

**UMR ADEF**

**JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD**

**Théorie Anthropologique du Didactique  
& Ingénierie Didactique du Développement**

*Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers.*

Marcel Pagnol (1895-1974)

*Le lendemain, Aymery prit la ville.* Victor Hugo (1802-1885)

*Le séminaire TAD & IDD, animé par Yves Chevallard, a une double ambition solidaire : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment des professions de professeur, de formateur et de chercheur en didactique. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des praxéologies mathématiques.*

*La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 14 h à 16 h puis de 16 h 30 à 18 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie à distance par visioconférence.*

**→ Séance 4 – Vendredi 10 février 2012**

**CRÉER UN ENSEIGNEMENT**

**1. Analyse didactique, analyse praxéologique**

a) J'ai terminé la dernière fois sur la présentation de l'une des dix *Leçons de didactique* adressées aux étudiants de licence de sciences de l'éducation ainsi qu'à certains étudiants de première année de master. Cette référence à une unité d'enseignement me pousse à revenir une fois de plus sur le problème crucial – qui est un problème de la profession (des enseignants universitaires) – des contraintes et des conditions dans lesquelles un enseignement (universitaire) peut être conçu et réalisé – ce qui est sans doute un problème d'ingénierie didactique, si l'on entend cette expression au sens large, comme on peut le faire en TAD de l'adjectif *didactique*. Certains de ces problèmes ont été évoqués dans la leçon présentée la dernière fois, tout particulièrement le problème central de la dialectique de la présence *in*

*absentia* et de l'absence *in praesentia* de l'œuvre étudiée. Une contrainte clé à cet égard est celle de l'évaluation de l'équipement praxéologique des étudiants censé être acquis grâce à l'UE en question : quels aspects des rapports personnels des étudiants à quels objets va-t-on tenter d'évaluer dans la perspective de quels projets ? Autrement dit : de quels aspects des praxéologies étudiées dans l'UE va-t-on s'efforcer d'évaluer la maîtrise par les étudiants, dans la perspective de quels projets ?

b) Le processus de conception, de création et de réalisation d'un enseignement fonctionne en vérité à l'envers. Un certain projet étant fixé, on en déduit des types de tâches utiles (ce qui appelle la détermination de praxéologies au moins ponctuelles) que les étudiants devront accomplir de manière jugée satisfaisante lors des épreuves d'évaluation. Dans le cas de l'enseignement de didactique fondamentale dont j'ai parlé, et plus largement de l'UE « Théorie de l'apprentissage et didactique pluridisciplinaire », mon choix s'est porté sur *trois* types de tâches, que j'ai eu l'occasion de présenter déjà. Le premier de ces types de tâches peut être formulé ainsi :

$T_0$ . Étant donné une question  $Q$  et un exposé  $E$ , « excrire » de  $E$  et inscrire dans un exposé spécifique  $E^†$  la réponse  $R$  que l'exposé  $E$  donne à la question  $Q$ .

Quoique la capacité d'accomplir des tâches de ce type semble une exigence de la vie intellectuelle de tout citoyen en toute situation, elle semble peu familière aux étudiants actuels, formés sur le modèle de la rétrocognition et – surtout – de l'épreuve d'examen en temps limité *sans documents*, ce qui conduit à abaisser le niveau d'exigence quant à la qualité de l'exposé  $E^†$ , au point que le type de tâches  $T_0$  s'efface derrière l'exercice scolaire de la « dissertation ».

c) Les deux autres types de tâches mentionnés sont le type  $T_1$  constitué par l'*analyse didactique* d'une situation (connue à travers un exposé écrit) et le type  $T_2$  constitué par l'*analyse praxéologique* d'une œuvre en principe non didactique (connue de la même façon). Les raisons d'être de ces types de tâches renvoient, de façon peut-être un peu paradoxale, au projet déjà énoncé – celui de la formation du citoyen, de « l'homme non spécialisé » dont parlait autrefois Lucien Febvre. Quoi que la chose soit ignorée et refoulée, chacun de nous est en effet conduit, de façon plus ou moins fréquente et régulière, à assumer du didactique, que ce soit professionnellement ou « dans la vie quotidienne », en se faisant soit  $x$ , soit  $y$ . C'est là déjà une raison suffisante pour que tout futur citoyen apprenne à *analyser* du didactique (réalisé ou envisagé). Bien entendu, la chose est plus pressante encore dans un cursus de sciences de l'éducation que beaucoup suivent

avec l'idée d'exercer, à terme, le métier de professeur. Si l'on accepte ces motifs, on voit alors qu'on est conduit vers le type de tâches consistant à réaliser une *analyse praxéologique* d'œuvres, puisque l'analyse didactique du fonctionnement d'un système  $S(X; Y; \heartsuit)$  oblige en principe à analyser les conditions et contraintes de tous niveaux sous lesquelles ce système vit, et tout particulièrement les conditions et contraintes « portées » par l'œuvre étudiée, ♥.

d) Jusqu'en 2009-2010, l'examen exigeait en fait des candidats qu'ils fissent *deux* analyses didactiques. La première portait sur un texte que je proposais aux étudiants, comme il en va encore aujourd'hui ; la seconde, remplacée ensuite par l'analyse praxéologique mentionnée plus haut, prenait pour objet un texte choisi et apporté à l'examen *par l'étudiant*, texte qu'il devait fournir au correcteur en l'insérant dans sa copie d'examen. Plus précisément, la consigne relative à cette troisième partie de l'examen était la suivante :

**Partie 3.** Rédigez une analyse didactique relative aux situations évoquées dans un texte que vous aurez choisi dans un domaine d'activité de votre convenance (le texte aura été imprimé par vos soins sur une feuille que vous insérerez dans la copie double utilisée).

Or cette disposition posait problème. Étant donné, en effet, qu'il est difficile de trouver un texte décrivant une situation didactique, nombre de candidats se rabattaient sur des textes exposant (partiellement) une praxéologie – par exemple l'art et la manière de préparer un gâteau au chocolat, ou de se démaquiller, ou de construire des meubles en carton, etc. De tels textes sont évidemment le produit d'une intention didactique, celle d'être utilisée comme exposé « didactique » (au sens courant du terme) relativement à l'œuvre à laquelle ils se vouent. Une recette de gâteau au chocolat, ainsi, pourra nourrir une situation autodidactique où une personne  $x$  s'efforce d'apprendre à faire un gâteau au chocolat. Mais l'analyse didactique ou plus exactement l'analyse du didactique engendré par l'activité d'hypothétiques  $x$  et  $y$  utilisant l'exposé proposé, qui ne pouvait être en quelque sorte qu'une analyse *a priori*, se réduisait d'ordinaire très fortement à un commentaire de la technique exposée par le texte retenu, à quoi s'ajoutait quelquefois des bribes technologico-théoriques. On pouvait appeler cela une analyse praxéologique à visée didactique, non une analyse didactique au sens plein du terme. La difficulté ainsi rencontrée était anticipée dans le texte du cours 2009-2010, où l'on pouvait lire cette mise en garde :

7.4.2. Les textes sur lesquels on peut faire porter une analyse didactique relèvent de *types* divers.

a) Le type le plus familier est composé de deux sous-types : 1) le compte rendu d'observation d'une situation réellement observée (nous en avons vu un exemple dans l'Unité 5 à propos d'une classe de 5<sup>e</sup> travaillant sur le problème du « parallélogramme tronqué », par exemple) ; 2) la description d'un *type de situations*, comme il en va dans le texte *La soustraction vers 1850*.

b) Un deuxième type de textes est celle des textes décrivant une situation à *faire advenir* ou qui pourrait advenir. Ainsi en va-t-il avec les *scénarios didactiques* de séances. Dans ce cas, l'utilisateur visé par l'auteur du texte est censé *excrire* de celui-ci une certaine *organisation didactique* en vue de la réaliser en quelque institution. De ce type relève le texte examiné ci-après sous le titre *Comment aider l'enfant [élève de CP] à relire ?*

c) Un troisième type de textes décrit une certaine *organisation praxéologique* ♥ présentée comme enjeu didactique possible d'un certain type de systèmes didactiques. En ce cas, le texte ne décrit pas une situation didactique observée ou à créer : il est un exposé *E* relatif à une organisation praxéologique ♥ face à laquelle il se situe comme une aide à l'étude possible d'une étude possible. Ce type de textes comporte des sous-types culturellement bien connus – recettes de cuisine, modes d'emploi, patrons de couture, etc. Pour cela même, il y a une plus grande facilité à rencontrer des textes de ce troisième type. Mais l'expérience montre qu'il vaut mieux *éviter ces rencontres du troisième type*, qui peuvent certes conduire à une riche analyse *praxéologique* mais dont le traitement didactique risque de se révéler bien difficile, à moins que l'organisation praxéologique ♥ ne soit elle-même une organisation *didactique*, comme il en va dans le texte *Comment aider l'enfant [élève de CP] à relire ?*

Aussi en 2010-2011 j'ai pris la décision de remplacer « analyse didactique » par « analyse praxéologique », sans rien modifier d'autre dans la consigne proposée, quoique en donnant, dans l'enseignement prodiguée, une place substantielle à la préparation de cette partie de l'examen :

**Partie 3 (5 points).** Rédigez une analyse praxéologique relative aux situations évoquées dans un texte que vous aurez choisi dans un domaine d'activité de votre convenance (le texte aura été imprimé par vos soins sur une feuille que vous insérerez dans la copie double utilisée).

e) En 2011-2012, le changement réalisé l'année précédente a été approfondi, pour une double raison solidaire : d'une part, les étudiants avaient tendance à en rester à une analyse praxéologique minimaliste, qui, sauf exception, évitait tout recours à des connaissances marquées culturellement comme relevant de telle ou telle « discipline » connue d'eux ; d'autre part, je souhaitais, depuis les premiers constats que j'avais pu faire dès l'année 2007-2008, amener ces étudiants à assumer de recourir à des connaissances « marquées », quel que soit le « champ praxéologique » dont

elles portent la marque. Aussi, dans le document intitulé *Structure et fonctionnement de l'UE*, la partie de l'examen appelant une analyse praxéologique était décrite de la façon suivante :

L'analyse praxéologique portera sur l'œuvre *O* évoquée ou décrite dans le texte choisi. Elle devra mobiliser, d'une façon à la fois *justifiée* (non artificielle) et *précise*, des éléments praxéologiques *élémentaires* mais non tous triviaux relevant de l'un au moins des champs suivants : mathématiques, informatique et Internet, physique, chimie, biologie, langue française (prononciation, orthographe, grammaire), langue anglaise (prononciation, orthographe, grammaire), sciences et techniques des activités physiques et sportives, sciences humaines et sociales (sociologie, économie, ethnologie, psychologie, histoire, géographie, démographie).

Est-il utile de préciser que certains étudiants ont pu penser de façon insistante, en dépit des indications et des exemples de sens contraire qui leur étaient prodigués, qu'ils devaient choisir impérativement un texte relevant de l'un des champs praxéologiques indiqués – par exemple un texte de mathématiques, ou de chimie, etc. ? À cet égard, voici une partie de la réponse consignée dans le *Forum des questions* à une interrogation d'un étudiant de master :

Notons d'abord que le qualificatif *trivial* employé dans le passage précédent est défini en ces termes par le *Trésor de la langue française informatisé* : « [En parlant d'une idée, d'une réflexion, d'un jugement] Qui par sa fréquence est devenu banal, ordinaire, n'a plus aucune originalité. [...] *Vérité triviale*. Vérité reconnue par tout le monde. » Utiliser le fait que  $3 \times 7 = 21$  revient à recourir à une connaissance mathématique *triviale*. Par contraste, c'est par exemple une connaissance élémentaire mais *non triviale* de mathématiques que d'observer que l'on a (voir le module 4, p. 31) :

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{C}{\pi}\right)^2 \times \ell = \frac{1}{4} \times \left(\frac{C}{\pi}\right)^2 \times \ell = \frac{1}{4} \times \frac{C^2}{\pi^2} \times \ell = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{4} \times \frac{C^2}{\pi} \times \ell\right).$$

De même, c'est une connaissance élémentaire mais non triviale de chimie de savoir que « les sulfures donnent avec le cation  $\text{Ag}^+$  un précipité noir de sulfure d'argent, selon la réaction :  $2\text{Ag}^+ + \text{S}^{2-} \rightarrow \text{Ag}_2\text{S} \downarrow$ , où la flèche  $\downarrow$  indique que  $\text{Ag}_2\text{S}$  est un précipité » (voir le module 4, p. 24).

L'exigence ainsi posée avait pour objectif d'obtenir de ces étudiants qu'ils essayent une fois au moins – dans un travail auquel ils devaient mettre une dernière main lors de l'épreuve d'examen, certes, mais qui pouvait être entièrement préparé « à la maison » – à utiliser de façon pertinente et justifiée quelques connaissances prises dans des champs dont ils pouvaient a priori penser que leur choix d'études supérieures leur donnait le droit

imprescriptible de les oublier entièrement. Je ne ferai pas de bilan ici, me contentant d'indiquer que, en cette première édition, si quelques-uns d'entre eux ont mené à bien de façon satisfaisante ce qui leur était demandé, la majorité s'en est tenue prudemment à une distance plus ou moins grande, en consentant à *évoquer* ce qu'il y aurait eu à faire, sans pour autant mettre la main à la pâte.

f) Toute analyse dépend du projet auquel on entend la faire servir. Une analyse praxéologique partie prenante d'une analyse didactique dépend de cette analyse didactique : la prise en compte de tel ou tel aspect de l'œuvre analysée n'est pas à tout coup utile à l'analyse didactique que l'on a en vue et qui dépend elle-même du projet qu'elle prétend nourrir. Mais je voudrais maintenant rappeler un aspect trop rarement mis en avant, même par des didacticiens : se demander comment ça marche et pourquoi les choses sont comme elles le sont, ou comment ça pourrait marcher et pour quelles raisons, constitue une interrogation emblématique du citoyen actif et lucide. La formation à l'analyse praxéologique (et, pour cela, à l'utilisation d'une multiplicité de champs praxéologiques) participent de la formation du citoyen. Mais c'est alors que la question de l'analyse didactique – sinon de l'*ingénierie* didactique – resurgit. Lorsqu'on enquête sur une question  $Q$ , on rencontre des réponses  $R^\diamond$  contenant des assertions qu'il s'agit d'analyser à leur tour. Or c'est là que le questionnement « didactique » adressé à l'énonciateur supposé – « Comment le savez-vous ? De qui l'avez-vous appris ? » – ou formulé à son propos comme à propos de ses semblables – « Comment le savent-ils ? De qui l'ont-ils appris ? » – devient pertinent et, parfois, indispensable. Voici de cela un exemple simple, récemment rencontré à nouveau. Dans l'article de *Wikipédia* intitulé « Niveau de la mer », on pouvait lire naguère ceci :

### **Prévision**

Les prévisions donnent une élévation du niveau de la mer de 11 à 77 centimètres à la fin du XXI<sup>e</sup> siècle. Si toute la glace qui se trouve sur le continent Antarctique et au Groenland fondait, le niveau de la mer s'élèverait de 70 mètres.

Dans l'article « Élévation du niveau de la mer » de *Wikipédia*, on lisait aussi :

Les modèles informatiques prévoient que le niveau de la mer continuera à s'élever au cours du siècle à venir. Les incertitudes sont énormes, car nous ne disposons pas de suffisamment de données à long terme et réparties sur toute la planète pour tester convenablement ces modèles. Cependant, les meilleures prévisions donnent une élévation du niveau de la mer de 11 à 77 centimètres à la fin du 21<sup>e</sup> siècle.

On voit que les données numériques sont identiques, ce qui laisse penser à une source unique, non identifiée à ce stade de l'enquête, qui serait le « professeur » commun aux rédacteurs des deux articles. Bien entendu, cela conduit à soulever des questions comme « Comment peut-on s'instruire sur la question de la montée des océans ? », ou encore « Où sont produites les connaissances à ce propos et par quels chemins y accéder ? ». Ce faisant, notons-le, on tendra ainsi, en moyenne, à se rapprocher des connaissances les plus « savantes » sur la question qui nous occupe. Pour ces raisons, la capacité à faire une analyse didactique est indispensable aux citoyens éclairés. (Je laisse aux lecteurs intéressés le soin de découvrir par eux-mêmes la source des données numériques rencontrées de manière répétée.)

## **2. Un exemple d'analyse didactique**

a) L'analyse praxéologique de l'enjeu didactique ♥ que suppose une analyse didactique peut varier beaucoup. Dans l'épreuve d'examen dont j'ai parlé plus haut, la partie 2 demande une analyse didactique *in situ* d'un texte que les candidats découvrent lorsque le sujet de l'examen leur est distribué. Lors de l'examen récent, tenu le 11 janvier 2012, le texte proposé était le suivant (on a conservé ci-après l'énoncé exact, suivi de l'indication de l'origine de ce texte) :

### **Apprendre l'allemand d'urgence**

« Tu dois apprendre l'allemand, disait-elle, tu iras à l'école à Vienne. » [...] J'avais huit ans, je devais aller à l'école à Vienne, dans la troisième classe qui correspondait à mon âge. [...] Peu de temps après notre arrivée [à Lausanne], nous allâmes dans une librairie, elle demanda un livre pour apprendre l'allemand, prit le premier qu'on lui proposa, me reconduisit aussitôt à la maison et me donna une première leçon. Comment caractériser cet enseignement sans tomber dans l'invraisemblance ? [...] On s'installait à la salle à manger. Je m'asseyais contre le bord étroit de la grande table, avec vue sur le lac et les voiliers. Elle prenait place à ma gauche, juste à l'angle. Le livre, elle le tenait de manière à ce que je ne puisse jamais voir le côté imprimé. Ensuite, elle le rangeait hors de ma portée. « Tu n'en as pas besoin, disait-elle, tu n'y comprendrais rien de toute façon. » Mais cet argument me paraissait un faux-semblant, j'avais l'impression qu'elle gardait le livre pour elle, comme un secret. Elle me lisait à haute voix une phrase en allemand et me la faisait répéter. Comme ma prononciation lui déplaisait, je devais répéter la phrase plusieurs fois jusqu'à ce que ma prestation lui parût supportable. Mais cela n'arrivait pas souvent, elle se moquait en général de ma prononciation et comme il n'y avait rien au monde que je supportais plus mal que de subir les moqueries de ma mère, je me donnais du mal et prononçais

très vite correctement. Alors seulement, elle me donnait le sens de la phrase en anglais. Et elle ne s'y reprenait jamais à deux fois, il me fallait le retenir du premier coup. Elle passait ensuite très vite à la phrase suivante, procédant toujours de la même façon ; dès que je l'avais correctement prononcée, elle la traduisait, me toisait d'un air impérieux pour me la faire entrer dans la tête et, déjà, elle me lançait une autre phrase. Je ne sais pas combien elle m'en fit ingurgiter la première fois, disons prudemment quelques-unes ; mais mieux vaudrait sans doute dire beaucoup. Elle me congédia, déclarant : « Répète-toi tout cela. Tu ne dois pas oublier une seule phrase. Pas une seule. On continuera demain. » Elle garda le livre et je demeurai perplexe, livré à moi-même. Il n'y avait pas d'aide à attendre, Miss Bray ne parlait que l'anglais et, pendant tout le reste de cette journée, ma mère refusa de me redire les phrases. Le lendemain, je me retrouvai assis à la même place, devant moi la fenêtre, le lac et les voiliers. Elle reprit les phrases de la veille, m'en fit répéter une première et me demanda son sens. Pour mon malheur, je me souvenais de son sens et, satisfaite, elle dit : « Je vois, ça marche ! » Mais ensuite, ce fut la catastrophe, je ne savais plus rien, à l'exception de la première phrase, je n'avais strictement rien retenu. Je répétais la phrase, elle me questionna des yeux, je bégayai et me tus. Et comme la suite n'était pas meilleure, elle se mit en colère et dit : « Tu as pu retenir la première phrase, donc tu peux retenir les autres. Mais tu ne veux pas. Tu veux rester à Lausanne. Je te laisserai seul à Lausanne. J'irai à Vienne avec Miss Bray et les petits. Tu pourras rester seul à Lausanne ! » Je crois que je redoutais moins une telle perspective que les sarcasmes dont elle m'accablait. [...] J'étais au désespoir et, pour le cacher, je scrutais les voiles, espérant d'elles un improbable secours. Il se passa quelque chose que je n'ai jamais réussi à comprendre. Au prix d'un terrible effort de concentration, j'appris à retenir le sens des phrases du premier coup. [...] Je vivais dans la peur de ses sarcasmes et, durant la journée, où que je fusse, je ne cessais de me répéter les phrases. Pendant les promenades avec la gouvernante, j'étais taciturne, oppressé. Je ne sentais plus le vent, je n'écoutais pas la musique ; dans ma tête, il n'y avait plus que les phrases allemandes et leur sens en anglais. Dès que c'était possible, je me mettais à l'écart et me les répétais à haute voix ; des fautes commises une seule fois, puis ressassées avec acharnement, se gravèrent ainsi dans ma tête à côté des phrases justes. C'est que je n'avais pas de manuel pour contrôler mes connaissances, elle me le refusait obstinément, impitoyablement, connaissant mon goût pour les livres et sachant combien tout eût été plus facile pour moi si j'avais eu un livre entre les mains. Mais elle partait du principe qu'il ne fallait pas trop se faciliter les choses ; qu'il fallait se méfier des livres quand on voulait apprendre une langue ; qu'il fallait apprendre oralement et que le livre cessait seulement d'être nuisible quand on avait déjà acquis quelque connaissance de la langue. Peu lui importait que je ne mange pratiquement plus rien à force de me sentir oppressé. La terreur dans laquelle je vivais avait,

à ses yeux, une fonction pédagogique. [...] Miss Bray devait avoir bon cœur et la tête dure car c'est elle qui, finalement, me sauva. Un après-midi, alors que nous venions de nous installer pour la leçon quotidienne, ma mère déclara tout de go : « Miss Bray me dit que tu aimerais bien apprendre les caractères gothiques. Est-ce que c'est vrai ? » Peut-être avais-je réellement dit cela une fois, peut-être aussi cette idée revenait-elle entièrement à Miss Bray. Toujours est-il que ma mère, tout en me posant cette question, regardait précisément le livre qu'elle tenait à la main ; je tentai donc ma chance et dis : « Oui, j'aimerais bien. J'en aurai besoin pour l'école à Vienne. » Je reçus enfin le livre, de sa main, c'était le moyen de me familiariser avec les lettres anguleuses. C'était aussi le moyen de me mettre ces lettres dans la tête car la patience de ma mère n'y aurait pas suffi. Faisant fi de ses principes, elle me confia le livre. Le temps des pires souffrances – il y avait peut-être un mois que cela durait – était révolu.

Extrait de : Elias Canetti, *La langue sauvée. Histoire d'une jeunesse (1905-1921)*. [Elias Canetti reçut en 1981 le prix Nobel de littérature pour son œuvre écrite... en langue allemande.]

b) Comme indiqué, ce texte est extrait du livre d'Elias Canetti, *La langue sauvée. Histoire d'une jeunesse (1905-1921)* : il apparaît aux pages 102-106 de l'édition publiée par Albin Michel en 1980. Le travail d'analyse didactique révèle toujours certains besoins de connaissance, que, dans le cadre de cette épreuve, on essaie de minimiser, et pas seulement à l'endroit de l'enjeu didactique ♥ – qui est ici « la langue allemande ». Bien entendu quelques connaissances sont toujours nécessaires. Certaines sont apportées par l'enseignement donné (on y avait insisté, ainsi, sur le rôle et le sens de la mémorisation dans les configurations didactiques anciennes, par exemple), d'autres sont censées participer d'un certain équipement commun qui, cependant, n'est pas la chose du monde la mieux partagée. Ainsi vaut-il mieux, ici, savoir que Lausanne est une ville (suisse) de langue française et Vienne une ville (autrichienne) de langue allemande. Les candidats auraient eu avantage à se munir, à cet égard, d'un bon dictionnaire généraliste (je rappelle que, dans cet examen, tous les documents sont autorisés), ce qui leur aurait permis de compenser certaines de leurs défaillances. Une candidate demandera ainsi ce que sont les « caractères gothiques », question à laquelle une courte réponse sera apportée oralement à l'ensemble des candidats. L'idée générale est cependant, ici, que le candidat peut ne recourir qu'au texte proposé enrichi de conjectures personnelles qu'il s'efforce de bien contrôler à partir d'indications ou d'indices contenus dans le texte. Si l'auteur est né en 1905, le texte indiquant que l'épisode rapporté se passe alors que le narrateur a 8 ans, on peut en déduire qu'il prend place en 1913. Ce qui est dit à propos des caractères gothiques permet de même d'inférer – quand bien même on ne saurait rien à leur propos – que leur

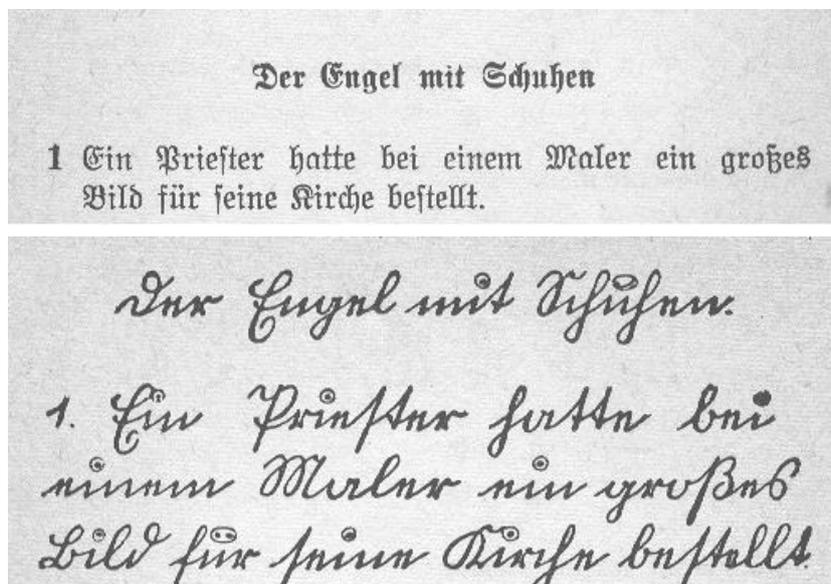
connaissance participe de la connaissance de la langue allemande écrite et qu'il faut pour cela les voir écrits... À titre d'illustration, à l'intention du lecteur de ces lignes, je tire ci-après de mon exemplaire de *L'allemand sans peine*, publié en 1957, la première phrase de la 53<sup>e</sup> leçon (suivie de sa traduction en français), phrase qui sera ensuite – à la 71<sup>e</sup> leçon – mise en gothique d'imprimerie puis en gothique manuscrit :

### **Der Engel mit Schuhen**

1 Ein Priester hatte bei einem Maler ein grosses Bild für seine Kirche bestellt.

### **L'ange en souliers**

1 Un prêtre avait commandé chez un peintre un grand tableau pour son église.



Le travail nécessaire n'est sans doute pas toujours fait correctement. C'est ainsi qu'une candidate juge la mère très dure envers son fils du fait qu'elle lui donne la traduction en anglais et non pas en français – en ignorant le fait que la langue de communication au sein de cette famille en transit est alors l'anglais. D'autres voient dans le narrateur une fille – sans doute parce que le prénom *Elias* leur est inconnu et que le lien avec *Élie* n'est pas fait. Par delà ces tribulations, le texte propose des éléments saillants dont la mise en évidence semble relativement aisée. Voyons cela.

c) En quoi peut consister une analyse didactique de la situation que nous fait connaître le texte « Apprendre l'allemand d'urgence », ou du moins une analyse qui réponde aux « cahiers des charges » élaboré dans l'enseignement donné ? Je reproduis d'abord ce cahier des charges :

Comment donc analyser le didactique qui est présent dans une situation qui nous est donnée à connaître soit par l'observation directe, soit par une description orale ou écrite – qui peut être plus ou moins allusive, plus ou moins précise – de cette situation ? Le premier geste d'analyse doit consister à identifier les systèmes didactiques  $S(X; Y; \heartsuit)$  présents ou évoqués dans la situation à analyser. Pour chacun d'eux, on doit alors s'efforcer de répondre, dans toute la mesure du possible (qui dépend des informations disponibles ou raisonnablement conjecturables), aux questions suivantes, que nous commenterons un peu plus loin :

$\Sigma_0$ . Quelle est l'institution mandante de  $S(X; Y; \heartsuit)$  ?

$\Sigma_1$ . Qu'est-ce que  $X$  ?

$\Sigma_2$ . Qu'est-ce que  $Y$  ?

$\Sigma_3$ . Qu'est-ce que  $\heartsuit$  ?

$\Sigma_4$ . Que font  $X$  et  $Y$  pour que  $X$  « apprenne »  $\heartsuit$  ?

$\Sigma_5$ . Qu'est-ce que  $X$  aura-t-il pu apprendre, à court ou moyen terme, du fait du fonctionnement de  $S(X; Y; \heartsuit)$  ?

$\Sigma_6$ . Qu'est-ce que  $Y$  et certains environnements éventuels de  $S(X; Y; \heartsuit)$  auront-ils pu apprendre, à court ou moyen terme, du fait du fonctionnement de  $S(X; Y; \heartsuit)$  ?

$\Sigma_7$ . Quels changements le fonctionnement de  $S(X; Y; \heartsuit)$  a-t-il pu apporter dans les conditions et les contraintes gouvernant son fonctionnement ultérieur ?

Pour espérer pouvoir répondre à ces questions, il convient d'identifier les principaux « paquets » de *conditions et contraintes* qui rendent possibles, facilitent ou au contraire interdisent (ou, du moins, gênent) la survenue de tel ou tel *état* des systèmes didactiques examinés, ce pour quoi on se référera à l'échelle des niveaux de co-détermination didactique (laquelle sera d'ailleurs ultérieurement remaniée et complétée). Les réponses aux questions  $\Sigma_0$  à  $\Sigma_7$  ainsi que la reformulation de ces questions mêmes se préciseront et s'enrichiront au fil des leçons proposées : on s'en tiendra pour le moment à des formulations naïves, que l'on retouchera peu à peu dans la suite. Nous verrons en particulier que les questions  $\Sigma_3$  – Qu'est-ce que  $\heartsuit$  ? – et  $\Sigma_4$  – Que font  $X$  et  $Y$  pour que  $X$  « apprenne »  $\heartsuit$  ? –, qui désignent les deux « quelque chose » où se produit le refoulement didactique, appelleront un enrichissement très important de l'outillage analytique disponible. Nous nous limiterons dans ce qui suit à commenter les questions  $\Sigma_5$  à  $\Sigma_7$ .

d) Que peut-on dire alors en suivant grosso modo le schéma ébauché dans ce qui précède ? Voici quelques éléments :

**1.** Ce qui fonctionne comme école et institution mandante est ici une *famille*, qui comporte pendant le temps de l'action la *mère du narrateur*, le *narrateur*

(Elias Canetti), ce qu'on peut penser être des *petits frères* du narrateur (« les petits ») ainsi que la *gouvernante anglaise*, Miss Bray.

**2.** La formation du système didactique principal (SDP) répond à un projet familial : s'installer à Vienne, ce qui conduirait le narrateur à être scolarisé en allemand, langue que, à l'évidence, il ne connaît pas, contrairement à sa mère. Il faut donc que le narrateur apprenne l'allemand, et cela très rapidement.

**3.** La famille, et plus exactement ce qui apparaît comme le chef de famille, à savoir la mère du narrateur, provoque la formation d'un système didactique  $S(x; y; \heartsuit)$ , où  $x$  est le narrateur et  $\heartsuit$  la langue allemande.

**4.** L'instance enseignante,  $y$ , aurait pu être un « professeur d'allemand » mandaté (et, par exemple, rétribué) par la famille ; en l'espèce, c'est la mère du narrateur qui s'auto-mandate. Le texte soumis à l'analyse ne dit rien directement sur sa connaissance de la langue allemande. Deux informations cependant portent à penser que sa maîtrise de l'allemand pouvait être de bon niveau : d'une part, elle semble capable de traduire par elle-même en anglais les phrases en allemand (on peut penser que le livre utilisé est un ouvrage pour apprendre l'allemand à des francophones : Lausanne est une ville suisse de langue française) ; d'autre part, elle n'est pas satisfaite de la prononciation de son fils, se moque de lui et lui fait répéter les phrases mal prononcées.

**5.** Le milieu  $M$  pour l'étude est constitué de deux entités principales didactiquement solidaires : d'abord, la mère du narrateur,  $y$ , qui donne la traduction en anglais des phrases allemandes prises dans le livre, dont elle précise en outre la prononciation correcte ; ensuite, un livre utilisé par  $y$  comme un simple réservoir de phrases en allemand (lors de l'acquisition de ce livre, la première « méthode » venue a fait l'affaire). Ce livre peut être regardé comme un *exposé* sur  $\heartsuit$ , exposé qui indique que telle ou telle phrase est une phrase en allemand – ainsi qu'il en va plus haut de la phrase « Ein Priester hatte bei einem Maler ein grosses Bild für seine Kirche bestellt ».

**6.** L'étude de l'allemand se fait ici à partir de l'anglais, qui semble être la langue « de la famille » (en y incluant Miss Bray, qui ne parle que l'anglais).

**7.** Les séances de travail du SDP, dont nous ne connaissons pas la durée, ont lieu dans la salle à manger familiale, dont la table est utilisée de façon que  $x$  ne puisse jamais voir le contenu du livre utilisé. On peut penser que, durant ces séances, toute autre personne (petits frères, Miss Bray, etc.) est bannie de la salle à manger. Cette phase va durer « peut-être un mois ».

**8.** La technique didactique employée par  $y$  relève, selon  $x$ , de « l'invraisemblance ». On peut donc penser qu'il n'avait jusqu'alors jamais vu, et qu'il n'a ensuite jamais vu, personne procéder ainsi.

**9.** Cette technique peut être décrite ainsi : 1)  $y$  lit à haute voix une phrase du livre ; 2)  $x$  la répète et  $y$  corrige sa prononciation en redisant la phrase à haute voix, et cela se répète jusqu'à ce que  $y$  se montre satisfaite de la prononciation de  $x$  ; 3)  $y$  donne alors la traduction en anglais de la phrase, et cela une fois et une seule. On passe ensuite à une deuxième phrase, puis à une troisième, etc.

Le lendemain, *y* reprend les phrases de la veille, *x* doit les répéter et donner leur traduction en anglais (traduction qu'il n'a entendue qu'une fois de la bouche de *y*). Pour *y* parvenir, *x* dispose uniquement de sa mémoire : il n'a pas accès au livre utilisée par *y*.

**10.** Dans ces conditions, qui semblent être pour lui des contraintes indépassables, le narrateur *x* emploie alors une technique consistant (a) dans le cadre du SDP, à fournir un « terrible effort de concentration » pour mémoriser les phrases en allemand et leur traduction en anglais ; (b) à créer un SDA  $S(x ; \emptyset ; \text{phrases allemandes \& leur traduction})$ , qui envahit ses jours, dans lequel il s'emploie à répéter à haute voix, quand il est seul, les phrases et leur traduction, qu'il continue à repasser dans sa tête lorsqu'il ne peut les prononcer à haute voix parce qu'il n'est pas seul.

**11.** Cette technique lui permet de « survivre » didactiquement, tout en présentant de sérieux inconvénients, humains (*x* est obsédé par ce travail, ne mange « pratiquement plus »), et didactiques : *x* mémorise ainsi durablement des phrases dont il ne sait pas qu'elles sont incorrectes, ce qui est un inconvénient anciennement connu [voir la 6<sup>e</sup> des *Leçons de didactique*, section 13, citation de Pierre Nicole (1625-1695)].

**12.** Quelle est la technologie de la technique didactique mise en œuvre par *y* ? D'après le narrateur, *y* justifie sa manière de faire en se référant au fait que l'enjeu didactique ♥ est une langue : 1) pour *y*, il faut « se méfier des livres » pour apprendre une langue, il faut « apprendre oralement », du moins en un premier temps (« le livre cessait seulement d'être nuisible quand on avait déjà acquis quelque connaissance de la langue ») ; 2) pour *y* toujours, sa seule mémoire doit permettre à *x* de faire tout ce qu'elle exige de lui (retenir par cœur, sur le champ, une suite de phrases allemandes avec leur traduction en anglais entendue une seule fois), à moins que *x* ne soit de mauvaise volonté, ce dont le narrateur se voit en effet accusé par sa mère.

**13.** À suivre le narrateur, on peut identifier certains éléments de *théorie* présents chez *y*. Il semble ainsi que, pour elle, la mémorisation d'une phrase peut être *instantanée et définitive* – alors que *x*, qui répète inlassablement « ses » phrases, ne partage sans doute pas cette théorie ! Au plan général de l'apprentissage, on peut avancer ici un élément *technologique* de nature pédagogique (qui induit des techniques pédagogiques, donc) : la nécessaire *dureté* (et en particulier l'inflexibilité) du traitement (spécifique de l'enjeu ♥, mais aussi générique, lié au simple fait qu'un apprentissage est visé) que *y* se doit d'infliger à *x*. Bien que rien ne soit explicité par le narrateur sur ce point, on peut évoquer à ce propos un autre élément de *théorie* didactique traditionnel [mais qui n'a pas été évoqué dans le cours cette année] : à partir du moment où *x* entre, de gré ou de force, dans un contrat avec *y* à propos d'un enjeu didactique ♥, tout se passe comme si *y* était fondée à regarder *x* comme *coupable* – coupable de *ne pas connaître* ♥ – et, en conséquence, comme s'il méritait d'être châtié sans faiblesse.

**14.** Ainsi que le souligne le narrateur, il n'y a pas formation d'un système didactique  $S(x; \text{Miss Bray}; \heartsuit)$ . Mais le fonctionnement même du système  $S(x; y; \heartsuit)$  va provoquer un changement dans la technique didactique de  $y$  (elle finit par laisser  $x$  avoir accès au livre qu'elle utilise), cette modification de la technique apparaissant justifiée par un trait *spécifique* de l'enjeu didactique – la connaissance de l'allemand écrit exige la connaissance des lettres gothiques – regardé comme incompatible avec une technique didactique purement orale. On notera que la mère du narrateur ne fait pas apparaître cette décision comme la sienne propre mais comme l'accomplissement d'un désir du narrateur (comme si elle se souciait peu, quant à elle, qu'il apprenne ou non à lire les lettres gothiques...). On notera que le narrateur (qui doute de s'être jamais ouvert de ce souci-là à Miss Bray) n'imagine pas – apparemment – que sa mère ait pu inventer purement et simplement l'intervention de Miss Bray auprès d'elle et son contenu (le désir de  $x$  d'apprendre les lettres gothiques). Lui-même, en tout cas, feint non sans humilité d'entrer dans le plan de sa mère (« Oui, j'aimerais bien. J'en aurai besoin pour l'école à Vienne », admet-il). Par un tour habile, ainsi, la mère fait apparaître le changement qu'elle institue (contre sa technique didactique initiale) comme procédant d'un accord complet de l'« instance mandante » qu'est la petite famille (élargie à Miss Bray), elle-même faisant mine de ne pas s'y opposer au moment même où elle le met en œuvre !

**15.** Contrairement à ce qu'affirme le narrateur, on peut aussi penser que, en son for intérieur, sa mère n'est pas insensible aux souffrances de son fils, même si elle leur attribue une valeur « pédagogique » : le fonctionnement même de  $S(x; y; \heartsuit)$  conduit ainsi à des changements chez  $y$ , chez Miss Bray, chez  $x$  lui-même qui, désormais, ne compte plus *seulement* sur sa force propre pour résister aux effets violents de la stratégie de sa mère mais accepte au contraire d'entrer dans une forme de négociation avec sa mère, par le truchement réel ou inventé de Miss Bray et au nom d'un motif (apprendre les lettres gothiques) qu'il n'aurait sans doute pas imaginé au début de son travail avec sa mère. Cela se traduit par le fait que le SDA noté plus haut  $S(x; \emptyset; \text{phrases allemandes \& traductions})$  voit son milieu  $M$  enrichi par l'accès (dans des conditions et sous des contraintes qui ne nous sont pas connues) au livre utilisé par  $y$ . Quant au changement à long terme, on sait par une indication donnée dans le « paratexte » (à la fin du texte, entre crochets) que le narrateur recevra plus de soixante ans plus tard le prix Nobel de littérature pour son œuvre écrite en langue allemande.

e) S'il y a dans l'épisode analysé des éléments spécifiques de l'allemand (le fait qu'il s'agit d'une langue, et d'une langue vivante (et non d'une langue morte, ce qui eût sans doute rendu moins sensible la question de la prononciation), le fait que sa lecture et son écriture requièrent à cette époque, semble-t-il, la connaissance des « caractères gothiques »), ce que l'on

y voit de plus frappant – en tout cas pour le narrateur – semble être des plus génériques : la mère est mue par une théorie selon laquelle un apprentissage est chose instantanée, *si on le veut* (et, sans doute, si l'on n'est pas purement et simplement un idiot). Ou plutôt : ou bien on apprend instantanément, ou bien on n'apprend pas. La distance entre non-savoir et savoir est ici tout à la fois temporellement *quasi nulle et*, pour certains, *infranchissable* ou, du moins, non franchie. Tout apprentissage semble se passer ainsi : pour acquérir une connaissance, *x* se fait préciser cette connaissance ; cela suffit pour qu'il l'acquière aussitôt, de façon immédiate. Si la manœuvre échoue, *x* peut recommencer, dans les mêmes conditions, sans que les échecs précédents ne jouent aucun rôle dans la réussite ou l'échec à venir. Il s'agirait donc d'un processus *instantané et sans mémoire*.

f) Cette théorie de l'apprentissage ou plutôt du non-apprentissage peut sembler curieuse, « invraisemblable », pour emprunter un qualificatif au narrateur lui-même. Pourtant elle ne l'est pas : elle est même ubiquitaire. Imaginez que vous vouliez obtenir d'un distributeur automatique une certaine boisson. Vous mettez une pièce dans le logement prévu à cet effet. L'appareil rejette la pièce. Vous recommencez ; l'appareil la rejette encore. Vous recommencez. L'appareil finira peut-être par l'accepter – ou pas. Ni vous ni l'appareil n'êtes censés apprendre quoi que ce soit. Tel est le modèle de l'apprentissage qui va ordinairement de pair avec le déni du didactique : il n'y a rien à faire pour que « ça marche » sinon recommencer – et tout se joue en une seconde !

g) Je voudrais ajouter un élément à l'analyse précédente. Pour la mère du narrateur tout semble se passer comme si la distribution des connaissances était binaire : on sait, on ne sait pas. L'idée qu'on serait *en train d'apprendre* (ou de désapprendre) lui est étrangère. Un autre passage de l'ouvrage d'où est extrait le texte analysé plus haut le révèle superbement. On le trouve aux pages 309 à 311 de l'édition indiquée, où la famille est cette fois installée à Zurich (après trois années passées à Vienne) ; le voici.

À Zurich, mon professeur de latin m'avait reproché une fois de lever le doigt trop vite dès qu'une question était posée en classe ; le jour où je fis mine de devancer Erni, un condisciple de Lucerne quelque peu lent, et de répondre à sa place, Billetter me coupa la parole. Il incita Erni à bien réfléchir, l'encouragea et dit : « Prends ton temps, Erni, je suis sûr que tu trouveras la réponse. On ne va quand même pas s'en laisser remonter par un Juif viennois. » C'était un peu dur et, sur le coup, je fus touché au vif. Mais je savais que Billetter était un brave homme et que son propos était de donner sa chance à un garçon un peu lent confronté à un autre, un peu trop vif ; et, bien

que cette sortie fût dirigée contre moi, je ne l'en aimai pas moins et tâchai de tempérer quelque peu mon zèle.

Mais que faut-il penser de ce penchant à se mettre en avant ? Une certaine vivacité naturelle intervenait certes pour beaucoup là-dedans, mais il y avait aussi la rapidité de la langue espagnole que je parlais tout enfant, et dont j'étais imprégné au point que le tempo de l'espagnol continuait à prévaloir curieusement lorsque je m'exprimais dans des langues plus lentes, telles que l'allemand ou l'anglais. Cependant, il y avait autre chose de beaucoup plus important, à savoir la volonté de m'affirmer face à ma mère. Elle attendait des réponses immédiates ; ce que l'on ne tenait pas tout prêt n'avait aucune valeur à ses yeux. Autrefois, l'application méthodique de ce point de vue lui avait permis de me faire littéralement ingurgiter l'allemand en quelques semaines. La méthode s'était alors avérée fructueuse et tout, après, devait se dérouler entre nous à ce rythme accéléré. Nous étions, elle et moi, comme deux acteurs de théâtre : l'un parlait, l'autre répliquait, les longs silences étaient exceptionnels et revêtaient un sens tout à fait particulier. L'exception confirmait la règle : entre nous, les répliques fusaient du tac au tac, l'un n'avait pas plus tôt fini sa phase que l'autre plaçait déjà sa repartie. L'échange avec ma mère passait par mon aptitude à ce jeu.

Ma vivacité naturelle se trouvait donc accrue par la nécessité de me montrer à la hauteur de ma mère. La situation à l'école avait beau être différente, je me conduisais comme à la maison. À la différence près que le rôle de ma mère était tenu par les professeurs et qu'il fallait lever le doigt avant de laisser échapper la réponse. Mais elle n'en venait pas moins très vite et les autres n'avaient plus qu'à compter les points. L'idée ne m'effleurait pas que cette façon de faire pût les agacer, voire même les blesser. Mes réponses intempestives étaient diversement reçues par les professeurs. Certains accueillaient avec soulagement ce genre d'intervention. Leur tâche en était allégée, cela mettait de l'ambiance dans la classe, il se passait au moins quelque chose ; et puis ils devaient avoir l'impression de faire un bon cours puisqu'ils déclenchaient sans arrêt des réactions appropriées. D'autres trouvaient cela injuste et craignaient que certaines natures lentes pussent perdre tout espoir d'arriver jamais à quelque chose, du seul fait d'être constamment confrontées à une façon de réagir opposée à la leur. Ces derniers – qui n'avaient certes pas tout à fait tort de penser ainsi – me traitaient avec froideur et me considéraient plutôt comme une sorte de fléau. Enfin, il y en avait quelques-uns qui se réjouissaient de voir que l'on rendait honneur au *savoir* et je crois bien que c'étaient eux qui étaient le plus près de la vérité : les motifs profonds de mon excessive vivacité étaient effectivement de cet ordre.

On a là l'expression quasi pure des « théories » rétrocognitives du savoir. Le savoir se sait. *On le sait* – ou bien il n'est pas. S'il est présent, il doit donc *jaillir* immédiatement, instantanément. Le savoir ne se construit pas : on l'a

ou pas. On voit au passage que ces théories sont confortées par les contrats sociaux ordinaires qui gèrent les échanges entre interlocuteurs en obligeant chacun d'entre eux – sauf à désobliger son interlocuteur – à répondre *immédiatement* aux questions qui lui sont proposées.

h) De telles théories de l'apprentissage – qui valent déni du didactique – sont ubiquitaires. Un bel exemple en est donné par Richard Feynman dans son livre *Surely You're Joking, Mr. Feynman!* (1985), qu'on peut trouver en ligne ([http://www.chem.fsu.edu/chemlab/isc3523c/feyn\\_surely.pdf](http://www.chem.fsu.edu/chemlab/isc3523c/feyn_surely.pdf)) :

I was working at the time for a printer, and a man who knew that printer knew I was trying to get jobs fixing radios, so he sent a fellow around to the print shop to pick me up. The guy is obviously poor—his car is a complete wreck—and we go to his house which is in a cheap part of town. On the way, I say, “What’s the trouble with the radio?” He says, “When I turn it on it makes a noise, and after a while the noise stops and everything’s all right, but I don’t like the noise at the beginning.”

I think to myself: “What the hell! If he hasn’t got any money, you’d think he could stand a little noise for a while.”

And all the time, on the way to his house, he’s saying things like, “Do you know anything about radios? How do you know about radios—you’re just a little boy!” He’s putting me down the whole way, and I’m thinking, “So what’s the matter with him? So it makes a little noise.”

But when we got there I went over to the radio and turned it on. Little noise? *My God!* No wonder the poor guy couldn’t stand it. The thing began to roar and wobble—WUH BUH BUH BUH BUH—A *tremendous* amount of noise. Then it quieted down and played correctly.

So I started to think: “How can that happen?” I start walking back and forth, thinking, and I realize that one way it can happen is that the tubes are heating up in the wrong order—that is, the amplifier’s all hot, the tubes are ready to go, and there’s nothing feeding in, or there’s some back circuit feeding in, or something wrong in the beginning part—the HF part—and therefore it’s making a lot of noise, picking up something. And when the RF circuit’s finally going, and the grid voltages are adjusted, everything’s all right.

So the guy says, “What are you doing? You come to fix the radio, but you’re only walking back and forth!”

I say, “I’m thinking!” Then I said to myself, “All right, take the tubes out, and reverse the order completely in the set.” (Many radio sets in those days used the same tubes in different places—212’s, I think they were, or 212-A’s.) So I changed the tubes around, stepped to the front of the radio, turned the thing on, and it’s as quiet as a lamb: it waits until it heats up, and then plays perfectly—no noise.

When a person has been negative to you, and then you do something like that, they're usually a hundred percent the other way, kind of to compensate. He got me other jobs, and kept telling everybody what a tremendous genius I was, saying, "He fixes radios by *thinking!*" The whole idea of thinking, to fix a radio—a little boy stops and thinks, and figures out how to do it—he never thought that was possible.

Ici, on n'apprend pas : on sait, ou ne sait pas ! Bien entendu, le refoulement du didactique, phénomène au cœur des problèmes didactiques de la société, va de pair avec de telles vésanies théoriques.

### **3. Un enseignement nouveau**

a) Vous le savez peut-être, un nouveau cursus de master a démarré en didactique des mathématiques dont ne fonctionne actuellement que la deuxième année. La responsabilité de l'une des UE, que j'assume de concert avec Michèle Artaud, m'a été confiée : il s'agit de l'UE 35 intitulée « Fondements et méthodes de la recherche en didactique des mathématiques ». Cette UE, dont la première séance a eu lieu le 4 janvier, devrait compter 18 séances de trois heures, la dernière étant prévue le 23 mai. Officiellement, 16 étudiants sont inscrits qui, à une exception ou deux, participent régulièrement aux séances de travail (lesquelles ont lieu le mercredi après-midi).

b) La conception, la construction et la réalisation de cette UE posent un nombre considérable problèmes, et d'abord celui-ci : par son contenu supposé, cet enseignement est entièrement nouveau pour moi (je suppose qu'il est pour Michèle également). Je n'ai jamais eu par exemple à élaborer un *exposé* un tant soit peu systématique sur la question des *fondements* de la (recherche en) didactique des mathématiques. Et c'est de cela que je voudrais vous entretenir ici.

c) Au risque de trop simplifier en le résumant ce que j'ai commencé à faire dans le cadre sus-évoqué, je dirai d'abord que ce qui fonde en premier lieu l'ambition de la science que nous nommons « didactique des mathématiques », c'est la conjonction de deux conditions : (a) il y a une entité sans doute floue et en tout cas évolutive qu'on s'entend (à peu près) pour appeler « les mathématiques » et (b) il y a *du didactique* ayant pour enjeux des œuvres qualifiées de « mathématiques » (au sens précédemment évoqué). Bien entendu, qu'il y a du didactique signifie qu'il y a des instances (personnelles ou institutionnelles) *V* qui s'efforcent de faire « quelque chose » pour que des instances (personnelles ou institutionnelles) *U* apprennent « quelque chose » – quelque chose de mathématique.

d) Voilà donc deux premières conditions de possibilité, c'est-à-dire deux conditions qui fondent la possibilité qu'existe une science du didactique relatif au mathématique. Pour voir que cela n'est pas trivial, il convient d'examiner ce qui pourrait être et n'est pas. On peut imaginer par exemple qu'une société dans laquelle la théorie ultra-dominante du savoir serait celle rencontrée plus haut – il n'y a pour ainsi dire pas d'apprentissage, on sait ou on ne sait, le fait que pas – ne permettrait guère que se développe une science didactique. A contrario, que soit établie, dans une société donnée, une école où l'on prétend faire connaître telle œuvre ♥ va à l'encontre du credo dominant ; et on ne s'étonnera pas, alors, que la science didactique ait lié son sort à cette institution où le didactique *semble* mis en avant.

e) L'une des conditions de possibilité clés d'une science didactique est l'existence de l'objet qu'on lui assigne ; mais, cela tenu pour acquis, une autre condition *sine qua non* est l'*accessibilité* de cet objet. Cette condition évoque évidemment les « méthodes » que mentionne le titre même de l'UE 35. Mais il ne faut pas aller trop vite sur ce point. Faire une science suppose des scientifiques, faire de la recherche suppose des chercheurs. Ces scientifiques, ces chercheurs, doivent s'approcher du didactique relatif au mathématique. Or cela suppose de créer, au sein de diverses institutions où ce didactique existe et pourrait être approché, une ou des *positions* que ces chercheurs puissent venir occuper au moins momentanément, de façon assez légitime pour avoir un minimum de stabilité et de durée de vie. Il s'agit là, à n'en pas douter, d'une nécessité pour tout projet scientifique, et pas seulement pour la didactique ! Qu'est-ce qui nous autorise à nous approcher de l'action didactique ? Je prendrai ici un exemple qui fera peut-être mieux voir la difficulté.

f) Le didactique relatif au mathématique existe, bien évidemment, dans le travail de production de connaissances mathématiques qu'accomplissent les mathématiciens. Mais comment l'observer ? Peut-on interroger les acteurs eux-mêmes ? Accepteraient-ils cela ? Dans le cas d'espèce, ceux d'entre eux qui accepteraient par exemple un simple entretien auront tendance – la chose ne leur est nullement spécifique, certes ! – à se considérer, non comme des acteurs ordinaires portant témoignage devant un chercheur ordinaire *en didactique*, mais comme des êtres uniques à qui, d'une manière ou d'une autre, le chercheur viendrait rendre hommage, mû par la curiosité que l'excellence attise. Bref, il se crée là une situation sociale d'*asymétrie* qui permet aux acteurs d'interpréter l'interaction avec le chercheur sans devenir eux-mêmes chercheurs *en didactique* – ce qu'aucun d'eux, je crois, n'envisage, tentés qu'ils sont souvent de « faire la leçon » à un « chercheur » qui, pour eux, n'en est peut-être pas un, parce que trop proche et trop

différent d'eux à la fois. (Je note ici que le problème serait sans doute un peu différent si l'interlocuteur se présentait comme chercheur « en psychologie » ou « en sociologie », par exemple.)

g) Vous savez comment ces choses se résolvent – mal ! – dans notre monde sublunaire. Le chercheur en didactique s'autorise socialement et culturellement d'une position regardée ordinairement comme *supérieure ou au moins égale* à celle des acteurs dont il veut connaître l'action. L'idéal, bien sûr, ce sont ces acteurs que sont les élèves jeunes, que le chercheur, parce qu'il est un adulte, domine. Proche de cet idéal, il y a le chercheur par ailleurs professeur de mathématiques de l'enseignement secondaire lorsqu'il se penche sur l'action mathématico-didactique des professeurs des écoles. Il y a éventuellement l'enseignant du supérieur se penchant sur ses collègues du secondaire ; parmi eux, il y a ceux qui se regardent comme marqués au front par l'onction mathématique, qui joueront aux évergètes. Ainsi retrouve-t-on le problème de l'évergétisme, qui est la partie la plus visible d'une construction sociale où la relation d'asymétrie est nuancée par une touche insistante de bienveillance, de bienfaisance, que le supérieur doit au subalterne. Au-delà, on tombe sur le gourou, qui n'a pas besoin d'occuper par ailleurs une position de surplomb, mais qui domine parce qu'il aurait un « truc en plus », un je-ne-sais-quoi et un presque-rien qui changent tout... Mais c'est là que je m'arrêterai aujourd'hui sur les questions abordées ici.

## **POUR UN CHANGEMENT RADICAL ?**

### **1. Une audition**

a) Le lundi 16 janvier j'ai été auditionné par le comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques, dont vous trouverez l'annonce sur le site de l'Institut français de l'éducation (IFÉ). Ledit comité et son travail y sont présentés dans les termes suivants ([http://www.inrp.fr/manweb/info\\_manifestation.php?man\\_id=192](http://www.inrp.fr/manweb/info_manifestation.php?man_id=192)) :

Le comité scientifique, présidé conjointement par Rémy Jost, Inspecteur Général honoraire et Alain Mercier, professeur à l'ENS de Lyon, réunit des enseignants chercheurs (Pierre Arnoux, Michèle Artigue, Ghislaine Gueudet, Cécile Ouvrier-Buffet, Gérard Sensevy, Luc Trouche) et des personnels d'inspection (Michel Bovani, Jean-Jacques Calmelet, Marie Mégard, Laurent Noé). Il travaille dans des délais resserrés (4 jours pleins, en janvier et février) et a prévu d'entendre, sur les questions de l'enseignement des mathématiques de la maternelle au collège, plus de 20 experts nationaux et internationaux, pour des auditions croisées.

Lors de cette audition, j'ai fait une présentation que, sur la suggestion d'Alain Mercier, Teresa Assude m'a demandé de répéter dans le cadre du séminaire de l'équipe ACADIS qui se réunissait le vendredi 27 janvier. C'est de cela que je voudrais maintenant vous entretenir.

b) Le 16 janvier, ma présentation portait ce titre à n'en plus finir :

*Des programmes, oui. Mais pour quoi faire ?  
1753, 1902, 20??  
Pour une réforme fondamentale de l'enseignement*

La première partie du titre fait écho à la demande qui m'avait été transmise par Alain Mercier, que je formulerai ici très naïvement ainsi : « dire mon mot » sur les programmes de mathématiques du collège, récemment renouvelés. Les dates qui figurent ensuite dans le titre ci-dessus pouvaient au départ paraître sibyllines à qui n'est pas familier de l'histoire de notre système scolaire – hormis bien sûr la dernière, allusion à cette réforme fondamentale à venir à laquelle la troisième partie du titre fait explicitement référence.

c) L'idée générale était évidemment que se prononcer sur des programmes ne saurait avoir de sens si l'on ne précise pas à quoi ces programmes sont censés servir. C'est de là que je suis parti. Je reprends dans ce qui suit le contenu même de mon propos, tel que je l'avais prévu et tel que je l'ai, en première approximation, explicité le 16 janvier à Paris avant de le reprendre le 27 à Marseille – en me permettant d'y introduire ici des intertitres. Je dois prévenir les fidèles de ce séminaire, en les priant de m'en excuser, qu'ils retrouveront ci-après des éléments bien connus d'eux, et même certains développements qui figurent expressément dans le journal de certaines des séances précédentes. Ne parlons pas de redites ; prenons cela comme autant de révisions, et qui permettent d'avancer chaque fois un peu...

## **2. Deux critères à écarter**

a) Quand on s'interroge sur des programmes d'enseignement, qu'ils soient faits ou à faire, quand donc on veut les *évaluer*, c'est-à-dire quand on veut estimer leur *valeur*, on doit évidemment s'interroger sur les fonctions qu'ils visent à servir : ce que vaut une chose ne se conçoit que par rapport au *projet* dans lequel cette chose doit intervenir. *En d'autres termes, des programmes n'ont pas de valeur en eux-mêmes.*

b) Souvent, dans les échanges autour de programmes d'enseignement, on voit apparaître des justifications et des valorisations opportunistes qui ont

pour but de maintenir une tradition à laquelle d'aucuns sont attachés. Or la première question qu'il faudrait soulever ici, c'est évidemment celle-ci : pourquoi enseigner des mathématiques ? (Il n'y a évidemment pas, à mes yeux, d'anti-privilege des mathématiques : sur toute discipline installée, quelle qu'elle soit, on doit ainsi périodiquement s'interroger.) Pourquoi faire des mathématiques une matière obligatoire et même centrale – encore aujourd'hui ? On verra plus loin, je l'espère, la réponse que j'apporterai à cette interrogation.

c) En tout état de cause, il y a une raison d'enseigner ceci ou cela que je voudrais d'emblée récuser – je ne m'y intéresserai pas dans ce qui suit. Elle surgit dès les origines des systèmes d'enseignement : l'étude d'une matière donnée – le latin ou la dactylographie, par exemple – est *socialement classante*. Et c'est à certaines matières jadis étudiées que se reconnaissent notamment les élites. Je prends un exemple [Cet exemple a été présenté dans un texte non publié présenté en le 26 novembre 2003 à l'IUFM d'Aix-Marseille et que l'on trouvera sur mon site Web à l'adresse suivante : [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Ecole\\_qui\\_separe\\_ecole\\_qui\\_unit.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Ecole_qui_separe_ecole_qui_unit.pdf).] Nous avons souvent – pour ceux qui connaissent un tant soit peu la chose – une haute opinion de la *paideia*, l'éducation grecque. Or dans un livre paru en français sous le titre *Pouvoir et persuasion dans l'Antiquité tardive*, l'historien Peter Brown note :

L'arrière-plan social de ce système d'éducation a longtemps semblé évident : « Une des fonctions primordiales de cette culture était de distinguer une élite du flot ordinaire de l'humanité. » Seuls les fils de notables avaient les moyens et le temps de faire le long voyage qui les amènerait des contrées les plus lointaines de l'Orient grec pour suivre à loisir les cours d'un maître tel que Libanius à Antioche, ou Prohaeresius à Athènes. (p. 62)

La citation contenue dans le passage précédent est extraite du livre de John Matthews, *The Roman Empire of Ammainus* (Londres, Duckworth, 1989, p. 78) ; Libanius a vécu de 314 à 393. Brown ajoute alors :

Ils sortaient de cette expérience coûteuse et intellectuellement exigeante avec une excellente opinion d'eux-mêmes : ils étaient convaincus que « la correction de leurs discours bien charpentés et le vernis brillant de l'habileté » les rendaient aussi supérieurs aux illettrés que les êtres humains au simple bétail... (p. 62)

Quelques-uns, qui n'étaient pas *a priori* des « élus », trouvaient là l'occasion d'une ascension sociale qui, dans la suite des siècles, sera souvent montée en épingle :

En même temps, [la *paideia*] offrait une voie acceptable de promotion à quelques personnes de talent d'origine plus modeste. Des fils de petits notables, comme Augustin à Thagaste, purent, grâce à de gros efforts et au soutien d'amis aisés, réussir une carrière de professeur, rhéteur ou poète. Ces carrières pouvaient même être couronnées par des postes dans des bureaux, voire un gouvernement provincial. (p. 62)

Né à Thagaste (aujourd'hui Souk-Arhas, en Algérie) le 13 novembre 354, Augustin y devint professeur en 374 avant d'exercer à Carthage en 376. « Les quelques exemples de mobilité sociale due à l'éducation ont séduit les commentateurs modernes de l'Empire tardif », note sobrement Peter Brown. Que l'action séparatrice de la *paideia* ait permis à quelques transfuges de faire reconnaître leur talent ne doit pas masquer les faits essentiels : l'École, d'abord, sépare ; puis elle *unit* ceux qu'elle a d'abord distingués. L'auteur poursuit en ces termes :

Mais ce qui importait probablement davantage à l'époque était que la *paideia* unît des segments de la classe dirigeante en conflit potentiel. Elle rassemblait administrateurs impériaux et notables provinciaux dans le sentiment partagé d'une commune excellence. Dans l'Empire tardif, l'éducation produisait une remarquable homogénéité culturelle. (p. 63)

Cette éducation partagée permettait une communion des élites impériales et locales autour de références culturelles dont c'était là une fonction essentielle :

Depuis les débuts de l'Empire, une culture commune avait fourni un langage qui permettait à des gens instruits d'Arles ou d'Arabie de communier dans la même admiration dévote de la rhétorique grecque. [...] C'était une marque de leur statut [que les gouverneurs] pouvaient emporter avec eux jusqu'aux cités les plus lointaines [...]. À travers une *paideia* partagée, ils instauraient un système de communication immédiate avec des hommes qui leur étaient souvent parfaitement étrangers. (p. 63)

Cette fonction distinctive et identificatoire ne supposait guère, au plan des contenus de connaissance, que ce « monument » culturel un peu creux qu'était devenue la rhétorique grecque, « reine des disciplines » de l'éducation des élites :

Formaliste, bien-pensante, tranquillement routinière et invariablement flagorneuse, la rhétorique fournissait un fond musical permanent au

consensus en faveur du gouvernement romain entretenu avec habileté chez les notables des cités du monde grec. (p. 63)

De fait, les références au savoir antique apparaissent en partie dérisoires : elles permettaient surtout de conforter le sentiment d'une communauté d'appartenance au sein d'une élite par ailleurs « hétérogène ». Ce que l'anecdote suivante fait apercevoir :

Rencontrant les conseillers juridiques d'un nouveau gouverneur (qui devait avoir grandi à Rome), Libanius pose la question cruciale : « Comment Ulysse gouvernait-il son royaume d'Ithaque ? » La réponse fusa : « En bon père de famille. » Cette citation classique donna le ton aux relations entre le gouverneur et le conseil municipal pour les mois à venir. (p. 64)

La *paideia* ainsi partagée, si chèrement acquise, tellement distinctive aussi, « donnait un paysage imaginaire commun » à une mince élite qu'elle séparait du même mouvement du reste immense de la société. Au XIX<sup>e</sup> siècle, Marc Girardin dit Saint-Marc Girardin (1801-1873), professeur de poésie française au collège Louis-le-Grand et à la Sorbonne, homme politique, critique littéraire, membre de l'Académie française à partir de 1844, disait non sans un réalisme cynique : « Je ne demande pas à un honnête homme de savoir le latin ; il me suffit qu'il l'ait oublié » (d'après Claude Lelièvre, *Histoire des institutions scolaires (1789-1989)*, 1990, Nathan, p. 43). C'est tout dire, tout avouer !

d) Je n'écarterai pourtant pas *que cela* des critères au nom desquels on peut considérer des programmes faits ou à faire. Il n'est pas donné à beaucoup, dans la noosphère de l'enseignement, de s'exprimer aujourd'hui avec la tranquille franchise de classe d'un Saint-Marc Girardin ! Mais le conservatisme – qui n'est pas un critère plus recevable que l'élitisme cynique en la matière – conduit souvent à invoquer un autre grand classique de la pensée commune : je veux dire la supposée « valeur formatrice » de telle ou telle discipline ou de tel ou tel détail de telle discipline. L'entité ainsi « valorisée » contribuerait, avance-t-on, à la « formation » ; mais à la formation à *quoi*, à la formation *pour quoi*, pour *quel(s) projet(s)*. Tout cela est ordinairement tu. Or tout ou presque est « formateur » au regard d'au moins un type d'activité qui existe ou a bien dû exister ou pourra exister demain. C'est ce sophisme que rejetèrent avec courage les auteurs des instructions relatives aux langues vivantes étrangères lors de la grande réforme de 1902 à laquelle le nom de Georges Leygues (1857-1933) reste attaché. Mettant les points sur les i, ils écrivent en effet (d'après Viviane Isambert-Jamati, *Les savoirs scolaires*, Éditions Universitaires, 1990, p. 56) : « C'est à l'acquisition de la langue que tout doit être subordonné, c'est pour l'apprendre à l'élève

qu'on développe son esprit, et non pour développer son esprit qu'on la lui apprend. »

### 3. Utilité et raisons d'être

a) La question « Des programmes, pour quoi faire ? » reste à ce stade entière, mais le répertoire des réponses possibles a été nettoyé de quelques grands classiques – « pour se distinguer, entre gens de bien », ou parce que « c'était comme ça *avant*, ça a toujours été comme ça, non ? ». J'ajoute que je défendrai plus loin une problématique socio-épistémologique et didactique qui ne saurait se satisfaire du seul principe énoncé en 1902 avec tant de netteté. Mais celui-ci délivre une critique ravageuse des programmes que le temps a nécrosés. J'ai longuement développé une analyse de l'évolution curriculaire en termes de *monumentalisation du corpus mathématique enseigné*. Qu'entendre par là ? J'utiliserai pour cela un langage suggestif : un programme est fait de l'indication d'*œuvres* – d'*œuvres à étudier*. Par exemple, l'actuel programme de quatrième prescrit l'étude de l'œuvre étiquetée par ces termes : « Puissances d'exposant entier relatif ». Mais qu'est-ce qu'étudier une œuvre, et cette œuvre-là en particulier ? Quelle est la *finalité* de cette étude ? À quoi doit-elle être *utile* ? C'est là que j'introduirai une première ligne de démarcation.

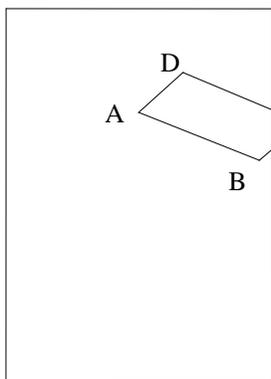
b) Il y a une finalité traditionnelle qui est de faire connaître aux « bons sujets », supposés dociles, le patrimoine du Royaume, que l'on pourra voir, admirer, et même, si peu que ce soit, « essayer ». Et puis il y a un ordre de finalités que j'appellerai l'ordre *citoyen*, où l'étude vise à faire connaître certaines œuvres comme *outils* en certaines activités déterminées, dont l'ensemble reste, certes, indéfiniment ouvert ou à rouvrir, que certains ont ou auront à réaliser – pas tous, car cela dépend de l'histoire de chacun. Deux remarques solidaires doivent être faites en ce point. Tout d'abord, l'ordre des finalités citoyennes de l'étude est fondé sur les notions jumelles de *raisons d'être* et d'*utilité* d'une œuvre donnée. L'idée était, on l'imagine, au cœur de la réforme de 1902. Ainsi l'un de ses acteurs les plus éminents, Gustave Lanson (1857-1934), dénonce dès 1888 l'enseignement d'avant la réforme – « excellent, dit-il, pour préparer des hommes du monde » et qui « fait des délicats, quand il réussit, des paresseux quand il échoue » (cité par M. Jey dans un texte du 7 octobre 2005 intitulé « Gustave Lanson et la réforme de 1902 », texte qu'on trouvera sur le site Web *Fabula. La recherche en littérature*). Lanson ajoute :

Je ne puis concevoir un enseignement qui ne soit pas nettement utilitaire, si l'on entend par là un utilitarisme intellectuel : l'éducation doit nous préparer à résoudre, dans la mesure qui sera donnée à chacun de nous, les grandes

questions sociales et morales qui se posent aujourd'hui à l'humanité civilisée [...]. Nous autres professeurs, nous devons travailler à faire des hommes du temps présent, des hommes de demain même, et les meilleurs hommes que nous pourrons. Nous ne le pouvons sans leur faire connaître les idées directrices et vitales de la société contemporaine, dont nous vivons, dont ils vivront, en attendant qu'ils les détruisent en les transformant.

On le voit : la notion d'utilité doit évidemment être entendue en son sens plein, qui ne nous épargne rien, et ne doit pas être réduite à ce que d'aucuns, précisément, font profession de mépriser ! Ainsi la connaissance du patrimoine a-t-elle son utilité, de même que la connaissance de la poésie et, plus généralement, comme il en va de celle de toute œuvre humaine possible, qu'on la juge « noble » ou « ignoble ». Étudier les sonnets de Shakespeare a son utilité. Mais on voit le problème : il ne suffit pas de dire qu'une utilité doit bien exister ; il faut dire *ce qu'elle est*, et pour qui, pour quoi l'œuvre est utile – c'est-à-dire est un « outil », au sens le plus large du terme. (Il est sans doute utile, ici, de savoir que le latin *uti* signifie « se servir de » : « outil », « utile », « utilité », « ustensile » en dérivent.)

c) L'évolution historique du curriculum que j'ai décrite sous le nom de monumentalisation est contemporaine de *l'effacement des raisons d'être*, de l'oubli de l'utilité des œuvres mathématiques enseignées. Ces œuvres deviennent alors semblables à des monuments que l'on visite par contrainte, dont on ignore et dont on ignorera à quoi ils pouvaient bien servir autrefois, lorsqu'ils étaient « vivants », et à quoi ils peuvent bien servir aujourd'hui, si ce n'est à inspirer le respect des mondes morts aux gens dociles ou à exciter les indociles à se rebeller vainement. Bien sûr ces cénotaphes n'en sont pas. Je prendrai ici deux exemples, déjà utilisés ailleurs. À quoi sert cette œuvre mathématique que l'on désigne métonymiquement par l'expression « le parallélogramme » ? C'est une œuvre que l'on étudie, traditionnellement, en classe de cinquième ; c'est une œuvre dont, il fut un temps, on explicitait les raisons d'être. Dans un *Traité de géométrie élémentaire* de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle (Poulain, 1885), au chapitre *Des parallèles et des parallélogrammes*, on



trouve ainsi un bref développement intitulé *Utilité des théorèmes concernant les parallélogrammes*. Dans le langage du temps, l'auteur y précise que « ces théorèmes servent à en démontrer d'autres qui ont pour objet de prouver que deux droites sont égales, que deux angles sont égaux, que deux droites sont parallèles » (p. 39). Par exemple, si l'on veut construire la diagonale d'un parallélogramme ABCD dont le sommet C tombe hors de la feuille (voir ci-contre), on peut utiliser cette propriété (caractéristique) d'un parallélogramme de voir ses

diagonales se couper en leur milieu commun. En fait, ce qu'il faut utiliser ici c'est le fait que chaque diagonale passe par le milieu de l'autre. La droite cherchée passe donc par A et par le milieu du segment [BD]. C'est là un cas particulier d'un cas généralissime aux origines de la géométrie en Grèce : on veut réaliser des *constructions* (comme ici), et pour cela on a besoin de *propriétés*, souvent de beaucoup de propriétés, des propriétés qui engendrent d'autres propriétés, comme le note Augustin Poulain dans son *Traité* de 1885.

d) L'exemple précédent peut être multiplié à l'infini. Pourquoi s'intéresse-t-on aux triangles ? Aux angles ? Aux angles saillants ? Aux droites parallèles ? Aux demi-droites ? Aux fractions ? À leur simplification ? Aux bases d'un espace vectoriel ? Aux espaces vectoriels ? Etc. Chaque fois, en un curriculum qui traite ses « sujets » en citoyens ou en futurs citoyens, on doit pouvoir *énoncer des réponses*, c'est-à-dire des raisons d'être. Mais cela *ne suffit pas* : l'élève alors resterait un *spectateur*, non un *utilisateur* de l'œuvre. Ces raisons d'être doivent s'incarner dans une *situation* dont l'élève soit le *protagoniste*. Dans le cas du parallélogramme évoqué plus haut, par exemple, on peut proposer à des élèves de cinquième qui ne connaissant pas la propriété des diagonales, de résoudre le problème du parallélogramme « tronqué » (tracer la diagonale passant par le sommet C « manquant »). On aboutit ainsi à la notion d'*activité d'étude et de recherche* (AER). Mais cela ne suffit pas encore.

#### **4. Des AER aux PER**

a) Idéalement, il faudrait inventer une AER *pour chaque œuvre ou détail d'œuvre*, même si le pouvoir générateur d'une AER particulière donne vie souvent à une multitude de détails d'œuvres. Par exemple, il faudrait une AER pour « introduire » les demi-droites, les angles saillants, l'orthocentre, etc. *Cela nous fait un premier critère à deux degrés* : pour toute œuvre ou détail d'œuvre figurant dans un programme, celle-ci est conservée si l'on peut 1) en *énoncer une raison d'être* clé au niveau d'enseignement visé (qui ne se réduise pas, bien sûr, à prétendre que « C'est formateur » ou que « On l'a toujours fait ») ; 2) *exhiber* une AER – une situation – compatible avec les conditions d'enseignement, où cette œuvre apparaisse comme éminemment utile, sinon indispensable.

b) En dépit des travaux d'ingénierie didactique réalisés depuis trente ans et plus, ces critères ne pourraient être satisfaits pour bon nombre d'items des programmes actuels. Je m'arrête sur l'un d'eux. Dans le thème d'études du programme de quatrième intitulé « Division de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire » apparaît le sujet d'études suivant, présenté en termes

de « capacités » : « Connaître et utiliser l'égalité :  $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ . » L'item fait l'objet de ce commentaire : « Un travail est mené sur la notion d'inverse d'un nombre non nul ; les notations  $\frac{1}{x}$  et  $x^{-1}$  sont utilisées, ainsi que les touches correspondantes de la calculatrice. » Quel travail peut-on demander ? Un travail qui rende sensibles les raisons d'être – les raisons *d'être là* – de l'égalité à connaître et à utiliser ? Une enquête historique montre ceci : longtemps, lorsque les calculs devaient être faits à la main et souvent « de tête » – sans support écrit –, la division demeura une opération « difficile ». Comment calculer le quotient de  $a$  par  $b$  ? Eh bien en remplaçant une division par une multiplication, grâce à l'égalité susdite. Plutôt qu'un long discours, je présente un extrait d'un ouvrage qui s'inscrit encore dans la tradition *d'avant* la calculatrice : une *Algèbre* publiée en 1951 chez Delagrave pour la « formation initiale, [la] formation continue, [les] concours administratifs » par R. Cluzel (professeur à l'ENNA de Paris) et H. Court (inspecteur général de l'Enseignement technique). Le passage ci-après se trouve à la page 24 de ce manuel :

**2. Nombres inverses.** – L'inverse de 5 est  $\frac{1}{5}$  ; celui de  $-\frac{3}{7}$  est  $-\frac{7}{3}$ .

**Deux nombres sont dits inverses s'ils ont pour produit 1.**

L'inverse de  $b$  est  $b'$  tel que  $b' = \frac{1}{b}$ .

Diviser par  $b$  revient à multiplier par son inverse  $\frac{1}{b}$ .

$$\boxed{\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}}$$

Jusque-là, la différence n'est pas nette. Mais les auteurs précisent alors l'*utilité* de l'égalité qu'ils ont encadrée. Le passage reproduit ci-dessus, en effet, se poursuit (et se termine) comme suite, à la page 25 de l'ouvrage :

Cette propriété est souvent utilisée dans les calculs. On remplace ainsi une division par une multiplication.

Exemple :  $\frac{38}{\pi} = 38 \times \frac{1}{\pi} \approx 38 \times 0,318 \approx 12,084$ . ( $\approx$  signifie : égal *approximativement* à).

À la fin du chapitre (qui s'intitule *Quotient de deux nombres relatifs*), une liste d'exercices propose treize exercices dont voici le douzième (p. 26) :

**12.** Calculer les inverses des nombres suivants :  $0,375$  ;  $\frac{2}{3}$  ;  $0,625$  ;  $\pi$  ;  $\frac{2}{\pi}$ .

Application. Effectuer :  $243 : 0,375$  ;  $48,34 : \frac{2}{3}$  ;  $168,32 : 0,625$  ;  $3 : \pi$ .

Comme l'on voit, rien n'a changé jusqu'à aujourd'hui, *sauf un détail qui change tout* : on avait autrefois *vitalement besoin* de l'égalité  $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$  pour faire des divisions. Il y avait dans les manuels des *tables d'inverses* et l'on savait par cœur, notamment, que  $\frac{1}{\pi} \approx 0,318$ . Tout cela n'a plus de raison d'être aujourd'hui, sauf à vouloir mettre en scène un « Puy-du-Fou » mathématique.

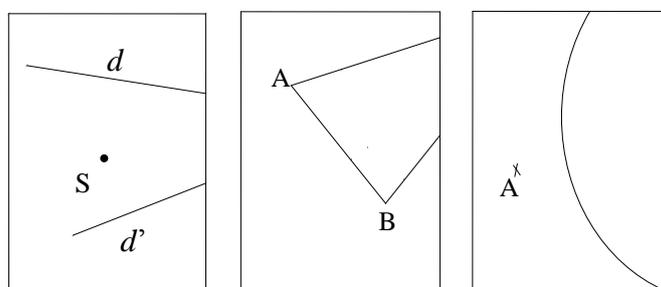
c) Dans cet exemple comme dans celui du parallélogramme, on voit que les raisons d'être des œuvres mathématiques considérées sont « prosaïques » (et non pas « flamboyantes ») et qu'elles se rapportent à des emplois déterminées, parfois presque uniques, et eux-mêmes prosaïques. Je veux tracer grossièrement un cercle de longueur 20 m dans un jardin pour y installer un nombre donné de chaises ; quel rayon dois-je utiliser pour tracer le cercle ? La longueur est donnée par la formule  $2\pi R$  et le rayon en résulte :  $R = \frac{20 \text{ m}}{2\pi}$ . Calculons (« de tête ») :

$$\frac{20 \text{ m}}{2\pi} = \frac{10 \text{ m}}{\pi} = 10 \text{ m} \times \frac{1}{\pi} \approx 10 \text{ m} \times 0,318 = 3,18 \text{ m}.$$

Voilà l'affaire faite. C'est ce genre de choses, constamment rencontré, qui m'a poussé à avancer la formule (que je maintiens mais qui en a choqué quelques-uns, tandis que d'autres s'en réjouissaient) selon laquelle « *les mathématiques, c'est de la plomberie* », ce qui veut dire que les outils employés et les gestes accomplis ne procèdent pas de motifs emphatiques et sentencieux mais d'humbles besoins qu'il convient de satisfaire de façon réglée (et non héroïques).

d) Si l'on applique le critère indiqué plus haut, et en supposant maintenue la situation actuelle, ce sujet d'étude devrait être écarté du programme... Mais cela ne signifie pas que les élèves de quatrième ne sauront pas écrire *par exemple* que  $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$  pour établir (« de tête ») que l'on a  $\frac{7}{2,5} = \frac{7 \times 4}{2,5 \times 4} = \frac{28}{10} = 2,8$ , etc. Par ailleurs, tel détail de telle œuvre mathématique peut tomber en désuétude mais retrouver plus tard une nouvelle fonction. Il est des détails qui disparaissent sans laisser de souvenir dans les générations suivantes : il y a longtemps qu'on n'apprend plus par cœur au lycée que la droite coupant l'axe des  $x$  au point d'abscisse  $a$  et l'axe des  $y$  au point d'ordonnée  $b$  a pour

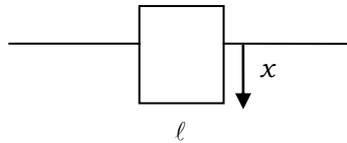
équation  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ , détail qui eut son rôle à jouer dans les études scientifiques d'autrefois – le lecteur trouvera par lui-même lequel. D'une manière générale, des items auraient à être écartés et d'autres ajoutés. Mais je voudrais avant de revenir là-dessus rester encore sur le problème des raisons d'être et, plus précisément, de l'organisation de rencontres motivées et significatives avec les œuvres à étudier. Partant de la notion d'AER, j'ai introduit une généralisation désignée par le sigle PER – pour *parcours d'étude et de recherche*. L'idée d'une telle suite d'AER est illustrée par les figures suivantes, où, de gauche à droite, il s'agit 1) de tracer la droite passant par le point S et le point d'intersection des droites  $d$  et  $d'$ , 2) de tracer la hauteur relative au côté [AB], 3) de tracer la droite passant par A et le centre du cercle dont un arc est tracé sur la feuille.



Ce type de problèmes de construction permet de rencontrer une bonne part des contenus géométriques traditionnels... Deux ou trois PER – portant sur les « distances inaccessibles » ou sur le *calcul graphique* par exemple – permettent ainsi de couvrir le programme de géométrie traditionnel ou ce qu'il en reste.

e) Rencontrer est une chose ; utiliser efficacement est encore autre chose. Un curriculum « citoyen » doit proposer des œuvres mathématiques – des praxéologies mathématiques – qui honorent la raison au lieu de l'abaisser. Un programme acceptable doit se référer à des types de tâches nettement définis, des techniques efficaces et des technologies génératrices d'intelligibilité. Il doit promettre à l'élève un *équipement praxéologique* (mathématique) *de qualité*. Or, aujourd'hui, il me semble que nous en sommes loin, par l'effet de ce que je nommerai une certaine *pusillanimité curriculaire*, qui fait que l'outillage technique et technologique proposé perd de sa substance – il y a bien longtemps que j'ai parlé du collège comme d'un « triangle des Bermudes » où tant de choses disparaissent ! Je voudrais par contraste et pour illustrer mon propos me référer ici à des mathématiques élémentaires, et même rudimentaires, qui sont, aujourd'hui, hors programme, que j'introduirai *ex abrupto*. Soit deux variables numériques  $x$  et

$y$  ; on écrit  $y \propto x$  s'il existe un réel  $k \neq 0$  tel que  $y = kx$ . Volontairement, je n'en dis pas plus. J'examine maintenant le problème suivant : un glaçon cubique flotte sur l'eau (voir ci-après).



Comment déterminer le tirant d'eau  $x$  à l'aide du symbole  $\propto$  ? Voici... ① À l'équilibre, le poids  $p$  du glaçon égale la « poussée d'Archimède »,  $a$ , qui s'exerce sur le glaçon :  $p = a$ . ② La poussée  $a$  est proportionnelle au « volume de l'eau déplacée » :  $a \propto V$ . ③  $V$  est proportionnel au « tirant d'eau »  $x$  :  $V \propto x$ . ④ On a donc :  $x \propto a$ . ⑤ D'où :  $x \propto p$ . ⑥ Le poids  $p$  est proportionnel à la masse volumique  $\rho$  du glaçon :  $p \propto \rho$ . ⑦ D'où l'on a finalement  $x \propto \rho$ . L'enfoncement  $x$  du glaçon est ainsi proportionnel à la masse volumique  $\rho$  de la matière dont il est fait. (Bien entendu, comme la même pusillanimité épistémologique prévaut aussi en physique, les élèves de collège sont censés ignorer et la notion de masse volumique et la notion de poussée d'Archimède) Si le glaçon était fait d'eau liquide, on aurait  $x = l$  ; comme la masse volumique de la glace (sous des conditions convenables) est  $0,917 \text{ g/cm}^3$  tandis que celle de l'eau liquide est  $1 \text{ g/cm}^3$ , on a, comme on écrivait au XVIII<sup>e</sup> siècle, la « proportion »  $x : l :: 0,917 : 1$ . Dans cette proportion, le produit des « extrêmes » (soit  $x \times 1$ ) est égal au produit des « moyens » (soit  $l \times 0,917$ ), et on a donc  $x = 0,917 l = 91,7 \% l$ . J'ajouterai que, à qui serait habitué à ce type de « calcul proportionnel », il apparaîtra de façon quasi immédiate que le tirant d'eau  $x$  est proportionnel à la masse volumique  $\rho$  ( $x \propto \rho$ ) ; et la conclusion suit de là immédiatement, on vient de le voir.

f) Voilà un outil efficace pour certains types de problèmes – ceux qu'on appelait autrefois de « proportionnalité composée » – parce qu'il permet d'oublier ce qui, dans les calculs « complets » que, sans lui, on serait amené à faire, ne joue aucun rôle. Mais il est clair que manque pourtant toute la *technologie* utile – et, en fait, indispensable. Question cruciale : qu'appelle-t-on « variable » ici ? Et comment, alors, justifier rigoureusement les propriétés de la relation  $\propto$  ? C'est là que le mathématicien doit se mettre au travail pour fabriquer une œuvre mathématique que j'appellerai « citoyenne » – encore une fois.

## 5. Un grand changement qui se prépare ?

a) C'est tout le corpus mathématique enseigné – et tout candidat possible à être corpus à enseigner – qu'il faudrait passer par l'étamine de la *qualité praxéologique*. Nous sommes aujourd'hui peut-être dans une période

historique de rupture avec le monde scolaire établi par la réforme de 1902. C'est donc le moment de mentionner la date de 1753 qui voit la publication de l'article *Collège* écrit par d'Alembert pour l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* (1751-1772), « l'*Encyclopédie* de d'Alembert et Diderot », comme on dit couramment. Cet article jouera un rôle clé dans le changement éducatif impulsé dans la deuxième moitié du XVIII<sup>e</sup> siècle. Je reprends ici le tableau bien connu que d'Alembert brosse de l'état de l'enseignement de son temps :

On peut réduire à cinq chefs l'éducation publique ; les Humanités, la Rhétorique, la Philosophie, les Mœurs, & la Religion.

Humanités. On appelle ainsi le tems qu'on employe dans les collèges à s'instruire des préceptes de la langue latine. Ce tems est d'environ six ans : on y joint vers la fin quelque connoissance très-superficielle du grec ; on y explique, tant bien que mal, les auteurs de l'antiquité les plus faciles à entendre ; on y apprend aussi, tant bien que mal, à composer en latin ; je ne sache pas qu'on y enseigne autre chose. Il faut pourtant convenir que dans l'université de Paris, où chaque professeur est attaché à une classe particuliere, les Humanités sont plus fortes que dans les collèges de réguliers, où les professeurs montent de classe en classe, & s'instruisent avec leurs disciples, en apprenant avec eux ce qu'ils devoient leur enseigner. Ce n'est point la faute des maîtres, c'est, encore une fois, la faute de l'usage.

Rhétorique. Quand on sait ou qu'on croit savoir assez de latin, on passe en Rhétorique : c'est alors qu'on commence à produire quelque chose de soi-même, car jusqu'alors on n'a fait que traduire, soit de latin en françois, soit de françois en latin. En Rhétorique on apprend d'abord à étendre une pensée, à circonduire & allonger des périodes, & peu-à-peu l'on en vient enfin à des discours en forme, toujours ou presque toujours, en langue latine. On donne à ces discours le nom d'amplifications ; nom très-convenable en effet, puisqu'ils consistent pour l'ordinaire à noyer dans deux feuilles de verbiage, ce qu'on pourroit & ce qu'on devoit dire en deux lignes. Je ne parle point de ces figures de Rhétorique si cheres à quelques pédans modernes, & dont le nom même est devenu si ridicule, que les professeurs les plus sensés les ont entierement bannies de leurs leçons. Il en est pourtant encore qui en font grand cas, & il est assez ordinaire d'interroger sur ce sujet important ceux qui aspirent à la maîtrise-ès-Arts.

Philosophie. Après avoir passé sept ou huit ans à apprendre des mots, ou à parler sans rien dire, on commence enfin, ou on croit commencer l'étude des choses ; car c'est la vraie définition de la Philosophie. Mais il s'en faut bien que celle des collèges mérite ce nom : elle ouvre pour l'ordinaire par un compendium, qui est, si on peut parler ainsi, le rendez-vous d'une infinité de questions inutiles sur l'existence de la Philosophie, sur la philosophie d'Adam, &c. On passe de-là en Logique : celle qu'on enseigne, du moins dans un grand

nombre de collèges, est à-peu-près celle que le maître de Philosophie se propose d'apprendre au bourgeois-gentilhomme : on y enseigne à bien concevoir par le moyen des universaux, à bien juger par le moyen des cathégories, & à bien construire un syllogisme par le moyen des figures, barbara, celarent, darii, ferio, baralipon, &c. On y demande si la Logique est un art ou une science ; si la conclusion est de l'essence du syllogisme, &c. &c. &c. Toutes questions qu'on ne trouvera point dans l'art de penser ; ouvrage excellent, mais auquel on a peut-être reproché avec quelque raison d'avoir fait des regles de la Logique un trop gros volume. La métaphysique est à-peu-près dans le même goût ; on y mêle aux plus importantes vérités les discussions les plus futiles : avant & après avoir démontré l'existence de Dieu, on traite avec le même soin les grandes questions de la distinction formelle ou virtuelle, de l'universel de la part de la chose, & une infinité d'autres ; n'est-ce pas outrager & blasphémer en quelque sorte la plus grande des vérités, que de lui donner un si ridicule & si misérable voisinage ? Enfin dans la Physique on bâtit à sa mode un système du monde ; on y explique tout ou presque tout ; on y suit ou on y réfute à tort & à travers Aristote, Descartes, & Newton. On termine ce cours de deux années par quelques pages sur la Morale, qu'on rejette pour l'ordinaire à la fin, sans-doute comme la partie la moins importante.

Mœurs & Religion. Nous rendrons sur le premier de ces deux articles la justice qui est dûe aux soins de la plûpart des maîtres ; mais nous en appellons en même tems à leur témoignage, & nous gémissons d'autant plus volontiers avec eux sur la corruption dont on ne peut justifier la jeunesse des collèges, que cette corruption ne sauroit leur être imputée. A l'égard de la Religion, on tombe sur ce point dans deux excès également à craindre : le premier & le plus commun, est de réduire tout en pratiques extérieures, & d'attacher à ces pratiques une vertu qu'elles n'ont assurément pas : le second est au contraire de vouloir obliger les enfans à s'occuper uniquement de cet objet, & de leur faire négliger pour cela leurs autres études, par lesquelles ils doivent un jour se rendre utiles à leur patrie. Sous prétexte que Jesus-Christ a dit qu'il faut toujours prier, quelques maîtres, & sur-tout ceux qui sont dans certains principes de rigorisme, voudroient que presque tout le tems destiné à l'étude se passât en méditations & en catéchismes ; comme si le travail & l'exactitude à remplir les devoirs de son état, n'étoient pas la priere la plus agréable à Dieu. Aussi les disciples qui, soit par tempérament, soit par paresse, soit par docilité, se conforment sur ce point aux idées de leurs maîtres, sortent pour l'ordinaire du collège avec un degré d'imbécillité & d'ignorance de plus.

Il résulte de ce détail, qu'un jeune homme après avoir passé dans un collège dix années, qu'on doit mettre au nombre des plus précieuses de sa vie, en sort, lorsqu'il a le mieux employé son tems, avec la connoissance très-imparfaite d'une langue morte, avec des préceptes de Rhétorique & des principes de Philosophie qu'il doit tâcher d'oublier ; souvent avec une corruption de mœurs dont l'altération de la santé est la moindre suite ;

quelquefois avec des principes d'une dévotion mal-entendue ; mais plus ordinairement avec une connoissance de la Religion si superficielle, qu'elle succombe à la première conversation impie, ou à la première lecture dangereuse.

Peut-on répéter d'Alembert plus de deux siècles et demi plus tard ? Les imperfections – à mes yeux rédhibitoires – pointées jusqu'ici s'agissant de l'enseignement d'aujourd'hui sont-elles un signe suffisant auquel reconnaître qu'un grand changement se prépare en profondeur ? On va voir qu'en vérité il y a plus à dire encore sur les signes annonciateurs d'un effondrement vraisemblable.

b) Un problème en apparence d'une autre nature se pose en effet auquel je voudrais consacrer la suite de ces considérations, parce qu'il s'agit d'un *problème crucial*. On s'est beaucoup inquiété des résultats des jeunes français aux tests du *Programme for International Student Assessment (PISA)*. Ce qui m'inquiète bien davantage est ailleurs : car on s'inquiète alors, en effet, de voir de jeunes élèves peiner à résoudre des problèmes sur lesquels sèche en vérité *l'immense majorité des adultes « instruits » et « cultivés »*. Voilà ce qui m'inquiète ! Nous avons vu ainsi, successivement, l'ancien ministre Xavier Darcos (en 2008) et l'actuel ministre Luc Chatel (en 2010) sécher sur des problèmes simples de proportionnalité. Confronté à la question « Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros, combien valent 14 stylos ? », le premier s'est d'emblée récusé en s'exclamant : « Oh ! La règle de trois, je ne sais pas la faire ! » (Notons que l'ex-ministre de l'Éducation nationale a tout de même reconnu un problème de règle de trois.) Le second devait répondre à une question extraite du cahier d'évaluation des élèves de CM2 : « Dix objets identiques coûtent 22 euros. Combien coûtent quinze de ces objets ? » Une réponse est venue assez vite : 16,5 euros, soit la moitié du prix attendu, ce qui met 15 objets à un prix *inférieur* à celui de 10 de ces objets. Un journaliste de radio et de télévision, Jean-Jacques Bourdin, a pris l'habitude – il a, depuis, cessé de le faire, a-t-il déclaré récemment – de poser à ses invités « politiques » des questions d'arithmétique simple. C'est ainsi que Didier Migaud, président de la Cour des comptes, lui a répondu avec une assurance feinte que 7 fois 9, c'est 76 (c'est-à-dire *plus* que 7 fois 10), tandis qu'Olivier Besancenot, rejoignant en cela Xavier Darcos, a refusé tout net de s'engager à donner la valeur du produit  $8 \times 9$ . Faut-il blâmer toutes ces personnalités ? Nullement : nous savons tous, en vérité, que ces personnes ont ainsi manifesté le comportement « modal » des adultes français cultivés. À de rares exceptions près, en effet, seuls les professeurs de mathématiques et quelques professeurs de sciences, ainsi que les anciens élèves des CPGE, je pense, sauraient aujourd'hui répondre aux questions évoquées ! Enseigner les mathématiques se heurte ainsi, de nos jours, à une difficulté

fondamentale : les adultes cultivés sont absolument, résolument étrangers aux mathématiques même les plus simples (et sans doute aux autres disciplines scolaires d'ailleurs), qui restent pour la plupart des souvenirs vagues et détestables. Tout se passe comme si les mathématiques n'existaient qu'à l'école, dont elles feraient partie au même titre que les notes et les punitions. En dépit des contorsions de certains pour plaire, pour séduire, pour convaincre les élèves, futurs citoyens, la docilité aux mathématiques s'arrête au mieux, pour l'immense majorité des gens, lorsque s'arrêtent les études secondaires. Voilà le fait massif duquel, je pense, il nous faut partir obstinément. On peut désormais imaginer qu'un jour prochain les mathématiques seront devenues presque totalement extérieures à la culture commune. C'est, je crois, l'idée sous-jacente au dessin que voici, que j'emprunte à un opusculé illustré intitulé *Petite philosophie des mathématiques vagabondes*, dû à Luc de Brabandere et Christophe Ridess (Eyrolles, 2011) :



c) Lorsqu'on tente d'approfondir l'analyse de ce phénomène, on trouve ceci : le rapport aux mathématiques de la plupart de nos contemporains est un rapport d'effroi et de fuite. Ne pas être confronté aux mathématiques ressemble à s'y méprendre à un nouveau « droit de l'Homme ». Voici de cela un indice récemment observé. Lisant le livre d'Alain Pavé intitulé *La course de la gazelle. Biologie et écologie à l'épreuve du hasard* (EDP Sciences, Paris, 2011), je rencontre, page 44, ce propos :

Mais revenons au sujet lui-même. D'abord dans tout le vivant, pourquoi deux sexes, pas trois, pas quatre, etc. ? En effet, plus de sexes correspondrait à une augmentation du potentiel de diversification avec le brassage génétique qu'autoriserait une telle situation. Mais la reproduction nécessite la rencontre des sexes. Or la probabilité d'une telle rencontre diminue rapidement avec le nombre de sexes et par là même limite la démographie. Le risque d'extinction spontanée augmenterait d'autant. En effet, la probabilité de rencontre est maximale pour une équirépartition des sexes, donc de 50 % de mâles et de 50 % de femelles dans les populations bisexuées. Dans le cas de rencontres au hasard, cette probabilité tend rapidement vers 0 quand le nombre de sexes augmente, c'est-à-dire vers une démographie nulle. Pour quelques détails de plus, on pourra se reporter à l'encadré « Trop de sexes tue le sexe ».

Je me reporte audit encadré, qui commence par ces mots :

Avertissement important : l'auteur souhaitant ne pas porter la responsabilité de troubles de santé, les lecteurs allergiques aux mathématiques, mêmes élémentaires, peuvent se reporter directement à la conclusion. Pourquoi deux sexes et pas plus ? Nous en avons énoncé la raison, nous en esquissons ici la démonstration.

Un tel exorde se passe de commentaire ! La seule vue de quelque chose de « mathématique » pourrait rendre malade, peut-être susciter de graves troubles neurologiques ! On ne saurait rêver mieux. Je pourrais accumuler les exemples de ce type de réaction de panique et de refus, que, pastichant Molière, on peut résumer par ce cri du cœur : « Couvrez ces mathématiques que je ne saurais voir ! »

## **6. Herbartiens, procognitifs, exotériques**

a) Que faire devant cela ? Voici ma réponse : *il faut changer radicalement la formation donnée à l'école* pour fabriquer des citoyens que je peindrai à l'aide de trois qualificatifs barbares dont le sens, je l'espère, sera bientôt apparent : des citoyens *herbartiens, procognitifs, exotériques*. Avant de préciser ce que j'entends par là, je prends un exemple au plus près de ce que j'ai évoqué : je reviens pour cela au livre d'Alain Pavé. L'encadré qui démarre si mal se poursuit ainsi :

La règle du jeu est simple. Pour qu'il y ait reproduction, il faut que des individus de sexes différents se rencontrent à un moment donné. Cette condition est nécessaire mais pas suffisante : toutes les rencontres ne vont pas conduire à la fécondation et à la fabrication de descendants. Cela étant,

la probabilité de rencontre permet déjà de se faire des idées. Pour simplifier, supposons que les rencontres se font au hasard.

Commençons par deux sexes. Pour qu'il y ait croisement, il faut que deux individus de sexes différents se rencontrent. Simulons la situation par le fameux modèle de l'urne, très utilisé en calcul des probabilités. L'urne contient des boules mâles et des boules femelles et nous effectuons des tirages au hasard de deux boules. Un tirage sera fécond si l'on obtient une boule mâle et une boule femelle. Soit  $p$  la probabilité de tirer une boule mâle (M) et  $q = 1 - p$  la probabilité de tirer une boule femelle (F). Un simple dénombrement permet de trouver quatre tirages possibles : MM, MF, FM, FF.

En appliquant les règles simples du calcul des probabilités, on peut obtenir la probabilité du cas de figure favorable : « FM ou MF », comme l'ordre importe peu, alors  $P(\text{FM ou MF}) = 2pq = 2p(1 - p)$ . Une première remarque : cette probabilité est maximale pour  $p = q = 1/2$ . C'est-à-dire pour une population où le sex-ratio est de  $1/2$ , c'est-à-dire qui comprend autant de mâles que de femelles. En effet,  $f(p) = 2p(1 - p)$  est une parabole à concavité négative coupant l'axe des abscisses aux points de valeurs  $p = 0$  et  $p = 1$ . Cette courbe est symétrique, son maximum correspond à l'abscisse  $p = 1/2$  et la valeur de ce maximum  $f(1/2)$  est aussi égale à  $1/2$ . Une autre manière de trouver le résultat est de calculer la dérivée  $f'(p)$  et de trouver  $p$  tel que  $f'(p) = 0$ . On a  $f'(p) = 1 - 2p$ . Elle s'annule bien pour  $p = 1/2$ . Le changement de signe de sa dérivée (positif avant et négatif après) montre qu'il s'agit bien d'un maximum. Pour cette fonction, le passage par le calcul de la dérivée ne se justifie pas car on connaît ses propriétés. En revanche, pour des fonctions un peu plus compliquées, ce type de calcul est nécessaire (bien sûr pour des fonctions dérivables) ou du moins très commode dans le cadre de l'étude de ces fonctions. C'est ce qui est enseigné à nos élèves de terminale. (p. 45)

On a là un texte (ou le début d'un texte) qui prétend apporter une réponse à la question  $Q$  suivante : « Pourquoi n'y a-t-il que deux sexes, et pas trois, ou quatre ? Et pourquoi y a-t-il alors des individus de ces deux sexes à parité ? » Le fait d'étudier cette question participe déjà du schéma *herbartien* : on peut imaginer une classe qui, codisciplinairement, étudie cette question  $Q$  ; pour cela, elle examine les réponses – que j'appelle réponses  $R^\diamond$  – existant « dans la littérature ». L'examen de ces réponses, leur « déconstruction » afin de construire *in fine* une réponse – que j'appelle réponse  $R^\heartsuit$  – de la classe à la question  $Q$ , engendre des questions relevant de diverses disciplines enseignées et, en l'espèce, des questions  $Q_1, Q_2, \dots$ , « de mathématiques ». Devant ces questions, les élèves – et leurs professeurs ! – doivent alors se montrer *procognitifs*. Cela signifie qu'ils ne doivent pas ne compter que sur les connaissances antérieurement acquises, plus ou moins bien, qui ne l'ont pas été pour ça, en règle générale, en cédant à l'habitus *retrocognitif* ; mais qu'ils doivent au contraire compter surtout,

*par anticipation*, sur les connaissances à *venir* – ce qui définit l’attitude procognitive. Mais venons-en à l’exotéricité, si je puis dire. On dit qu’il y avait, dans l’école de Pythagore, deux degrés d’élèves : les ésotériques et les exotériques. Par rapport aux connaissances utiles, le futur citoyen doit se situer comme un *exotérique*, qui doit découvrir, apprendre, et non se lamenter de n’être pas un ésotérique qui sait déjà, ce qui est plus un horizon et un fantasme qu’une réalité à portée de main. « Je vais étudier telle question ; j’ai besoin pour cela de certaines connaissances dont j’ignore la nature et que j’ignore sans doute ; mais je vais les conquérir *à partir de maintenant*. » Notez que l’auteur cité, forcément herbartien (parce que chercheur), a typiquement dans son texte un réflexe rétrocognitif et ésotérique : doit comprendre ce qu’il avance le lecteur qui *aura fait* une terminale (scientifique, je suppose) ; aux autres, il ne dit rien, sinon que, *s’ils avaient fait* une terminale (scientifique), ils comprendraient (peut-être).

b) Poursuivons notre lecture ; l’auteur considère maintenant le cas hypothétique de trois sexes ou plus :

Avec trois sexes (mâle, femelle et gamelle) et en introduisant l’hypothèse de la rencontre simultanées des trois sexes pour aboutir à une fécondation, le dénombrement direct peut encore se faire. On trouve qu’il y a  $3^3 = 27$  tirages possibles dont 6 (c’est-à-dire  $1 \times 2 \times 3 = 3!$ ) tirages avec trois sexes différents, quel que soit l’ordre d’occurrence. Si  $p$ ,  $q$  et  $r$  sont les probabilités respectives de tirage de M, F et G, avec  $p + q + r = 1$ , la probabilité de tirer trois sexes différents est donc  $P = 6pqr$  ou  $P = 6pq(1 - p - q)$ . Nous sommes dans un cas de figure un peu plus compliqué puisque cette fonction  $f(p, q) = 6pq(1 - p - q)$  a deux variables. Nous sortons du cadre du programme de terminale. Pour le lecteur non familiarisé avec ce type d’exercice, il suffit de savoir que la notion de dérivée se généralise à ce type fonction. On trouve le maximum quand la dérivée par rapport à  $p$  et celle par rapport à  $q$  s’annulent simultanément, c’est-à-dire pour  $p = q = 1/3$ , donc pour  $r = 1/3$ . Alors  $p = 6(1/3^3) = 2/9 = 0,222\dots$  inférieur à la valeur  $1/2$  obtenue pour deux sexes. On peut généraliser, et un raisonnement par récurrence nous donne, pour  $n$  sexes, la probabilité  $P = n!/n^n$ . Comme  $n^n$  croît plus vite que  $n!$ , cette probabilité tend donc vers 0.

En augmentant le nombre de sexes la probabilité de rencontre diminuera d’autant et rendra donc plus difficile les croisements aléatoires. Il faudrait alors que des processus compensant la diminution de cette probabilité apparaissent et soient sélectionnés, ce qui complique la situation. Par exemple, on peut imaginer des processus de rencontres non aléatoires ou avec des distributions non uniformes favorisant les rencontres simultanées de plusieurs sexes tous différents.

Donc trop de sexes tue bien le sexe : la probabilité de reproduction des « troupes » devient trop faible quand le nombre de sexes augmente. Deux sexes est donc un bon compromis pour assurer un bon brassage génétique tout en évitant un désastre démographique.

Bien sûr ce modèle est simpliste et n'a pas vocation à représenter une réalité précise, mais seulement à « aider à réfléchir ». On sait que dans le comportement reproducteur le hasard ne compte que pour une part. Certains signaux chimiques jouent un rôle attractif, à très faible concentration chez les animaux, même chez l'homme et la femme, sans oublier les « signaux visuels » ! (p. 46)

On enseignait autrefois – au XIX<sup>e</sup> siècle – un outil mathématique qui se substituait dans bon nombre d'utilisations élémentaires au calcul différentiel ; il s'agit d'un théorème que j'énonce ici dans une forme « moderne » :

Étant donné un réel  $a \in \mathbf{R}_+^*$ , quels que soient les réels  $x_i \in \mathbf{R}_+^*$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) tels que  $\sum_{i=1}^n x_i = a$ , on a  $\prod_{i=1}^n x_i \leq \left(\frac{a}{n}\right)^n$ , l'égalité étant réalisée si et seulement si  $x_i = \frac{a}{n}$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Dans le cas précédent on voit que la probabilité  $6pqr$  est maximale en même temps que le produit  $pqr$ , dont la somme des termes est constante, égale à 1 ; cette probabilité est donc maximale lorsque  $p = q = r = 1/3$  ; et il en irait de même dans le cas de  $n$  sexes : avec des notations évidentes, on obtient immédiatement, ainsi, que la probabilité  $n!p_1p_2\dots p_n$  est maximale quand  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$ , le maximum étant donc  $n!/n^n$ , expression qui, en effet, diminue trop vite pour permettre une démographie satisfaisante, comme le montre le tableau ci-après :

B20		fx		=FACT(A20)/PUISSANCE(A20;A20)	
A	B	C	D	E	F
1	1				
2	0,5				
3	0,22222222				
4	0,09375				
5	0,0384				
6	0,0154321				
7	0,0061199				

c) Ce qui me paraît *sine qua non* aujourd'hui, c'est d'introduire dans les classes une activité – qu'on pourrait appeler « le séminaire » – de *lecture critique* de textes semblables à celui que j'ai pris pour exemple ici, cette

activité étant engendrée par l'étude codisciplinaire de « grandes » questions et nourrissant de ses questions l'activité proprement mathématique de la classe, dans une perspective herbartienne, procognitive, exotérique. Bien entendu, des problèmes d'ingénierie didactique – et des problèmes fondamentaux de didactique des mathématiques qui leur sont corrélés – en découlent : à propos de certaines questions  $Q$  décidées nationalement et étudiées dans les classes de façon codisciplinaire, il faudra constituer une librairie de textes contenant ce que je nomme des *traces* de mathématiques (comme il en va dans le texte pris ici pour exemple) ; il faudra articuler la lecture critique de ces textes avec l'activité mathématique propre de la classe de façon à couvrir des programmes-noyaux qui laisseraient une marge de manœuvre permettant précisément de voir apparaître progressivement, au fil des années, par inventaire national du travail des classes, les mathématiques utiles au futur citoyen, à ce que Lucien Febvre appelait « l'homme non spécialisé » ; il faudra surtout créer une *pédagogie herbartienne, procognitive, exotérique*, qui, aujourd'hui, n'existe pratiquement pas.

d) Je veux être clair : sans cela, une réforme des programmes me paraîtrait sans grand intérêt, en cela qu'elle pourra au mieux pallier – c'est-à-dire cacher, couvrir – l'inadéquation croissante de nos mœurs didactiques scolaires et la marche vers l'effondrement qui en résulte.

e) Pour terminer sur une note plaisante, je voudrais suggérer ce que pourrait être le comportement, face à quelque Jean-Jacques Bourdin ( $\beta$ ), d'un Didier Migaud ou d'un Olivier Besancenot ( $\xi$ ) qui, sans prétendre le moins du monde être des ésotériques en mathématiques, auraient reçu une éducation herbartienne, procognitive, exotérique. Voici donc leur dialogue imaginaire :

$\beta$ . – 7 fois 9 ?

$\xi$ . – 7 fois 9 ? Merde, ça je ne sais pas. Eh bien 7 fois 10, c'est 70...

$\beta$ . – Non, non, répondez tout de suite !

$\xi$ . – Permettez ! Donc 7 fois 9, cela fait 70 moins 7, soit 63.

$\beta$ . – C'est ça !

$\xi$ . – Ou encore c'est 7 fois 3 fois 3 (parce que 3 fois 3, 9), c'est-à-dire 21 fois 3, ce qui fait 63. Ou bien, puisque je crois me rappeler que 7 fois 8, c'est 56, 7 fois 9 c'est 56 plus 7, c'est-à-dire 56 plus 6, 62, plus un, 63. Ou aussi, c'est égal encore à  $(8 - 1)(8 + 1)$ , soit  $8^2 - 1$  (vous vous souvenez,  $\beta$ ,  $a^2 - b^2!$ ...), ou 64 moins 1, donc 63. Ou, bon... C'est aussi 9 fois 9, soit 81, moins deux fois 9, soit 18, c'est donc 81 moins 20 plus 2, soit 61 plus 2, donc 63. Oui, voilà ma réponse : 63. Enfin je crois !

$\beta$ . – C'est bien ça !

$\xi$ . – Mais vous, comment le savez-vous ?

β. – Je le sais ; 7 fois 9, 63.

ξ. – En êtes-vous sûr ? Est-ce que vous ne confondez pas, comme l'ont fait certains de vos interlocuteurs ? Est-ce que nous ne sommes pas en train de nous tromper tous les deux ? Quand j'étais enfant j'aimais bien compter en base 3.

β. – ?...

ξ. – Voyons, recomptons en base 3, mon cher β ! En base 3, le nombre 7 s'écrit... 21 et 9 s'écrit... 100. Leur produit vaut donc 2100, c'est-à-dire  $0 + 0 + 3^2 + 2 \times 3^3$ , soit 9 plus deux fois 27, ou 9 plus 54, soit donc... 63. On n'en sort pas !

Notre ξ est véritablement exotérique : il ne répudie pas ce qu'il tient pour raisonnablement sûr mais cherche à savoir plus à partir de là ; le pauvre β, par contraste, joue malgré lui à l'ésotérique – « 7 fois 9, 63 », tout ésotérique sait cela – mais apparaît fermé sur sa « science », en sorte qu'il n'est *même pas* un exotérique – au contraire des vrais « savants ».

## 7. Suppléments

a) Ainsi se terminait l'exposé du 16 janvier, de même que sa reprise du 27. Je voudrais d'abord ajouter une petite chose amusante à propos de Didier Migaud donnant 76 pour valeur du produit  $7 \times 9$ . Dans son livre classique *Le problème de l'incroyance au 16<sup>e</sup> siècle. La religion de Rabelais* (1947/1968), en une section intitulée significativement « Carence d'outils et de langage scientifique », l'historien Lucien Febvre (1878-1956) brosse ce tableau instructif, où il se réfère aux *Historiettes* de Gédéon Tallemant des Réaux (1619-1692) :

... point d'opérations à la plume – de ces opérations qui nous paraissent si commodes et si simples, et qui aux hommes du XVI<sup>e</sup> siècle semblaient encore monstrueusement difficiles, et bonnes pour l'élite mathématicienne. Avant de sourire, rappelons-nous que Pascal, en 1645, plus d'un siècle après l'apparition du *Pantagruel*, insistait encore dans la dédicace de sa machine à calculer au chancelier Séguier, sur l'extrême difficulté des opérations à la plume. Non seulement elles obligent à tous moments « de retenir ou d'emprunter les sommes nécessaires », d'où d'innombrables erreurs (et il eût pu ajouter que c'est en raison même de ces erreurs [...] que les Arabes avaient imaginé la preuve par 9) – mais en outre, elles exigeaient du malheureux calculateur « une attention profonde et qui fatigue l'esprit en peu de temps ». De fait, au temps de Rabelais, on comptait avant tout, et presque exclusivement, à l'aide de ces échiquiers qui ont laissé leur nom, outre-Manche, aux ministres du Trésor – et avec ces jetons que l'Ancien Régime maniait, avec plus ou moins de prestesse, jusqu'à son déclin [...].

Au reste, calculaient-ils mieux de tête, ces hommes, que la plume en main ? Je me souviens toujours de la belle histoire du secrétaire d'un Président de la Chambre des Comptes, sommé brutalement par une bande d'avoir à ouvrir sa porte : « Si tu n'ouvres pas, nous sommes ici 50 qui te donnerons chacun 100 coups de bâton ». L'interpellé répond aussitôt, avec effroi : « Comment ! 5 000 coups de bâton ! » Et Tallemant, qui raconte l'histoire, de s'émerveiller : « J'admire la présence d'esprit de cet homme, et il me semble qu'il fallait être le secrétaire d'un Président des Comptes pour faire le calcul si prestement ! » Le calcul, l'impossible calcul :  $100 \times 50$ . (p. 363)

C'est évidemment l'anecdote du « secrétaire d'un Président de la Chambre des Comptes » qui m'est revenue à l'esprit à propos des déboires arithmétiques de Didier Migaud : de simples *secrétaires* de ses prédécesseurs étaient, au XVII<sup>e</sup> siècle, tenus pour des virtuoses du calcul « de tête », ce qu'un président d'aujourd'hui n'est plus...

b) Lors de la discussion qui, le 16 janvier, a suivi mon exposé, un membre du comité scientifique m'a interrogé en des termes que je crois pouvoir rapporter ainsi (sans être sûr toutefois qu'ils traduisent fidèlement le propos de mon interlocuteur ou sa pensée) : « Si l'on fait comme vous le dites, alors ne doit-on pas conclure qu'il devient impossible d'enseigner l'orthographe (à l'école primaire) ? » Mon interprétation de cette inférence pour moi des plus inattendues fut et reste la suivante : l'apprentissage de l'orthographe exigerait, non pas d'enquêter sur quoi que ce soit, mais de se pencher sur un corpus déterminé de règles et de normes pour en absorber le contenu et cela *personnellement, individuellement*. Sans doute peut-on rapprocher cette façon de voir les choses de celle qui concerne l'apprentissage des tables de multiplication par exemple, ou des verbes irréguliers en anglais, ou, autrefois, des préfectures et chefs-lieux de canton, etc. Il semble alors que l'effort d'apprentissage repose tout entier sur l'« apprenant », que cet effort *l'isole* dans un tête-à-tête indépassable avec le contenu à maîtriser, et qu'il ne peut trouver place que là et non en quelque enquête qu'on peine à imaginer.

c) Ma réaction à cette évocation est exactement de sens contraire : il est des apprentissages qui, plus que d'autres, ne sauraient se faire *isolément* parce qu'ils sont plus que d'autres requis, en un temps et un lieu donnés, non pas seulement pour fournir à l'apprenant un équipement praxéologique déterminé, mais *pour faire société*. Pour le dire abruptement, je le répète : *on apprend l'orthographe pour faire société*. Apprendre ce complexe praxéologique immense, indéfini, ce n'est pas seulement se rendre capable d'écrire sans trop de « fautes », mais c'est contribuer à fabriquer une société comportant ce trait constitutif : ses membres doivent « savoir (mettre)

l'orthographe », « connaître les – « leurs » – tables de multiplication », etc. Tout collectif comporte des exigences de ce genre : *on est ensemble ce qu'on sait* (et ce qu'on ignore...), au moins dans une *certaine* mesure. Je constate en passant que la société française n'est plus depuis longtemps une société dont les membres se reconnaissent à leur connaissance des chefs-lieux de canton ; et j'ajoute que, pour faire société aujourd'hui, on demande de moins en moins de connaître les tables de multiplication ou, sans doute, l'orthographe. C'est avec d'autres matériaux praxéologiques que l'on fait aujourd'hui société ; le problème est que, peut-être, la société française actuelle ne sait pas nettement se déterminer quant à l'équipement praxéologique que chacun de nous devrait s'imposer d'acquérir à cet égard.

d) Le 27 janvier, une discussion de fin de séminaire m'a ramené au thème précédent. J'ai eu alors l'occasion d'évoquer, dans un échange avec une participante américaine, le cas de Noah Webster (1758-1843), l'auteur du fameux dictionnaire de l'anglais « américain ». L'article de *Wikipedia* qui lui est consacré note : "Webster dedicated his *Speller and Dictionary* to providing an intellectual foundation for American nationalism." Comme on le sait peut-être, Webster introduisit un grand nombre de changements dans l'orthographe de l'anglais parlé aux États-Unis – c'est lui qui proposa d'écrire *center* et non plus *centre*, *color* et non plus *colour*, etc. Or l'idée sous-jacente à ces « simplifications » était bien de « faire société » *orthographiquement* (notamment) : être américain, et non plus britannique, c'était (notamment) écrire comme ça, bien au-delà d'un simple arrangement « pragmatique ». Je citerai à cet égard David Crystal parlant de Webster dans *The Fight for English* (Oxford University Press, 2006) :

Noah Webster was born in West Hartford, Connecticut, in 1758, and worked as a teacher, clerk, and lawyer. Early on, he became dissatisfied with the lack of an American perspective in the texts he had to use. 'Nothing can be more ridiculous', he says, 'than a servile imitation of the manners, the language, and the vices of the foreigners.' He would in due course publish a dictionary, a grammar, and a guide to spelling, and his work made him a household name in America, comparable in stature to Dr Johnson in Britain.

Spelling, he felt, was the heart of the matter. He observes:

a difference between the English orthography and the American... is an object of vast political consequence

So he initiated what turned out to be the only successful English spelling reform of modern times. (pp. 164-165)

J'ajoute à cela une référence que je me suis permis de donner le 27 janvier : celle du précieux *Que sais-je ?* signé de Bernard Cerquiglini, *La naissance du français* (3<sup>e</sup> éd. 2007), qui tourne tout entier autour des fameux « Serments

de Strasbourg » de 842 et montre admirablement, je crois, que le point de vue étroitement linguistique ne permet pas d'en expliquer les aspects les plus essentiels. Il s'agissait alors de « faire société » et pour cela de « faire langue », et langue écrite qui plus est. Il y a en tout cela, sans doute, un invariant anthropologique qu'il faut situer au plus haut niveau de l'échelle de codétermination didactique – celui de l'espèce humaine.

*That's all, folks!*