

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le séminaire TAD & IDD, animé par Yves Chevallard, a une double ambition solidaire : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment des professions de professeur, de formateur et de chercheur en didactique. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des praxéologies mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 14 h à 16 h puis de 16 h 30 à 18 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie à distance par visioconférence.

→ Séance 1 – Vendredi 18 novembre 2011

HORIZONS DE RECHERCHE

1. Problématiques didactiques, *once more*

a) Sans doute vous souvenez-vous des quatre problématiques de la didactique. Je les rappellerai donc de façon concise. La première est la problématique *de base*, qui se donne pour objet l'étude d'ensembles de la forme

$$\{C / \partial \forall \mathcal{R}(K_0, C, \wp_0, U_0)\}.$$

Formellement, K_0 , $\wp_0$ et U_0 étant fixés, on s'efforce de préciser un ensemble de conditions C tel que l'on ait $\partial \forall \mathcal{R}(K_0, C, \wp_0, U_0)$, c'est-à-dire tel que, sous les contraintes K_0 , l'instance U_0 rencontre (voire « apprenne ») l'entité praxéologique $\wp_0$. Cette problématique est celle de la plupart des travaux de

didactique finalisés par un projet d'ingénierie didactique (relatif à une entité praxéologique donnée $\wp_0$).

b) La problématique *possibiliste* est la problématique *duale* de la problématique de base : on y étudie les ensembles de la forme

$$\{\wp / \partial \mathcal{VR}(K_0, C_0, \wp, U_0)\}.$$

Formellement, K_0 , C_0 et U_0 étant fixés, on s'efforce de déterminer les entités praxéologiques $\wp$ telles que l'on ait $\partial \mathcal{VR}(K_0, C_0, \wp, U_0)$, c'est-à-dire telles que, sous les contraintes K_0 et dans l'instance U_0 , placée dans les conditions C_0 , rencontre voire « apprenne » l'entité praxéologique $\wp$. On notera le lien logique entre les problématiques *de base* et *possibiliste* ; on a en effet :

$$C_0 \in \{C / \partial \mathcal{VR}(K_0, C, \wp_0, U_0)\} \Leftrightarrow \partial \mathcal{VR}(K_0, C_0, \wp_0, U_0) \Leftrightarrow \wp_0 \in \{\wp / \partial \mathcal{VR}(K_0, C_0, \wp, U_0)\}.$$

c) La problématique *primordiale* se définit par les *besoins praxéologiques* suscités par un *projet* donné, Π_0 . On y étudie donc les ensembles de la forme

$$\{\wp / \mathfrak{I}(\wp, \Pi_0, U_0)\}.$$

Le projet Π_0 étant désigné, on s'efforce de préciser les entités praxéologiques $\wp$ telles que $\mathfrak{I}(\wp, \Pi_0, U_0)$, soit les entités praxéologiques utiles ou indispensables ($\mathfrak{I}$) pour que l'instance U_0 puisse concevoir et réaliser le projet Π_0 .

d) La problématique *interventionniste* est duale de la problématique *primordiale* : on y étudie les ensembles de la forme

$$\{\Pi / \mathfrak{I}(\wp_0, \Pi, U_0)\}.$$

Une entité praxéologique $\wp_0$ étant fixée, on s'efforce de préciser les projets Π tels que $\mathfrak{I}(\wp_0, \Pi, U_0)$, soit les projets dont la conception et la réalisation par l'instance U_0 requièrent comme utiles, voire indispensables, l'entité praxéologique $\wp_0$. On notera le lien logique entre les problématiques *primordiale* et *interventionniste* ; on a en effet :

$$\wp_0 \in \{\wp / \mathfrak{I}(\wp, \Pi_0, U_0)\} \Leftrightarrow \mathfrak{I}(\wp_0, \Pi_0, U_0) \Leftrightarrow \Pi_0 \in \{\Pi / \mathfrak{I}(\wp_0, \Pi, U_0)\}.$$

2. Faire de la didactique

a) Les deux paires de problématiques (respectivement, de base/possibiliste et primordiale/interventionniste) que l'on vient de rappeler peuvent paraître s'opposer de la façon suivante : alors que la problématique de base serait clairement une problématique *didactique* (ou *didacticienne*), comme il en irait sans doute aussi, par dualité, de la problématique *possibiliste*, les problématiques *primordiale* et *interventionniste*, elles, pourraient sous-tendre une recherche donnée innocente de toute interrogation « didactique » –

qualificatif qui serait ainsi réservé aux recherches ayant en leur cœur les ensembles C de conditions amenant la rencontre d'une certaine instance avec une certaine réalité praxéologique.

b) C'est oublier la définition de la (science) didactique que fait siennne la TAD et que je rappelle ici dans une forme volontairement ramassée : la science didactique étudie les conditions et contraintes de la diffusion sociale des praxéologies. Or, bien sûr, parmi les conditions et contraintes gouvernant la rencontre sociale d'une instance U avec une entité praxéologique $\wp$, il y a un type de conditions entre toutes importantes, réalisée si et seulement si cette entité praxéologique $\wp$ est reconnue comme un *besoin* praxéologique par une certaine catégorie $\mathcal{U}^*$ d'instances U^* pour la conception et la réalisation de certains projets Π^* . On ne suppose pas même, ici, que $U \in \mathcal{U}^*$: le fait que $\wp$ soit reconnue comme un besoin *quelque part* dans la société entraîne qu'il existe en cette société une certaine *offre praxéologique* incluant l'entité praxéologique $\wp$, et cela change le système des conditions et contraintes sous lesquelles une instance U peut rencontrer et apprendre $\wp$. Cet exemple suffit à montrer que la problématique *primordiale* (et sa duale, la problématique *interventionniste*) participe du travail du didacticien.

c) J'ajoute à cela une observation qu'il convient de ne pas oublier : mentionner l'instance U (personne ou institution) revient à évoquer un système dynamique de contraintes (celles dont U est le porteur au moment considéré) et de conditions (que U peut concourir à créer ou à modifier). Ce système dynamique de conditions et contraintes équivaut au système évolutif des rapports (personnels ou institutionnels : *instantiels*) de l'instance U . Selon le raisonnement déjà explicité à propos des besoins, le didacticien doit donc aussi étudier la « psychologie » de U , sujet sur lequel nous reviendrons.

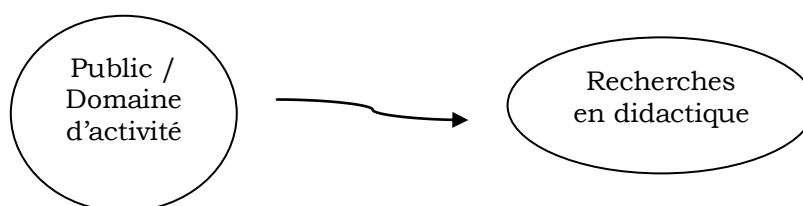
3. Domaine d'activité, champ praxéologique, public

a) Dans les formulations précédentes, on voit que les types entités évoquées – projets, praxéologies, instances (personnes ou institutions), contraintes, conditions – sont a priori *quelconques*. Bien entendu, une recherche en didactique suppose que l'on précise un tant soit peu l'étendue de ces variables – types de projets, catégories d'instances, espèces de contraintes et de conditions, « essences » praxéologiques. Appelons *territoire didactique* un système de délimitations de ces différentes variables. De tels territoires peuvent varier énormément en taille, être disjoints, ou distincts mais avec des parties communes, etc.

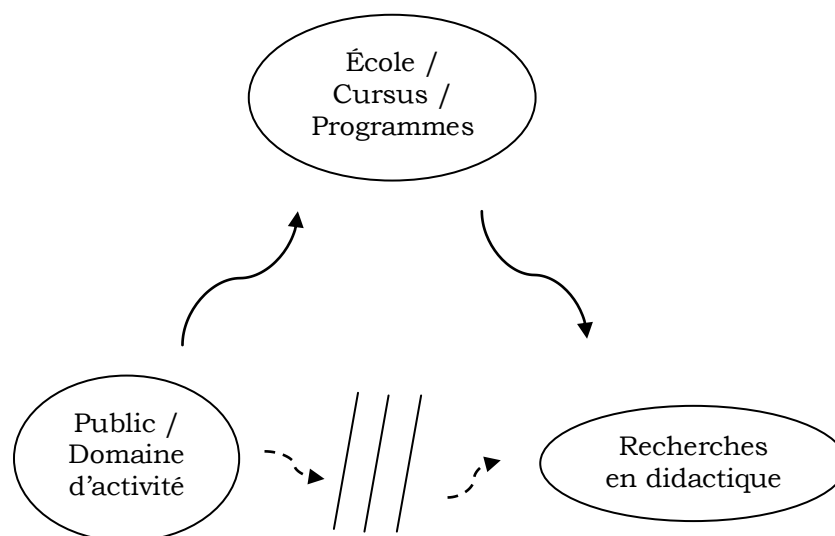
b) Pour simplifier une situation fort complexe, je distinguerai les *domaines d'activité* (relatifs aux projets, Π), les *champs praxéologiques* (relatifs aux entités praxéologiques, $\wp$) et les *publics* (relatifs aux instances, U). Un territoire didactique peut alors se définir en termes de domaines d'activité, de champs praxéologiques, de publics et, bien sûr, de conditions et de contraintes. Si cela ne retranche rien au problème, indéfiniment ouvert, de la *pertinence scientifique* d'un territoire didactique donné, cela permet de poser plus clairement ce problème clé de la recherche en didactique.

c) En France, les « didactiques des disciplines », comme l'on dit, se sont bâties en se fixant un champ praxéologique essentiellement défini en référence à une discipline scolaire. Ce traitement de ce qui apparaît alors comme la variable rectrice des territoires didactiques « disciplinaires » est allé de pair avec un certain flou concernant les variables secondes que deviennent ici les domaines d'activité et les publics, dont les valeurs se sont en général resserrées silencieusement autour des choix offerts par l'*alma mater* – géométrie au collège, probabilités au lycée, génétique (ou évolution) au secondaire, etc.

d) Une remarque importante doit alors être faite. Dans l'échelle de codétermination didactique, les notions de *domaine d'activité* et de *public* que je viens de mentionner renvoient à des réalités situées en principe au niveau de la *société*. Mais la création d'une *école*, ou plutôt d'un *système d'écoles* – d'un *système scolaire* –, vient changer cette situation : une fois cette création réalisée, on se réfèrera moins à tel public et à tel domaine d'activité qu'à tel *cursus* d'études scolaires encadré par tels ou tels *programmes* d'études scolaires, voire à tel *niveau* en tel cursus ; ce qui va occulter la question « ultime » du public et du domaine d'activité. On comprend alors que, par exemple, la problématique *primordiale* soit en quelque sorte scotomisée ou, plus précisément, ne concerne plus que les « domaines d'activité » et les « publics » *internes au système scolaire* considéré (ce que doit apprendre tel public de l'école pour entrer – ou continuer – dans tel cursus d'études). Le problème des *contenus à étudier* est alors réglé formellement par les programmes d'études, qui à la fois font le lien *et coupent les liens* avec la société extrascolaire. Au schéma « direct » ci-après



se substitue subrepticement le schéma indirect suivant :



On sait par exemple que, en France, les programmes d'études du système scolaire d'État sont des textes prescriptifs dont l'un des traits définitoires est *de n'avoir pas d'auteurs*, d'être en quelque sorte incréés, ou plutôt d'avoir une création sans genèse, exactement contemporaine de leur publication officielle. Le fait assez récent d'ouvrir les projets de programmes à la consultation publique avant leur promulgation ne change rien quant à l'anonymat – qui demeure, avant comme après ladite consultation. Pour le chercheur, tout est donc organisé pour qu'il adhère à la fiction mise en scène par l'État, et qu'il travaille en tenant cette fiction pour un « donné », sans en étudier la production et les conditions de production.

e) Concluons : il devrait être clair que, comme le suggère l'échelle de codétermination didactique, les chercheurs en didactique doivent prendre en compte *l'ensemble* des institutions et de leurs besoins. L'école, le système scolaire, les systèmes scolaires *ne sauraient constituer « l'horizon indépassable » du didacticien.*

QUELS BESOINS PRAXÉOLOGIQUES ?

1. Besoins praxiques

a) Ce qui précède suggère que la question des besoins praxéologiques n'est pas, aujourd'hui, largement posée : on se hâte de l'annuler en créant des cursus d'études et en rédigeant des programmes. C'est le *design curriculaire*, qui enferme l'étude dans ses propres références au lieu de la référer à des besoins allogènes. Je donnerai à cet égard un seul exemple : jetez un coup d'œil à l'article "Understanding by Design" de *Wikipedia* et vous verrez les auteurs – Grant Wiggins et Jay McTighe – de ce qui est aujourd'hui une

marque déposée présenter leur invention en disant qu'il apporte un "framework for designing curriculum units, performance assessments, and instruction *that lead your students to deep understanding of the content you teach*". C'est moi qui souligne : l'intérêt est *interne* à la geste scolaire et on ne se demande pas si "*the content you teach*" rencontre les *besoins* de "*your students*". On est là, typiquement, dans le monde clos du didacticien classique.

b) Un des grands problèmes concernant les besoins praxéologiques tient à ce que, comme je voudrais essayer de le suggérer dans ce qui suit, ces besoins ne sont pas faciles à déterminer : on n'est jamais certain de connaître ses besoins ni, à plus forte raison, les besoins d'autrui. Mais je voudrais évoquer ici quelques cas où la chose paraît d'abord relativement aisée. Je partirai pour cela de deux exemples simples relevant de la didactique du Web (ou, plus exactement, de la recherche d'information sur Internet). Ils consistent en deux épisodes l'un et l'autre à cheval sur deux séances consécutives, tenues respectivement le 3 et le 10 novembre 2011, de l'Atelier « Enquêtes sur Internet » du collège Vieux Port (Marseille). Lors de la séance du 3 novembre, les élèves ont à écrire l'expression « 10ⁿ ». Bien entendu, la question surgit : « Comment faire cela ? » Une réponse est apportée par l'un des animateurs qui indique la procédure utilisant les menus déroulants d'OpenOffice. Cette technique est lourde ; aussi un autre animateur soulève la question d'un « raccourci clavier » : quelqu'un en connaît-il un ? Une animatrice de l'Atelier précise aux élèves que cela doit être facile à trouver sur Internet ; mais, faute de temps, le problème est laissé ouvert. Lors de la séance suivante, on y revient et, cette fois, la réponse est rapidement trouvée : le raccourci est Ctrl+Maj+P pour mettre en exposant et Ctrl+Maj+B pour mettre en indice.

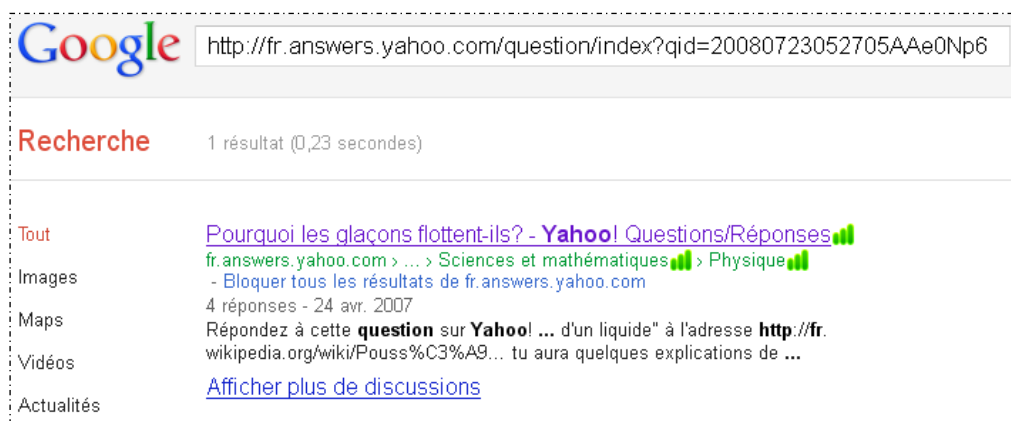
c) Je reviendrai plus loin sur l'exemple précédent pour souligner que la rencontre de ce « besoin » n'est pas aussi franche qu'il y paraît peut-être. L'autre exemple annoncé résulte d'une situation inattendue : lors de la séance du 3 novembre, les élèves ont recherché sur Internet des documents susceptibles d'apporter des matériaux pour construire une réponse à la question suivante : « On dit que les glaçons flottent sur l'eau parce que la glace serait "plus légère que l'eau". Est-ce vrai ? On dit aussi qu'on ne sait pas pourquoi la glace est plus légère que l'eau. Est-ce vrai ? » L'une des URL collectées ce jour-là est celle-ci :

<http://fr.answers.yahoo.com/question/index?qid=20080723052705AAe0Np6>.

Mais lorsque, une semaine plus tard, nous voulons examiner le document correspondant, voici sur quoi l'on tombe :



Que faire alors ? Bien entendu, *on peut renoncer*, ce qui est sans doute le plus fréquent. Mais la manœuvre suivante peut être tentée : on donne pour requête au moteur de recherche Google tout simplement l'URL recueillie. Voici alors ce qui s'affiche :



On obtient ainsi la page que l'on cherchait :



2. Une enquête : le cas du symbole $\propto$

a) Dans les exemples précédents, le besoin qui s'impose – dans la mesure où il s'impose ! – est de l'ordre de la praxis : il s'agit moins de « comprendre » que de *faire*. Dans une situation d'enquête, besoins « gnosiques » (relatifs au *logos*) et besoins praxiques se mêlent. Je prendrai ici un exemple développé lors de la 16^e école d'été de didactique des mathématiques (tenue du 21 au 28 août 2011 à Carcassonne), dans le cadre d'un atelier animé par Floriane Wozniak et moi-même sous le titre « Le calcul proportionnel et le symbole $\propto$. Enquête sur une œuvre mathématique méconnue ». Je reprends ici, en les stylisant, quelques étapes d'un parcours d'étude et de recherche *possible* dans une enquête sur cette œuvre mathématique dont témoigne le symbole $\propto$ qui, comme on le sait, apparaît dans la police de caractères *Symbol*, police dont l'article "Symbol (typeface)" de *Wikipedia* indique que son "primary purpose is to typeset mathematical expressions" – ce qui suggère que l'emploi du symbole, à peu près inconnu en France aujourd'hui, n'a pas disparu aux États-Unis au moins.

b) Ma première rencontre avec le symbole $\propto$ s'est faite, autant que je m'en souviens, dans l'ouvrage d'Edward Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Sciences* (1976, Berlin, Springer-Verlag), où l'on peut lire ceci :

Formula (3.5.1) means that y is proportional to x . For this relationship the symbol $\propto$ is sometimes used. Thus if the type of function is more important than the specific value of a , we write

$$y \propto x \quad (3.5.2)$$

and read " y is proportional to x "⁴.

The constant proportion $y/x = a$ is called a *growth rate*, especially if the independent variable is time. (p. 71)

L'appel de note 4 qui figure dans le passage précédent renvoie à ceci : "The proportionality sign $\propto$ is very practical, but not widely used. Mathematicians apply it rarely. However, the symbol is quite popular in biophysics." Si l'on suit cette indication, on comprend que la rencontre avec l'œuvre mathématique dont le symbole $\propto$ témoigne demeure improbable. Au vrai, à ce stade initial de l'enquête, la réponse à des questions fondamentales manquent encore. Ainsi, qu'est-ce que ce x et ce y dont parle l'auteur ? Certainement pas des nombres, bien sûr. On peut penser par exemple que la lettre y désigne une fonction (linéaire) de la variable x ; en ce cas, la notation $\propto$ est une simple sténographie, que l'auteur consulté dit être "very practical", sans que l'on sache dans quelles activités elle apparaît « très pratique » ni *en quoi* elle est très pratique.

c) Poursuivons en interrogeant *Wikipédia* ; on y lit ceci :

Proportionnalité

 Ne doit pas être confondu avec *proportionnelle*.

On dit que deux mesures sont **proportionnelles** quand on peut passer de l'une à l'autre en multipliant ou en divisant par une même constante non nulle. Dans le cas où l'on multiplie, cette constante est appelée **coefficient de proportionnalité**.

Exemple : si, dans un magasin, le prix des pommes est de 2 euros le kg, il y a **proportionnalité** entre la somme S à payer et le poids P de pommes achetées, ce que l'on note parfois ¹ :

$$S \propto P.$$

Le coefficient de proportionnalité est 2.

- Pour 1 kg, on doit payer 2 euros.
- Pour 3 kg, on doit payer 6 euros.
- Pour 1,5 kg, on doit payer 3 euros.

On remarque que le quotient des deux quantités est constant et est égal au coefficient de proportionnalité.

$$\frac{2}{1} = \frac{6}{3} = \frac{3}{1,5} = 2$$

Les Anciens comme *Euclide* auraient écrit que 2 est à 1 comme 6 est à 3 ou comme 3 est à 1,5.

On retrouve là une difficulté déjà soulevée quant à la nature de x et y , puisqu'on lit : « On dit que deux mesures sont *proportionnelles* quand on peut passer de l'une à l'autre en multipliant ou en divisant par une même constante non nulle. » L'emploi de *mesure* n'est pas fait pour clarifier les choses : dans les quantités 3 kg et 9 kg, 3 et 9 sont des mesures mais on ne saurait dire qu'elles sont proportionnelles l'une à l'autre ! Le mot utilisé autrefois, au sens que semble viser le rédacteur wikipédien, c'est en fait *grandeur* (variable) ; il aurait dû écrire, peut-on penser : « On dit que deux grandeurs sont *proportionnelles* quand on peut passer de l'une à l'autre en multipliant ou en divisant par une même constante non nulle. » Glissons alors vers l'article correspondant *en anglais*, "Proportionality (mathematics)". On y lit ce que voici : "In mathematics, two variable quantities are *proportional* if one of them is always the product of the other and a constant quantity, called the coefficient of proportionality or *proportionality constant*" (§ 1). Les deux « choses » proportionnelles sont des « quantités variables », ce qui correspond à peu près à la notion de *grandeur* évoquée plus haut. Voici alors le passage de l'article où le symbole $\propto$ apparaît :

Direct proportionality [edit]

Given two *variables* x and y , y is **(directly) proportional** to x (x and y **vary directly**, or x and y are in **direct variation**) if there is a non-zero constant k such that

$$y = kx.$$

The relation is often denoted

$$y \propto x$$

and the constant ratio

$$k = y/x$$

is called the **proportionality constant** or **constant of proportionality**.

Cette fois, x et y sont désignées comme étant des *variables* : “Given two variables x and y , y is (directly) proportional to x (x and y vary directly, or x and y are in direct variation) if there is a non-zero constant k such that $y = kx$.” Le problème est que, dans l’univers mathématique actuel, on ne sait pas officiellement donner sens à la notion de *variable*. Je reprends ici un développement dû à Frédéric Pham dans son livre *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés* (1992, Paris, InterEditions), passage que j’avais déjà présenté dans le Séminaire TAD/IDD de l’année 2007-2008 :

Le problème de la notation différentielle n’est qu’un aspect d’un problème beaucoup plus vaste de notations en mathématiques. Très schématiquement, on peut opposer le système de notations « classique », qui « déclare » les *variables* en leur attribuant des noms x , y , ... (et n’éprouve pas toujours le besoin d’attribuer des noms aux relations entre ces variables), et le système de notations « moderne » qui ne déclare que les *relations* (par exemple les applications), prenant soin de noter différemment même des applications trivialement déduites l’une de l’autre (par exemple une application et sa restriction), et de donner des noms même à des applications « triviales » comme l’inclusion d’un ensemble dans un autre.

Ce deuxième système de notations est devenu le « système officiel » dans la remise en ordre des mathématiques qui caractérise le milieu de ce siècle. Il a certainement beaucoup aidé à dissiper certaines confusions du discours mathématique classique. Mais conçu avant tout pour les grandes synthèses abstraites, il est souvent lourd à utiliser dans la pratique (et complètement inadapté, dans la plupart des cas, à la façon de penser des physiciens, pour ne citer qu’eux). Dans leur pratique quotidienne les mathématiciens utilisent donc tour à tour l’un ou l’autre système de notations, ou un mélange des deux. Mais au lieu de chercher à enseigner aux étudiants les mathématiques telles qu’elles se pratiquent, on continue trop souvent à propager le mythe d’une notation mathématique « parfaite » et unique, indépendante du contexte, permettant d’éviter « automatiquement » de faire des erreurs de raisonnement – mythe dont le succès est d’autant mieux assuré qu’on s’arrange pour ne présenter aux étudiants que des abstractions isolées de tout contexte, où effectivement le mythe fonctionne bien. Moyennant quoi les étudiants confondent l’apprentissage, de toutes façons difficile, de la rigueur, avec la soumission aveugle à une « langue de bois » qui paralyse toute pensée.

J’avais ajouté alors à ce propos le commentaire suivant :

On sait que, dans le paradigme classique, on écrivait une fonction f sous la forme $y = f(x)$. Le symbole f ne faisait ici que dénoter la procédure permettant de passer d’une valeur de la *variable* x supposée à la valeur « simultanée » de

la *variable* y supposée. (En de nombreux domaines d'application [par exemple en psychologie], x est appelée variable *indépendante*, tandis que y est la variable *dépendante*.) Par contraste, dans le paradigme moderne, on « évide » la référence à des variables x et y qui seraient définies *par ailleurs*. Le symbole f désigne le « protocole » permettant d'associer une valeur numérique à une autre, ces valeurs n'étant alors plus valeurs *de rien* : ce sont des valeurs « abstraites », des nombres purs, qui ne « mesurent » rien. Comme il faut bien noter le nombre x auquel f associe le nombre $f(x)$, la lettre x , et son nom ancien, « variable », ont été conservés ; mais y a été banni, au profit du schéma notationnel « bien connu » $f : x \mapsto f(x) = \dots$. Là où l'on parlait autrefois « de la fonction $y = 2x^3 - 5$ » par exemple, on s'est mis à parler de « la fonction f qui, à x , associe $2x^3 - 5$ », de « la fonction f , " x donne $2x^3 - 5$ " », etc.

L'enquête sur le symbole $\propto$ fait donc rencontrer un besoin de connaissance relatif à l'histoire relativement récente de *la conceptualisation mathématique des « grandeurs variables »*. Il me semble, à cet égard, que, dans la conceptualisation actuelle, on peut définir la notion de *variable* en disant qu'une variable est une application de l'ensemble Ω des états ω d'un système S dans la droite réelle $\mathbb{R} : x : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dire que les variables x et y sont proportionnelles, et écrire la relation (symétrique) $y \propto x$, signifient qu'il existe un réel $k \neq 0$ tel que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $y(\omega) = kx(\omega)$. Si l'on considère l'état ω de S comme une fonction du temps t (c'est-à-dire si l'on introduit l'application $\tilde{\omega} : T \rightarrow \Omega$) et que l'on compose x et $\tilde{\omega}$, on obtient une variable $\tilde{x}$ fonction du temps $t : \tilde{x} = x \circ \tilde{\omega} : T \rightarrow \mathbb{R}$.

d) Jusqu'ici on n'a pas rencontré encore d'usages « utiles » – et justifiés ! – du symbole $\propto$: c'est le point essentiel qu'il nous reste à élucider. Il semble que la difficulté éprouvée à cet égard constitue un fait significatif : le symbole $\propto$ se serait plus ou moins conservé dans les cultures scientifiques anglophones mais ses usages y seraient devenus peu visibles. L'enquête vise donc maintenant à repérer des *emplois* du symbole. En voici un, rencontré sur Internet (http://rmarkmatthews.squarespace.com/storage/chemtutor/gas_law1.htm) :

The Ideal Gas Law

So what have we learned so far, gang? Well, we now have three spiffy little proportionalities:

$$V \propto 1/P$$

$$V \propto T$$

$$V \propto n$$

If we combine these into one equation, this gives us

$$V \propto (nT)/P$$

which we can rearrange into something that starts to look *vaguely* familiar.

$$PV \propto nT$$

Now remember how we set all those equations above to equalities by including a proportionality constant? Well, we do the same thing here.

$$PV = nCT$$

But you know, the letter C has been used to death in science, I mean you've got concentration, speed of light (which doesn't even start with c!), centi-. About we use a different letter for our constant. How about, oh, I don't know... the letter R.

$$PV = nRT$$

VIOLA!!!!!!

Here, it's useful to actually KNOW what our constant is (which is usually referred to as the molar gas constant), which has been calculated as 0.08206 L-atm/mol-K.

Ce qui frappe ici n'est pas tant les trois "spiffy little proportionalities" citées par l'auteur du document, à savoir $V \propto 1/P$, $V \propto T$, $V \propto n$. (D'après le Macmillan Dictionary, l'adjectif *spiffy* désigne ce qui est "very attractive, modern, or fashionable"; le mot signifie généralement "élégant", dans les manières ou l'habillement par exemple.) C'est *la manière de les combiner* pour obtenir la relation $V \propto (nT)/P$. Si les choses marchent bien ainsi qu'il semble, alors on pourrait dire de même que, si A est l'aire d'un rectangle de côtés x et y , du fait que $A \propto x$ et $A \propto y$ on peut déduire que $A \propto xy$! En d'autres termes, on pourrait conclure qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $A = kxy$ (k dépend des unités prises pour mesurer x , y et A). J'en connais que cela déconcerterait : « Que diable me dites-vous là ! C'est-y Dieu possible ? Vous me feriez déparler ! Servez-nous, s'il vous plaît, de nos bonnes vieilles mathématiques ; car, de ces "mathématiques"-là, je ne veux rien savoir ! »

e) Ce que la quête sur Internet semble montrer, en vérité, c'est que « l'algèbre » du symbole $\propto$ est mal connue : *l'offre praxéologique* à ce sujet semble indigente. On trouvera ci-après un document très topique à cet égard (<http://www.physicsforums.com/showthread.php?t=133911>), dans lequel un étudiant américain voudrait bien utiliser le symbole $\propto$ mais n'arrive à rien et appelle au secours sur le forum où il s'exprime :

Correct use of "is proportional to" symbol (alpha)

Hello, I am facing a problem that can be solved quite easily using the proportional symbol (I think), so I would like to try to use it! Only problem is.. I don't know exactly how to use it correctly...

The question is: **An astronaut weighs 882N on Earth, deterring the weight of the astronaut on Planet X, which has a mass 95.3 times that of Earth and a radius 8.9 times that of Earth.**

So,

$$g = \frac{Gm}{r^2}$$

and thus

$$g \propto \frac{m}{r^2}$$

So I wrote down

$$g \propto \frac{m}{r^2}$$

$$g \propto \frac{95.3}{79.21}$$

But of course this false... g is not proportional to 95.3/79.21.. lol. Can someone show me how to correctly show my work? Thanks. This would allow me to simply use this ratio to calculate his new weight.

Un intervenant, Andrew Mason, qui se présente comme *Homework Helper* et *Science Advisor*, apporte alors cette réponse :

Saying $g \propto m/r^2$ is equivalent to saying that $g = Gm/r^2$ where G is a constant (the proportionality constant) ie. g is a linear function of m and r^2 . If you want to perform mathematical operations you have to use the equality sign and the constant.

$$g_1 = \frac{GM_1}{r_1^2}$$

$$g_2 = \frac{GM_2}{r_2^2}$$

dividing, the constant falls out:

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{M_2}{M_1} \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

AM

Décevant ! Mais le même forum de physique contient par ailleurs la demande beaucoup plus générale que voici (<http://www.physicsforums.com/showthread.php?t=510525>):

If you have two statements, " $a \propto b$ " and " $a \propto c$ ", you would get: " $a = xb$ " and " $a = yc$ " (where x and y are the constants of proportionality)

But what do you do so that it turns out to be " $a = b \times c$ "?

I've been searching for a DETAILED MATHEMATICAL explanation but have failed in finding one that responds thoroughly to my inquiry. I mean, I understand how it would result in " $a = bc$ ", but I'm having trouble

understanding how to get there in concise mathematical steps and easy-to-understand mathematical reasoning.

Une bonne âme tente de prêter main forte au demandeur – mais sans succès, comme on le verra :

If anything, I would intuitively think that " $a \propto b$ " and " $a \propto c$ " imply " $a \propto bc$ ", and thus $a = kbc$, where k is a constant of proportionality.

EDIT:

Actually, I'm wrong.

First, some definitions:

-to say of two variables a and b that " $a \propto b$ " means there exists a nonzero real constant k such that $a = kb$

" $a \propto b$ " and " $a \propto c$ " imply $a = bk$ and $a = jc$ for some nonzero k, j in $\mathbb{R}$, respectively.

Then $bc = (a/k)(a/j) = a^2/(kj)$ and so $a^2 = (kj)bc$, where (kj) is the product of two arbitrary constants in $\mathbb{R}$ and is thus itself an arbitrary constant in $\mathbb{R}$. Therefore $a^2 \propto bc$.

EDIT 2: And in fact, $a = bc$ would imply that $a^2 = (kj)bc = (kj)a$, implying $a = kj = \text{constant}$. But a is a variable!

Le demandeur répond par un message désespéré : "Hmm. Is there no way to prove that " $k = c$ " and " $j = b$ " though?" Puis il reprendra la plume pour ajouter :

I've been thinking about this and somehow it managed to clear things up a lot haha. Thank you.

But now there's something bothering me about this description; if you hold one variable constant, how can you say that that same variable is the constant of proportionality?

Looking at this now, this seems more of a general science question than it is a math question...

EDIT: What I mean is that given this description of what proportionality statements signify about dependent and independent/constant variables, do we just ASSIGN the constant variables to constants of proportionalities?

La situation semble inextricablement confuse ! Outre l'emploi des notions de variable indépendante et dépendante, on notera la tentative « magique » pour jouer sur les registres supposés distincts des « questions de mathématiques » et des « questions de science ».

f) S'il semble se manifester un besoin de connaissance (« mathématique » ? « Scientifique » ?), ce besoin reste donc non satisfait. L'enquête doit donc se

poursuivre. On trouve sur Internet un ouvrage numérisé par Google qui *semble* contenir les indications que nous cherchons : intitulé *A first course in mathematical modeling*, signé de Frank R. Giordano, William P. Fox et Maurice D. Weir, paru en 2008, il offre notamment ce développement :

2.2 Modeling Using Proportionality

We introduced the concept of proportionality in Chapter 1 to model change. Recall that

$$y \propto x \text{ if and only if } y = kx \text{ for some constant } k > 0 \quad (2.1)$$

Of course, if $y \propto x$, then $x \propto y$ because the constant k in Equation (2.1) is greater than zero and then $x = (\frac{1}{k})y$. The following are other examples of proportionality relationships:

$$y \propto x^2 \text{ if and only if } y = k_1 x^2 \text{ for } k_1 \text{ a constant} \quad (2.2)$$

$$y \propto \ln x \text{ if and only if } y = k_2 \ln x \text{ for } k_2 \text{ a constant} \quad (2.3)$$

$$y \propto e^x \text{ if and only if } y = k_3 e^x \text{ for } k_3 \text{ a constant} \quad (2.4)$$

In Equation (2.2), $y = kx^2$, $k > 0$, so we also have $x \propto y^{1/2}$ because $x = (\frac{1}{\sqrt{k}})y^{1/2}$. This leads us to consider how to link proportionalities together, a transitive rule for proportionality:

$$y \propto x \quad \text{and} \quad x \propto z, \text{ then } y \propto z$$

Thus, any variables proportional to the same variables are proportional to one another.

Now let's explore a geometric interpretation of proportionality. In Equation (2.1), $y = kx$ yields $k = y/x$. Thus, k may be interpreted as the tangent of the angle θ depicted in Figure 2.8, and the relation $y \propto x$ defines a set of points along a line in the plane with angle of inclination θ .

Comparing the general form of a proportionality relationship $y = kx$ with the equation for a straight line $y = mx + b$, we can see that the graph of a proportionality relationship is a

On découvre ici clairement énoncée la *symétrie* de la relation de proportionnalité (“Of course, if $y \propto x$, then $x \propto y...$ ”) et explicitée une *transitive rule for proportionality* : “ $y \propto x$ and $x \propto z$, then $y \propto z$. Thus, any variables proportional to the same variables are proportional to one another.” La réflexivité étant immédiate, on voit que la relation notée $\propto$ est une *relation d'équivalence*. Peut-on en savoir plus ? Il appert malheureusement que, selon les mœurs googléennes bien connues, la suite de ce passage *n'est pas consultable* ! Une autre voie peut alors être tentée. Que dit, en effet, à propos du symbole $\propto$, le site fameux de Jeff Miller ? La page *Earliest uses of symbols of relation* (<http://jeff560.tripod.com/relation.html>) précise ce qui suit : “The symbol for variation (an eight lying on its side with a piece removed) was introduced in 1768 by W. Emerson in *Doctrine of Fluxions* (3d ed., London) (Cajori vol. 1, page 297).” Le livre de Cajori est un grand classique qu'on peut aujourd'hui consulter sur Internet ; à la page indiquée par Miller, on y lit ce que voici :

A special symbol for variation sometimes encountered in English and American texts is $\propto$, introduced by Emerson.⁴ “To the Common Algebraic Characters already receiv’d I add this $\propto$, which signifies a general Proportion; thus, $A \propto \frac{BC}{D}$, signifies that A is in a constant ratio to $\frac{BC}{D}$.” The sign was adopted by Chrystal,⁵ Castle,⁶ and others.

⁴ W. Emerson, *Doctrine of Fluxions* (3d ed.; London, 1768), p. 4.

⁵ G. Chrystal, *Algebra*, Part I, p. 275.

⁶ Frank Castle, *Practical Mathematics for Beginners* (London, 1905), p. 317.

On trouve encore sur Internet... le livre d’Emerson lui-même, et cela dans sa deuxième édition, de 1757 (Cajori, et Miller à sa suite, citent la troisième édition, de 1768) :

4. To the common Algebraic Characters already receiv’d I add this $\propto$, which signifies a general Proportion; thus, $A \propto \frac{BC}{D}$, signifies that A is in a constant Ratio to $\frac{BC}{D}$; that is (if a, b, c, d be other Values of these Quantities) $A : \frac{BC}{D} :: a : \frac{bc}{d}$; and thus every general Proportion is to be understood.

Ici, pour la première fois, on trouve une définition explicite, que l’on peut simplifier en ces termes : on a $x \propto y$ si et seulement si, lorsque A et a sont deux valeurs de la variable x et B et b sont les valeurs correspondantes de la variable y , on a : $A : B :: a : b$, c’est-à-dire $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$. (Bien entendu, l’enquêteur doit ici se rendre capable de « déchiffrer » la notation, très longtemps classique, utilisée par Emerson.)

g) Il nous faut aller plus loin. Le livre de Castle cité par Cajori est consultable en ligne, mais se révèle décevant puisqu’on y trouve seulement ceci :

6. In any class of turbine if P is power of the waterfall and H the height of the fall, and n the rate of revolution, then it is known that for any particular class of turbines of all sizes

$$n \propto H^{1.25} P^{-0.5}.$$

In the list of a particular maker I take a turbine at random for a fall of 6 feet, 100 horse-power, 50 revolutions per minute. By means of this I find I can calculate n for all the other turbines of the list. Find n for a fall of 20 feet and 75 horse-power.

Mais il en va autrement du livre de Chrystal, qui propose plusieurs pages de développement (pp. 273-280), dont voici un extrait :

When y depends on x in the manner just explained it is said to *vary directly as x* , or, more shortly, to *vary as x* .

A better * phrase, which is also in use, is “ y is *proportional to x* .”

This particular connection between y and x is sometimes expressed by writing

$$y \propto x.$$

§ 19.] In place of x , we might write in equation (2) x^2 , $1/x$, $1/x^2$, $x + b$, and so on ; we should then have

$$y = ax^2 \quad (\alpha),$$

$$y = a/x \quad (\beta),$$

$$y = a/x^2 \quad (\gamma),$$

$$y = a(x + b) \quad (\delta).$$

* The use of the word “Variation” in the present connection is unfortunate, because the qualifying particle “as” is all that indicates that we are here concerned not with variation in general, as explained in § 17, but merely with the simplest of all the possible kinds of it. There is a tendency in uneducated minds to suppose that this simplest of all kinds of functionality is the only one ; and this tendency is encouraged by the retention of the above piece of antiquated nomenclature.

Le livre de Chrystal nous apprend ceci :

§ 20.] The whole matter we are now discussing is to a large extent an affair of nomenclature and notation, and a little attention to these points is all that the student will require to prove the following propositions. We give the demonstrations in one or two specimen cases.

(1.) If $z \propto y$ and $y \propto x$, then $z \propto x$.

Proof.—By data $z = ay$, $y = bx$, where a and b are constants ; therefore $z = abx$. Hence $z \propto x$, since ab is constant.

(2.) If $y_1 \propto x_1$ and $y_2 \propto x_2$, then $y_1 y_2 \propto x_1 x_2$.

Proof.—By data $y_1 = a_1 x_1$, $y_2 = a_2 x_2$, where a_1 and a_2 are constants. Hence $y_1 y_2 = a_1 a_2 x_1 x_2$, which proves the proposition, since $a_1 a_2$ is constant.

In general if $y_1 \propto x_1$, $y_2 \propto x_2$, . . . , $y_n \propto x_n$, then $y_1 y_2 \dots y_n \propto x_1 x_2 \dots x_n$. And, in particular, if $y \propto x$, then $y^n \propto x^n$.

(3.) If $y \propto x$, then $zy \propto zx$, whether z be variable or constant.

(4.) If $z \propto xy$, then $x \propto z/y$, and $y \propto z/x$.

(5.) If z depend on x and y , and on these alone, and if $z \propto x$ when y is constant, and $z \propto y$ when x is constant, then $z \propto xy$ when both x and y vary.

Proof.—Consider the following system of corresponding values of the variables involved.

Dependent Variable.	Independent Variables.
z	$x, y.$
z_1	$x', y.$
z'	$x', y'.$

Then, since y has the same value for both z and z_1 , we have, by data,

$$\frac{z}{z_1} = \frac{x}{x'}.$$

Again, since x' is the same for both z_1 and z' , we have, by data,

$$\frac{z_1}{z'} = \frac{y}{y'}.$$

From these two equations we have

$$\frac{z}{z_1} \times \frac{z_1}{z'} = \frac{x}{x'} \times \frac{y}{y'},$$

that is,

$$\frac{z}{z'} = \frac{xy}{x'y'},$$

which proves that $z \propto xy$.

Notons qu'on voit apparaître les dénominations de « variable indépendante » et de « variable dépendante » – sur lesquelles il conviendrait sans doute d'approfondir l'enquête. À la suite de ce passage, Chrystal écrit :

A good example of this case is the dependance of the area of a triangle upon its base and altitude. We have

Area $\propto$ base (altitude constant) ;

Area $\propto$ altitude (base constant).

Hence area $\propto$ base $\times$ altitude, when both vary.

L'exemple rejoint celui du rectangle, avancé plus haut, qui tombe donc bien sous la juridiction du « calcul proportionnel » ! Donnons encore un extrait de la suite, qui nous fera retrouver l'exemple des « gaz parfaits » :

(7.) If $z \propto x$ (y constant) and $z \propto 1/y$ (x constant), then $z \propto x/y$ when both vary.

For example, if V , P , T denote the volume, pressure, and absolute temperature of a given mass of a perfect gas, then

$V \propto 1/P$ (T constant), $V \propto T$ (P constant).

Hence in general $V \propto T/P$.

h) On a vu la manière dont l'auteur démontre la propriété 5 de la relation de proportionnalité : "If z depend on x and y , and on these alone, and if $z \propto x$ when y is constant, and $z \propto y$ when x is constant, then $z \propto xy$ when both x and y vary." On peut alors constater que, si l'usage du symbole $\propto$ semble rare en français, les propriétés de la relation qu'il désigne *étaient autrefois classiquement connues* dans la culture mathématique primaire-secondaire. C'est ainsi que, dans le tome 1 de la *Nouvelle encyclopédie autodidactique Quillet* sous-titrée *L'enseignement moderne et pratique* et publiée en 1958 par un comité d'universitaires, on trouve ceci aux pages 216-217 :

202. GRANDEURS PROPORTIONNELLES À PLUSIEURS AUTRES

Il peut arriver qu'une grandeur A dépend proportionnellement de plusieurs autres.

Ainsi le poids d'un cylindre métallique varie avec la densité du métal, le rayon de sa base, la longueur de son axe ; son volume varie avec son rayon et la longueur de l'axe.

1° Une grandeur A est directement proportionnelle à plusieurs autres B, C, D, E si ces dernières grandeurs sauf une E , restant fixes, les valeurs de A et de E varient dans le même rapport.

2° Une grandeur A est directement proportionnelle à la grandeur B et inversement proportionnelle à la grandeur C lorsque :

- a) C étant constante, les valeurs de A et B sont directement proportionnelles ;
- b) B étant constante, les valeurs de A et C sont inversement proportionnelles.

203. Soient : V le volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon r .

V_1 le volume d'un autre cylindre de hauteur h et de rayon r' .

V' le volume d'un troisième cylindre de hauteur h' et de rayon r' .

La longueur de l'axe ne variant pas, les volumes sont directement proportionnels aux carrés des rayons :

$$\frac{V}{V_1} = \frac{r^2}{r'^2}$$

Les rayons ne variant pas, les volumes sont directement proportionnels aux longueurs des axes :

$$\frac{V_1}{V'} = \frac{h}{h'}$$

Multiplions membre à membre ces deux égalités :

$$\frac{V}{V_1} \times \frac{V_1}{V'} = \frac{r^2}{r'^2} \times \frac{h}{h'}$$

ou :

$$\frac{V}{V'} = \frac{r^2}{r'^2} \times \frac{h}{h'} = \frac{r^2 \times h}{r'^2 \times h'} ;$$

d'où le théorème :

Théorème. – Si une grandeur A est directement proportionnelle à plusieurs autres, les valeurs de A sont directement proportionnelles aux produits des valeurs correspondantes des autres grandeurs.

On aura noté que l'on rencontre ici la référence – classique en français – à des *grandeurs*, en l'espèce « directement proportionnelles » à d'autres grandeurs et qui ont des « valeurs ». Reprenons la démonstration proposée ci-dessus en la généralisant formellement. Soit $z = f(x, y)$; on suppose que l'on a $z \propto x$ et $z \propto y$ et on veut montrer qu'il en résulte que $z \propto xy$. Soit ω et $\omega' \in \Omega$; on suppose qu'il existe $\omega_1 \in \Omega$ tels que $x(\omega_1) = x(\omega)$ et $y(\omega_1) = y(\omega')$. Posons $x(\omega) = x$, $y(\omega) = y$, $x(\omega') = x'$, $y(\omega') = y'$. On a donc $\frac{z}{z_1} = \frac{y}{y'}$ et $\frac{z_1}{z'} = \frac{x}{x'}$; d'où il résulte : $\frac{z}{z'} = \frac{z}{z_1} \times \frac{z_1}{z'} = \frac{y}{y'} \times \frac{x}{x'} = \frac{yx}{y'x'}$ – cqfd.

3. Épiphanie des besoins ?

a) Avons-nous besoin du symbole $\propto$? Je voudrais ici faire quelques remarques illustrées sur ce sujet. Mais d'abord comment *nommer* le symbole $\propto$? Voici une réponse qui ne semble pas déraisonnable à cette dernière question (<http://mathforum.org/library/drmath/view/62956.html>) :




QUESTIONS & ANSWERS FROM OUR ARCHIVES

[Associated Topics](#) || [Dr. Math Home](#) || [Search Dr. Math](#)

Proportionality Symbol

Date: 05/20/2003 at 04:03:38
 From: Lauren
 Subject: Rates and variation symbol

Do you know the name of the little symbol used in the topic of rates and variation that means "in proportion to"? It looks a bit like alpha, only more (this sounds odd, but it's the best way to describe it) "fish-like."

Date: 05/20/2003 at 12:06:00
 From: Doctor Peterson
 Subject: Re: Rates and variation symbol

Hi, Lauren.

Many symbols have no specific name, and are just referred to by their usage; this can be called the proportionality symbol. In fact, the 'official' name of the symbol in Unicode (a set of international characters for computers) is "proportional to":

Symbol Characters and Glyphs - W3C Working Draft
<http://www.w3.org/Math/characters/html/symbol.html>

Looking for a mention of an actual name, I looked up its history in Jeff Miller's:

Earliest Uses of Symbols of Relation
<http://jeff560.tripod.com/relation.html>

It is just called "The symbol for variation (an eight lying on its side with a piece removed)."

Eric Weisstein's World of Mathematics gives no name:

Proportional
<http://mathworld.wolfram.com/Proportional.html>

If you prefer to describe it by its appearance rather than strictly by its usage, you might call it an "open alpha" or "loose alpha," rather than "fishy alpha." People do often describe it (wrongly) as an alpha, but I haven't seen these modifiers used anywhere.

If you have any further questions, feel free to write back.

- Doctor Peterson, The Math Forum
<http://mathforum.org/dr.math/>

Dans le parcours d'étude et de recherche réellement réalisé, c'est en fait là que se trouve le point de départ d'une étape clé, qui nous a conduit à aller voir le site de Jeff Miller : on connaît la suite.

b) La demande exprimée à l'occasion de l'exercice de physique sur l'astronaute répond-elle à un besoin ? La chose est rien moins que sûre. La demande exprime davantage, semble-t-il, un besoin *culturel* qu'un besoin *fonctionnel* : son auteur croit savoir qu'on devrait pouvoir utiliser le symbole qu'il transcrit par la lettre grecque *alpha* (α), erreur apparemment fréquente concernant un symbole mal identifié. C'est là une situation que nous connaissons tous : nous *désirons* telle œuvre plutôt que nous n'en éprouvons le besoin, parce que nous l'avons entraperçue *en action*, comme il en va ci-après (<http://mathias.bavay.free.fr/these/html/node312.html>):

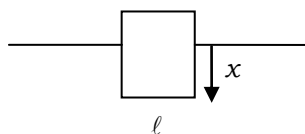
ce qui se traduit dans l'expression analytique de q par ^{H.8} :

1. $q \propto \frac{d\dot{x}}{dx}$;
2. $q \propto \Delta x$ et $q \propto \rho$ pour que l'impact de q dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement soit indépendant de l'amplitude du choc (définie par $\frac{\rho}{\rho_0}$) ;
3. $q \propto \frac{d\dot{x}}{dx}$, voir un ordre supérieur.

En utilisant les règles précédentes, et en respectant les dimensions de q (qui est une pression), on obtient :

$$\begin{cases} q = \kappa \cdot \rho \cdot (\Delta x)^2 \cdot \left(\frac{d\dot{x}}{dx}\right)^2 & \text{pour } \frac{d\dot{x}}{dx} < 0 \\ q = 0 & \text{pour } \frac{d\dot{x}}{dx} \geq 0 \end{cases} \quad (\text{H.3})$$

c) Je reviens un instant à l'exemple des glaçons évoqué plus haut (voir la figure ci-après).



Comment déterminer le tirant d'eau x à l'aide du symbole $\propto$? Voici :

① À l'équilibre, le poids p du glaçon égale la « poussée d'Archimède », a , qui s'exerce sur le glaçon :	① $p = a$
② La poussée a est proportionnelle au « volume de l'eau déplacée » :	② $a \propto V$
③ V est proportionnel au « tirant d'eau » x :	③ $V \propto x$
④ On a donc :	④ $x \propto a$
⑤ D'où :	⑤ $x \propto p$
⑥ Le poids p est proportionnel à la masse volumique ρ du glaçon :	⑥ $p \propto \rho$
⑦ D'où finalement :	⑦ $x \propto \rho$

L'enfoncement x du glaçon est ainsi proportionnel à la masse volumique ρ de la matière dont il est fait. Si le glaçon était fait d'eau liquide, on aurait $x = \ell$; comme la masse volumique de la glace (sous des conditions convenables) est $0,917 \text{ g/cm}^3$ tandis que celle de l'eau liquide est 1 g/cm^3 , on a $\frac{x}{\ell} = \frac{0,917}{1}$ et donc $x = 0,917 \ell$.

d) Dans l'exemple précédent, à qui est habitué au « calcul proportionnel », il apparaît de façon quasi immédiate que le tirant d'eau x est proportionnel à la masse volumique ρ ($x \propto \rho$) ; la conclusion suit de là tout aussi immédiatement. Mais pour qui, ignorant de cette technique, est familier de la mise en équation (faite ci-après « sans unités »), soit $a = \ell^2 x = \ell^3 \rho$, ce qui conduit aussitôt à $x = \rho \ell = 0,917 \ell$, le calcul proportionnel apparaîtra fastidieux, incertain, inutile. En tout cas, *le besoin n'en sera pas ressenti*. Ce

n'est que dans la *répétition* qu'il pourrait triompher, parce qu'il écarte chaque fois, d'un revers de main, bien des détails *non pertinents*.

e) D'une façon plus générale, on doit s'interroger sur ce qui conduit à éprouver un besoin. Je reviens à cet égard sur les deux épisodes de l'Atelier « Enquêtes sur Internet » mentionnés plus haut. Un document, nous dit-on, a été « supprimé ». On peut certes éprouver à ce moment-là le besoin d'une technique permettant de le retrouver ; mais, dans l'enquête sur la question des glaçons, est-il si important que ça, ce document disparu ? Ne peut-on pas s'en passer ? Le choix peut être de répondre positivement à cette question : on fera sans lui et on fera ainsi, vraisemblablement, *aussi bien* qu'on l'aurait fait *avec* lui ! C'est là donner dans ce que j'ai nommé, il y a longtemps, un *déni de problématique*. Considérons maintenant la technique utilisant un « raccourci clavier » pour « mettre en exposant » avec OpenOffice. On a vu que les élèves disposent déjà d'une technique – plus lourde certes, mais qui fait dignement son office. S'ils avaient plusieurs fois par quart d'heure à « mettre en exposant », cette technique leur apparaîtrait peut-être handicapante ; mais, bien entendu, il n'en est rien – ordinairement, aujourd'hui encore, ils écrivent à la main, et le problème ne se pose pas. Au demeurant, nombre de non-mathématiciens, utilisant un traitement de texte, *ne se sont jamais posé la question*. Longtemps, du temps des machines à écrire, il fut typographiquement toléré d'écrire « 2e édition » en lieu et place de « 2^e édition » : là encore le problème se trouvait circonvenu. Aujourd'hui, le traitement de texte que j'utilise met automatiquement en exposant le *e* de « 2^e ». À vrai dire – *horresco referens* –, le scélérat écrit même automatiquement « 2^{ème} », abréviation fautive à laquelle les ignorants s'accrochent avec la dernière énergie. Bien entendu, si l'on peut tolérer « 2e » pour « 2^e » en français courant, on ne peut guère, en mathématiques, substituer à l'expression 2^3 l'expression 23. (Notons aussi que, en mathématiques, l'expression 2e désigne le nombre 5,436563656918... tandis que l'expression 2^e désigne le nombre 6,580885991...) Ainsi le besoin de « mettre en exposant » ne s'impose-t-il qu'en des domaines autour desquels la culture commune a depuis longtemps installé un cordon sanitaire.

DES BESOINS PROFESSIONNELS : PE & DD

1. Le cas du développement durable

a) La didactique du développement durable (DD) est l'un des domaines de la didactique que ce séminaire a depuis deux ans inscrits à son programme de travail. La notion de besoin de connaissances, de besoins praxéologiques, me semble ici particulièrement décisive. Pourquoi cela ? Que peut-on faire, en effet, en matière d'éducation au développement durable comme en tout

autre, avec très peu de connaissances ? Ou, du moins, en ne disposant pas de suffisamment de connaissances ? Réponse : on peut faire du catéchisme. Cela se traduit par des listes de prescriptions – des listes de *Do's and don'ts*, comme on dit en anglais – adressées au lecteur, à l'élève, à l'étudiant. Voici une telle liste, extraite d'un ouvrage intitulé *L'écologie des paresseuses*, signé de Sophie Derek et paru en 2006 chez Marabout :

Que faire pour préserver l'eau ?

Du très classique...

1. Prendre des douches plutôt que des bains.
2. Réparer les robinets qui fuient.
3. Ne pas arroser votre jardin « en grand ».
4. Ne pas laver votre voiture chez vous, mais dans une station de lavage qui récupère l'eau utilisée.
5. Plonger une bouteille pleine dans le bac de votre chasse d'eau pour réduire la quantité d'eau nécessaire à l'évacuation.
6. Installer une chasse d'eau à double débit (3/6 litres).
7. Acheter un économiseur d'eau, appelé aussi « mousseur », à mettre sur vos robinets : ça ne coûte que quelques euros et vous permet de réduire de plus de la moitié votre consommation, à usage égal.
8. Ne jetez ni vos huiles de vidange, ni vos huiles ménagères, ni aucun produit polluant (peinture, white-spirit) dans votre évier, dans vos toilettes ou une rivière ! Amenez-les à la déchetterie.
9. Choisissez un détergent écologique sans phosphates, voire faites-le vous-même en suivant mes conseils (voir chapitre 6).
10. Remplacez votre lessive par des noix de lavage ou du vrai savon de Marseille en paillettes.
11. Arrêtez d'acheter de l'eau en bouteilles qui pollue de diverses façons : non seulement il faut la transporter de l'autre bout de la France, mais en plus il faut ensuite se débarrasser des bouteilles. Pour savoir ce qu'il en est exactement de l'eau du robinet, demandez auprès de votre mairie les analyses obligatoires régulièrement effectuées par des laboratoires. Elle est dans l'obligation de vous les montrer. Si les normes autorisées sont dépassées, vous aurez un document qui le prouve et vous pouvez agir.

On voit que seule la dernière suggestion fait sortir la lectrice visée de son cocon personnel pour l'inciter à entrer dans la perspective d'action de la citoyenne qu'elle aurait pu oublier d'être. On voit aussi que, dans cette liste au moins, tout est présenté comme allant de soi, rien n'est commenté ni, à plus forte raison, justifié. Le *logos* supposé nécessaire semble être celui qui

suffit pour comprendre les consignes et pour les mettre en œuvre – même si, par force, apparaissent ça et là des références qui mériteraient qu'on s'y attarde, telle la mention des « phosphates » (recommandation 9).

b) Quels sont, en matière de DD, les besoins praxéologiques du citoyen « non spécialisé » ? Quels sont, en un autre point du spectre, les besoins des professeurs de SVT ? Quels sont, encore, les besoins des professeurs des écoles ? C'est sur ce dernier point, en fait, que je m'arrêterai ici. Il fait actuellement l'objet d'un travail de master 2 dirigé par Caroline Ladage, dont l'intitulé initial est le suivant : « Les besoins des professeurs des écoles en connaissances et informations scientifiques sur les questions de développement durable et le rôle de l'Internet. » Je me contenterai de faire, dans ce qui suit, quelques remarques sur cette question de recherche.

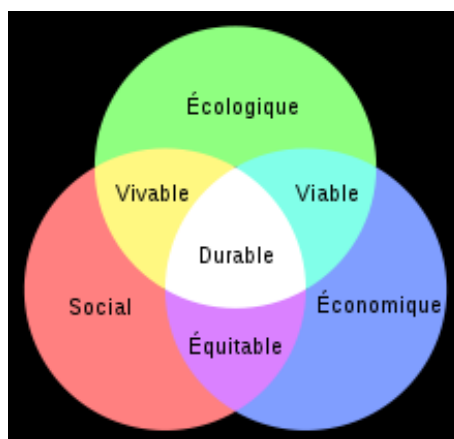
c) Nous nous trouvons typiquement, en ce cas, dans une situation où certains besoins de connaissance sont au moins implicitement poussés en avant par l'institution mandante, aux différents niveaux où elle se fait entendre (ministère, rectorat, circonscription), dans ses déclarations « officielles ». Je prendrai pour exemple, ici, un ensemble de cinq textes que l'on trouve réunis, sur le site éduSCOL, sous le titre *Éduquer à l'environnement pour un développement durable à l'école primaire* et dont voici les intitulés :

- « Une recherche de cohérence à travers les différents domaines d'enseignement » ;
- « La biodiversité » ;
- « L'évolution des paysages » ;
- « Gestion des environnements : la mise en valeur et les risques de dommages » ;
- « Réduire, réutiliser, recycler ».

Tous ces textes sont signés DEGESCO/IGEN, c'est-à-dire sont quasi anonymes pour le citoyen ordinaire.

2. Les mots du développement durable

a) Vous aurez noté d'abord le titre général lui-même : il y est question, non pas d'« éduquer au développement durable », mais d'« éduquer à l'environnement », et cela « pour un développement durable ». Il existe une manière déjà classique de décrire le domaine du DD en le situant à l'intersection de *trois* composantes, ou en disant qu'il est soutenu par trois piliers, le pilier *écologique*, le pilier *social* et le pilier *économique*. C'est ce que rappelle le schéma ci-après, emprunté à l'article « Développement durable » de *Wikipédia* :



Si l'on se fie au titre retenu, donc, seul le pilier *écologique* serait objet d'étude au primaire – à condition, il est vrai, d'entendre « environnement » de façon restrictive, comme je le fais ici. Même si l'on réduit ainsi le domaine du DD, la question soulevée reste pertinente : que doit alors savoir un professeur des écoles pour répondre adéquatement à l'injonction de l'institution dont il le mandataire ?

b) Pour ébaucher l'amorcer d'une tentative de répondre à cette question, on peut lire les textes mis en ligne sur éduSCOL. Qu'y voit-on ? On y croise un ou plusieurs champs ou sous-champs praxéologiques à travers des *mots* et des *expressions* : en d'autres termes, les besoins praxéologiques, si besoins il y a, *s'y étalent en signifiants*. Dans le séminaire de l'an dernier, j'avais cité cette note du philosophe Alain que l'on trouve dans ses *Souvenirs sans égards* (2010, Paris, Aubier) :

Je ne sais si j'ai juré, ni quand, ni à qui, de ne jamais penser sans avoir un objet sous la main ou sous les yeux. C'est une condition dont on ne se plaindra pas, je l'espère ; quoique, ici, Méphisto me guette, disant : « Vous croyez donc que c'est peu de chose de *savoir les mots*. Ce *savoir* est déjà bien beau. » Remarquez que j'écris, j'écris. Je ne méprise donc pas les mots, etc. Je m'arrête ici, car je devrais écrire tout un traité de philosophie. Or je crois qu'on peut faire de la saine politique sans toute une philosophie. Je laisse la question en suspens... (p. 99)

L'idée méphistophélique de « savoir les mots » est importante, et cela même si l'observation de certains enseignements, qui semblent limiter à cela leur ambition, peut conduire à dévaloriser cette composante de la formation. La chose est d'autant plus vraie sans doute qu'il y a plus de mots à savoir. Alain avait au reste consacré à ce thème l'un de ses « Propos d'un Normand », celui du 7 octobre 1910, dans lequel, sans rejeter la place que la

connaissance des mots doit occuper, il s'efforce d'en situer le rôle idoine (*L'instituteur et le sorbonagre*, 2011, Paris, Mille et une nuits) :

Il y a un savoir niais, dont il faut se délivrer. J'aime assez les plantes. Il m'arrive d'en parler avec assez de chaleur pour éveiller chez ceux qui m'écoutent un vif désir de connaître. Cela se traduit bientôt par l'achat d'une loupe et d'une boîte en fer peint, sans compter les *Flores*, ouvrages admirables qui vous donnent un moyen économique de nommer n'importe quelle plante sans vous tromper. Bientôt les champs sont plantés de noms barbares, et l'on pense « *Taraxacum* » au lieu de « pissenlit ». Cette maladie se gagne ; méfiez-vous ; et l'on dispute bientôt aigrement, sur de petites différences, en un jargon franco-latin. J'avoue que cette passion de savoir des mots a pourtant son utilité, qui est de forcer le disciple à examiner d'un peu plus près les feuilles, les fleurs, les racines. Mais il est ordinaire que ce qui est la vraie fin du savoir passe au rang de moyen, et qu'on observe afin de nommer. De là une science hérissée de pièges, et assez inutile. Si je me trompe sur le petit nom d'une scabieuse, cela n'importe guère si je sais bien comment elle est faite. (pp. 87-88)

Dans la vie orale comme dans l'exposé écrit, les mots sont, avant les choses, ce qui manifeste un domaine d'activité à qui y est étranger. Pour l'enseignant qui découvre sa feuille de route, les mots sont des alertes, des repères, des cibles. Quels sont-ils, donc, dans le cas des textes mentionnés ?

c) Au lieu de lire ces textes mot à mot, ligne à ligne, on va ici en fracasser le contenu à l'aide d'un petit logiciel que Jean Véronis, professeur à l'université de Provence, met à la libre disposition de chacun sous le nom de *Dico*. On verra ci-après quelques-unes des informations que ce logiciel affiche. Il nous indique notamment que le texte mis en pièces contient 1021 « formes » dont la plus présente a 166 occurrences (il s'agit de la préposition DE) et dans lequel on trouve un grand nombre de hapax (c'est-à-dire de formes ayant une unique occurrence dans le texte), phénomène qui paraît propre à un texte « programmatique ».

d) On peut voir aussi que, parmi les « mots du développement durable », le plus fréquent est *environnement* (32), suivi de *développement* (19). Viennent ensuite *biodiversité* (12), *durable* (10), *énergie* (10), *êtres* (10), *vivants* (10), *homme* (9), *humaine* (9), *paysage* (9), *risques* (8), *sociétés* (8), *consommation* (7), *humaines* (7), *naturels* (7), *produits* (7), *ressources* (7), *aménagement* (6), *écosystème* (6), *environnements* (6), *espace* (6), *évolution* (6), *gérer* (6), *gestion* (6), *milieu* (6), *sources* (6), *dangers* (5), *déchets* (5), *diversité* (5), *espèce* (5), *espèces* (5), *forêt* (5), *paysages* (5).

The screenshot shows the 'Dico' software window. It has a menu bar with 'Fichier', 'Données', and 'Options'. Below the menu is a toolbar with icons for opening files, saving, sorting (A-Z, 1-9), filtering, and a 'STOP' button. The main area is divided into two panes. The left pane contains a table of word forms and their frequencies. The right pane contains a 'Filtre' section with checkboxes for 'Antidico', 'Ponct', and 'Alphanum', and a 'Stats' section with a small table of statistics. At the bottom, a status bar shows the file path 'C:\Program Files\DICO\EEDD.txt', a time of '1 s', and '199 paragraphes'.

Forme	Fréquence
DE	166
DES	126
L	125
LES	122
LA	107
ET	97
À	75
D	66
LE	53
SUR	45
DANS	42
UNE	37
EN	36
ENVIRONNEMENT	32
DU	31
UN	29
AU	26
POUR	20
DÉVELOPPEMENT	19
CYCLE	18
ÉCOLE	17
S	16
VIE	16
PRENDRE	14

Stats	
Formes (F)	1021
Min	1
Max	166
Occur. (O)	3278
F/O	31,15%
Hapax (H)	647
H/F	63,37%

Un vaste choix des autres « mots » du texte qui semblent avoir un rapport spécifique avec le thème du développement durable est reproduit ci-après :

Consommateur, dommages, emballages, équitable, pollution (4)

Alimentaires, besoins, biosphère, chaînes, économiques, espaces, gaspillage, humains, nature, renouvelables, réseaux, solidarité, terre (3)

Adaptation, adaptations, âge, alimentation, bois, citoyenneté, civique, commerce, comportements, déchetterie, écologiquement, économiquement, écosystèmes, effet, électricité, élevages, énergies, environnementale, environnementales, éolienne, extinction, faune, fragilité, génération, génétique, géographie, impact, inégalités, local, locales, nuisances, plantations, pôles, population, recycler, reproductible, saison, santé, sécheresses, socialement, solaire, spatiale, temporelle, transformation, transformations, urbain, urbains, vivant, zones (2)

Agriculture, air, aires, alimentaire, alimenter, aménagements, animales, atmosphérique, automobiles, bioénergie, biogaz, biologique, biologiques, biologistes, capteur, catastrophiques, catastrophistes, chaîne, chartes, chauffage, chauffages, chimiques, circulation, citoyen, citoyens, CO₂,

collective, collectivement, collectivités, commerciales, communauté, consommant, croissante, culture, culturelles, cyclones, défavorisés, déplacements, déséquilibre, déséquilibres, détritrus, développer, domestique, domestiques, dynamique, eaux, économique, économiser, énergétiques, entrepreneurs, environnant, épuration, équilibre, équilibres, éruptions, exotiques, exploitation, exploitations, factures, flore, forestières, fraises, fruits, futur, gaz, gazon, génétiques, géographiques, géothermique, global, globale, globe, guêpe, habitation, habitats, histoire, historiques, hommes, hydraulique, inondations, jardin, jardiniers, jardins, locale, loisirs, lumière, maison, marcher, mare, marée, médicaments, ménagère, ménagères, milieux, militants, minières, moléculaires, mondial, naturel, naturelle, naturelles, nettoyage, nord, nourrissage, océans, offre, oiseaux, ordures, partenaires, partenariales, partenariat, pelouse, pelouses, pertes, perturbations, photosynthèse, physiques, phytoplancton, piqure, pôle, politiques, populations, potager, producteurs, publique, purification, quotidien, raisins, ralentisseurs, raz, recyclables, régimes, région, régional, régions, réseau, ressource, riches, richesse, rigueur, risque, rivière, robinets, route, routière, ruisseau, saisons, sécheresse, séismes, serre, sites, sociales, sociaux, société, sonore, sud, supermarché, surconsommation, surexploitation, technologie, technologiques, tempêtes, territoire, territoriaux, traces, transports, tri, trophiques, trottoir, trottoirs, urbaines, usées, utilisateurs, utilisation, végétal, végétales, véhiculés, verts, vivre, voie, voiture, volcaniques, zone (1)

Le grand nombre de hapax (dans la liste précédente, ils sont 183 sur 250, soit 73,2 %) semble normal dans un texte qui est davantage un programme de travail qu'un manuel dans lequel étudier. Cela noté, la question à poser, en ce point, est la question plus générale de *l'offre praxéologique – formelle et informelle – en matière de développement durable qui peut atteindre les professeurs des écoles*.

3. Un cas parmi d'autres : écosystème

a) En didactique, on s'intéresse à ce que les gens et les institutions apprennent ou non et à la manière dont ils l'apprennent ou ne l'apprennent pas. Des textes officiels examinés ci-dessus extrayons ainsi 5 mots parmi les plus utilisés : *paysage* (9+5=14), *biodiversité* (12), *espèce* (5+5=10), *écosystème* (6+2=8), *forêt* (5). Que peut-on apprendre à leur propos dans ces textes eux-mêmes ? Faute de place, je me restreindrai ici au cas du mot *écosystème*. Avant d'examiner ce que disent les textes visités à son propos, je donne très brièvement quelques indications constitutives d'une ébauche d'un modèle praxéologique de référence. L'article "Ecosystem" de *Wikipedia* commence par ces mots :

An *ecosystem* is a biological environment consisting of all the organisms living in a particular area, as well as all the nonliving (abiotic), physical components of the environment with which the organisms interact, such as air, soil, water and sunlight

Ce que je voudrais souligner, ici, c'est le fait qu'un écosystème est fait tant de *vivant* que de *non-vivant*, de facteurs biotiques que de facteurs abiotiques. Telle fut rupture « copernicienne » introduite par (Sir) Arthur Tansley (1871-1955) en 1935, dans un article intitulé "The Use and Abuse of Vegetational Concepts and Terms" (en ligne : <http://karljaspers.org/files/tansley.pdf>), contre le privilège que les spécialistes du vivant tendaient à donner aux facteurs biotiques. C'est ce qu'exprime Tansley dans le passage suivant :

... the more fundamental conception is, as it seems to me, the whole *system* (in the sense of physics), including not only the organism-complex, but also the whole complex of physical factors forming what we call the environment of the biome – the habitat factors in the widest sense. Though the organisms may claim our primary interest, when we are trying to think fundamentally we cannot separate them from their special environment, with which they form one physical system.

It is the systems so formed which, from the point of view of the ecologist, are the basic units of nature on the face of the earth. Our natural human prejudices force us to consider the organisms (in the sense of the biologist) as the most important parts of these systems, but certainly the inorganic "factors" are also parts – there could be no systems without them, and there is constant interchange of the most various kinds within each system, not only between the organisms but between the organic and the inorganic. These *ecosystems*, as we may call them, are of the most various kinds and sizes.

Avec cette information cruciale en tête, nous examinerons maintenant les textes relatifs à « l'éducation à l'environnement pour un développement durable ».

b) Le mot *écosystème*, on l'a vu, a huit occurrences (au singulier ou au pluriel) dans l'ensemble de ces textes. Toutes se trouvent, en fait, dans le texte intitulé « La biodiversité », où elles sont réparties en cinq passages successifs dont voici le premier :

Extrait 1

La biodiversité repose sur 3 composantes principales :

- la variation génétique (variation individuelle au sein d'une population – variation entre les populations, associée à des adaptations aux conditions locales)

- la variété des espèces dans un *écosystème* ou dans toute la biosphère
- la variété des *écosystèmes* de la biosphère

Un aspect est frappant : le mot examiné « fait système », ici, avec d'autres mots ou expressions, avec lesquels il a au moins une solidarité de fait – *biodiversité, variation génétique, population, adaptation, conditions locales, espèce, biosphère, variété*. La question clé que nous nous posons a trait à ce que ce passage *permettrait* à son destinataire d'apprendre à propos de la notion d'écosystème (et d'autres notions dont on ne peut, ici, de fait la dissocier : ces notions seront *appprises ensemble*). Un élément d'information essentiel peut d'abord être exprimé ainsi :

Espèces $\subset$ Écosystèmes $\subset$ Biosphère.

Un indicateur clé (apparemment) qui s'ajoute à cette suite d'inclusions est celui de la *variété* (des « espèces », des « écosystèmes »), qui pourrait bien découler de la *variation génétique* – mais, là-dessus, ce passage ne nous dit rien de plus. De fait, la formulation relative à la première des trois « composantes » de la biodiversité semble être relativement autonome par rapport aux deux autres : l'intersection de son lexique avec celui des deux autres est ainsi quasi vide, en sorte que tout ce passage ne nous dit rien sur les *liens* entre « populations » et « espèces » par exemple. Quels liens, ainsi, existe-t-il entre « variation génétique » au sein d'une « population » ou entre « populations » *et* « variété des espèces » ou « variété des écosystèmes » ? En cette étape de notre lecture, nous l'ignorons.

c) L'apprentissage qu'on peut faire dans ce qui précède est d'abord un apprentissage méphistophélique de *mots*, ensuite un apprentissage de *relations* entre les entités (non autrement connues) auxquelles ces mots renvoient. Le deuxième passage où *écosystème* a une occurrence est le suivant :

Extrait 2

Toute perte de diversité entraîne d'importantes conséquences :

- la disparition d'une population locale cause, pour l'espèce concernée, la perte d'une partie de la diversité génétique responsable des adaptations et réduit, de ce fait, les perspectives d'adaptation de l'espèce considérée
- l'extinction d'une espèce produit des effets sur l'équilibre des chaînes trophiques
- la modification d'un *écosystème* peut avoir une grande influence sur l'ensemble de la biosphère (ex : le phytoplancton des océans contribuant à modérer l'effet de serre, en consommant, dans le cadre de la photosynthèse, des quantités massives de CO₂, sa diminution causerait des effets catastrophiques)

Arrêtons-nous d'abord sur les mots et expressions coprésents dans ce passage. On y trouve *disparition, population locale, espèce, perte de la diversité génétique, adaptation, extinction, équilibre, chaînes trophiques, écosystème, biosphère, phytoplancton, effet de serre, photosynthèse, CO₂, effets catastrophiques*. Que peut-on apprendre ici ? Tout d'abord, il semblerait (a) qu'une « espèce » ait des « populations locales », (b) que les « populations » déjà évoquées appartiennent à une « espèce » donnée (une population ne serait pas constituée par exemple de lapins et de renards, ou de moineaux et de libellules) et (c) que de telles « populations locales » soient porteuses de la « diversité génétique » de l'espèce. Ensuite, la disparition – l'« extinction » – d'une « espèce » détruirait l'« équilibre » des « chaînes trophiques » ; mais pour qui rencontre l'expression de *chaîne trophique* pour la première fois (nous savons que *trophique* n'apparaît qu'une fois dans l'ensemble du texte), il s'agit là d'un bien maigre viatique. Enfin, on apprend qu'un « écosystème » pourrait subir des « modifications » influant sur l'ensemble de la « biosphère ». L'exemple donné – celui de la « diminution » du « phytoplancton des océans » – évoque les relations entre « photosynthèse », « CO₂ » et « effet de serre » : la « diminution » du phytoplancton diminuerait aussi l'activité de photosynthèse (qui absorbe du CO₂), augmenterait donc « l'effet de serre » et, par suite, pourrait avoir des « effets catastrophiques » – à propos desquels rien n'est dit ici. En tout cela, l'impression prévaut toujours d'une « armée » serrée de mots qui surgissent et s'articulent ensemble en un discours « fermé » sur lui-même, qui coule sans obstacle apparent.

d) Voici maintenant le troisième passage où *écosystème* apparaît :

Extrait 3

Outre des raisons esthétiques et éthiques, des raisons pratiques nous poussent à préserver la biodiversité :

- la biodiversité constitue une ressource naturelle capitale (alimentation, médicaments)
- les *écosystèmes* naturels contribuent à maintenir la vie humaine sur terre (purification de l'air et de l'eau, atténuation de la gravité des sécheresses et des inondations...)

Le vocabulaire est ici partiellement nouveau : *raisons esthétiques, raisons éthiques, raisons pratiques, préserver, biodiversité, ressource naturelle, alimentation, médicament, écosystème naturel, vie humaine, purification de l'air, purification de l'eau, atténuation de la gravité, sécheresse, inondation*. On note que tout ce passage se réfère au point de vue des humains : c'est par rapport à la « vie humaine » que les entités biologiques sont considérées. On y découvre la notion d'« écosystème *naturel* » (y en aurait-il d'artificiels

ou, disons, de « non naturels » ? La chose n'est pas dite). De tels écosystèmes, précise-t-on, « contribuent à maintenir la vie humaine sur terre » ; et cela – la chose vaut d'être notée –, *par l'intermédiaire du non-vivant* : air, eau, sécheresse, inondation. Les écosystèmes protègent la vie humaine des dangers « inorganiques ». Il est vrai que la première partie du passage, qui parle globalement de « biodiversité » sans mentionner les écosystèmes, fait apparaître implicitement ceux-ci comme sources de protection contre le vivant pathogène (médicaments) et comme sources d'alimentation, donc comme opérateur du maintien de la vie humaine.

e) Le quatrième extrait délimite ce qui est à étudier :

Extrait 4

Sur le plan scientifique, les composantes moléculaires et génétiques du concept de biodiversité ne figurent pas au programme de l'école primaire.

Les activités seront donc principalement centrées sur :

- la notion d'être vivant
- les conditions de développement des êtres vivants
- l'interdépendance des êtres vivants
- l'écosystème
- les relations entre l'homme et son environnement

On notera que le « vivant » est mis en avant : les aspects « moléculaires » et les aspects « génétiques » sont en effet exclus par le programme officiel. Que sont alors les « conditions de développement » des « êtres vivants » ? Quelle place font-elles au non-vivant ? Et quelle place est faite, dans un « écosystème », au non-vivant ? Ce sont là des questions qui, ici, restent sans réponse. (Soulignons en ce point que, dans l'ensemble des commentaires précédents, on est passé progressivement d'une lecture *inventoriante* à une lecture *questionnante* du texte.)

f) Le cinquième est dernier passage est une partie du tableau qui conclut le volet sur « La biodiversité » ; le voici :

Extrait 5

Programmation	Compétences	Pistes pédagogiques et activités en liaison avec l'EEDD
.....		

de préférence au cycle 3		
L'écosystème et la place de l'homme dans la nature	Prendre conscience des conséquences de l'intervention humaine sur ses environnements	nature et santé chaînes et réseaux alimentaires l'adaptation des êtres vivants aux conditions du milieu étude simplifiée d'un <i>écosystème</i> (la forêt, la mare...)
	Prendre conscience de la complexité et de la fragilité de l'environnement à travers l'analyse sommaire du fonctionnement d'un <i>écosystème</i>	les effets de l'activité humaine sur l'environnement la notion d'espèce et de biodiversité (synthèse de tous les acquis antérieurs)

Le mot *écosystème* a ici trois occurrences – sur les huit auxquelles il a « droit » dans l'ensemble du texte. De ce passage, il conviendrait de commenter, non seulement la centration sur « l'homme », non seulement l'insistance corrélatrice sur la « fragilité » de « l'environnement » (dont la « complexité » *semblerait* être un caractère associé), mais aussi, plus prosaïquement, le jeu entre singulier et pluriel, défini et indéfini concernant le mot *écosystème*, puisque d'une part on y rencontre « l'écosystème et la place de l'homme dans la nature » et d'autre part on y parle de « l'analyse sommaire du fonctionnement d'un écosystème » et de l'« étude simplifiée d'un écosystème (la forêt, la mare...) ». Ce qu'est le contenu des écosystèmes désignés par métonymie par les mots de *mare* et de *forêt*, cela n'est pas indiqué. Mais ce que l'on voit ici, c'est, bien sûr, que le rapport à la notion d'écosystème pour le professeur des écoles est fait aussi de connaissances *didactiques* : celui-ci doit pouvoir concevoir, organiser et réaliser avec ses élèves « l'analyse sommaire », l'« étude simplifiée » d'un écosystème – d'un écosystème qu'on n'ose dire « simple » puisque le texte en évoque surtout la « complexité ».

3. Le glossaire, un outil d'enquête

a) Supposons que, au stade où nous en sommes, nous souhaitions insérer, dans un glossaire du développement durable, une notice répondant à l'entrée *Écosystème*. Qu'y mettrait-on ? Dressons une liste de matériaux bruts en les numérotant :

1. La variété* des espèces* dans un *écosystème* et la variété* des *écosystèmes* de la biosphère* sont des composantes essentielles de la biodiversité*.
2. La modification d'un *écosystème* peut avoir une grande influence sur l'ensemble de la biosphère*, avec des effets parfois catastrophiques* (cas de la diminution du phytoplancton* des océans* : la diminution de la photosynthèse* qui en résulte se traduit par une moindre absorption de CO₂* et, en conséquence, par l'augmentation de l'effet de serre*).
3. Les *écosystèmes* naturels* contribuent à maintenir la vie humaine* sur terre (purification de l'air* et de l'eau*, atténuation de la gravité des sécheresses* et des inondations*) et structurent les relations entre l'homme et ses environnements*.
4. L'intervention humaine* sur l'environnement* a des conséquences liées notamment à la fragilité* et à la complexité* des *écosystèmes*.
5. Les *écosystèmes* jouent un rôle important en matière d'alimentation* et de santé*, notamment par les chaînes* et réseaux* trophiques* auxquels ils permettent d'exister.
6. Une mare* ou une forêt* peuvent être considérées comme des *écosystèmes*.
7. On peut analyser* le fonctionnement* d'un *écosystème* et, par là, prendre conscience de la complexité* et de la fragilité* de l'environnement.

Les mots munis d'un astérisque sont regardés comme devant apparaître dans le glossaire envisagé. Celui-ci, qui peut être établi par un professeur des écoles comme une partie d'un spicilège professionnel, est pris ici comme un outil de recherche permettant (a) d'*inventorier* l'offre praxéologique effective et (b) de *questionner* cette offre. Qu'y dit-on, par exemple, sur la structure et le fonctionnement des écosystèmes, sur leur « complexité », leur « fragilité », leurs évolutions possibles, etc. ? Un tel glossaire est la base indispensable sur laquelle pourra être dressé notamment un *questionnaire d'entretien* avec des professeurs des écoles en exercice ou en formation initiale, des responsables de l'EEDD et autres acteurs de ce domaine éducatif.

b) Je voudrais terminer par deux observations qui pourraient éclairer l'exploration des besoins praxéologiques que nous avons commencée. Le domaine de l'éducation au développement durable est aujourd'hui, en règle générale, mal délimité, mal viabilisé, mal stabilisé. Dans la ligne de ce qui

précède, l'un des symptômes de cet état de choses est le suivant : la liste des entrées proposées par les glossaires ou lexiques d'ouvrages traitant d'EDD montre des contenus parfois surprenants et des variations quelquefois inattendues. À titre d'illustration, voici d'abord la liste offerte par un ouvrage déjà mis à contribution ici, *L'écologie des paresseuses* (pp. 199-208) :

Comment tout savoir (ou presque) sur l'écologie ?

Atmosphère • Biocarburant • Biodégradabilité • CFC (Chlorofluorocarbures) • Chaîne alimentaire • COV • Développement durable • Dioxyde de carbone (CO₂) • Dose journalière admissible (DJA) • Empreinte écologique • Énergie grise • Énergies renouvelables • Étiquette énergie • Eutrophisation • Faire le plus de choses à manger soi-même... • Gaz à effet de serre • Gaz de pétrole liquéfié (GPL) • Géothermie • Halocarbones (CFC, HFC, HCFC) • Incinération • Indice ATMO • Jeter • Kyoto (conférence de) • Laver sans polluer • *Mooncup* • Non • Oxydes d'azote (NxOy) • Ozone (O₃) • Particules • Qualité (Haute Qualité Environnementale) • Stratosphère • Tourbière • Ultime (déchet) • Végétarien • W.-C. • Xénophile • Yaourt • Zone humide

On aura remarqué que les mots *écosystème* ou *biosphère* – notamment – ne figurent pas dans cette liste. En voici maintenant une autre, prise dans le livre signé de Francine Pellaud intitulé *Pour une éducation au développement durable* (Éditions Quæ, Versailles, 2011, pp. 191-196) :

Lexique

Agenda 21 • ATTAC • Concernation • Cybernétique • *Deep ecology* • Éducation relative à l'environnement • Effet papillon • Empreinte écologique • Homéostasie • Interdisciplinarité • Mécanique quantique • Principe de réalité et le surmoi • Principe de récursion organisationnelle • Second principe de la thermodynamique • Systémique • Taxe Tobin • Théorie quantique • Transdisciplinarité • Zone proximale de développement

Cette liste est plus surprenante encore. Brève, elle inclut la référence à certains champs praxéologiques qu'on peut regarder comme *fondamentaux* (« Théorie quantique », etc.) mais qui sont sans doute assez peu *opératoires* ici. En même temps, elle sacrifie à une certaine « couleur locale » : la notion de « concernation », par exemple, est due à André Giordan, qui préface l'ouvrage. Et elle fait droit à certains signifiants vedettes importés – classiquement ou non – dans le champ « éducatif » (ZDP de Vygotski, principe de récursion organisationnelle d'Edgar Morin, etc.). L'ensemble donne une impression, sinon de bric-à-brac, du moins de pêle-mêle arbitraire et très incomplet.

c) Avant d'arrêter ces considérations inaugurales (pour l'année 2011-2012), je soulignerai encore ceci : l'évocation – directe ou oblique – d'un ensemble de besoins praxéologiques potentiels participe en règle générale de l'habitus *rétrocognitif*, en sorte qu'on y suppose *connus* une foule d'objets que, par contraste, nous considérerons ici, sauf exception et *par principe*, comme à *étudier à nouveaux frais*, dans le cadre où ces objets apparaissent. Ainsi en va-t-il non seulement d'objets « spécifiques » d'un champ de connaissance déterminé (« photosynthèse », etc.) mais aussi d'objets qui s'introduisent dans le discours sous les oripeaux de la langue de tous les jours (tel, plus haut, « fragilité » par exemple). À cet égard, l'habitus *rétrocognitif* devra céder la place au *réflexe procognitif*, y compris à propos de ce qui est supposé « bien connu ».

UN PROGRAMME DE RECHERCHES

1. Besoins mathématiques en SHS

a) La question des besoins *mathématiques* est, on le sait, au cœur du sujet de thèse de Sineae Kim, que je rappelle : « Contribution à l'étude de l'économie et de l'écologie didactiques des connaissances mathématiques et scientifiques dans les études scolaires et universitaires en sciences humaines et sociales et en particulier en sciences de l'éducation. »

b) Dans cette perspective, trois « études & recherches » (ER) ont d'ores et déjà été lancées. J'en rappelle l'intitulé sans les commenter davantage :

ER₁. Les théories des mathématiques.

ER₂. Les praxéologies d'évitement et d'oubli des mathématiques.

ER₃. Les praxéologies de diffusion des mathématiques.

Chacune de ces ER est engendrée par une question qui se déduit immédiatement de son intitulé :

- Que sont les théories des mathématiques ?
- Que sont les praxéologies d'évitement et d'oubli des mathématiques ?
- Que sont les praxéologies de diffusion des mathématiques ?

c) Ce tableau sera complété par trois autres ER. La première (ER₄) peut se formuler ainsi :

ER₄. L'offre praxéologique en mathématiques à l'adresse des étudiants en sciences humaines et sociales (*behavioral and social sciences*).

Les deux autres ER se laissent exprimer en ces termes :

ER₅. La demande praxéologique en mathématiques des étudiants en sciences humaines et sociales (*behavioral and social sciences*).

ER₆. Les besoins praxéologiques en mathématiques des étudiants en sciences humaines et sociales (*behavioral and social sciences*).

Les questions génératrices de ces ER sont respectivement les suivantes :

- Quelle est l'offre praxéologique en mathématiques à l'adresse des étudiants en sciences humaines et sociales ?
- Que sont les besoins praxéologiques en mathématiques des étudiants en sciences humaines et sociales (*behavioral and social sciences*) ?
- Quelle est la demande praxéologique en mathématiques des étudiants en sciences humaines et sociales (*behavioral and social sciences*) ?

d) Je reviendrai là-dessus lors de la prochaine séance de ce séminaire. Mais je compléterai aujourd'hui ce bref rappel par une anecdote historique, qui illustre dans un cas simple et clair la notion de besoin praxéologique... La chose se passe dans l'État américain d'Indiana en 1897. L'article « Projet de loi Pi de l'Indiana » de *Wikipédia* la raconte ainsi :

À l'origine, un médecin et mathématicien amateur de l'Indiana, Edwin J. Goodwin, pensait avoir découvert une méthode pour réaliser la quadrature du cercle. Il alla jusqu'à déposer un brevet sur sa découverte en 1889. Il fit publier dans la revue *American Mathematical Monthly* de juillet 1894, pages 246 et 247, un article intitulé *Quadrature of the circle*, dans lequel l'auteur affirme que la vraie valeur du nombre pi est 3,2.

Que se passe-t-il ensuite ? Voici :

En 1897, il soumit à son député Taylor I. Record une proposition de loi qui fut par la suite introduite à l'assemblée sous le nom *Une loi pour introduire une vérité mathématique et offerte comme contribution à l'éducation et utilisée uniquement par l'État de l'Indiana sans paiement de royalties, sous réserve qu'elle soit acceptée et adoptée par la session parlementaire officielle de 1897*. Le texte de cette proposition de loi consiste en une série d'affirmations mathématiques (...), suivies par une énumération des réalisations de Goodwin :

... ses solutions à la trisection de l'angle, la duplication du cube et à la quadrature du cercle ont été déjà acceptées comme contributions à la science par l'American Mathematical Monthly... Et il doit être reconnu que ces dits problèmes ont été

longtemps laissés par le corps scientifique comme mystère insoluble et au-dessus de la compréhension humaine.

Il faut ici rappeler qu'aucun de ces trois problèmes, laissés à la sagacité des mathématiciens par les Grecs de l'Antiquité, n'a de solution avec la règle non graduée et le compas seuls.

L'article en anglais correspondant, "Indiana Pi Bill », propose de l'affaire le récit plus détaillé suivant :

Goodwin's "solutions" were indeed published in the AMM, though with a disclaimer of 'published by request of the author'.

Upon its introduction in the Indiana House of Representatives, the bill's language and topic occasioned confusion among the membership; a member from Bloomington proposed that it be referred to the Finance Committee, but the Speaker accepted another member's recommendation to refer the bill to the Committee on Swamplands, where the bill could "find a deserved grave". It was transferred to the Committee on Education, which reported favorably; following a motion to suspend the rules, the bill passed on February 6, without a dissenting vote. The news of the bill occasioned an alarmed response from *Der Tägliche Telegraph*, a German-language newspaper in Indianapolis, which viewed the event with significantly less favor than its English-speaking competitors. As this debate concluded, Purdue University Professor C. A. Waldo arrived in Indianapolis to secure the annual appropriation for the Indiana Academy of Sciences. An assemblyman handed him the bill, offering to introduce him to the genius who wrote it. He declined, saying that he already knew as many crazy people as he cared to.

When it reached the Indiana Senate, the bill was not treated so kindly. The committee to which it had been assigned reported it unfavorably, and the Senate tabled it on February 12; it was nearly passed, but opinion changed when one senator observed that the General Assembly lacked the power to define mathematical truth. Influencing some of the senators was a report that major newspapers, such as the *Chicago Tribune*, had begun to ridicule the situation.

Ajoutons un bref commentaire linguistique, institutionnel et biographique du passage précédent. L'article "Suspension of the rules" de *Wikipedia* indique que, "in parliamentary procedure, *suspension of the rules* is a procedure in which a deliberative assembly sets aside its normal rules of order in order to do something that it could not do otherwise". Clarence Abiathar Waldo (1852-1925), alors professeur de mathématiques à la Purdue University, était, pour l'année 1897, le président de l'Académie des sciences de l'Indiana et, à ce titre, venait s'assurer que les crédits que cette institution attendait seraient bien votés (une *appropriation* est "a legislative act authorizing the



CLARENCE ABIATHAR WALDO,
A. M., Ph. D.,
Head Professor of Mathematics.

expenditure of a designated amount of public funds for a specific purpose”). Quant au verbe *to table*, s’il signifiait à l’origine, dans le langage parlementaire, “to lay on the (speaker’s) table for discussion”, “in U.S. political jargon it has the sense of ‘to postpone indefinitely’ (1866)”.

e) On trouvera le texte intégral de l’*Indiana pi bill* en ligne à l’adresse suivante :

http://www.agecon.purdue.edu/crd/Localgov/Second%20Level%20pages/indiana_pi_bill.htm.

Il y est écrit que “the ratio of the diameter and circumference is as five-fourths to four”. En d’autres termes, et avec des notations transparentes, on aurait $\pi = \frac{C}{d} = \frac{4}{\frac{5}{4}} = \frac{16}{5} = 3,2$. Le

bill aurait ainsi eu pour conséquence d’imposer, dans l’État de l’Indiana, 3,2 pour valeur exacte de π !

2. Les problèmes de la profession de chercheur

a) Je voudrais noter une autre perspective de recherche encore, une perspective que j’ai essayé d’ouvrir – sans que cela ait été bien compris, je crois – lors de mon intervention, le 14 octobre dernier, sous le titre « Didactique et diffusion des connaissances mathématiques : questionnements et perspectives », au *Colloquium 2011* organisé à Paris, conjointement, par l’ARDM et la CFEM.

b) De quoi s’agit-il ? Nous avons travaillé jusqu’ici sur les « problèmes de la profession de professeur » – en fait de professeur de mathématiques de l’enseignement secondaire. Ce que j’ai indiqué plus haut à propos du développement durable touche, semblablement, au domaine des « problèmes de la profession de professeur des écoles ». Eh bien, le domaine dans lequel je souhaite avancer avec vous – pour de fortes raisons – est celui des *problèmes de la profession de chercheur* – de chercheur *en didactique*, par exemple (mais pas seulement, nous verrons pourquoi), de chercheur en didactique des mathématiques. Mais je n’en dirai pas plus aujourd’hui : nous y reviendrons plus longuement lors de la prochaine séance de ce séminaire.

That’s all, folks!