

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

**Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement**

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers.

Marcel Pagnol (1895-1974)

Le lendemain, Aymery prit la ville. Victor Hugo (1802-1885)

Le séminaire TAD & IDD, animé par Yves Chevallard, a une double ambition solidaire : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment des professions de professeur, de formateur et de chercheur en didactique. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des praxéologies mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 14 h à 16 h puis de 16 h 30 à 18 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie à distance par visioconférence.

→ Séance 6 – Vendredi 11 mai 2012

LA DIFFUSION SOCIALE DES CONNAISSANCES

1. Rencontrer puis oublier ?

a) La diffusion des connaissances en une institution donnée, et à plus forte raison dans une société donnée, se heurte sans doute à bien des obstacles, que l'on suppose derrière des phénomènes récurrents, insistants, bien attestés. J'ai évoqué, ainsi, la notion de *frontière* que l'on ne parvient pas à passer ; que l'on ne passe, de façon téméraire mais éphémère, que pour revenir bientôt en arrière, souvent définitivement, « chez soi », « parmi les siens ». Lorsqu'une barrière se présente, on cherche en principe des points de passage – c'est d'ailleurs le rôle classique de l'enseignant que de les *montrer*. Or, en matière d'équipement praxéologique, ce qu'on observe, ce sont, à l'inverse, des « points d'arrêt » : là où on pourrait passer, on s'arrête, comme si l'on ne voyait pas le passage qui s'offre. Et, quand on vous montre

le passage, vous le perdez de vue aussitôt. L'enseignement fait rencontrer aux « enseignés » des entités praxéologiques, mais celles-ci sont souvent oubliées aussitôt, refoulées par la pression de la norme praxéologique ambiante. C'est ainsi que je peux bien enseigner que, en bonne typographie, on abrège « première » en « 1^{re} » (et non en « 1^{ère} ») et « minute » en « min » (et non en « mn »), les étudiants ayant reçu mon enseignement continueront sauf exception à user sans façon des abréviations fautives. L'explication qui paraît cliniquement la plus pertinente est que, alors qu'on leur avait montré le passage pour accéder à un autre pays – celui, en l'espèce, de l'orthotypographie –, ils refluent vers le vieux pays, vers ce petit monde qui leur est familier, dont la « norme » – écrire « 1^{ère} », « 2^{ème} » – est la seule qui vaille aux yeux de qui renonce à s'arracher aux pesanteurs praxéologiques de sa terre d'origine – ce qui, bien sûr, revient à renoncer à apprendre.

b) Je voudrais illustrer cela d'un exemple connu, qui s'est rappelé à mon attention à travers une question posée par une ancienne élève de l'IUFM de la promotion 2004-2005, jeune collègue qui présente toute les garanties de sérieux et de fort engagement professionnels. Sa question a trait à ce pont aux ânes que la profession enseignante toute entière – je parle ici des professeurs de mathématiques – semble ne pas vouloir passer : le lien – et les ambiguïtés du lien – entre *figures* et *démonstrations* en géométrie, ou, plus exactement, entre géométrie *expérimentale* et géométrie *théorique*. En 2004-2005 comme dans les autres années, cette grande question a été longuement abordée, comme l'atteste le long extrait de la 13^e séance du séminaire adressé cette année-là aux professeurs stagiaires de mathématiques, ce qui, indépendamment de l'épisode récent, semble avoir eu autant d'effet que de l'eau sur les plumes d'un canard. Brèves rencontres, donc...

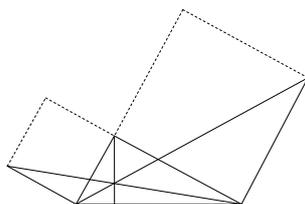
Expérimentation & théorisation

- Les mathématiques enseignées au collège comme au lycée se réfèrent à trois « réalités » qu'il s'agit précisément de « connaître mathématiquement » : les ***faits spatiaux*** (qu'étudie la géométrie), les ***faits numériques*** (qu'étudient l'arithmétique, l'algèbre, le calcul infinitésimal, etc), les ***faits aléatoires*** (qu'étudie la statistique).
- Certaines des notions correspondantes ont été depuis si longtemps ***mathématisées*** que nous sommes portés à les tenir d'emblée pour des notions « ***mathématiques*** » alors qu'elles sont d'abord, au collège et au lycée, des notions ***à mathématiser***, qu'il faut donc aborder comme des notions rendues en partie familière par notre « expérience » – inégale ! – du spatial, du numérique, de l'aléatoire.
- D'une manière générale, chacun des trois domaines à étudier doit faire l'objet de deux ordres de travaux : des travaux ***expérimentaux***, des travaux

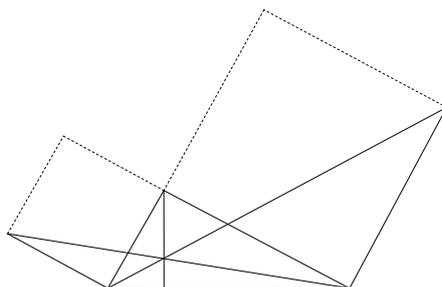
théoriques – en entendant par théorie, ici, une organisation **déductive** dont, dans le domaine de réalité considéré, on espère pouvoir tirer tous les éléments théoriques, technologiques, techniques utiles. On construira ainsi une géométrie **expérimentale** et une géométrie **théorique** (déductivement organisée), une **statistique** expérimentale et une statistique théorique, etc.

① On illustrera ces notions dans le cas de la géométrie. Celle-ci est définie comme **la science des faits spatiaux**, c'est-à-dire des faits que l'on peut prouver **vrais** – expérimentalement – dans l'espace.

❶ Soit la situation géométrique représentée ci-près : un triangle rectangle, les carrés construits sur les côtés de l'angle droit, et trois droites (en trait continu), dont la hauteur relative à l'hypoténuse du triangle rectangle.

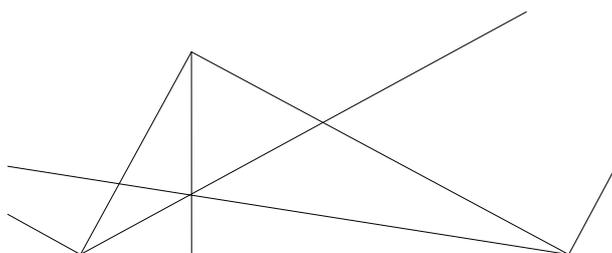


Ces trois droites se coupent-elles, comme semblent l'indiquer l'épure ci-après ?



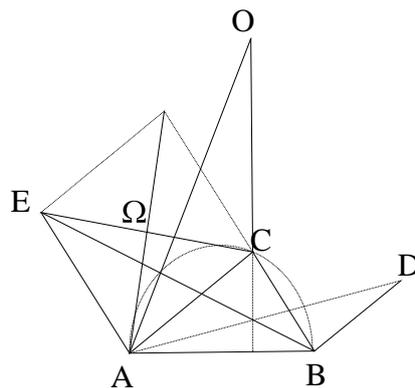
❷ Le fait spatial que l'on croit apercevoir est-il avéré ? Tant qu'on ne dispose pas d'une théorie géométrique **assez développée** et elle-même **bien contrôlée par l'expérience**, la seule façon de répondre est de procéder à une étude **expérimentale** de cette assertion : est-elle vraie dans l'espace sensible ?

a) Pour cela, refaisons **en plus grand** la figure ci-dessus (épure A). Le petit triangle d'intersection grossit-il en proportion ? Il semble bien que non ! L'idée que les trois droites géométriques se coupent gagne donc en crédibilité.



Épure A

③ Peut-on alors **déduire** ce « fait spatial » des assertions composant la théorie géométrique disponible, la TGD ? La faisabilité de la chose dépend bien sûr, théoriquement mais aussi pratiquement, de ce qu'est la TGD. Bien entendu, l'un des objectifs essentiels de la mathématisation est de nous libérer de l'expérience – qui, souvent, est coûteuse, et imprécise... Mais pour cela, il convient de construire cette théorie, et d'apprendre à s'en servir ! À titre d'exemple, voici une déduction possible du fait spatial étudié (que l'on sait *a priori* être **vrai**) à partir de la théorie géométrique disponible, en principe, en 2^{de}.



Considérons la figure ci-dessus, où la droite (AO) est perpendiculaire à (BE). Soit Ω le centre du carré de sommets A, C, E. Le quart de tour direct de centre Ω transforme E en A, A en C, et B en O. Par suite, on a $CO = AB$. On en déduit de même que la perpendiculaire à (AD) passant par B passe par O. Les trois droites ne sont donc pas autre chose que les **hauteurs** du triangle AOB. Par suite, ces droites se coupent.

④ La démonstration indiquée (Vecten, 1817) exige déjà une maîtrise sophistiquée de la théorie géométrique. La TGD et la capacité à l'utiliser doivent se construire, à partir de la 6^e, **dans un dialogue constant avec l'expérimentation spatiale**. Notons ici que, en matière de géométrie **plane**, l'expérimentation spatiale peut se réduire entièrement à une expérimentation **graphique**, et cela précisément parce que l'espace usuel vérifie l'axiome de Wallis (voir la séance 12 du Séminaire) : ses propriétés étant invariantes par homothétie, il suffit, pour faire parler l'espace, d'expérimenter à l'échelle d'une feuille de papier – qui constitue le **laboratoire du géomètre euclidien**.

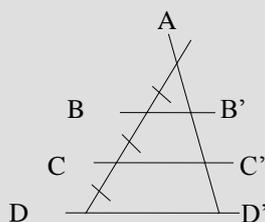
② Pour illustrer ce qui précède, on examinera une question [soulevée assez récemment].

① Commençons par la question suivante.

Déduire, mais de quoi ?

Sur le thème du théorème de Thalès, pour travailler l'OMP relative au théorème des milieux, j'ai donné un DM utilisant le théorème des milieux et

les propriétés du parallélogramme pour démontrer le théorème de Thalès dans le cas illustré par la figure suivante :



Certains élèves ont utilisé le « théorème » suivant, non vu en cours, mais qui est la pierre angulaire de la démonstration de Thalès : « Si $AB = BC = CD$ et $(BB') // (CC') // (DD')$, alors $AB' = B'C' = C'D'$. » Ce n'est pas ce que j'attendais, mais, s'agissant, de travail personnel, l'énonciation de cette conjecture « évidente » relève tout autant d'un réel effort mathématique. Comment évaluer cette approche ? (... , OS, 4^e, 11)

Matériaux pour une réponse

1. La question soulève une difficulté connue : quand on doit déduire, sait-on exactement ce que l'on suppose « disponible » ? Même les candidats au CAPES ou à l'agrégation sont tentés d'utiliser des « théorèmes » opportunistes, qui paraissent vrais, mais dont ils ne savent pas toujours s'ils appartiennent à la théorie légitimement disponible !

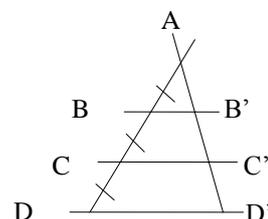
2. Si, par exemple, on suppose que la TGD contient le théorème de Thalès, il est facile d'en déduire que, dans la configuration considérée ci-dessus, on a bien $AB' = B'C' = C'D'$. Mais comment déduire ce fait spatial si l'on suppose simplement la disponibilité des théorèmes des milieux ?

① Bien entendu, il est indispensable que soit mise en place dans la classe la notion de **déduction à partir de...** – qui explicite de manière vitale la notion trop peu précise de **démonstration**.

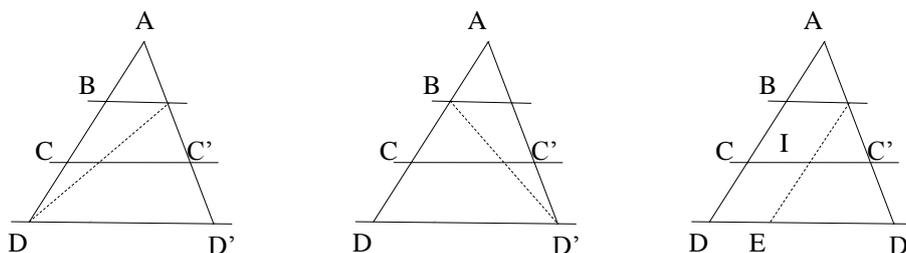
❶ La question « Comment démontre-t-on... ? » n'a guère de sens si on ne dit pas à partir de quels ensembles de faits « théorisés », c'est-à-dire de **théorèmes**, on s'autorise à déduire.

❷ Dans le cas examiné, le 2^e théorème des milieux (« Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, elle coupe le troisième en son milieu ») permet déjà de déduire, en considérant le triangle ACC' , que l'on a $AB' = B'C'$.

❸ Peut-on déduire aussi l'égalité $B'C' = C'D'$? Plusieurs voies peuvent être tentées. La question cruciale – « Comment démontrer une égalité du type $B'C' = C'D'$? » (où C' est entre B' et D') – peut recevoir ici la réponse suivante : en considérant un triangle $B'D'M$ (respectivement, $MB'D'$) tel que l'on puisse établir que la parallèle à $(D'M)$ (resp., à (MB')) passe par le milieu de $[B'M]$ (resp., de $[MD']$). Ici, deux tels triangles sont des candidats



évidents, à savoir $B'D'D$ et $BB'D'$, auquel on peut rajouter $B'D'E$ (où $(B'E) \parallel (AB)$) ou, de façon équivalente, $FB'D'$ (où $F \in (DD')$ et $(BF) \parallel (AD')$).



- a) Dans le cas de $B'D'D$, le fait que $[B'D]$ est coupé en son milieu par (CC') se déduit de l'application du 2^e théorème des milieux au triangle $BB'D$; de même, dans le cas de $BB'D'$, le fait que $[BD']$ est coupé en son milieu par (CC') se déduit de l'application du 2^e théorème des milieux au triangle BDD' .
- b) Dans le cas du triangle $EB'D'$, l'égalité $B'I = IE$ se déduit du fait que les quadrilatères $B'ICB$ et $IEDC$ sont des parallélogrammes et du fait que $BC = CD$.

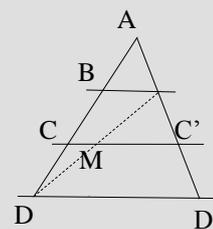
© Le travail déductif demandé aux élèves aurait sans doute mérité d'être cadré davantage qu'il ne l'a été – à l'aide, précisément, de la notion de **dédution de... à partir de...** Contre l'habitude des énoncés en forme de démonstration lacunaire, il est possible d'adopter une forme beaucoup plus proche du mouvement de production d'une déduction, comme il en va ci-après.

...

On rappelle l'énoncé du 2^e théorème des milieux : *Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, elle coupe le troisième en son milieu.*

1. En considérant le triangle ACC' , montrer qu'on peut déduire du 2^e théorème des milieux et du fait que B est le milieu de $[AC]$ le fait que B' est le milieu de $[AC']$.

2. a) On imagine ici qu'on a déduit des hypothèses et du 2^e théorème des milieux le fait que M est le milieu de $[B'D]$ (v. la figure ci-contre). En considérant le triangle $B'DD'$, montrer qu'on peut déduire de ce fait et du 2^e théorème des milieux le fait que C' est le milieu de $[B'D']$.



b) En considérant le triangle DBB' , montrer qu'on peut déduire du 2^e théorème des milieux et du fait que C est le milieu de $[BD]$ le fait que M est le milieu de $[B'D]$.

3. À partir des résultats des questions 1 et 2, rédiger une démonstration complète du fait que, si $(BB') \parallel (CC') \parallel (DD')$ et si $AB = BC = CD$ alors on a $AB' = B'C' = C'D'$.

4. Le fait spatial θ que l'on demande aux élèves de démontrer est présenté dans la question examinée ici comme une « conjecture “évidente” ». Il y a là une affirmation qui mérite une attention particulière.

① Qu'est-ce qui est « évident », ici ? Ce n'est certainement pas le fait « théorique » que θ peut se déduire du 2^e théorème des milieux et des hypothèses faites ((BB')//((CC')//((DD') et $AB = BC = CD$) ! Ce qui est quasi évident, en revanche, c'est le **fait spatial lui-même**. L'évidence est, si l'on peut dire, **physique**. Mais elle n'est certainement pas une « évidence » **déductive**.

❶ Cette distinction est au cœur de l'activité mathématique depuis toujours. C'est ainsi qu'un autre fait spatial, **l'inégalité triangulaire**, a constitué très tôt une bonne illustration de la confusion qui peut régner sur le sens de ce que font les mathématiciens. Dans la proposition 20 du livre I des *Éléments* (vers 300 av. J.-C.), Euclide établit déductivement que, en tout triangle ABC, on a $BA + AC > BC$. Or Proclus, commentateur du v^e siècle, rapporte à ce propos une critique qui, depuis, n'a guère cessé :

Les Épicuriens raillaient ce théorème, en disant qu'il était évident même pour un âne. Car si l'on place du fourrage à l'une des extrémités d'un côté, l'âne en quête de nourriture, parcourt un seul côté du triangle et non deux !

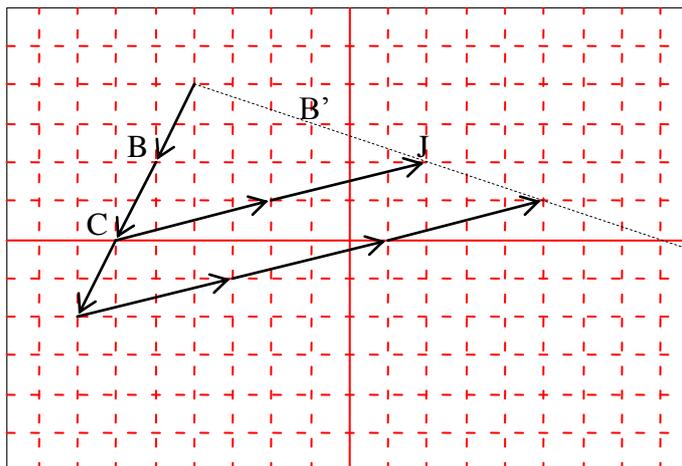
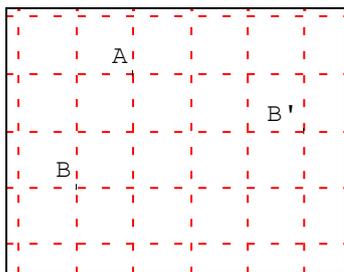
❷ D'emblée s'installe ainsi une confusion sur la nature de ce à quoi « jouent » les mathématiciens : une confusion qui dure encore, mais une confusion qui **peut** être levée, et qui **doit** l'être. Si vraiment la **démonstration** de l'inégalité triangulaire était indispensable pour être certain que l'inégalité triangulaire est **vraie**, on devrait en effet en conclure, avec certains Épicuriens, que le mathématicien est plus... obtus qu'un âne !

❸ Ce n'est donc pas parce que l'inégalité triangulaire est un **fait spatial évident** (du latin *evidens* « clair, apparent, manifeste ») que sa déduction de la TGD est, elle, « évidente » ! **Inversement**, ce n'est pas d'abord pour être sûr qu'un fait spatial est vrai qu'on tente de le déduire de la TGD... Tels sont les principes épistémologiques qu'il convient **d'installer et de faire vivre dans la culture de la classe**.

② Le fait spatial θ a beau être physiquement « évident », il n'est pas inutile de s'assurer qu'il est **vrai**, et cela au moyen d'une **expérience graphique**.

❶ Pour cela, il suffit de choisir par exemple A, B, B' (ci-après [à gauche]) : les autres points de l'épure en découlent.

❷ Une telle expérience graphique, assortie d'un commentaire explicatif, gagne à être incluse dans le DM – à moins qu'elle ne soit réalisée à titre de préparation au DM, celui-ci se centrant alors sur la déduction de θ . Pour le choix de points indiqué ci-dessus (chaque élève ou équipe d'élèves fait un choix propre), un résultat graphique typique est le suivant [à droite].



Quant au commentaire, il pourra prendre la forme suivante :

« Puisqu'on passe de A à B en faisant 2 pas vers le bas et un vers la gauche, on passe de B à C puis de C à D de même (c'est-à-dire en faisant 2 pas vers le bas et 1 vers la gauche). Puisqu'on passe de B à B' en faisant 1 pas vers le haut et 4 vers la droite, on obtient I sur la parallèle à (BB') passant par B en faisant 1 pas vers le haut et 4 vers la droite en partant de B, puis J en faisant de même à partir de I. On obtient de même, à partir de D, les points K, L, M situés sur la parallèle à (BB') passant par D. En observant alors qu'on obtient des points de la demi-droite [AB') en faisant 1 pas le bas et 3 pas vers la droite à partir de B', on constate que J et M sont sur la demi-droite [AB'), c'est-à-dire que $J = C'$ et $M = D'$, et que l'on a bien $AB' = B'J = JM (= \sqrt{10} \text{ cm})$: l'expérience confirme la conjecture θ . »

- La pratique de l'expérimentation suppose la création dans la classe d'une **culture** de l'expérimentation. Mais celle-ci ne peut se développer qu'appuyée sur des savoirs et des savoir-faire, dont l'usage du quadrillage, ci-dessus, donne une idée. C'est ici, principalement, que se situe – à propos de chacun des trois grands domaines d'études, l'usage des TIC, dont il convient d'apprendre à user de manière pertinente. À titre d'illustration, on revient dans ce qui suit à un exemple déjà travaillé – qui relève du domaine **numérique**.

c) Les conditions et contraintes prises en compte dans une analyse didactique relative au fonctionnement d'un système didactique $S(X; Y; O)$ sont souvent limitées aux conditions et contraintes portées par l'œuvre O étudiée, qui sont évidemment essentielles. À cela s'ajoute ensuite celles portées par X et, plus rarement, celles portées par Y – contraintes qui, au reste, ne sont jamais, sous forme « incorporée », que *quelques-unes* des conditions et contraintes des niveaux supérieurs, depuis celui de l'humanité jusqu'à celui-ci de la pédagogie en passant par ceux de la société et de

l'école. Or on ne saurait, à se limiter ainsi, expliquer nombre de phénomènes relevant de la dynamique et même de la statique cognitives. Arrêtons-nous un instant au niveau de la pédagogie. De ce niveau relève certainement un facteur des plus essentiels aux apprentissages, à leur complétude, à leur durabilité : le *temps*-durée voué à l'étude – et le temps qui lui est effectivement consacré. Toutes choses égales par ailleurs, il n'est pas équivalent de consacrer à l'étude d'une œuvre donnée 6 minutes, ou 6 heures, ou 60 heures ou 600 heures, par exemple. Mais le rôle joué par d'autres facteurs mérite d'être souligné étant donné ce que l'on peut observer de leurs effets de fragilisation de la diffusion scolaire et universitaire des connaissances. Pour évoquer cela, je suppose ici le scénario suivant : il y a un professeur, *y*, qui fait un cours, *C*. Ce cours est rédigé et mis très rapidement à la disposition des étudiants, qui peuvent donc étudier le texte du cours, *C**, après avoir suivi le cours. Le premier des facteurs annoncés, j'ai cru devoir le désigner par le principe bureaucratique « Poubelle. Vider poubelle » : on suit le cours *C*, on étudie le cours écrit *C**, mais, dès que l'examen est passé, le contenu de *C** est réputé *caduc*, comme on dirait en botanique, non *persistant* – comme une feuille, *C** tombe de lui-même... Dans les cas où l'étudiant découvre que, en un autre contexte de formation – dans une autre UE, une autre année, par exemple –, il doit mobiliser quelque élément de *C**, il tombe des nues, s'étonne et protesterait même, s'il le pouvait, comme un dîneur auquel on resservirait soir après soir les mêmes plats.

d) Pour illustrer le scénario ébauché jusqu'ici, je reproduis les indications écrites que j'ai pris coutume de donner aux étudiants quant au travail attendu d'eux :

8. D'une manière générale, le travail attendu de la part des étudiants doit comporter les étapes suivantes :

a) *Première étape.* Il convient d'abord de participer le plus complètement possible aux séances de travail en étant attentif *en priorité* au propos de l'enseignant et en examinant *de concert avec lui* le contenu projeté sur l'écran, tout en prenant des *notes écrites* à la fois pour identifier peu à peu la structure du contenu ainsi exposé et pour garder une trace des *difficultés* ou des *hésitations* éprouvées sur le moment.

b) *Deuxième étape.* Dans la période séparant deux séances successives, il convient d'*étudier* le *texte* exposé en séance, aperçu à l'écran, et mis en ligne rapidement après la fin de celle-ci, *en prenant des notes* pour dégager la structure de la matière exposée dans ce texte ainsi que pour marquer les éléments qui répondent à certaines des difficultés éprouvées en séance, dans la mesure où ces difficultés subsistent en cette étape du travail.

c) *Troisième étape*. Dans cette même période, il est indispensable de faire le point sur les difficultés qui semblent encore non entièrement surmontées à l'issue du travail précédent, en vue de les expliciter sous forme de *questions adressées à l'enseignant* à l'adresse déjà indiquée : y.chevallard@free.fr.

d) *Quatrième étape*. Il est nécessaire en outre de prendre connaissance, dans le fichier mis en ligne à cet effet (« Forum des questions »), des *réponses écrites* de l'enseignant aux questions ainsi posées par les étudiants, en considérant que ces réponses forment un *complément de cours*, auquel on appliquera donc la procédure décrite ci-dessus pour le texte des séances.

9. Ce n'est qu'après avoir accompli *complètement* cet ensemble d'étapes d'étude que l'on pourra se dire *étudiant à part entière*, étudiant *véritable*, et pas seulement étudiant « administratif », de cet enseignement. Un engagement formatif limité mais déjà substantiel est ainsi *indispensable*, quel qu'en soit au reste le sujet. Pour limité qu'il soit, l'engagement réclamé ici semble souvent supérieur, en termes d'*intensité* et de *durée* de l'étude personnelle, *en séance* et *hors séance*, à ce que certains pourraient croire suffisant. En particulier, il convient d'avoir clairement à l'esprit que la simple présence aux séances *ne saurait suffire*. D'une façon générale, un déficit d'engagement formatif serait nuisible à *chacun individuellement et à tous collectivement*.

J'ajoute au scénario que j'ai esquissé plus haut cette condition : les étudiants suivent le cours *C* puis étudient le cours écrit *C**. On sait que l'école d'été de didactique des mathématiques a autrefois, très heureusement, créé en son sein des « groupes d'étude du cours ». Or ce que je peux observer dans les formations où j'interviens semble à certains égards aux antipodes de ces bonnes pratiques : au grand dam de *y*, l'étudiant *x* suit irrégulièrement le cours *C* et n'étudie guère le cours écrit *C** – qu'il ignore parfois presque entièrement mais dont l'existence pousse quelques-uns, selon une logique prudhommesque, à ne plus suivre du tout le cours *live*. Bien entendu, il est juste d'observer que les bases du scénario ne sont pas toujours établies : très souvent, dans les UE que les étudiants ont à suivre – en principe ! –, le cours écrit *C** n'existe pas ; et, en quelques cas, le cours oral *C* paraît fort réduit. Mais c'est sur un autre point que je voudrais insister.

e) On pourrait expliquer l'ignorance du cours oral comme du cours écrit par la cossardise estudiantine, simple déclinaison de la cossardise humaine. Certes. Mais ce genre d'invocation pose toujours le même problème : pourquoi *x* serait-il cossard là, alors qu'ailleurs il ne le serait pas ? L'argument est d'autant plus pertinent que de nombreux étudiants auxquels je pense ici sont des personnes, jeunes ou moins jeunes, ayant une vie familiale et une vie professionnelle actives et qui, *en plus*, reprennent des études ! En fait, le mot « cossard » peut nous mettre sur la piste d'une autre

explication. Certains lexicographes, en effet, voient l'origine de ce mot dans l'adjectif *cossu* : on serait cossard parce qu'on est cossu et que, à ce titre, *on n'a guère besoin de travailler*. Le cossu est comme un genêt ou un pois qui serait riche de nombreuses cosses. De quelles cosses s'agit-il ? Si j'osais, je répondrais : il s'agit de ces « cosses praxéologiques » qui, aux yeux de ceux dont je parle, font la richesse de leur équipement praxéologique, fruit de toute une histoire qui est *leur* histoire et auquel ils ne renonceront pas facilement ; auquel ils n'ont pas même *imaginé* de devoir renoncer du fait d'une reprise d'études, parce qu'ils ont une conception *cumulative* – et non pas déconstructive-reconstructive – de la connaissance personnelle. Leur abord du cours C* va donc être « mité » par leur passé. De ce cours, ils ne retiendront préférentiellement que ce qui ne les contraint à aucun renoncement. Et je ne suis pas sûr par exemple que, lorsque, en tant que *y*, j'explique que l'abréviation typographiquement correcte de « première » est « 1^{re} », et non « 1^{ère} », certains n'entendent pas *le contraire*, et ne se disent, même, surpris d'apprendre que d'aucuns useraient *erronément* de l'abréviation « 1^{re} », qu'ils n'auraient personnellement jamais observée ! D'une manière générale, ce qui est ainsi « raté » – qui aurait pu être rencontré et ne l'a pas été –, ou ce qui n'est rencontré que pour être aussitôt oublié, *n'est pas le fruit du hasard*. Ce qui *confirme* l'équipement praxéologique sera rencontré et retenu ; ce qui *l'infirm*e ne le sera pas, ou le sera mal. Le passé devient un obstacle à la découverte et à l'apprentissage – à la procognition.

f) Le phénomène de non-rencontre ou d'évitement lié au conflit entre le su et l'à-savoir devient évident, me semble-t-il, lorsque, comme on le voit régulièrement en sciences de l'éducation, les étudiants sont des adultes en reprise d'études. C'est là un aspect qui ne paraît pas faire l'objet de l'attention qu'il mérite de la part des responsables des formations qui leur sont proposées. Bien entendu, cela vaut aussi pour de jeunes adultes et pour des quasi-adolescents : le mal qui les frappe est ce que j'ai appelé autrefois *l'adultisme*. Je rappellerai à cet égard l'épisode si étonnant que j'ai vécu à l'occasion de la conférence que j'avais été invité à faire à la 3^e université d'été Animath d'août 2004. J'y avais présenté un exemple bien connu (dans ce séminaire) que je rappelle en reprenant un passage du texte de mon propos d'alors (paru en 2005 dans les actes cette manifestation, publiés par l'APMEP sous le titre *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire*, où mon intervention, intitulée « Transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire », occupe les pages 239 à 263) :

Supposons des expressions $a\sqrt{b}$ et \sqrt{c} (où $a, b, c \in \mathbb{N}^*$) que l'on veut comparer.
 Supposons alors que $a\sqrt{b}$ et \sqrt{c} ont la même partie entière et les mêmes n

premières décimales, en sorte qu'on a $|\alpha\sqrt{b} - \sqrt{c}| < 10^{-n}$. Supposons de plus – c'est la condition clé ! – que $\alpha\sqrt{b} + \sqrt{c} < 10^n$. En multipliant l'inégalité $|\alpha\sqrt{b} - \sqrt{c}| < 10^{-n}$ par $\alpha\sqrt{b} + \sqrt{c}$, on obtient ceci : $|\alpha^2 b - c| < 10^{-n} (\alpha\sqrt{b} + \sqrt{c}) < 1$. Le nombre $|\alpha^2 b - c|$ étant entier, il ne peut être strictement inférieur à 1 qu'en étant nul : on a donc $\alpha^2 b - c = 0$, soit encore $(\alpha\sqrt{b} - \sqrt{c})(\alpha\sqrt{b} + \sqrt{c}) = 0$, d'où enfin $\alpha\sqrt{b} - \sqrt{c} = 0$. Dans le cas de $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{18}$ par exemple, on a $3\sqrt{2} + \sqrt{18} < 6 + 5 = 11 < 10^2$; par suite, dès lors qu'on sait que les écritures décimales de ces nombres sont les mêmes jusqu'à la deuxième décimale, on peut conclure à leur égalité. Bien entendu, une calculatrice ordinaire suffit à la tâche !

En refusant l'idée qu'une calculatrice peut suffire à établir l'égalité de $3\sqrt{2}$ et de $\sqrt{18}$, disais-je, les professeurs commettent une faute contre le pacte scolaire, parce qu'ils abandonnent les élèves face à un phénomène que ceux-ci peuvent constater mais dont on s'acharne à leur dire qu'ils le font à tort, parce que, ajoutent même quelques-uns, les développements décimaux *pourraient* être en désaccord par exemple au 50^e rang, ce que la calculatrice ne saurait montrer ! Or cette dernière affirmation est, à l'évidence, *mathématiquement stupide*. Ce jour-là, tel est le point clé auquel je voulais en venir, il s'est trouvé un professeur assez sûr de ce qu'il professait – j'ai eu le sentiment qu'il s'agissait d'un de ces professeurs qui se regardent comme appartenant à l'élite qui donne de la voix dans la profession – pour dire publiquement qu'il ne dirait jamais cela à ses élèves ! Autrement dit, il continuerait comme devant à faire la même leçon mathématiquement erronée aux élèves ! Cette fois la revendication du passé était explicite, avec même quelque chose de matamore.

2. Pénuries de l'offre praxéologique : un exemple

a) Il est un lieu commun d'aujourd'hui que j'entendais il y a quelques jours exprimé par Alain Rey lui-même : avec Internet, avec *Wikipédia* notamment, les gens, les jeunes générations d'abord, s'habitueraient à disposer d'une connaissance « prémâchée », toute faite, sans voir que, n'étaient ces circonstances exceptionnelles, l'accès à la connaissance est chose éprouvante. Apparemment, le nouveau désoriente toujours. Il y a quelques années encore, un argument en faveur de *Wikipédia*, face au déluge des attaques réactionnelles (et très généralement réactionnaires) à son encontre, était le nombre des articles, des questions abordées, qui surpassait ou surpasserait bientôt celui des encyclopédies classiques. Aujourd'hui, on retourne l'argument contre *Wikipédia* : on y trouve quasiment tout, dit-on, s'instruire deviendrait trop facile ! Cette appréciation est fondée sur une vision que j'ai appelée *inventoriante* des textes : la richesse d'un texte est jaugée en fonction du nombre de questions auxquelles ce texte prétend explicitement répondre. Par contraste avec cette lecture commune des textes

– que dit ce texte ? –, il est une autre lecture que j’ai nommée la lecture *questionnante*, où l’on juge la « richesse » d’un texte aux éléments de réponse qu’il propose à un ensemble de questions. Tel est évidemment le rapport que l’on entretient aux documents – aux « ressources » – présentes sur Internet lorsqu’on se livre à une enquête « avec Internet » (en y incluant d’ailleurs tout ce qui, à terme y sera : le contenu même des bibliothèques du monde). Or, ce que l’on découvre – il faut, pour cela, pratiquer l’enquête de façon suffisamment intense –, c’est que l’abord questionnant d’Internet n’est pas si simple !

b) J’illustrerai cela par un exemple qui peut paraître lui-même simple. J’ai proposé depuis deux ans aux étudiants de première année du master de sciences de l’éducation un texte de Philippe Cibois paru dans le *Monde* le 24 novembre 2009 sous le titre « Faut-il se faire vacciner contre la grippe A ? ». L’auteur se réfère évidemment à l’épisode trop vite oublié de la grippe A (H1N1) de 2009-2010, épisode sur lequel, en cas de souvenirs défaillants, vous pourrez vous informer en consultant, dans *Wikipédia* – bien sûr ! – l’article « Vaccination contre la grippe A (H1N1) de 2009-2010 » et aussi l’article « Grippe A (H1N1) de 2009 ». J’ai introduit le texte de Cibois en le présentant (de façon imaginaire) comme ayant été retenu dans sa bibliographie par un étudiant travaillant sur la question suivante : « Quelle est la place, dans l’enseignement secondaire, de la formation théorique et pratique à la dialectique de l’individu et du collectif ? » (Bien entendu, cette question n’a pas été réellement choisie par quelque étudiant que ce soit, à ma connaissance au moins, les étudiants s’attaquant en général à des problèmes à la fois plus convenus et plus « considérables » – le handicap, l’autisme, etc.) Voici donc le texte de P. Cibois :

Faut-il se faire vacciner contre la grippe A ?

par Philippe Cibois

Le Monde, 24 novembre 2009

L’obstacle à la vaccination est que, du point de vue rationnel, il ne faut pas se faire vacciner : pourquoi prendre le risque de complications qui peuvent être graves pour éviter une maladie en général bénigne ? On comprend que les foules ne se soient pas précipitées dans les centres de vaccination mis en place par les autorités. Les appels au civisme, à la responsabilité, à la solidarité restent lettre morte quand on voit que s’abstenir de courir un risque est parfaitement raisonnable.

C’est une autre rationalité qui est prise en compte par les autorités : si la proportion de personnes vaccinées reste faible, l’épidémie se répandra, désorganisera le système social et fera aussi des morts dans une population jeune. De ce point de vue, il est raisonnable de se faire vacciner car le bénéfice collectif est fort.

Peut-être, mais moi, individu, il est normal que mon intérêt me guide et je ne vois pas pourquoi je dois poser un acte qui aille à mon détriment. Quelle réponse faire ? Elle est à chercher par analogie avec des comportements que nous avons dans des groupes restreints : nous trouvons normal de ne pas prendre en compte notre intérêt immédiat quand l'intérêt de notre couple, de notre groupe d'amis, de notre association est en jeu.

Cette manière d'agir à l'intérieur d'un groupe restreint est assez commune : on sait bien que la vie en couple est faite d'accommodements raisonnables et que dans un groupe « chacun doit y mettre du sien » ce qui est une manière polie de dire que, au contraire, chacun doit oublier un peu son intérêt strict, ne pas mettre l'accent sur ce qui divise, toujours supposer la bonne volonté de l'autre. Comment passer d'une situation de petits groupes où le souci actif pour le bien du groupe est une attitude assez répandue, à la situation plus collective, face à des groupes non volontaires, de grande taille, sans interconnaissance, anonymes ? La réponse est encore l'intérêt, la rationalité, mais d'un autre ordre. Dans une collectivité importante, même si elle est régie par une organisation collective, une police, une administration, si la situation sociale vient à se dégrader pour cause de catastrophe, de guerre et évidemment d'épidémie grave, le réflexe de l'intérêt individuel strict, c'est la violence, la guerre pour la survie, par tous les moyens, la loi de la jungle. C'est la pire des situations et il est de l'intérêt strict de chacun de l'éviter en refusant cette attitude, en acceptant pour cela de renoncer à son intérêt personnel strict pour accepter des limitations, des contraintes, voire un danger personnel.

Se faire vacciner est courir un danger faible, mais un danger quand même : il est rationnel de l'accepter pour éviter le danger plus grave d'une épidémie qui nous menace collectivement de désorganisation. L'accepter est notre contribution personnelle au bon fonctionnement collectif dont nous tirerons des bienfaits car plus nombreux sont les vaccinés, moins l'épidémie se répand. Psychologiquement, cette attitude nous met dans la satisfaction du jeu collectif, ce sentiment de solidarité active des équipiers qui fonctionnent bien ensemble et qui peuvent aller ainsi jusqu'au bout du monde, sans souci du risque personnel.

Cette attitude de souci actif du collectif est aussi vieille que notre culture : Cicéron disait déjà que le lien le plus fort est le lien de la cité, dans laquelle il faut que les hommes « *puissent se rendre service les uns aux autres, (...) mettre en commun les intérêts de tous par l'échange des bons offices, en donnant et en recevant, et tantôt par nos compétences, tantôt par notre travail, tantôt par nos ressources, resserrer le lien social des hommes entre eux* » (*Des devoirs*, I, VII, 22). Sinon, c'est la lutte de chacun contre tous, la guerre civile : Cicéron en a été victime. Toute collectivité qui veut continuer à vivre ne doit pas oublier cette leçon qui est strictement rationnelle, non morale.

Il y a dans ce plaidoyer un élément sur lequel l'auteur ne s'appesantit pas et que je reprends ici :

C'est une autre rationalité qui est prise en compte par les autorités : si la proportion de personnes vaccinées reste faible, l'épidémie se répandra, désorganisera le système social et fera aussi des morts dans une population jeune. De ce point de vue, il est raisonnable de se faire vacciner car le bénéfice collectif est fort.

Il faut sans doute y lire ceci : si, en revanche, la proportion de personnes vaccinées est importante – au-delà d'un certain seuil qui, ici, n'est pas précisé –, alors l'épidémie cessera de se répandre. J'ajoute un commentaire qui semble classique chez les spécialistes : même si je ne suis pas moi-même vacciné (peut-être pour des raisons médicales des mieux fondées), je suis en quelque sorte *protégé par les personnes vaccinées* dès lors que leur proportion est assez élevée, parce qu'elles ne permettront pas au virus d'arriver jusqu'à moi. Là s'esquisse une dialectique entre individus et collectifs, dans laquelle le collectif protège l'individu qui n'est pas lui-même protégé par le vaccin.

c) On peut se poser la question de mettre le doigt sur l'origine, la source de l'assertion principale que l'on a reconstituée à partir de l'article de Cibois : lorsque la proportion de personnes vaccinées dépasse un certain seuil, l'épidémie cesse de s'étendre. C'est là une question d'enquête des plus pertinentes, me semble-t-il. Je pourrais vous dire : je vous laisse faire, si vous le désirez. Je vais tout de même avancer de quelques pas décisifs sur la piste ouverte à notre curiosité. Mais je voudrais souligner d'abord un point clé qui n'est jamais suffisamment clarifié. Devant une question telle que celle posée ici, nous avons tous plus ou moins un réflexe rétrocognitif : pour pouvoir répondre, il faudrait déjà connaître la réponse ! Comment cela ? Eh bien parce qu'on aura eu l'occasion de s'instruire là-dessus en écoutant ou en lisant un exposé d'un auteur qui lui-même est instruit à ce sujet... Il y a ainsi une « mauvaise récursivité » de la rétrocognition : je sais parce que quelqu'un m'a dit, qui lui-même savait parce que quelqu'un lui avait dit, et ainsi de suite. Plus classiquement, l'ordre social est rétabli par un ordonnancement de la distribution des connaissances qui, *in fine*, peut se dire caricaturalement ainsi : « Si vous aviez fait les “bonnes études”, vous le sauriez ! » Sous-entendez : « Si vous n'avez pas fait les bonnes études, vous ne savez pas, et voilà ! » Vous n'avez pas fait de master d'épidémiologie ? C'est regrettable. Voilà une autre façon de dire la distribution binaire, en oui/non, des connaissances dans la société. Cela constitue un obstacle encore massivement indépassé à la diffusion d'un rapport à la connaissance et à l'ignorance que j'ai caractérisé par trois qualificatifs : *herbartien*,

procognitif, exotérique. Tout cela rappelé, on doit donc supposer que, à l'instar de mon étudiant imaginaire, vous avez seulement l'idée que derrière l'affirmation de l'auteur, il pourrait y avoir bien plus, et que vous recherchez. Vous n'avez pour cela aucun schibboleth, vous cherchez un passage vers la connaissance – c'est votre passage du Nord-Ouest à vous (voyez l'article de même nom dans *Wikipédia*).

d) Je vous donne ici un schibboleth, que, sinon, il vous aurait fallu chercher peut-être longuement : c'est l'expression « Herd immunity ». « Herd », en anglais, désigne un troupeau. Un peu de l'origine de la notion semble passer dans cette dénomination. Voilà une clé de l'enquête : car il appert qu'existe un article de même nom – « Herd immunity » – dans l'encyclopédie *Wikipedia* (en anglais), article qui nous rapproche alors brutalement – trop brutalement, diront les fâcheux – de la réponse cherchée. On y lit en effet ceci (où j'ai retiré les appels de note et où les mots *pertussis*, *measles* et *mumps* désignent respectivement la coqueluche, la rougeole et les oreillons) :

Herd immunity (or **community immunity**) describes a form of [immunity](#) that occurs when the [vaccination](#) of a significant portion of a [population](#) (or herd) provides a measure of protection for individuals who have not developed immunity. Herd immunity theory proposes that, in [contagious diseases](#) that are transmitted from individual to individual, chains of [infection](#) are likely to be disrupted when large numbers of a population are immune or less susceptible to the disease. The greater the proportion of individuals who are resistant, the smaller the probability that a susceptible individual will come into contact with an infectious individual.

Vaccination acts as a sort of [firebreak](#) or [firewall](#) in the spread of the [disease](#), slowing or preventing further transmission of the disease to others. Unvaccinated individuals are indirectly protected by vaccinated individuals, as the latter will not contract and transmit the disease between infected and susceptible individuals. Hence, a public health policy of herd immunity may be used to reduce spread of an illness and provide a level of protection to a vulnerable, unvaccinated subgroup. Since only a small fraction of the population (or herd) can be left unvaccinated for this method to be effective, it is considered best left for those who cannot safely receive vaccines because of a medical condition such as an [immune disorder](#) or for [organ transplant](#) recipients.

The proportion of immune individuals in a population above which a disease may no longer persist is the *herd immunity threshold*. Its value varies with the virulence of the disease, the efficacy of the vaccine, and the contact parameter for the population. No vaccine offers complete protection, but the spread of disease from person to person is much higher in those who remain unvaccinated. It is the general aim of those involved in [public health](#) to

establish herd immunity in most populations. Complications arise when widespread vaccination is not possible or when vaccines are rejected by a part of the population. As of 2009, herd immunity is compromised in some areas for some vaccine-preventable diseases, including [pertussis](#) and [measles and mumps](#), in part because of parental refusal of vaccination.

Herd immunity generally applies only to diseases that are contagious. It does not apply to diseases such as [tetanus](#) (which is infectious, but is not contagious), where the vaccine protects only the vaccinated person from disease. Nor does it apply to the [IPV poliomyelitis vaccine](#) that protects the individual from viremia and paralytic polio but does not prevent the fecal-oral spread of infection. Herd immunity should not be confused with [contact immunity](#), a related concept wherein a vaccinated individual can 'pass on' the vaccine to another individual through contact.

On voit ici se dessiner une voie. Il existe un article correspondant en français, fort court, où « herd immunity » est traduit par « immunité grégaire » ; en voici l'essentiel :

L'**immunité grégaire** (ou *immunité de communauté*) est le phénomène par lequel la propagation d'une [maladie contagieuse](#) peut être enrayée dans une population si un certain pourcentage des individus sont [immunisés](#), par exemple par [vaccination](#).

En effet, plus le taux de personnes immunisées augmente et plus le risque pour une personne non-immunisée de rencontrer un malade et d'attraper sa maladie diminuent. En dessus d'un certain seuil, il devient impossible pour la maladie de se maintenir dans la population et elle finit par disparaître. Ce seuil dépend, entre autres, de la [contagiosité](#) de la maladie. Ainsi au cours du [XX^e siècle](#), la vaccination de masse contre la [variolo](#) a permis d'atteindre son seuil d'immunité grégaire (situé aux environs de 85 %) et donc d'éliminer totalement cette [pandémie](#) qui faisait alors plusieurs dizaines de millions de morts par an dans le monde.

Bien entendu, si l'enquête a ainsi sensiblement avancé, ce qu'on met par là au jour soulève de nouvelles questions. D'où vient, par exemple, la valeur de 85 % concernant la variolo ? Derrière le phénomène que résume l'expression « Herd immunity », y a-t-il seulement des observations ou bien se trouve-t-il un ou des modèles mathématiques ? Si oui, lesquels ? En vérité, l'article de *Wikipedia* contient à cet égard des indications prometteuses : il renvoie ainsi à un autre article de *Wikipedia* intitulé « Mathematical modelling of infectious disease » contenant lui-même une section consacrée aux « Mathematics of mass vaccination ». Avec cela, je note donc un autre aspect du phénomène de diffusion : la diffusion de « résumés » *d'une information plus complète* encore, que l'on ne peut que supputer à ce stade de l'enquête.

d) Voici les premiers résultats affichés par Google en réponse à la requête Herd immunity.

[Herd immunity - Wikipedia, the free encyclopedia](#)
en.wiki.pedia.org/wiki/Herd_immunity - Traduire cette page
Herd immunity (or community immunity) describes a form of immunity that occurs when the vaccination of a significant portion of a population (or herd) provides ...

[Mathematical modelling of infectious disease - Wikipedia, the free ...](#)
en.wiki.pedia.org/wiki/Mathematical_modelling_o... - Traduire cette page
Aller à [When mass vaccination exceeds the herd immunity](#): If a vaccination programme causes the proportion of **immune** individuals in a population to ...

[Talk:Herd immunity - Wikipedia, the free encyclopedia](#)
en.wiki.pedia.org/wiki/Talk%3AHerd_immunity - Traduire cette page
[edit] **Herd immunity** questions. community resistance; decreased probability of epidemic; how measure **herd immunity**? Proportion immune in population; Herd ...

[Herd immunity - RationalWiki](#)
rationalwiki.org/wiki/Herd_immunity - Traduire cette page
21 Jan 2010 – **Herd immunity** is the idea that when a certain percentage of a population is vaccinated, those within the population who are not vaccinated are ...

[Herd immunity: Definition from Answers.com](#)
www.answers.com > ... > Science > Sci-Tech Dictionary - Traduire cette page
herd immunity (hrd imynd) (immunology) Immunity of a sufficient number of individuals in a ... Epidemic Theory: **Herd Immunity Wikipedia** on Answers.com: ...

[What is herd immunity](#)
wiki.answers.com > ... > Conditions and Diseases - Traduire cette page
herd immunity is immunizing a sufficient amount of people in a community so that if one person come in with the disease they wont cause an epidemic.

Les deux premiers résultats sont les articles de *Wikipedia* déjà mentionnés. Le troisième est simplement la discussion relative à l'article « Herd immunity ». Le quatrième résultat renvoie à un court article de l'encyclopédie *Rationalwiki* intitulé lui aussi « Herd immunity ». On trouve là des éléments – à propos de l'exemple de la grippe au Japon notamment – susceptibles de nourrir notre enquête en accroissant à la fois notre information et notre compréhension des concepts et de leurs usages « réels » :

Herd immunity is the idea that when a certain percentage of a population is vaccinated, those within the population who are not vaccinated are protected from the disease. This is a fairly straight forward concept; if 90 percent of a population is immune, then the chances that a carrier of the disease will come into contact with a non-immune member of the population (or “herd”) is low. Herd immunity is the goal of most vaccination programs as it is the point

where a disease can start to be eliminated altogether from a population, as is the case for polio in the western world.

For example, in 1962 Japan instituted mandatory vaccination against influenza in school children. This continued until 1987 when the program was changed to optional; it was abandoned in 1994. Approximately 85 percent of children were estimated to have been vaccinated. Several studies examined the mortality rates due to influenza during this period of time and revealed that the death rates due to influenza in all population groups was drastically decreased, including older adult populations. Since there was no increased rate of vaccination in these populations, the decreased mortality was caused by herd immunity effects of vaccinating so many children. Many researchers have written that this and other evidence argues strongly for mandatory vaccination programs world wide as a means of controlling many diseases and preventing a pandemic.

Notons que ce même article présente un lien porté par ce texte : « The mathematics of herd immunity ». Le cinquième résultat a trait au site *Answers.com* : la page correspondante reproduit simplement ce que précise le *McGraw-Hill Science & Technology Dictionary* à l'entrée « herd immunity » : « (*immunology*) Immunity of a sufficient number of individuals in a population such that infection of one individual will not result in an epidemic. » Enfin, le sixième résultat, résume la même information, mais sans préciser sa source : « herd immunity is immunizing a sufficient amount of people in a community so that if one person come in with the disease they wont cause an epidemic. » On voit ainsi comment une notion peut diffuser sous la forme de résumés simplifiant un exposé plus ample – tel, déjà, celui de l'article « Herd immunity » de *Wikipedia*.

3. Enquêtes continuées

a) L'exemple précédent rappelle que le démarrage d'une enquête, l'accomplissement d'une première avancée significative ne sont pas, en règle générale, chose facile. Je voudrais maintenant illustrer un autre aspect de la conduite d'enquêtes : *le travail dans la durée*. Il y a en toute enquête des périodes d'arrêt, où rien ne vient. Cela, au passage, constitue l'un des multiples problèmes qui se poseront et se posent à une pédagogie de l'enquête. L'obsession de progression linéaire régulière, qui peut être grosso modo satisfaite par la pédagogie de l'enseignant mise en œuvre dans le paradigme de la visite des œuvres, ne peut guère, ici, être soutenue ! Bien souvent, donc, une question doit être « mise à l'étude », sans espoir d'aboutissement rapide : le « dossier » reste ouvert, même si l'enquête est pratiquement arrêtée.

b) Dans de tels cas, la recherche engagée prend souvent des allures erratiques, de façon pourtant parfaitement normale. Je donnerai deux exemples, l'un plus ancien, l'autre plus récent. Vous savez que le mot de *profession* a été au centre de l'analyse que nous avons donnée du métier de professeur – un métier organisé par une semi-profession qui ne parvient pas à devenir profession. Le hasard a voulu que, feuilletant récemment un ouvrage paru en 1979 sous le titre *A concise dictionary of correct English*, « compiled by B. A. Phytian » (Hodder and Stoughton, Londres), j'y aperçoive l'entrée « Professional ». Un coup d'œil sur l'article correspondant me révèle alors que le « travail » du mot (en anglais), qui a priori m'intéresse, a attiré l'attention des puristes de la langue. Voici donc le texte que l'auteur lui consacre :

professional: an interesting example of a word which lost its original meaning, and has subsequently lost virtually all its meaning as a result of over-use. A profession used to be a self-governing body of people who controlled their own standards and their own qualifications for admission. Clergymen, doctors and lawyers belonged to professions. Now soldiers, criminals and footballers call themselves *professionals*; footballers even commit *professional fouls*, which may be defined as *deliberate and serious breaches of the rules in order to neutralise an opponent's superior skill*. The noun *professional* has been debased to mean nothing more than *one who earns a living in a particular occupation*. (pp. 111-112)

Le ton frôle un certain populisme réactionnaire. Une autre occasion m'a été donnée plus récemment de répéter une telle observation, et cela dans un ouvrage que son auteur, Kenneth Hudson, a intitulé *The dictionary of diseased English* (1977). Ce dictionnaire, dont le titre manifeste l'irritation de l'auteur face aux propensions « modernistes » qui frappent la langue anglaise, offre lui aussi une entrée « Professional » ; voici le texte correspondant :

Professional

Traditionally a profession is a self-governing corporation of people with recognised qualifications. Doctors are, in this sense, a profession, and so are lawyers. But in recent years, with so many experts anxious to be considered 'professionals', the use of the word has widened to a point at which it has ceased to be of any great value. If one tries to establish an acceptable definition of 'professional' to fit today's situation and produces something that looks tidy, simple and comprehensive, one is faced with insuperable difficulties. To be a 'professional' nowadays, is it necessary to have followed a recognised course, obtained paper qualifications at the end of it and devoted oneself to earning a living in the same field? If so, what is one to do about

‘professional actors’ and ‘professional criminals’? Should one pare away the definition still further, until one is left only with ‘earning a full-time living by the occupation in question’? This would certainly not help to interpret ‘the necessary equipment of professional workers in many fields’ (Ruddock, 1972), where the workers would not wish to be confused with actors, broadcasters or cracksmen, who have simply learned their respective skilled trades on the job. But it would apply to ‘become Sales Professionals with NCA’, (*D Tel*, 22.1.76). A firm as well as an individual, can be ‘professional’, although one has to work hard to discover any meaning in such sentences as ‘We are looking for young men or women who are seeking an opportunity of joining a young professional and dynamic brand leader’ (*D Tel*, 21.1.77). What the reader is probably intended to gather from this is that the firm has not been established very long, that its products are well-known and that its staff are on the young side and very keen on their jobs.

On retrouve ici l’idée de profession « au sens fort », si l’on peut dire. Pour le premier auteur, « a profession used to be a self-governing body of people who controlled their own standards and their own qualifications for admission. Clergymen, doctors and lawyers belonged to professions ». Pour le second, « a profession is a self-governing corporation of people with recognised qualifications. Doctors are, in this sense, a profession, and so are lawyers ». On retiendra la dénonciation de la propension généralisée à se dire « professionnel », et cela semble-t-il en détachant subrepticement cette dénomination de l’idée traditionnelle de profession, puisqu’il apparaît qu’on pourrait être un professionnel de... ce qui ne se revendique pas pour autant comme une profession. Notons encore que, pour ce qui est de l’enseignement, nous n’en sommes même pas là ! Bien peu de professeurs se présenteraient aujourd’hui, en français, comme « un professionnel de l’enseignement des mathématiques » ! Je ferais volontiers l’hypothèse qu’il y a, en cette « retenue » – que n’ont pas les footballeurs, semble-t-il –, et alors même que l’on parle depuis deux décennies et plus de la « professionnalité enseignante », un vestige du temps où l’enseignement était mis en représentation comme une « vocation », teintée d’une dose de noble amateurisme, et non comme une simple « occupation », ainsi qu’on dit en anglais.

c) Une enquête n’est jamais terminée : elle peut être arrêtée, interrompue, suspendue ; mais elle pourra reprendre, fût-ce de façon éphémère, lorsqu’un nouvel élément incitera à « rouvrir le dossier ». Ces nouveaux éléments pourront résulter d’une recherche délibérée ou, quelquefois, d’une rencontre improbable, fruit de lectures inventariantes mais, si je puis dire, *flottantes*, qui participent typiquement de la dialectique du parachutiste et du truffier – car on ne sait jamais où le précieux tubercule se rencontrera. Voici un

exemple récent de ce genre de situations. Dans l'atelier « Recherches sur Internet » du collège Vieux Port, nous avons étudié la question suivante :

Un journaliste interroge un expert en matière d'écologie : « En tant qu'écologiste », lui dit-il. L'expert l'interrompt : « Je ne suis pas un écologiste ; je suis un écologue. » Quelles différences y a-t-il entre un écologiste et un écologue ?

Une enquête rapide, ici, ramène rapidement ceci :

- un *écologiste* (mot abrégé en *écolo*) est un militant ou un sympathisant du mouvement d'opinion qu'est l'*écologisme* ; un *écologue*, ce serait un chercheur spécialiste de l'écologie comme science ;
- le mot *écologue* est peu usité en français courant, en même temps qu'est peu connue du grand public la science écologique ;
- en anglais, le mot *ecologist* correspondrait à *écologue*, un écologiste étant plutôt un *environmentalist* ;
- en français, certains écologues, rétifs au mot *écologue*, emploient le mot *écologiste* pour désigner un écologue lorsque le contexte est de nature à dissiper toute ambiguïté et usent sinon de l'expression « écologiste scientifique ».

Le *Dictionnaire historique de la langue française* (1993) précise par exemple ceci :

ÉCOLOGISTE adj. et n. signifie « spécialiste de l'écologie » (1964) comme ÉCOLOGUE n. (v. 1979), moins courant, mais qui remédie à l'ambiguïté de *écologiste*, ce dernier désignant surtout dans l'usage courant une personne défendant des thèses inspirées de l'écologie ; en ce sens, on dit aussi ÉCOLO adj. et n. (v. 1970, par apocope).

La poursuite de l'enquête met en évidence le fait que, en français, il existe une « concurrence » entre les terminaisons *-logiste*, *-logue* et même *-logien* (comme dans *théologien*). Le TLFi donne pour exemples de la première désinence les mots suivants :

anthropologiste, apologiste, bactériologiste, biologiste, criminologiste, dermatologiste, écologiste, entomologiste, étymologiste, généalogiste, géologiste, gynécologiste, ichtyologiste, immunologiste, ophtalmologiste, ornithologiste, oto-rhino-laryngologiste, stomatologiste, tératologiste, volcanologiste, zoologiste...

Dans cette liste, plusieurs substantifs peuvent surprendre : doit-on dire « anthropologiste » ou « anthropologue », « criminologiste » ou

« criminologue », « géologiste » ou « géologue », « gynécologiste » ou « gynécologue », « volcanologiste » ou « volcanologue », « zoologiste » ou « zoologue » ? Il y a donc, comme on le voit, deux choix possibles, entre lesquels l'usage finit généralement par trancher. Ainsi, si les dictionnaires consultés traduisent « écologiste » par *ecologista* pour ce qui est de l'espagnol, du catalan et de l'italien, ils donnent *Ökologe* pour l'allemand. Un dictionnaire français-portugais propose pour « écologiste » les trois mots *ecologista*, *ecólogo* et *ambientalista* (<http://www.infopedia.pt/frances-portugues/écologiste>). « Biologiste » se dit *biólogo* en espagnol mais *Biologe* en allemand, etc. En français, donc, deux mots au moins se proposaient : *écologiste* et *écologue*. Comme pour d'autres dénominations, on aurait pu avoir en usage un couple de substantifs, le premier d'usage majoritaire, le second d'emploi minoritaire par exemple (comme il en va du couple épistémologue-épistémologiste). Or *écologue* a été choisi pour désigner une réalité que le mot *écologiste*, pour certains, ne permettait de désigner qu'avec de trop fortes ambiguïtés. Comment cela s'est-il produit ?

d) Dans la conduite d'une enquête, on peut mettre cette question « à l'étude » avant peut-être de la mettre « en attente » faute de rencontrer d'éléments déterminants. On sait ce que Newton répondit à qui lui demandait comment il avait pu faire un si grand nombre de grandes et difficiles découvertes (<http://www.newtonproject.sussex.ac.uk/view/texts/normalized/OTHE00089>) :

To one who had asked him on some occasion, by what means he had arrived at his discoveries, he replied, "By always thinking unto them;" and at another time he thus expressed his method of proceeding: "I keep the subject constantly before me, and wait till the first dawns open slowly by little and little into a full and clear light."

Sans y penser toujours, à l'instar de Newton, la règle de conduite à propos d'une enquête mise provisoirement en sommeil me paraît être celle-ci : « Pensez-y à l'occasion. » Ce qui suppose d'être toujours sur le qui-vive, comme y invite la dialectique du parachutiste et du truffier. C'est ainsi que, lisant le livre de Patrick Blandin, *Biodiversité. L'avenir du vivant* (Paris, Albin Michel, 2010), j'observe que l'auteur est un écologue rétif à l'emploi du mot *écologue* – il n'emploie l'adjectif *écologue* que dans l'expression « ingénieur écologue » – et je tombe alors sur le passage suivant :

Si ma mémoire est bonne, c'était en 1979, quai Anatole France, au siège du Centre national de la recherche scientifique, le « CNRS ». J'assistais à la conférence de lancement d'un programme de recherches sur les questions d'environnement. Les principaux animateurs étaient Germaine Ricou, directrice de recherches à l'Institut national de la Recherche agronomique,

Jean-Claude Lefeuvre, professeur du Muséum, et Gilbert Long, directeur de recherches au CNRS. Ils avaient expliqué que, pour avoir de l'influence sur les milieux politiques, il leur avait fallu agir au travers d'associations, leur qualité de scientifiques n'y suffisant manifestement pas. Je vois encore Gilbert Long proposer, en conséquence, de distinguer les « écologistes », c'est-à-dire les militants de la protection de la nature et, plus largement, de la cause environnementale, autrement dit les « écolos », et les « écologues », purs scientifiques spécialisés en écologie. (pp. 198-199)

La date, 1979, est bien celle avancée par le *Dictionnaire historique de la langue française* ; si l'on fait confiance à l'auteur, nous assistons donc là au « lancement » du mot *écologue* ! Patrick Blandin, en vérité, n'est pas séduit par cette proposition ; et, dans le même passage, il dit pourquoi :

Que d'ambiguïté ! D'un côté des écologues nous expliquaient qu'il valait mieux être « écolo » pour faire passer de bonnes idées, de l'autre, par une subtilité terminologique, ils espéraient protéger les chercheurs de l'étiquette d'« écologistes », à connotation supposée péjorative dans les milieux scientifiques. En réalité, il ne peut y avoir de catégorisation: indirectement ou directement, chaque citoyen se positionne sous l'influence de connaissances scientifiques de plus en plus largement diffusées, tandis que les scientifiques ne sont que des citoyens parmi d'autres, exerçant le beau métier de créateur et de diffuseur de savoirs. Il faut jeter aux oubliettes l'idée qu'il y a les « savants » et les autres. Il se construit, mais trop lentement, une société informée, qui doit prendre des décisions quant au devenir de la biodiversité. C'est ce qu'entrevoit une haute personnalité de l'UNESCO, Malcolm S. Adiseshiah, le 4 septembre 1968, lorsqu'il accueille les participants à la Conférence de la Biosphère dans les termes suivants :

Dans la mesure où vos travaux ont pour but de montrer en quoi la science moderne peut faciliter le choix et l'élaboration de méthodes rationnelles permettant d'utiliser les ressources naturelles tout en les conservant, ils tendent à créer chez les hommes de science, parmi les dirigeants politiques et dans le grand public un courant de « pensée écologique » destiné à faire mieux comprendre les relations entre l'homme et la nature dans le cadre plus large des rapports entre l'homme et son milieu.

Au cours d'un cheminement bien long, en dépit de moments visionnaires, les « écolos », si l'on entend par là les humains qui se soucient du devenir de la nature et des humains qui l'habitent, et les « écologues », scientifiques qui travaillent à la compréhension de la dynamique de la biosphère, à toutes les échelles d'espace, « du local au global », comme on dit, se sont côtoyés, ont tissé des complicités, la science éclairant la conscience, l'inquiétude appelant la recherche de solutions. Ainsi s'est peu à peu formé ce courant de pensée écologique, aujourd'hui revendiqué par bien des politiques. Écolos et écologues ont vécu, sans nécessairement s'en rendre compte, une révolution

conceptuelle et idéologique dont on n'a pas encore tiré toutes les conséquences. On a enfin cessé de croire que l'homme était indépendant de la nature ou que, s'il ne l'était pas encore, il arriverait à s'en extraire à force de technologie ; on a compris qu'il est de la nature, dans la nature. Et on a compris – tout juste – que la nature n'est pas, n'était pas dans un état d'immuable perfection ; elle est changement, nous changeons par elle et elle change par nous. De fait, la science nous fournit des moyens de plus en plus performants pour la manipuler. L'avenir n'est donc pas dans le retour à un état parfait qui s'imposerait à nous. Il sera un cheminement que nous pouvons orienter, sinon déterminer à coup sûr.

Le passé n'est pas une référence, il est un conseiller. Alors, quelle biodiversité voulons-nous pour aujourd'hui, pour demain, pour les générations qui viennent ?

OÙ SONT LES MATHS ?

1. Le 4^e congrès international sur la TAD

a) Le problème du rapport aux mathématiques, aux autres savoirs, aux *œuvres* est aujourd'hui sensible. Car nous vivons un temps où l'évolution de ces rapports, dans leur diversité, qui se conjugue avec l'évolution du rapport à la connaissance et à l'ignorance, mérite de la part des chercheurs en didactique une attention spéciale. Dans mon cours à la 16^e école d'été tenue à Carcassonne en août 2011, j'ai évoqué la notion de *contrat épistémique temporel* en distinguant plusieurs types de tels contrats. Gageons qu'il n'est pas équivalent de voir dominer un contrat dans lequel les connaissances acquises un jour sont destinées à être conservées indéfiniment, *même quand on ne s'en sert pas*, à la façon d'un trésor dont on se regarde comme comptable de la conservation, et un contrat dans lequel s'impose comme allant de soi le principe « Corbeille. Vider corbeille ». Je n'épiloguerai pas là-dessus aujourd'hui, sinon à travers les études qui suivent, qui illustreront comment peut être façonné notre rapport aux mathématiques.

b) Avant cela, j'ai le grand plaisir d'annoncer que, grâce en particulier à l'industrie de Gisèle Cirade et d'autres, dont Michèle Artaud, le projet de 4^e congrès international sur la TAD a aujourd'hui très sensiblement avancé. Ce congrès se tiendra du 21 au 26 avril 2013 dans le cadre de l'IUFM Midi-Pyrénées à Toulouse (plus précisément au site de Saint-Agne, sis 56, avenue de l'URSS). Outre des environnements humains et scientifiques accueillants, ce lieu possède la bienfaisante vertu d'être d'un accès « facile » pour nos collègues espagnols. Cela noté, le titre général de ce 4^e congrès sera en consonance avec les considérations précédentes, puisque nous l'avons formulé ainsi : *Évolutions du rapport aux mathématiques et aux autres*

savoirs à l'école et dans la société. J'ajoute que les actes du 3^e congrès, tenu à Sant Hilari Sacalm (Catalogne) en janvier 2010 sont maintenant quasi disponibles. Mais j'en reviens maintenant au travail sur le rapport aux mathématiques.

2. Deux petits exemples

a) Une fois passé le temps de l'école, la plupart des gens ne rencontrent plus de mathématiques – un peu comme si, passé le temps de l'école, les gens n'avaient plus de commerce avec les activités physiques et sportives. On mesure la différence dans des sociétés où ces dernières activités sont pour certains des drogues dont ils ne peuvent se passer. Il est vrai que ce qui se rencontre moins, voire beaucoup moins – et l'on retrouve peut-être, alors, le cas des mathématiques –, ce sont ces activités « physiques » qui se trouvent intégrées à des activités quotidiennes ou professionnelles, où on ne les voit guère, et non ces « AP(S) » extraites des activités sociales pour être mises en évidence – en spectacle – par un processus de transposition, de formalisation, de ritualisation et, très vite, de « mise en compétition ». Il est vrai que le volet des sports – par contraste avec les activités physiques – a un lien d'origine avec l'idée de divertissement : le mot anglais *sport* abrège *disport*, verbe signifiant « se divertir, s'amuser, s'ébattre, fôlatrer », à propos duquel le *Online etymology dictionary* précise ceci :

late 14c., from Anglo-Fr. *disporter* “divert, amuse,” from O.Fr. *desporter* “to seek amusement,” lit. “carry away” (the mind from serious matters), from *des-* “away” (see *dis-*) + *porter* “to carry,” from L. *portare* “to carry” (...).

Il y a donc les activités *physiques* de *travail* et les activités *sportives* de *divertissement*. Cette organisation dichotomique des activités humaines semble traverser toutes les sociétés, toutes les civilisations : elle est une donnée anthropologique fondamentale. Pour les activités mathématiques, il en est de même : il y a des activités de travail – dont on ne parle guère – et des activités supposées être de divertissement, auxquelles on fait une place certes modeste dans quelques médias, et qui *masquent les activités mathématiques de travail*. Il y a là, je crois, le principe qui « explique » le refoulement des mathématiques de travail et la mise en avant de morceaux de mathématiques à titre de divertissement – ce qui est, je le crois aussi, une impasse.

b) Où sont ces mathématiques de travail ? Comme les activités physiques de travail, elles sont souvent assez proches de nous mais demeurent invisibles, non remarquées. Voici mon premier exemple. Dans le cours que j'ai donné cette année dans l'UE « Éducation au développement durable » de la licence

de sciences de l'éducation de l'université d'Aix-Marseille, j'ai cité, à un moment donné, l'extrait suivant de l'article « Sustainability » de *Wikipedia* :

Sustainability is studied and managed over many scales (levels or frames of reference) of time and space and in many contexts of environmental, social and economic organization. The focus ranges from the total carrying capacity (sustainability) of planet Earth to the sustainability of economic sectors, ecosystems, countries, municipalities, neighbourhoods, home gardens, individual lives, individual goods and services, occupations, lifestyles, behaviour patterns and so on.

Qu'est-ce donc que la *carrying capacity* et comment dit-on cela en français ? Pour tenter de répondre, une technique classique consiste à rechercher s'il existe un article de ce nom (ou à peu près) dans *Wikipedia*, puis à aller voir l'article correspondant en français (s'il existe). Ici, il existe bien un article ayant ce nom, qui commence ainsi :

The **carrying capacity** of a biological [species](#) in an [environment](#) is the maximum population size of the species that the environment can sustain indefinitely, given the food, [habitat](#), [water](#) and other necessities available in the environment. In [population biology](#), carrying capacity is defined as the environment's maximal load, which is different from the concept of population equilibrium.

On notera que la « carrying capacity » définie ici est relative à une *espèce* déterminée. L'article en français correspondant existe aussi et a pour titre « Capacité porteuse ». Cela noté, on peut observer alors que le premier article a le sommaire suivant :

1. Examples
2. Mathematics
3. Humans
 - 3.1. Food supply and consumption
 - 3.2. Ecological footprint
4. In tourism

La section 2, *Mathematics*, est courte, et condensée autour de quelques liens « forts » ; en voici le texte (*moose* désigne l'élan d'Amérique du nord) :

The [Lotka-Volterra equations](#) are simple [mathematical model](#) of [population dynamics](#) which show how in a closed system, like that of the [wolves and moose on Isle Royale](#), limited prey will cause the predator population to

decline rapidly. An extended [example](#) can be used where multiple species are competing for the same resources, or single species feed on multiple prey.

On serait donc tout près, ici, de rencontrer des mathématiques de haute tenue, si l'on peut dire ; mais, de rencontre frontale, il n'y en a pas – sauf, donc, à suivre les liens (voyez par exemple l'article « Competitive Lotka–Volterra equations » de *Wikipedia*). Il en va autrement avec l'article en français, dont voici le début :

Capacité porteuse

La **capacité porteuse** (ou **capacité de charge**, ou **capacité limite**) en **écologie** est la taille maximale de la **population** d'un organisme qu'un **milieu** donné peut supporter. La simplicité de cette définition toutefois cache la complexité réelle du concept et de son application ¹.

Sommaire [masquer]

1 [Écologie fondamentale](#)

2 [Écologie appliquée](#)

3 [Notes et références](#)

4 [Voir aussi](#)

Écologie fondamentale

En écologie fondamentale, la capacité porteuse est généralement définie par la constante K dans l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(\frac{K - N}{K} \right)$$

- N est la **population**,
- r est son **taux de croissance**,
- et K est la valeur de la **capacité porteuse** de la population, dans des conditions données.

L'expression entre parenthèses exprime le potentiel de croissance lié à la densité de population. L'expression est près de 1 aux valeurs de N près de 0 - la population s'approche alors d'une croissance exponentielle -, et égal 0 lorsque $N = K$ - la croissance de la population est alors nulle. Le résultat de l'équation est une courbe sigmoïdale illustrant la croissance de la population (figure 1). Au début

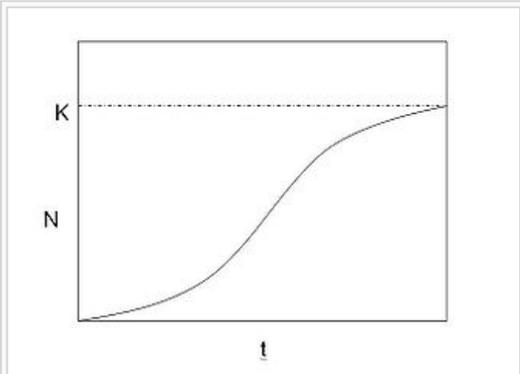


figure 1 : une courbe sigmoïdale illustrant la croissance de la population

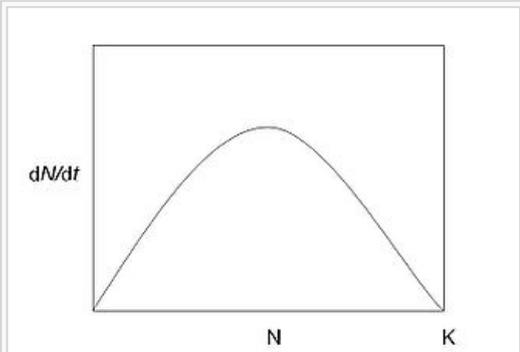


figure 2 : taux de croissance de la population en fonction de sa

Je ne commenterai pas ce passage (on pourra se reporter notamment à l'article « Modèle évolutif r/K » de *Wikipédia*), sauf pour dire que, dans la perspective (présentée notamment lors de la séance 4 de ce séminaire) de la *lecture critique de textes incluant des formules mathématiques*, on tient là un cas typique. Le taux de croissance $\frac{dN}{dt}$, peut-on observer, croît avec N , certes, mais il décroît quand N se rapproche de la capacité porteuse K . J'ajoute à cela que, selon le même article, « en écologie appliquée », la notion de capacité porteuse est formalisée de plusieurs manières présentées dans cet autre extrait :

Écologie appliquée [modifier]

En écologie appliquée, on retient quatre définitions de capacité porteuse :

- La taille maximale stable de la population qu'un milieu donné peut supporter sans exploitation. Cette définition tire son origine de la constante K en écologie fondamentale.
- Le **rendement équilibré maximal** (MSY, *maximum sustainable yield*) d'une population qu'un milieu peut produire pour l'exploitation. Ce rendement équivaut à $0,5K$, soit le niveau maximum de croissance de la population en écologie fondamentale.
- Le **rendement économique équilibré maximal** (MEY, *maximum sustainable economic yield*) d'une population qu'un milieu peut produire pour l'exploitation. Ce rendement équivaut à la différence maximale entre la valeur du rendement et le coût d'exploitation.
- Le **rendement à l'équilibre à l'accès libre** (OAE, *open-access equilibrium*), où la valeur du rendement équivaut au coût d'exploitation. Ceci correspond à la limite économique supérieure de l'exploitation en l'absence de subventions et de politiques restrictives d'aménagement.

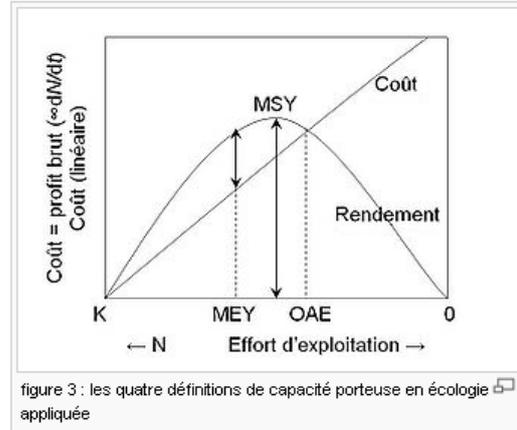


figure 3 : les quatre définitions de capacité porteuse en écologie appliquée

La figure 3 illustre les quatre définitions utilisées en écologie appliquée. La courbe du rendement montre une augmentation initiale et une décroissance jusqu'à la valeur zéro après un sommet aux environs de $0,5K$. Le rendement équivaut au surplus de production qui se traduit en profit brut. Ce dernier varie en fonction du taux de croissance de l'organisme exploité. Le coût d'exploitation augmente linéairement avec l'effort d'exploitation. Sur l'abscisse, l'effort d'exploitation augmente en direction de la droite. La taille de la population N augmente vers la gauche, le maximum étant situé au point K , soit la capacité porteuse. Le point K est aussi le point où le taux d'exploitation est nul. Le rendement équilibré maximal (MSY) se produit à $0,5K$. Le rendement économique équilibré maximal (MEY) correspond au profit net et se produit lorsque les pentes du coût et du rendement sont parallèles. Le rendement à l'équilibre à l'accès libre (OAE) se produit lorsque le profit brut équivaut au coût¹.

Il est intéressant, pour le « lecteur critique » qui n'est pas pour cela un « ésotérique », de s'arrêter sur la définition du « maximal sustainable yield » de $0,5K$, défini comme « le niveau maximum de croissance de la population en écologie fondamentale », c'est-à-dire comme le maximum de $\frac{dN}{dt}$ dans le modèle « fondamental ». Pour cela, récrivons ce modèle sous la forme plus scolairement classique $N' = rN \frac{K - N}{K}$; et dérivons alors cette dernière égalité pour rechercher ses extrémums possibles ; il vient d'abord :

$$N'' = rN' \frac{K - N}{K} + rN \frac{-N'}{K}.$$

On a donc : $N'' = \frac{rN'}{K} (K - N - N) = 2 \frac{rN'}{K} (0,5K - N)$. N' atteindrait donc un extrémum pour $N = 0,5K$. S'agit-il bien d'un maximum ? Lorsque $N = 0,5K$, on a d'abord : $N' = rN \frac{K - N}{K} = 0,5r \times 0,5K = 0,25rK$. Considérons la différence $0,25rK - N'$; on a : $0,25rK - N' = 0,25rK - rN \frac{K - N}{K} = 0,25 \frac{r}{K} [K^2 - 4N(K - N)] = 0,25 \frac{r}{K} (K^2 - 4NK + 4N^2) = 0,25 \frac{r}{K} (K - 2N)^2 = \frac{r}{K} (0,5K - N)^2$. L'extrémum est donc un maximum, comme attendu.

c) L'exemple précédent nous rappelle une fois de plus que, lorsqu'on enquête sur une question relevant d'un domaine regardé comme non mathématique (ici, le développement durable), mais qui est en fait largement mathématisé en plusieurs de ses parties, on « frôle » souvent des mathématiques, que, plus souvent encore, d'aucuns se hâtent d'ignorer entièrement. Mon deuxième exemple concerne la notion rencontrée plus haut, celle de « herd immunity », en français « immunité grégaire » ou « immunité de communauté ». J'utiliserai ici un document des plus simples, que l'on trouve en ligne sur le site *mathepi.com*, site qui se présente ainsi :

Mathepi.com is a nonprofit information site whose goals are to make information about mathematical applications in epidemiology available to public health professionals and students, as well as facilitate communication among mathematical epidemiologists.

Comme dans l'exemple précédent, on a ici des activités mathématiques de travail, dont le niveau trophique semble être maintenu le plus bas possible *en fonction du travail à accomplir*. La partie « Mathematical epidemiology » du site s'ouvre ainsi par ces mots :

These introductory notes are meant for the interested biostatistics or public health student. The mathematics prerequisite is high school algebra.

Cette même partie propose une section intitulée « Herd Immunity. Vaccination Programs » (<http://www.mathepi.com/maindir/herd.html>). Celle-ci commence par le développement que voici (où l'expression *hoof and mouth disease* désigne la fièvre aphteuse, *hoof* désignant le sabot des ongulés) :

What is herd immunity? Well, everyone knows what *immune* means. *Immune* comes from the Latin word *immunis*, which means *free from service*, as in not having to go fight for the Roman army against the Visigoths. With Barbarians no longer at the gate, nowadays immunity usually refers to the status of being free from the possibility of acquiring a particular infectious disease. You can become immune either by having had a disease before or by receiving a vaccine.

Now, suppose you have a herd of livestock, and want to keep them free from hoof and mouth disease. After immunizing all but one of them, you wonder why on earth you're working so hard to track down the last calf. After all, even if this last calf were somehow infected, infection couldn't spread to the rest of the herd because all the others are vaccinated. In effect, the herd is immune, even though there is an individual calf that's not.

In fact, why even vaccinate the last 2? After all, if your herd is big enough, all the others are vaccinated, so no infected individuals will ever come into contact with the last calf. Then you get to thinking maybe you could get away with only vaccinating 90% or so of the herd maybe this would be enough that even if a calf were to get infected, most of the calves they come into contact with would be immune and an epidemic couldn't really get started.

On voit là le raisonnement qui justifie l'idée que les « immunisés » protègent les (beaucoup plus rares) « susceptibles ». L'auteur – Tom Lietman – entreprend alors de mathématiser cette idée ; voici comment :

Now you know that for an epidemic to get started, the R_0 has to be greater than 1. Remember that R_0 is the number of secondary cases that result when you introduce an infective into a *totally susceptible* population. What if you introduce a single infective into a herd that has been mostly vaccinated (so it is not a totally susceptible population)? How many secondary cases result? Well, even though the herd is no longer completely susceptible, the same principle can be applied. The average number of infectious cases caused by an infectious case introduced into a community in which a large number of individuals have been vaccinated can be called R^v_0 . (We've got to call it *something*, after all!) This is equal to R_0 times the chance that an individual that you meet is susceptible. With a perfect vaccine and completely random mixing, this is just the chance that an individual wasn't vaccinated (1 minus the coverage rate, which for lack of imagination we'll call C):

$$R^v_0 = R_0 \times (1 - C)$$

So now the question is what percentage of the herd do we have to vaccinate to prevent an epidemic from happening?

On doit souligner que l'auteur ne recule (évidemment) pas devant l'emploi de notations littérales, même si une telle notation conjugue un exposant et un indice, comme dans le cas de R^v_0 . On notera, bien sûr, qu'il ne le fait qu'en s'en excusant *mezzo voce* : « We've got to call it *something*, after all! », se justifie-t-il s'agissant de R^v_0 . Lorsque, de même, il introduit la lettre C , ce geste fait l'objet d'un commentaire discret dans le registre de l'auto-ironie : la lettre C est mise à toutes les sauces, suggère l'auteur, retrouvant ainsi la réflexion d'un intervenant croisé lors de la séance 1 de ce séminaire (sur la question des gaz parfaits), selon qui « the letter C has been used to death in science ». On notera enfin, bien sûr, que la formulation « littérale » est précédée par une formulation « en mots » ou, plutôt, par une formulation « hybride », comme dans le cas de l'expression $1 - C$, qui formalise « 1 minus the coverage rate ». L'auteur passe alors à la partie « dure » de son travail mathématique :

An epidemic won't take off as long as $R_0 < 1$. This is the same as saying that

$$1 < R_0 \times (1 - C)$$

or, using just a little bit of algebra,

$$C < 1 - 1/R_0$$

Thus, the herd is in some sense protected, as long as we've vaccinated the proportion

$$C < 1 - 1/R_0.$$

For example, if the R_0 of a disease in a community is 2, then a coverage rate of just 50% will be enough to ensure that an epidemic won't really take hold. If the R_0 is 10, then 90% coverage would be necessary.

Bottom line: *you can eradicate a disease by vaccination even if the entire population is not vaccinated.*

L'auteur confronte ensuite sommairement sa conclusion – issue du petit modèle mathématique présenté – avec la réalité observable (le mot *smallpox* désigne la variole) :

Does this really work? Yes and no. Smallpox was clearly eradicated without vaccinating the entire population. Likewise, polio was eradicated from the Western Hemisphere without 100% coverage. Exact calculations though are difficult for several reasons, including the fact that there's a lot of heterogeneity in the world (what's good enough for one community may not be for another), and the fact that vaccines aren't always perfect.

Cet exemple utilise moins encore de mathématiques que l'exemple de la *carrying capacity* ; et il eût donc été possible de le présenter aux élèves dès la classe de seconde au moins lors de l'épidémie de grippe A (H1N1). Mais, à vrai dire, on pouvait songer aussi à une présentation « en amphithéâtre », pour l'ensemble des élèves du lycée, si un tel bâtiment existait.

3. Un exemple encore : le PEM

a) J'ai parlé déjà – en 2007-2008 – de notre collègue Philippe Cibois, sociologue spécialiste de la statistique en SHS. J'avais mentionné alors son livre paru en janvier 2007 dans la collection « Que sais-je ? » (n° 3782, PUF), intitulé *Les méthodes d'analyse d'enquêtes*. Philippe Cibois a développé un indice qu'il a appelé le PEM, le « pourcentage de l'écart maximum ». Ce qui importe ici est moins de savoir de quoi il s'agit – nous allons le voir – que de savoir comment il en parle – *avec quels outils ostensifs*. L'auteur prend pour appui un tableau issu d'une enquête croisant deux variables dichotomiques, la variable 17A, « Type d'écoles », et la variable V02, « Sexe de l'élève ». Les

deux types d'écoles sont étiquetés respectivement « École nouvelle » (du genre Decroly, etc.) et « Collèges de bonne réputation ». Le tableau lui-même est le suivant (p. 16) :

	École nouvelle		Collège BonneRép		Total en ligne	
Masc	38	15,6	206	84,4	244	100
Fémi	60	22,4	208	77,6	268	100
Total en colonne	98	19,1	414	80,9	512	100

Dans chaque cellule, on a l'effectif observé (à gauche) et le pourcentage en ligne (à droite) : on voit ainsi, par exemple, que le pourcentage des filles qui sont inscrites en « École nouvelle » (22,4 %) est supérieur de presque sept points à celui des garçons (15,6 %). Avant même de lui montrer ce tableau, l'auteur a présenté à son lecteur le résultat d'un test du χ^2 effectué sur ce tableau. Le degré de liberté est ici égal à $(2 - 1)(2 - 1) = 1$. Un logiciel en ligne (http://www.physics.csbsju.edu/stats/contingency_NROW_NCOLUMN_form.html) donne les résultats suivants :

$r \times c$ Contingency Table: Results

The results of a contingency table χ^2 statistical test performed at 03:39 on 11-MAY-2012

data: contingency table

	A	B	
1	38	206	244
2	60	208	268
	98	414	512

expected: contingency table

	A	B
1	46.7	197.
2	51.3	217.

chi-square = 3.83
degrees of freedom = 1
probability = 0.050

Comme on pouvait s'y attendre, le tableau observé a une probabilité faible de l'être (5 %) sous l'hypothèse d'indépendance des deux variables – hypothèse que, selon le rite, on serait donc conduit à rejeter. Mais l'auteur examine

plus en détail ce qui fait qu'il n'y a pas indépendance. Dans le tableau ci-après j'ai ajouté les effectifs théoriques calculés par le logiciel utilisé

	École nouvelle		Collège BonneRép		Total en ligne	
Masc	38	15,6	206	84,4	244	100
	46,7		197			
Fémi	60	22,4	208	77,6	268	100
	51,3		217			
Total en colonne	98	19,1	414	80,9	512	100

La contribution de la première cellule à la valeur du χ^2 est donc par exemple égale à

$$\frac{(38 - 46,7)^2}{46,7} \approx 1,62.$$

En fait, on peut, là encore, utiliser un logiciel en ligne convenable (<http://easycalculation.com/statistics/chi-square.php>) pour calculer une à une les quatre contributions :

Chi-square Calculator

Chi-square Statistics Test:

Enter observed value :

Enter the expected value :

Chi square value :

En vérité, on peut aussi trouver un logiciel qui donne d'un coup les contributions de toutes les cellules du tableau au χ^2 du tableau (<http://www.seuret.com/biostat/chi.php?>) :

χ	En-tête H1	En-tête H2	Total
En-tête G1	1.622	0.384	2.006
En-tête G2	1.477	0.35	1.827
Total	3.099	0.734	3.833

Chi vaut 3.833
Degré de liberté : 1

En fait, l'auteur ne donne pas les effectifs théoriques (ainsi qu'on l'a fait plus haut) mais, directement, les contributions au χ^2 , auxquelles il ajoute les fameux PEM, mis ici en gras :

	École nouvelle		Collège BonneRép		Total en ligne	
Masc	38	15,6	206	84,4	244	100
	1,6	-18,6*	0,4	18,6*		
Fémi	60	22,4	208	77,6	268	100
	1,5	18,6*	0,3	18,6*		
Total	98	19,1	414	80,9	512	100
en colonne	3,1		0,7		3,8	100

L'auteur explicite alors ces divers éléments numériques ; je reproduis d'abord ce qui concerne les trois premiers d'entre eux :

Dans le tableau p. 16, on trouve quatre nombres dans chaque case (et leur somme en marge).

- L'effectif (N=) : pour la case « Féminin en École nouvelle », il est de 60 individus.

- Le pourcentage en ligne (% Ligne) : sur 268 élèves de sexe féminin, les 60 en école nouvelle représentent 22,4% du total (soit plus que 19,1 %, le pourcentage toutes lignes confondues, ce qui indique une attraction).

- La contribution au khi-deux qui est égale à l'effectif en écart à l'indépendance au carré divisé par l'effectif théorique.

Ici l'effectif théorique (produit des marges par le total) est de $98 \times 268 / 512 = 51,30$. L'écart à l'indépendance est de (observé - théorique) $60 - 51,30 = 8,70$. La contribution au khi-deux est de $8,70^2 / 51,30 = 1,5$.

Il est remarquable, ici, que tout soit fait uniquement avec des chiffres et des mots, sans aucune notation « mathématique », les calculs eux-mêmes étant faits « au fur et à mesure », sans l'aide d'une formule même strictement numérique. Voici alors l'explication qui concerne le PEM lui-même :

- Le PEM, Pourcentage de l'écart maximum (% Attrac). On a noté que pour cette case, l'écart à l'indépendance est 8,70 individus. Si la liaison entre sexe féminin et école nouvelle était à son maximum, les 268 filles ne pourraient pas être à l'école nouvelle (dont l'effectif n'est que de 98 individus) mais les 98 élèves de l'école nouvelle pourraient être de sexe féminin. Donc 98 est le maximum de la case et l'écart à l'indépendance dans le cas de ce maximum serait de (maximum - théorique) $98 - 51,30 = 46,70$.

Comparons l'écart observé 8,70 à l'écart dans le cas du maximum 46,70 ce qui nous donne une proportion de $8,70 / 46,70 = 0,186$ ou 18,6 % en pourcentage. Cette valeur est suivie d'une étoile sur le tableau pour signaler qu'elle est issue d'un tableau croisé significatif¹.

Dans un tableau 2×2 , tous les PEM sont symétriques, c'est-à-dire de même valeur absolue et de signes opposés, c'est-à-dire correspondant non à une attraction, mais à une répulsion dans le cas d'un PEM négatif. Le PEM global est pris en faisant la somme des écarts positifs observés à l'indépendance par rapport à la somme des écarts positifs dans le cas de la liaison maximum : on vérifie facilement qu'il est aussi égal à 18,6 %. Ce résultat est général : dans le cas d'un tableau 2×2 , le PEM global et le PEM local (positif) sont identiques. Le calcul du PEM peut être étendu à des tableaux plus grands ayant un ordre sur les marges (que l'on peut toujours établir par une méthode d'analyse factorielle).

Empiriquement, des cas de PEM très élevés (supérieurs à 50 %) manifestent une liaison tellement forte qu'ils sont l'indice d'une redondance des indicateurs : par exemple, dans toute enquête, on vérifie que le PEM entre le fait d'être à la retraite et d'être dans une tranche d'âge supérieur à 60 ans est toujours très élevé. Inversement, quand la liaison est inférieure à 10 %, elle peut être l'effet du hasard et c'est pour cette raison qu'on associe toujours au PEM le test du khi-deux. On constate empiriquement que les PEM intéressants se situent entre 10 et 50 %.

Pour les lecteurs désireux de connaître la justification des propriétés évoquées ici, l'auteur renvoie à son article intitulé « Le PEM, pourcentage de l'écart maximum : un indice de liaison entre modalités d'un tableau de contingence », paru en 1993 dans le n° 40 du *Bulletin de méthodologie sociologique*, pp.43-63. Cet article, en ligne sur le site de l'auteur (<http://cibois.pagesperso-orange.fr/bms93.pdf>), comporte une annexe intitulée *Algorithme de calcul du pourcentage de l'écart maximum*. Pas plus que dans le reste de l'article, Cibois n'y sacrifie aux usages mathématiques communs : il n'emploie toujours que des mots et, faute de pouvoir employer là des données chiffrées, il introduit des noms de variable à la mode informatique, les calculs se faisant toujours « au fur et à mesure », comme l'illustre l'extrait reproduit ci-après (p. 59).

1) Cas d'une attraction entre A et B : l'écart à l'indépendance est positif.

Pour trouver l'écart maximum EMAX, on cherche à mettre la plus forte valeur possible MAX à la place de l'observation. Cette valeur doit cependant être compatible avec les marges et donc on ne peut prendre que la plus faible des deux marges. Cette valeur maximum MAX = min (TOTA, TOTB)

L'écart positif à l'indépendance maximum EMAX est égal à l'effectif maximum qui correspondrait à la liaison maximum moins l'effectif théorique :

$$\text{EMAX} = \text{MAX} - \text{THEO}$$

Le PEM est alors égal au rapport entre l'écart observé et l'écart maximum (multiplié par 100 pour avoir un pourcentage) :

$$\text{PEM} = \text{ECART} / \text{EMAX} \times 100$$

Cette stratégie minimaliste – qui consiste à dissimuler les signes emblématiques de la présence de mathématiques dans le texte proposé au lecteur – a-t-elle quelque chance de circonvenir les obstacles à la *diffusion durable* des connaissances mathématiques ? Le choix de P. Cibois ne consiste-t-il pas typiquement, malgré qu'on en ait, à « lâcher la proie pour l'ombre » ? Je dois avouer que, au moment où j'écris ces lignes, je n'ai aucun élément d'information permettant d'esquisser une réponse. Il est en revanche évident que cette stratégie ne permet guère de travailler à l'*assomption culturelle*, dans notre société, de l'activité mathématique et de ses outils.

That's all, folks!