui savent saisir le timbre unique de l'élaboration scientifique, c'est-à-dire de l'effort qui se propose d'ajouter un tant soit peu à une science en train de se faire – qu'il faut bien sûr connaître minimalement.

e) La partie suivante du courriel de μ_0 a une tonalité un peu autre que l'aigre ritournelle entendue jusqu'ici ; la voici :

> ⓿ Venons-en au fond. La base du débat que nous avons n'est pas de savoir si 69, 70, 72 ou 75 sont les nombres les plus adaptés pour la règle d'approximation choisie. La question essentielle est d'indiquer dans quelles conditions on peut trouver acceptable d'approcher une droite par une courbe. (voir également ma remarque sur le terrible anachronisme de ta citation sur Luca Paccioli).
> ❶ C'est une démarche naturelle et ancienne de faire cette approximation pour la simple raison qu'en dimension 1 on ne sait résoudre explicitement que peu d'équations non linéaires (les équations polynômiales de degré inférieur strictement à 5, les équations trigonométriques, celles faisant appel de façon simple aux logarithmes, exponentielles et encore quelques autres).
> ❷ En dimension supérieure (système d'équations à plusieurs inconnues) on ne peut résoudre explicitement que des équations linéaires (pour les Equations aux Dérivées Partielles on appelle ceci méthode des éléments finis).
> ❸ Mais il y a un prix à payer à ce remplacement d'une courbe par une droite : il faut se limiter à de tout petits intervalles de la variable, d'autant plus petits que la non-linéarité de la fonction dont la courbe est le graphe est extrême,

comme précisément dans le cas de l'exponentielle (donc des intérêts composés auxquels tu t'intéressais).
❸ Ne pas prendre ces précautions dans le cadre d'un enseignement ou d'une activité de découverte n'est pas sans avoir des conséquences pour les apprenants, surtout au niveau du collège.
❹ Je m'explique :
❺ L'Ecole consacre un très gros effort en fin de cycle 3 et au collège pour faire comprendre la notion de proportionnalité et celle de linéarité qui lui est liée. (voir la réintroduction réactionnaire de la règle de trois dans les programmes de 2008, par un ministre qui ne la maîtrisait pas lors d'un interview télévisé).
❻ Cette notion n'est malheureusement pas toujours très bien assimilée au niveau du lycée et au-delà comme on s'en aperçoit lorsqu'on prépare dans les IUFM les étudiants au CRPE.
❼ Toutefois même si une grande partie de la population adulte a du mal à calculer exactement le résultat d'un problème de proportionnalité, ce que j'appellerais de façon grossière « la pensée proportionnelle » (« plus on mange plus on grossit » pour faire simple) est très largement répandue.
❽ Mais constate souvent ensuite que cette « pensée proportionnelle » devient un véritable obstacle pour accéder à la notion de fonction non-linéaires abordées au lycée (fonctions du second degré dont les graphes sont des paraboles, fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmes…) qui sont pourtant essentielles à toute modélisation de la vie courante : de nombreuses personnes pensent que plus on met d'engrais à une plante et mieux elle pousse !
❾ C'est la raison pour laquelle je suis très méfiant, non pas sur l'utilisation de « la meilleure approximation affine » comme on dit dans les cours de préparation au CAPES de math, mais sur le fait qu'on n'indique pas qu'il y a des limites acceptables (avec la précision arbitraire que l'on décide d'adopter) à cette approximation, surtout quand on travaille avec des élèves de fin de collège qui ont en cours de construction dans leur esprit la notion de variable et de la notion de fonction.

☛ L'alinéa ⓿ change la question sur laquelle μ_0 a démarré sa polémique (et donc notre « interaction » forcée). Il n'est plus question de la règle de 75 et de ses variantes mais d'un problème qu'il formule cette fois à sa guise – celui du remplacement local d'une courbe par une droite. Je laisse ici de côté la remarque sur Luca Paccioli [*sic*], sur laquelle je reviendrai plus à loisir un peu plus loin.

☛ La suite – les alinéas ❶, ❷, ❸ ❹, ❺, ❻, ❼, ❽ et ❾ – constitue un exposé élémentaire sur la question que μ_0 s'est donc posée à lui-même.

☛ Ce développement pourrait être regardé, par un ξ intéressé, comme un témoignage précieux d'un mathématicien évergète sur certaines questions d'enseignement.

☛ Ici, μ_0 semble à son aise : il oublie même d'invectiver son interlocuteur, encore qu'il me fasse la leçon dans l'alinéa ❸ à propos des intérêts composés auxquels je me serais « intéressé » (il n'a toujours pas compris le problème que je posais à ce propos). Sa présentation mêle dans un propos syncrétique des réflexions mathématiques classiques à des observations personnelles communes sur des choix scolaires qu'il juge heureux ou malheureux selon les cas.

☛ Étant donné le ton sermonneur de l'ensemble du propos de μ_0, je noterai tout de même que son exposé laisse subsister nombre d'ambiguïtés dont toutes ne sont peut-être pas involontaires. Pourquoi, ainsi, insister sur le cas des élèves de fin de collège ? À qui songe-t-il lorsque, dans l'alinéa ❹, il attire l'attention sur le risque de « ne pas prendre ces précautions [évoquées dans les alinéas précédents] dans le cadre d'un enseignement ou d'une activité de découverte », ce qui ne serait pas « sans avoir des conséquences pour les apprenants, surtout au niveau du collège » ? Je n'ose penser qu'il a mélangé dans son esprit mon interrogation sur l'origine de la règle de 75 chez Hervé Kempf et la référence que j'ai pu faire, au cours de mon exposé, au travail accompli pendant quatre ans avec des élèves du collège Vieux Port ! La question restera donc ici sans réponse.

☛ De même, le point principal est ce fait que la « pensée proportionnelle », longuement mise en place depuis les débuts du cursus scolaire, ferait ensuite obstacle à la reconnaissance de la non-linéarité lorsqu'on la rencontre. Mais il y a belle lurette que le programme de mathématiques de seconde, lorsqu'il en vient à mentionner ensemble, d'une part les fonctions linéaires et les fonctions affines, d'autre part la fonction carré et la fonction inverse, apporte ce commentaire explicite : « Exemples de non-linéarité. En particulier, faire remarquer que les fonctions carré et inverse ne sont pas linéaires. » Cela, bien entendu, ne donne pas plus de garantie quant à ce qui se passe effectivement dans les classes de seconde que n'en donnent les mises en garde de μ_0. La question, au demeurant, est ancienne. Pour les fidèles de ce séminaire, je citerai ici un extrait de ma conférence lors des journées de l'APMEP tenues à Clermont en 2006 :

> Le comte Pietro Verri (1728-1797), aristocrate milanais, homme des Lumières, épris d'action autant que de réflexion, fait paraître en 1771 un maître ouvrage d'économie politique qui en fait un précurseur de la révolution marginaliste. Lorsqu'il lit cet opus, Condorcet (1743-1794) prend sa plume et adresse à l'auteur l'observation que voici.
>
> > Pardonnez, Monsieur, si un géomètre a osé vous faire une observation sur un endroit de votre livre où vous employez le langage de la géométrie. Vous dites que le prix est en raison inverse du nombre des vendeurs, et en raison directe de celui des acheteurs. Je sais bien que le prix augmente quand le nombre des acheteurs

augmente, et qu'il diminue quand celui des vendeurs s'accroît ; mais est-ce le même rapport ? C'est ce que je ne crois pas. Ainsi le langage géométrique dans ce cas, et dans tous les autres de cette espèce, bien loin de conduire à des idées plus précises, me semble induire en erreur ; on se dit que l'auteur se serait contenté du langage ordinaire, s'il n'avait pas entendu parler d'une proposition rigoureusement exacte.

Je traduis : il n'existe pas que deux types de relation fonctionnelle entre deux grandeurs x et y, la proportionnalité directe et la proportionnalité inverse…

On voit au passage qu'une frontière s'est entretemps déplacée : la proportionnalité, qui pouvait être *directe* (notre fonction ax) ou *inverse* (notre fonction a/x), ne correspond plus tout à fait à notre linéaire actuel. Or remplacer la formule exacte donnant le temps de doublement, soit

$$\frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{x}{100}\right)},$$

par la formule approchée $\frac{75}{x}$ revient à remplacer une fonction non linéaire, et avec cela « compliquée » (vu la pénurie d'outils de calcul puissants, pénurie dont, historiquement, nous n'avons été libérés que depuis peu), par une relation de proportionnalité *inverse*, ce qui eut longtemps *beaucoup de sens* dans la culture mathématique *ordinaire*. Mais les temps changent – *the times they are a-changin'*.

f) Voici enfin la (fausse) péroraison de μ_0 :

⓿ Le paradigme de questionnement du monde (existe-t-il et est-il unique au demeurant ? Je fréquente trop de chercheurs de civilisations non européennes pour croire à une herméneutique universelle) a aussi besoin que l'on ne le bloque pas par des représentations figées de comportement possibles, par des modèles linéaires alors que le champ émergeant des recherches sur la complexité utilise des modèles fortement non-linéaires et chaotiques pour questionner le monde : http://www.complexssociety.eu/ !
❶ Je n'ai bien entendu pas tout ton talent (loin de là) pour dire ce que je viens d'exprimer.
❷ Mais la démarche scientifique n'a pas besoin de gourou !
❸ Je te salue très courtoisement

☛ Cette suite d'alinéas est un concentré édifiant de la façon d'être de μ_0 en tant que μ. L'alinéa ⓿ le voit revenir en donneur de leçons dans un domaine où il n'a pas travaillé. La remarque sur « l'existence et l'unicité » éventuelles du paradigme du questionnement du monde est triviale : un paradigme est un modèle, et un modèle qui, en TAD, prétend d'abord établir une ligne de démarcation (qui reste franchissable) entre deux régimes scolaires et sociétaux de la connaissance et de l'ignorance. Si j'admets par principe que, dans son domaine de recherche en mathématiques, la personne de μ_0 se comporte très vraisemblablement de façon herbartienne, procognitive et exotérique, ici μ_0 se comporte en non-herbartien (il n'étudie pas la question à laquelle il répond dogmatiquement *ex abrupto*), en rétrocognif (il se contente de ce qu'il croit savoir au moment où il formule sa question), en super-ésotérique qui, de l'extérieur, pourrait mettre en garde les chercheurs en TAD pour leur conseiller d'aller voir plutôt du côté… de son domaine de spécialité à lui, μ_0 – ce qui est typique de la façon rétrocognitive et ésotérique d'affronter le monde. Si au lieu des systèmes dynamiques, de la complexité et du chaos, μ_0 avait été spécialiste du transport optimal, peut-être nous aurait-il conseillé, *ex cathedra* – du haut de sa chaire – d'aller voir de ce côté-là. Quoi qu'il en soit, nous attendrons qu'il nous montre la route en ouvrant la voie à une théorie alternative du didactique…

☛ Les alinéas ❶, ❷ et ❸ seraient-ils le bouquet d'un feu d'artifice désobligeant ? Cette suite commence par un semblant d'hommage – un hommage évidemment insincère, impudent et, si je puis dire, apocryphe. Elle se termine par ce qui devait être une ultime effronterie : le scripteur salue « très courtoisement » une personne qu'il n'a cessé d'outrager, multipliant à son endroit les paroles offensantes, telle cette autre sentence triviale selon laquelle « la démarche scientifique n'a pas besoin de gourou ». En cette affirmation *négative* j'entends, en freudien amateur, mais de manière consistante avec l'ensemble du propos de μ_0, que notre démarche scientifique et celle des ξ plus généralement *aurait bien besoin d'un vrai gourou*, qui ne saurait être que… μ_0 lui-même. Mais on va voir que la chicane ne s'arrête pas là.

3. Ce que ξ peut apprendre de μ : post-scriptum

a) L'épître de μ_0 est suivie de deux post-scriptum, qui sont peut-être une réaction à la lecture par μ_0 d'une partie du *Journal* de la séance 1 de ce séminaire. Voici donc, avec le même système de numérotation, le premier post-scriptum :

> ⓿ P.S.1. Remarque sur la regola 72 de Luca Pacioli :
> ❶ Je suis très étonné que tu fasses l'amalgame entre le livre d'Hervé Kempf (lequel au juste ? Il est prolifique en livre récents), les « finance rules 72, 70, 69 » de Wikipedia, qui utilisent des approximations linéaires pour résoudre une équation logarithmique, avec la règle de Luca Pacioli datée de 1494 ! Aurais-tu oublié qu'à cette époque les logarithmes sont inconnus et que ce mathématicien ne pouvait pas résoudre explicitement le problème du temps nécessaire à doubler un capital ?

❷ Sa règle est la SEULE METHODE POSSIBLE (en dehors d'un calcul explicite) en 1494 pour trouver une solution approchée.
❸ Il faut attendre que naisse John Napier (80 ans plus tard) et qu'il atteigne l'âge de 43 ans en 1614 pour publier ses tables de correspondance entre suites géométriques et suites arithmétiques, qui sont à la base de l'invention des logarithmes !
❹ Ces logarithmes qui seuls permettent de poser l'équation de modélisation du problème.
❺ La démarche de Pacioli est empirique et n'a aucun rapport avec les mathématiques actuelles !
❻ (même si c'est un grand vulgarisateur qui a eu comme prédécesseur Nicolas Chuquet avec son « Triparty en la science des nombres » publié en 1484 et le niçois Francois Pellos qui a publié en 1492 son « compendion dell'abaco »).

☛ L'alinéa ⓿ annonce une « remarque » sur la règle de 72 contenue dans l'ouvrage de Luca Pacioli. En fait, dans la suite, μ_0 va à nouveau se poser en autorité sur un sujet sur lequel il n'a sans doute pas beaucoup travaillé : à nouveau, il va donc se montrer non-herbartien et rétrocognitif.

☛ Dans l'alinéa ❶, μ_0 se montre d'emblée brutalement – et naïvement – accusateur. Aurais-je oublié que le livre de Pacioli (v. 1445-1517) a paru en 1494 ? (Non, bien sûr.) Et que les logarithmes ne naîtront qu'avec John Napier (1550-1617), presque un siècle plus tard ? (Idem.) S'il était question de quaternions, μ_0 me rappellerait sans doute que leur multiplication n'est pas commutative ! Faire mine que j'ignorerais tout cela est bien un coup de force rhétorique culotté, mais vain. Si je pouvais croire μ_0 sincère, je serais enclin à tirer de là la conjecture que, en règle générale, les μ ont, de l'équipement praxéologique des ξ, une image très pauvre et fort inexacte, ce qui, bien évidemment, gêne le dialogue inter-positionnel. Mais je ne tirerai pas cette conclusion ici, encore que je sois porté à la croire vraie. J'ajoute seulement qu'il n'y a, dans mon analyse, *aucun anachronisme*. Le *problème* du temps de doublement est le même pour Pacioli (et ses prédécesseurs) que pour Hervé Kempf et pour nous, y compris pour μ_0. C'est, bien entendu, *l'outillage mathématique qui change*, ce sont les technologies mathématiques qui s'enrichissent en augmentant la puissance d'action du calculateur – jusqu'à nous fournir le *Big online calculator* accessible à tous, calculateur qui rend son verdict en un clic bien choisi.

☛ Les alinéas ❷, ❸ et ❹ doivent être pris ensemble : à nouveau, μ_0 parle d'autorité, affirmant que, puisque les logarithmes n'existaient pas encore de son temps, Pacioli ne pouvait faire autrement que de recourir à la règle de 72. Cette affirmation est, nous allons le voir, un nouveau symptôme de ce que μ_0 n'a pas étudié *à nouveaux frais* la question sur laquelle il prétend s'exprimer, se contentant de recourir à ses « rétroconnaissances » – ce qui donne à sa conclusion une allure presque triviale. Nuancer cette conclusion demande quelques efforts.

☞ Je rappelle d'abord qu'il est toujours possible de dresser des tables de résultats que l'on construit en élevant le multiplicateur $1 + \frac{x}{100}$ aux puissances entières successives. J'avais présenté une telle table dans la séance 1. On en trouvera plus loin une autre, que j'emprunte à un manuel espagnol, *Aritmética. Tercer grado* (11e éd., Barcelone, 1931) ; elle est regardée par l'auteur du manuel comme une application des logarithmes (ce qui, je le rappelle, n'est pas nécessaire).

412 APLICACIONES DE LOS LOGARITMOS

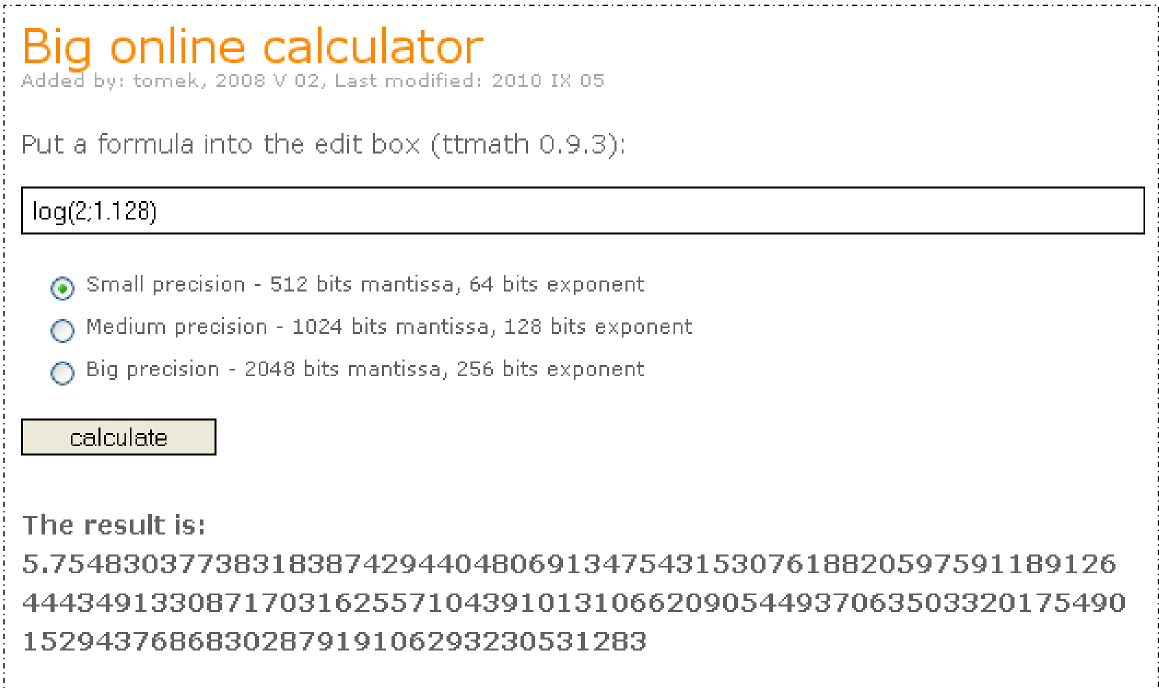
Valores de I peseta a interés compuesto

Años	2 %	3 %	4 %	4‘50 %	5 %	5‘50 %	6 %
1	1‘0200000	1‘0300000	1‘0400000	1‘0450000	1‘0500000	1‘0550000	1‘0600000
2	1‘0404000	1‘0609000	1‘0816000	1‘0920250	1‘1025000	1‘1130250	1‘1236000
3	1‘0612080	1‘0927270	1‘1248640	1‘1411661	1‘1576250	1‘1742414	1‘1910160
4	1‘0824322	1‘1255088	1‘1698586	1‘1925186	1‘2155063	1‘2388247	1‘2624770
5	1‘1040808	1‘1592741	1‘2166529	1‘2461819	1‘2762816	1‘3069600	1‘3382256
6	1‘1261624	1‘1940523	1‘2653190	1‘3022601	1‘3400956	1‘3788428	1‘4185191
7	1‘1486857	1‘2298739	1‘3159318	1‘3608618	1‘4071004	1‘4546792	1‘5036303
8	1‘1716594	1‘2667701	1‘3685691	1‘4221006	1‘4773554	1‘5346865	1‘5938481
9	1‘1950926	1‘3047732	1‘4233118	1‘4860951	1‘5513282	1‘6190943	1‘6894790
10	1‘2189944	1‘3439164	1‘4802443	1‘5529694	1‘6288946	1‘7081445	1‘7908477
11	1‘2433743	1‘3842339	1‘5394541	1‘6228530	1‘7103394	1 8020924	1‘8982986
12	1‘2682418	1‘4257609	1‘6010322	1‘6958814	1‘7958563	1‘9012075	2‘0121965
13	1‘2936066	1‘4685337	1‘6650735	1‘7721961	1‘8856491	2‘0057739	2‘1329283
14	1‘3194788	1‘5125897	1‘7316764	1‘8519449	1‘9799316	2‘1160915	2‘2609040
15	1‘3458683	1‘5579674	1‘8009435	1‘9352824	2‘0789282	2‘2324765	2‘3965582
16	1‘3727857	1‘6047604	1‘8729813	2‘0223701	2‘1828746	2‘3552627	2‘5403517
17	1‘4002414	1‘6528476	1‘9479005	2‘1183768	2‘2920183	2‘4848022	2‘6927728
18	1‘4282463	1‘7024331	2‘0258165	2‘2084788	2‘4066192	2‘6214663	2‘8543392
19	1‘4568112	1‘7535061	2‘1068492	2‘3078603	2‘5269502	2‘7656469	3‘0255995
20	1‘4859474	1‘8061112	2‘1911231	2‘4117140	2‘5362977	2‘9177575	3‘2071355
21	1‘5156663	1‘8602946	2‘2787681	2‘5202412	2‘7859626	3‘0782341	3‘3995636
22	1‘5459797	1‘9161034	2‘3699188	2‘6336520	2‘9252607	3‘2475370	3‘6035374
23	1‘5768993	1‘9735865	2‘4647155	2‘7521663	3‘0715238	3‘4261516	3‘8197497
24	1‘6084373	2‘0327941	2‘5633042	2‘8710138	3‘2250999	3‘6145899	4‘0489346
25	1‘6406060	2‘0937779	2‘6658363	3‘0054345	3‘3863549	3‘8133923	4‘2918707
26	1‘6734181	2‘1565913	2‘7724698	3‘1406790	3‘5556727	4‘0231289	4‘5493830
27	1‘7068865	2‘2212890	2‘8833686	3‘2820096	3‘7334563	4‘2444010	4‘8223459
28	1‘7410242	2‘2879277	2‘9987033	3‘4297000	3‘9201291	4‘4778431	5‘1116867
29	1‘7758447	2‘3565655	3‘1186515	3‘5840365	4‘1161356	4‘7241244	5‘4183879
30	1‘8113616	2‘4272625	3‘2433975	3‘7453181	4‘3219424	4‘9839513	5‘7434912
31	1‘8475888	2‘5000804	3‘3731334	3‘9138574	4‘5330395	5‘2580686	6‘0881006
32	1‘8845406	2‘5750828	3‘5080588	4‘0899810	4‘7649415	5‘5472624	6‘4533867
33	1‘9222314	2‘6523352	3‘6483811	4‘2740302	5‘0031885	5‘8523618	6‘8405899
34	1‘9606760	2‘7319053	3‘7943163	4‘4663615	5‘2533480	6‘1742417	7‘2510253
35	1‘9998896	2‘8138625	3‘9460890	4‘6673478	5‘5160154	6‘5138250	7‘6860868
36	2‘0398873	2‘8982783	4‘1039325	4‘8773785	5‘7918161	6‘8720854	8‘1472520
37	2‘0806851	2‘9852267	4‘2680899	5‘0968605	6‘0814069	7‘2500501	8‘6360871
38	2‘1222988	3‘0747835	4‘4388135	5‘3262192	6‘3854773	7‘6488028	9‘1542523
39	2‘1647448	3‘1670270	4‘6163660	5‘5658991	6‘7047511	8‘0694870	9‘7035075
40	2‘2080397	3‘2620378	4‘8010206	5‘8163645	7‘0399887	8‘5133088	10‘2857179
41	2‘2521998	3‘3598989	4‘9930615	6‘0781009	7‘3919882	8‘9815408	10‘9028610
42	2‘2972440	3‘4606959	5‘1927839	6‘3516155	7‘7615876	9‘4755255	11‘5570327
43	2‘3431891	3‘5645168	5‘4004953	6‘6374382	8‘1496669	9‘9966794	12‘2504546
44	2‘3900533	3‘6714523	5‘6165151	6‘9361229	8‘5571503	10‘5464968	12‘9854819
45	2‘4378542	3‘7815958	5‘8411757	7‘2482484	8‘9850078	11‘1265541	13‘7646108
46	2‘4866111	3‘8950437	6‘0748227	7‘5744196	9‘4342582	11‘7385146	14‘5904875
47	2‘5363443	4‘0118950	6‘7178156	7‘9152685	9‘9059711	12‘3841329	15‘4659167
48	2‘5870698	4‘1322519	6‘5705282	8‘2714556	10‘4012697	13‘0652602	16‘3938717
49	2‘6388122	4‘2562194	6‘8333494	8‘6436711	10‘9213331	13‘7838495	17‘3775040
50	2‘6915880	4,3839060	7‘1066834	9‘0326363	11‘4673998	14‘5419612	18‘4201543

☞ Dans le volume II de son *History of mathematics* déjà cité lors de la séance 1, D. E. Smith précise (p. 585) que « the difficulty in computing interest gave rise in the 16th century to the use of tables. These were extended in the 17th century, a table of compound interest appearing in Richard Witt's *Arithmeticall questions* (London, 1613) ». Une autre méthode, sans doute un peu lourde, peut être mentionnée qui s'inspire d'une remarque de Henry Briggs (1561-1630). Dans son livre fondamental *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century* (Springer, New York, 1977), Herman H. Goldstine écrit en effet ceci :

> Briggs noted, firstly that $\log(1 + x)$ is proportional to x for sufficiently small x; secondly that given a number y it is possible by repeated extractions of square roots to reduce it to a related number y' of the form $1 + x$ for x sufficiently small; and thirdly that the logarithms of only relatively few numbers need be calculated since the others can be obtained either as sums of known logarithms or as subtabulated values. In fact Briggs not only devised subtabulation schemes, he also worked out a very ingenious method to eliminate some of the work of forming the square roots mentioned above. (p. xi)

L'idée de Briggs peut être exploitée aujourd'hui pour calculer le temps pour qu'une quantité ayant un taux de croissance constant soit multipliée par un facteur n. Soit le cas d'un taux de 12,8 %. Au bout de combien de temps le doublement se produit-il ? Voici d'abord la réponse du *Big Online Calculator* :



L'idée de Briggs permet de se passer de la touche $\boxed{\ln}$ des calculatrices au bénéfice de la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$. Calculons d'abord une valeur approchée de ln 2, à l'aide de l'approximation suivante (où l'entier k est supposé suffisamment grand) : $\ln 2 = 2^k \ln(2^{1/2^k}) \approx 2^k (2^{1/2^k} - 1)$. Prenons ainsi $k = 15$. La calculatrice intégrée à l'ordinateur donne les racines carrées successives suivantes :

1	1,4142135623730950488016887242097
2	1,1892071150027210667174999705605
3	1,0905077326652576592070106557607
4	1,0442737824274138403219664787399
5	1,0218971486541166782344801347833
6	1,0108892860517004600204097905619
7	1,0054299011128028213513839559348
8	1,0027112750502024854307455884504
9	1,0013547198921082058808815267841
10	1,0006771306930663566781727848746
11	1,0003385080526823129533054818562
12	1,0001692397053022310836407580641
13	1,0000846162726943132026333307836
14	1,0000423072413958193392519088641
15	1,0000211533969648080942498073332

On a $2^{15} (2^{1/2^{15}} - 1) \approx 0{,}69315451174283163237768669428 63...$ et donc $2^{15} (2^{1/2^{15}} - 1) - \ln 2 \approx 7{,}33118288632296... \cdot 10^{-6}$. Pour calculer $\ln(1{,}128)$, on extrait de même les racines carrées successives :

1	1,0620734437881402935987143770462
2	1,0305694754785532136829985182318
3	1,0151696781713652097741400837579
4	1,0075562903239526744799512632963
5	1,0037710348102064428686815360077
6	1,001883743160954999068577073559
7	1,000941428436726760638109391003
8	1,0004706034845435480543184640888
9	1,0002352740653288658414433219522
10	1,0001176301142425445636789559263
11	1,0000588133276175195589950352272
12	1,0000294062314455358652863449673
13	1,0000147030076335511965107946335
14	1,0000073514767946700669691563244
15	1,0000036757316418334820966452065

On a : $2^{15} (1{,}128^{1/2^{15}} - 1) = 0{,}12044637443959954134287012611172...$ Il vient : $2^{15} (1{,}128^{1/2^{15}} - 1) - \ln 1{,}128 = 2{,}2136373238692895... \cdot 10^{-7}$.

Le quotient des valeurs obtenues donne pour approximation du temps de doublement 5,754880… Seules les quatre premières décimales de ce résultat sont exactes, mais cela est largement suffisant pour les usages habituels.

☛ L’alinéa ❺ conclut sans façon que « la démarche de Pacioli est empirique et n’a aucun rapport avec les mathématiques actuelles ».

☞ En ce point, je voudrais, pour recentrer mon propos, présenter le contenu d’un échange à propos de la « Rule of 72 » disponible sur *The Math Forum @ Drexel* (http://mathforum.org/kb/message.jspa?messageID=1378343). Le 17 août 1997, un certain Joe Albree écrit ceci :

> Dear Friends,
> I would like to know how Pacioli justified the Rule of 72 more than 100 years before the invention of logarithms.
> There is a derivation of this Rule which is based on the discrete compound interest formulas [Irwin Kabus and Mitchell Preiss, “An explanation of the Rule of 72”, *Alabama Journal of Mathematics*, vol.21, no.1 (Spring 1997), pp. 17-18.]. But this account requires the use of Maclaurin series.
> Sincerely,
> Joe Albree

On voit ici posé le problème que j’ai soulevé à propos de la règle de 75, mais cette fois à propos de la règle de 72 et de Pacioli. L’intervention de Joe Albree vient après trois autres messages « emboîtés ». Le premier, par ordre chronologique, est dû à un certain Andeei Heilper ; le voici :

> Recently I came across of the “Rule of 72” used in interest calculations.
> The rule gives you the time needed to double a principal for a given interest rate, i.e. n * r = 72, where n is the number of years and r is the interest rate.
> Some short analysis shows that we are analyzing the equation ln 2 = n * ln(1+r/100) \approx n * r, so n * r \approx 100 * ln 2 = 69,31… So the number should be 69 instead of 72. But 72 has many factors, which makes it more suitable for mental computations, and the approximation is better for the interests rates form 5 to 10%.
> Digging up some history books, I found that it is already mentioned in Luca Pacioli’s Summa arithmetica (about 1490), so before logarithms.
> Does anybody have earlier references and/or deductions of this rule?

Tout cela nous est connu (par exemple l’argument selon lequel 72 a « beaucoup » de diviseurs, ce qui rendrait ce dividende plus intéressant). Mais les questions posées demeurent ouvertes. À ce message répond alors un certain Michael_Deakin :

> I can't answer the last question, but have an observation to make about one of the earlier queries in this posting. The actual number (69, 72, or what have you) is in fact a function of the interest rate r. The "Rule of 72" was widely promulgated here in this country some years ago at a time when interest rates were high (just before the stock exchange crash of 1987). Before this we heard little about it.
> However I have a distant and rather older cousin who taught Math for many years. He wrote to me that he learned the rule as a schoolboy in New South Wales (this would be shortly after WWII), but as the Rule of 70.

Ce message nous apporte deux notations (conjecturales) intéressantes : 1) la règle de 72 aurait été largement diffusée aux États-Unis après le krach boursier d'octobre 1987 ; 2) au moins en Australie, et plus précisément en Nouvelle-Galles du Sud, après la seconde guerre mondiale, on apprenait la « règle de 70 ». Le troisième et dernier message de l'échange examiné est daté du 13 août 1997. Il est signé de Julio Gonzalez Cabillon (c'est à ce message que faisait écho le message de Joe Albree, le 17 du même mois) :

> The well-known Italian Professor Giovanni Vacca, in an essay entitled "The first Napierian logarithm calculated before Napier", also remarks that "Sometimes the number 70 is given instead of 72". [cf. p. 164 (*)]
> In the "Summa de Arithmetica" of Fra Luca Paciolo, printed in Venice in 1494, there is the following problem:
> (Fol. 181, n. 44) *A voler sapere ogni quantita a tanto per 100 l'anno, in quanti anni sara tornata doppia tra utile e capitale, tieni per regola 72, a mente, il quale sempre partirai per l'interesse, e quello che ne viene, in tanti anni sara raddoppiato. Esempio: Quando l'interesse e a 6 per 100 l'anno, dico che si parta 72 per 6; ne vien 12, e in 12 anni sara raddoppiato il capitale.*
> Luca Paciolo says that the number of years necessary to double a capital placed at compound interest, is the number resulting from the division of the fixed number 72 by the rate of interest per 100. Giovanni Vacca speculates about the following possibility: "If this problem were known to Napier, might it not have been a suggestion leading to his further discovery? Perhaps in his manuscripts can explain this point." It might have been, though I doubt it. "In any case, it is curious to note —says Vacca— that the Napierian logarithm of 2 was printed before the year 1500, with an approximation of 3 per 100."
> Too cheerful! In my personal opinion, there is nothing funny to note about.
> The key-procedure being just "trial and error"; that is, the oldest algorithm of all times.
> Regards to all,
> Julio Gonzalez Cabillon
> ----------------------

(*) Knott, Cargill Gilston (1856-1922) ed.: "Napier tercentenary memorial volume", Published for the Royal Society of Edinburgh, by Longmans, Green and company, London, 1915.

Cette intervention montre que le problème de liens éventuels entre Pacioli (dont l'ouvrage eut une seconde édition – posthume – en 1523 et fut une référence de longue durée pour les mathématiciens) et Napier peut à bon droit être posé, même si le signataire du message, quant à lui, avoue ne pas croire à une influence de l'ouvrage de Pacioli sur Napier touchant son « invention » des logarithmes.

☞ L'article mentionné du mathématicien Giovanni Vacca, alors chargé de cours de chinois à l'université de Rome (mais qui fut aussi l'assistant de Giuseppe Peano), date de 1914. Sur Vacca, voir http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Vacca.html); pour son article (ci-après), voir http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Pacioli_logarithm.html :

THE FIRST NAPIERIAN LOGARITHM CALCULATED BEFORE NAPIER

Giovanni Vacca, Professore incarito [*sic*] {incaricato} of Chinese in the Royal University of Rome

In the ordinary histories of mathematics there are very few suggestions about the way in which John Napier conceived the idea of his great discovery, truly one of the most beautiful made by man, not only as supplying a new method for saving time and trouble in tedious calculations, but also as forming one of the most important steps towards the discovery of the infinitesimal calculus.

Generally the only reference made is to the *ψαμμίτης* of Archimedes [Cf. J. B. Biot, *Journal de savants*, 1835; and also G. Loria, *Le scienze estate nell' antica Grecia*, pp. 757, 970] {titre en français : l'*Arénaire* ; en anglais : *The Sand Reckoner*}.

I have lately observed that in the Summa de Arithmetica of Fra Luca Paciolo, printed in Venice in 1494, there is the following problem:

(Fol. 181, n. 44.) ' A voler sapere ogni quantita a tanto per 100 I'anno, in quanti anni sara tornata doppia tra utile e capitale, tieni per regola 72, a mente, il quale sempre partirai per I'interesse, e quello che ne viene, in tanti anni sara raddoppiato. Esempio : Quando I'interesse e a 6 per 100 I'anno, dico che si parta 72 per 6; ne vien 12, e in 12 anni sara raddoppiato il capitale.

Luca Paciolo says that the number of years necessary to double a capital placed at compound interest, is the number resulting from the division of the fixed number 72 by the rate of interest per 100.

If we try to explain the mystery of this number 72 (and the reason of this mystery was impenetrable to the succeeding arithmeticians, for instance, Tartaglia), we easily see in modern notation that

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^x = 2$$

or, taking Napierian logarithms :

$$x \log\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \log 2$$

and to a first approximation, if r is small :

$$x = \frac{100 \log 2}{r}$$

therefore 72 is only a rough calculation of the number 100 log 2.
This problem is to be found, without explanation, in modern treatises, for instance in the introduction to the *Tables d'interêt composé* of Pereyre.
Sometimes the number 70 is given instead of 72.
If this problem were known to Napier, might it not have been a suggestion leading to his further discovery? Perhaps a research in his manuscripts can explain this point.
In any case it is curious to note that the Napierian logarithm of 2 was printed before the year 1500, with an approximation of 3 per 100.

Il n'y a là qu'une conjecture, certes ; mais la question mérite d'être posée : la règle de 72 est un fil rouge qui court discrètement au long des siècles. (Les *tables de l'intérêt composé* d'Eugène Pereyre, cités par Vacca, avaient paru en 1898 chez Gauthier-Villars et fils.) En fait, la conclusion suivante semble relativement solide : la règle de 72 apparaît pour la première fois sous forme *imprimée* dans la *Summa* de Pacioli, et cela sans justification (elle apparaît telle même pour les élèves de Pacioli, tel Tartaglia). Toutefois, l'ignorance où nous sommes quant à l'établissement de cette règle ne permet pas de dire, comme croit pouvoir le faire μ_0, que « la démarche de Pacioli est empirique et n'a aucun rapport avec les mathématiques actuelles ».

☞ On a vu par ailleurs qu'il semblait exister, au moins à l'époque moderne, une « rivalité » entre « règle de 72 » et « règle de 70 ». Pour des informations à ce sujet, je reproduis ci-après le contenu d'une autre page du *Math Forum @ Drexel* (http://mathforum.org/library/drmath/view/54615.html) :

Compound Interest - Rule of 70
Date: Tue, 29 Nov 1994 14:12:30 -0800 (PST)
From: Mizuki Nishisaka
Subject: Rule of 70

There is a famous "Rule of 70" for compounded interest.
What is it and why does it work?

Mizuki Nishisaka

Date: 7 Dec 1994 17:44:55 GMT

From: Dr. Math

Subject: Re: Rule of 70

Hey Mizuki,

The question is:

Given a compounding rate 1.r (r is some two-digit number like 08 15 12 04 tc.), how many years will it take to double if it is compounded yearly?

For example, if your savings account has an 8% interest rate, then your compounding rate is 1.08. The way to do this is the following:

Let p_0 be your initial investment and p_1, p_2, p_3, ... be how much you have after each year. So

$$p_1 = (1.08)p_0$$
$$p_2 = (1.08)(1.08)p_0$$
$$p_3 = (1.08)(1.08)(1.08)p_0$$
$$p_4 = (1.08)(1.08)(1.08)(1.08)p_0$$
$$p_5 = (1.08)(1.08)(1.08)(1.08)(1.08)p_0$$

So p_N equals p_0 times $(1.08)^n$ - so the question we are asking is when does

$$(1.08)^n = 2$$

Using natural logs we can find that

$$n = \ln(2)/\ln(1.08)$$

and it turns out that this is very close to 70/r.

So 70/r can be used to approximate the number of years needed to double your money if r is your interest rate.

Here are a few comments on why this is true.

Precisely what we are saying is that $\ln(2)/\ln(1 + r/100)$ is approx. 70/r.

Or, the value of the first derivative of the lefthand side is approximately seventy. This is true; however, for calculation purposes it is probably easier to show that the derivative of the reciprocal $\{ \ln(1 + r/100)/\ln(2) \}$ is 1/70. Once you know this it is enough to show that these two equations are close at one point, and you can say that they will be reasonably close at many points, near $r = 10$ for instance.

Hope that this helps you. Thanks and bye.

Ethan, Doctor ON CAll

Date: 28 Sep 2000 17:19:55 GMT

From: Dr. TWE

Subject: Re: Rule of 70

Actually, in financial circles, it is usually referred to as the “rule of 72.” Dividing the value 72 by the interest rate gives closer approximations when dealing with rates around 6% to 8%, which are typical in the financial industry. You can find out more about the rule of 72 by typing “rule of 72” without the quotation marks in our Ask Dr.

Math searcher at:

http://mathforum.org/mathgrepform.html

When dealing with exponential growth in biology, the rule of 70 is more often used. When the growth rate is 3% or less, then dividing the value 70 by the growth rate gives closer approximations than 72.

I hope this helps!

Doctor TWE

http://mathforum.org/dr.math

Ce document apporte deux informations – à vérifier – concernant au moins la société états-unienne : la « rule of 72 » y serait privilégiée dans les milieux financiers ; la « rule of 70 » serait préférée dans le champ des sciences biologiques.

☞ Je dois à Michèle Artaud, que je remercie tout particulièrement, des informations sur l'apparition – très discrète – d'une règle du type étudié dans les marges de l'enseignement français. Dans un problème pour une classe de Terminale S (http://labomath.free.fr/faidherbe/ts/devoirs/2009-2010/un-truc-de-banquier-cor.pdf), on conduit ainsi les élèves à justifier « un truc de banquier » qui n'est autre que la règle de 70 : la justification s'appuie classiquement sur l'encadrement $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$ pour $x \geq 0$. La dernière question généralise la règle de 70 pour le triplement (« règle de 110 »), le quintuplement (« règle de 160 »), le décuplement (« règle de 230 »). Le même problème est en substance repris ailleurs : voir ainsi http://www.maths-forum.com/truc-banquier-ts-55184.php et encore, dans la même veine (demande d'aide de la part d'un élève confronté au même problème), http://www.ilemaths.net/forum-sujet-458993.html. Voici à titre d'exemple le texte de l'exercice 136 proposé par le manuel de Terminale S de la collection Odyssée (Belin, 2012, p. 229) :

Temps de doublement

1. **a**. Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$$

b. En déduire que l'erreur commise dans l'approximation $\ln(1 + x) \approx x$ est inférieure à 0,01 pour tout réel x vérifiant $0 \leq x \leq 0{,}14$.

2. La valeur d'un capital C placé à intérêts composés au taux annuel t pendant n années est égale à :

$$C \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$$

a. Exprimer en fonction de t le nombre d'années n nécessaires au doublement d'un capital

b. Justifier que pour $t \leq 14$, le nombre d'années n nécessaires au doublement d'un capital est environ $\frac{70}{t}$.

c. Justifier que pour $t \leq 14$, le nombre d'années n nécessaires au triplement d'un capital est environ $\frac{110}{t}$.

On aura noté que la formule $C \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$ est *donnée* et non pas *établie* : le travail demandé à l'élève fait l'économie d'un point de modélisation extra-mathématique et se cible sur le seul travail intra-mathématique. Le second exercice est extrait d'un manuel de la collection Terracher pour la Terminale S (Hachette, 2002) : il s'agit de l'exercice 125, page 109 ; le voici :

Un « truc » de banquier
(D'après D. Reisz, *Bulletin de l'APMEP* n° 383.)
Les banquiers calculent mentalement le temps approximatif de doublement d'un capital, placé à intérêts composés, de la façon suivante : « Si t est le taux d'intérêt (en %), le capital double au bout de $\frac{70}{t}$ années. »

On rappelle qu'au bout de n années de placement au taux t, la valeur d'un capital est multipliée par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$.

1. Établir, pour $x \geq 0$, l'encadrement :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x.$$

2. En déduire un majorant de l'erreur dans l'approximation $\ln(1 + x) \approx x$.
3. Justifier le « truc » du banquier, pour les petites valeurs de t ($t \leq 14$).
4. Énoncer des règles analogues pour déterminer mentalement le temps au bout duquel un capital triple, quintuple, décuple.

Là encore c'est la règle de 70 qui est mise en avant. Là encore, aussi, le travail de modélisation extra-mathématique requis pour arriver à l'expression du facteur $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$ est neutralisé. La référence donnée en début d'énoncé renvoie à un article de Daniel Reisz intitulé « Un truc de banquier ou de l'usage des approximations affines » paru en 1992 dans le n° 383 du *Bulletin de l'APMEP*, pp. 173-176. Curieusement, cet article traite de la règle… de 72, comme le signale d'ailleurs le résumé figurant sur le site de Publimath (http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/AAA99721.htm) : « Quand votre capital double-t-il ? C'est assez simple : divisez par 72 le taux d'intérêt et vous avez le nombre d'années nécessaires. La qualité de cette approximation est le sujet de cet article. » Ce nonobstant, il est raisonnable de conjecturer que les problèmes et exercices sur la règle de 70 qui ont été mentionnés plus haut ont trouvé là, de façon directe ou indirecte, leur source initiale. Dans son article, Daniel Reisz utilise une approximation

« classique » *mais appliquée à l'inverse du temps de doublement* $\dfrac{\ln 2}{\ln\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)}$:

il obtient

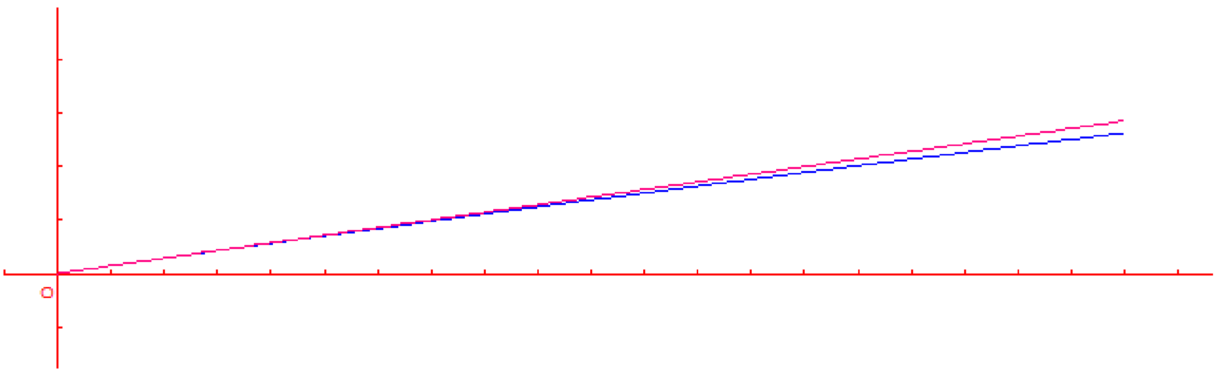
$$\frac{\ln\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)}{\ln 2} \approx \frac{1}{\ln 2}\left(\ln 1 + \frac{i}{100}\right) \approx \frac{i}{69{,}31}$$

et conclut que ce résultat « amènerait bestialement à choisir 69 ou, pour simplifier, 70 ». Ayant en fait introduit son article en annonçant la règle de 72 – le « truc de banquier » qui donne son titre à l'article –, il s'interroge : « Pourquoi alors 72 ? » Et de répondre :

➔ 72 est plus riche de diviseurs que 70 et se prête donc mieux au calcul mental ;

➔ la forme de la courbe représentative de f sur l'intervalle "utile" [0 , 20] suggère de rabattre un peu la droite d'approximation [de $1/f$] afin de passer de l'approximation affine en 0 à une approximation globalement plus satisfaisante sur l'intervalle [0 , 20].

La fonction f est définie par $f(i) = \dfrac{\ln 2}{\ln\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)}$. On a représenté ci-dessous la fonction $g(i) = 10\,\dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)}{\ln 2}$ (en bleu) et son approximation affine $h(i) = 10\,\dfrac{i}{70}$ sur l'intervalle [0, 20].



En divisant la variable i par 72 au lieu de 70, c'est-à-dire en remplaçant ici h par $k(i) = 10\,\dfrac{i}{72}$, on abaisse un peu la droite en rouge – représentant l'approximation par la règle de 70 – sur la courbe en bleu (correspondant à la valeur exacte du temps de doublement). Telle serait, selon Daniel Reisz, une *autre raison du remplacement* de 70 par 72. L'auteur donne alors un tableau comparatif qui nous ramènera vers les « nombres magiques » rencontrés lors de la séance 1 :

i	$f(i)$	$69{,}31/i$	$70/i$	$72/i$
5	14,21	13,86	14	14,4
7,5	9,58	9,24	9,33	9,6
10	7,27	6,93	7	7,2
12	6,12	5,78	5,83	6
15	4,96	4,62	4,67	4,8
20	3,8	4,46	3,5	3,6

Supprimons maintenant la colonne de l'approximation « bestiale » $69{,}31/i$ et rajoutons au tableau ainsi amputé une dernière colonne donnant cette fois $75/i$; on obtient ceci :

i	$f(i)$	$70/i$	$72/i$	$75/i$
5	14,21	14	**14,4**	15
7,5	9,58	9,33	**9,6**	10
10	7,27	7	**7,2**	7,5
12	6,12	5,83	**6**	6,25
15	4,96	4,67	4,8	**5**
20	3,8	3,5	3,6	**3,75**

On voit que, sur les valeurs examinées, il n'y a pas d'approximation qui soit *toujours* la meilleure. Signalons pour finir que l'article de Daniel Reisz se poursuit avec une généralisation aux cas où le capital est multiplié par 3, 4 ou 5, en donnant dans chaque cas le choix « raisonnable » du dividende à utiliser : dans le cas du triplement, celui-ci vaudrait 120 selon l'auteur, alors que les exercices indiqués plus haut proposaient 110. Mais revenons à notre sujet.

☛ Poursuivons notre lecture commentée en examinant maintenant l'alinéa ❻ du courriel de μ_0, que je rappelle :

> (même si c'est un grand vulgarisateur qui a eu comme prédécesseur Nicolas Chuquet avec son « Triparty en la science des nombres » publié en 1484 et le niçois Francois Pellos qui a publié en 1492 son « compendion dell'abaco »)

Nous retrouvons exemplairement la propension rétrocognitive et ésotérique de μ_0 dans des matières qui ne sont pas de son domaine de compétence. Dire ainsi que Pacioli « a eu comme prédécesseur Nicolas Chuquet avec son "Triparty en la science des nombres" publié en 1484 », c'est se fier trop rigidement aux dates de publication : c'est, en vérité, considérer que les conditions aujourd'hui familières aux chercheurs des sciences dures prévalaient déjà dans la deuxième moitié du XVe siècle ; c'est, au vrai, *commettre un anachronisme*. On sait que le *Triparty* fut oublié jusqu'à sa redécouverte en 1880 à la Bibliothèque nationale par Aristide Marre. Mais de son temps, que sait-on des influences dans un sens ou dans un autre ? L'article « Nicolas Chuquet » de l'encyclopédie *Wikipédia* indique par exemple ceci, à contre-fil de l'ordre chronologique des dates de publication (Pacioli avait écrit sur l'arithmétique bien avant 1494) :

> Un manuscrit datant de 1470 et rédigé sur un papier italien confirme l'idée que Chuquet venait d'Italie, ou tout au moins était influencé par la culture italienne, notamment au travers des œuvres de Luca Pacioli ; son œuvre pouvant se comparer à la *Summa de geometrica, arithmetica, proportioni et proportionalita*, éditée en 1494 par ce dernier.

Francés Pellos, dont le *Compendion de l'abaco*, écrit en occitan, est imprimé en 1492, ne peut sans doute pas plus être dit un prédécesseur de Pacioli, hormis par les dates de publication, à nouveau ! Mais je saisirai cette occasion pour avancer une conjecture. L'ouvrage de Pellos a bénéficié d'une édition moderne procurée par Robert Lafont aidé de Guy Tournerie (Éditions de la Revue des langues romanes, Montpellier, 1967). Sauf erreur, on ne trouve pas, dans l'ouvrage de Pellos, de calcul d'intérêts composés. Mais on y trouve par exemple ceci :

> *La XIII regula*
>
> Cant una L. gasanha per mes una certa quantita de denier, et tu voles saber en que temps una autra soma de L. pusca esser doblat, non comptar en cap d'an, de la doves tostemps partir 20 ans per aquel que gasanha 1 L. per mes, coma clar appar en lo exemple sequent :
>
> *Exemple de la pratica.*
>
> Una L. gasanha d. 3 he un ters per mes, et yeu demandi 1.000 L. en quant temps puscan esser doblas, non a comptar en cap d'an, mas simplement fay ensins : partas 20 anns per 3 he un ters, en ven just sexanta desens, que valon just 6. E ensins aves trobat que en cap de 6 ans seran doblas, coma 2.000, et es fach.

Il s'agit de savoir en combien de temps une somme double si elle est placée de façon qu'une livre rapporte $3\,\frac{1}{3}$ deniers par mois. Une livre vaut 240 deniers. Si une livre est placée ainsi pendant x ans, les intérêts simples (« non comptar en cap d'an ») sont de $x \times 12 \times 3\,\frac{1}{3}$ deniers. L'équation $x \times 12 \times 3\,\frac{1}{3} = 240$ a pour solution $x = \dfrac{240}{12 \times 3\frac{1}{3}} = \dfrac{20}{3\frac{1}{3}}$ – comme annoncé. En usant des notations actuelles, on obtient : $\frac{20}{3\frac{1}{3}} = \frac{20}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{60}{9 + 1} = \frac{60}{10}$ c'est-à-dire « sexanta desens », soit 6. On pourrait multiplier les exemples. Ce qui importe, ici, c'est de voir que la manière de faire (« fay ensins : partas 20 anns per 3 he un ters ») consiste *à diviser un certain nombre d'années par le gain annuel*. C'est ce schéma de calcul générique que l'on retrouve en d'autres cas. Voici un second exemple :

> *La XV regula*
>
> Cant 100 L. gasanhon una certana somma de L. per an, et tu voles saber de una autra somma de L. a ton bon plasir he in quant de temps pusca esser doblat, non comptar en cap d'an, de la deves tostemps partir 100 ans per tantas L. quantas 100 L. gasanhon per an, coma per eyemple :
>
> *Exemple de la pratica.*
>
> 100 L. gasanhon L. 8 S. 6 d. 8 per an, e yeu demandi en quanto de temps puscan esser doblas, non comptar en cap d'an. Fay ensins : partas 100 anns per L. 8 he un ters, et troberas just 12. Et en 12 ans sera aquella somma dobla, coma L. 200, et es facha ta rayson.

Un tiers de livre vaut 80 deniers ; l'auteur dit ailleurs que « 1 S. pertot val 12 d. » ; comme $80 = 6 \times 12 + 8$, un tiers de livre vaut S. 6 d. 8. Si 100 livres rapportent donc $8\frac{1}{3}$ L par an, en x ans la somme rapportera $x \times 8\frac{1}{3}$ livres. Pour que l'on ait $x \times 8\frac{1}{3} = 100$, il faut et il suffit que l'on ait $x = \frac{100}{8\frac{1}{3}} = \frac{100}{8 + \frac{1}{3}} = \frac{300}{24 + 1} = \frac{300}{25} = 12$ – « es fach » ! On retrouve ici la structure classique : diviser un certain nombre d'années par le *meriti*. (Les extraits précédents se trouvent dans *lo XIIII capitol, chi s'apella regula de meriti* : *meriti* vient du latin *meritum*, dérivé de *merere* « recevoir comme part ou comme prix ».) Ma conjecture est donc que l'accoutumance à cette structure opératoire utilisée en une multiplicité de situations de calcul a dû faciliter la réception d'une règle du type « Diviser *n* années par le taux ».

b) Tout ce qui précède nous place devant une conjecture assez hautement vraisemblable : un mathématicien évergète μ, qui a certainement une attitude herbartienne, procognitive et exotérique dans son domaine de spécialité, est porté à s'adonner, spontanément, à une forme d'amateurisme naïf, souvent cavalier, dans le champ des phénomènes didactiques, où il multiplie sans vergogne apparente les points de vue expéditifs et les à-peu-près téméraires dans tous ses secteurs d'intervention – sans doute parce que, persuadé – souvent à bon droit – d'être « pointu » et rigoureux dans son domaine de recherche, il est porté à croire qu'il en va de même dans le champ des phénomènes didactiques. (L'ouvrage intitulé *Mathématiques en liberté* publié par les éditions La ville brûle en 2012, où le journaliste scientifique Sylvestre Huet fait dialoguer d'éminentes personnalités mathématiciennes – Pierre Cartier, Jean Dhombres, Gerhard Heinzmann, Cédric Villani – fournit un excellent exemple du contraste parfois surprenant entre propos savants et propos d'amateurs ou de quasi-amateurs, notamment dans la partie intitulée non sans emphase « Histoire politique et sociale de l'enseignement des mathématiques », partie qui, bien entendu, fournit à ξ un matériau passionnant.)

c) Dans la mesure où les mathématiciens évergètes prétendent, de par leur qualité de mathématicien parfois de première force, à un rôle de *pouvoir* là où les didacticiens visent d'abord une *puissance* de pensée et d'action (d'abord, car quelques-uns d'entre eux, hélas ! se comportent à l'évidence comme des phalènes irrésistiblement attirées par les lumières du Pouvoir), la situation de coexistence et la recherche d'un *modus vivendi* convenable entre ξ et μ apparaissent bien délicates. Pour éclairer philosophiquement la distinction usitée ici entre pouvoir et puissance, je reproduis ci-après un bref extrait du livre de Pierre Macherey intitulé *De Canguilhem à Foucault. La force des normes* (La Fabrique, Paris, 2009) :

> Puissance et pouvoir, *potentia* et *potestas* pour parler le langage de la philosophie classique, désignent en effet deux types d' action ou d'intervention différents, et même opposés : la dynamique de la puissance est immanente, en ce sens qu'elle présuppose une complète identité et simultanéité de la cause à ses effets, qui sont alors dans un rapport de détermination réciproque ; alors que la référence à un pouvoir implique une transcendance, réalisée par le moyen d'une antériorité de la cause par rapport à l'effet, d'où résulte aussi qu'il doit y avoir plus dans la première, qui le commande, que dans le second, relégué au rang d'une conséquence simplement dérivée. (p. 9)

Mais il est temps d'examiner maintenant le second post-scriptum de μ_0, que je reproduis ci-après *ne varietur* (en signalant que μ_0 a, en réalité, et contrairement à ce qu'il indique, omis de joindre la pièce attachée qu'il annonce) :

> PS.2. j'ai eu un grand moment de divertissement à lire le journal du Séminaire TAD/IID (ci-joint en pièce attaché pour ceux qui n'auraient pas eu le bonheur de le lire) de l'UMR (????) ADEF, dans lequel du essayes pathétiquement de te convaincre que tu as raison et tu décharge tes poussées d'adrénaline en me traitant de « béta ».
> Il ya bien longtemps que je n'avais pas ri d'aussi bon cœur ! Je t'en remercie.

Nous ne pouvons oublier, bien sûr, que tout ce que μ_0 a écrit l'a été *ab irato*. Il n'empêche : nous sommes loin, ici, de l'espoir d'un « *modus vivendi* convenable ». Le ton goguenard, persifleur, sardonique du scripteur atteint là son acmé. Ce post-scriptum vise certes ma personne ; mais surtout il insulte le travail qui se fait dans ce séminaire, travail dont le contenu et les formes sont pour lui, à l'évidence, une réalité inconnue et, je le crains, pratiquement et théoriquement inconnaissable. Et cela pour une raison toujours la même : μ_0 ne travaille pas *en tant que chercheur* sur les phénomènes didactiques : μ_0 ne s'est pas mué en ξ. De plus, il ignore apparemment tout de la TAD, de ses exigences épistémologiques et méthodologiques et de la force de l'engagement praxéologique que son développement suppose. C'est, en l'espèce, fort dommage ; mais c'est ainsi.

That's all, folks!