

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ce canard n'a qu'un bec, et n'eut jamais envie / Ou de n'en plus avoir ou bien d'en avoir deux. Jean Richepin (1849-1926)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double ambition : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

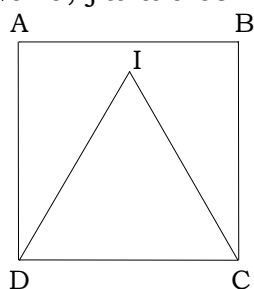
La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

→ Séance 4 – Vendredi 11 mars 2011

LE MATHÉMATIQUE ET LE DIDACTIQUE

1. Un problème de géométrie revisité

a) Lors de la première séance de ce séminaire, le vendredi 12 novembre 2010, j'avais considéré une question de géométrie qu'on peut énoncer ainsi :



que vaut l'angle $\widehat{BAI}$ dans le carré ABCD ci-après, où CID est un triangle équilatéral ? Je souhaitais illustrer ainsi l'habitus rétrocognitif, qu'exprime la question « Comment on fait déjà ? » en le distinguant de l'attitude procognitive qui peut s'exprimer par la question « Comment on pourrait faire ça ? » La première de ces deux questions suppose qu'on reconnaisse dans le problème soulevé un

type de tâches mathématiques déjà étudié et pour lequel on a construit une certaine *technique*, que l'on entend alors mettre en œuvre pour répondre à la question posée, c'est-à-dire pour déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAI}$. S'il en est bien ainsi, la fonction *didactique* de cette question – car elle a aussi des emplois *non didactiques* : on peut vouloir connaître l'angle $\widehat{BAI}$, tout simplement – peut être de *faire travailler* ladite technique, au double sens de cette expression. La question devient alors un simple *exercice*, qui permet de s'exercer à cette technique et, si l'on peut dire, de l'exercer, en la faisant « progresser » si possible, par exemple en en étendant si peu que ce soit la portée.

b) Si cette question constitue un *problème*, c'est-à-dire s'il s'agit d'une question effectivement *ouverte*, si répondre à cette question n'est pas un simple exercice, alors il faut *construire* une technique appropriée, dont la portée primitive inclura au moins la tâche proposée. La construction de cette technique *mathématique* est une affaire *didactique*, qui met en œuvre des *praxéologies didactiques*, c'est-à-dire une certaine *organisation de l'étude*. C'est une telle organisation de l'étude, un tel parcours d'étude et de recherche que j'avais décrit (sommairement) dans la même séance :

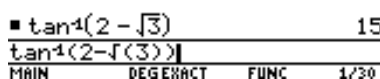
Imaginons par exemple que l'étudiant x considère ceci : la tangente de l'angle $\widehat{BAI}$ est égale au rapport $\frac{IJ}{AJ}$ (voir ci-contre). Soit $2a$ la mesure des côtés du

carré ABCD ; on a $AJ = DK = a$ et, dans le demi-triangle équilatéral DKI, rectangle en K, il vient $KI^2 = DI^2 - DK^2 = (2a)^2 - a^2 = 3a^2$ et donc $IJ = KJ - KI = 2a - a\sqrt{3}$, en sorte que l'on obtient $\tan \widehat{BAI} = 2 - \sqrt{3}$. De quel angle aigu le



nombre $2 - \sqrt{3}$ est-il la tangente ? Une calculatrice scientifique indique que $\tan^{-1}(2 - \sqrt{3}) = 15^\circ$ (voir ci-[après]). Or on « connaît » la formule

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} ; \text{ lorsque } \alpha = 15^\circ, \text{ on a } \tan 2\alpha =$$



$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ si bien, si l'on pose } t = \tan 15^\circ, \text{ on}$$

obtient l'équation en t $1 - t^2 = 2\sqrt{3}t$, ce qui s'écrit encore $t^2 + 2\sqrt{3}t - 1 = 0$ ou $(t + \sqrt{3})^2 - 4 = 0$. Cette dernière équation a pour solution positive $2 - \sqrt{3}$: on a donc bien $\widehat{BAI} = 15^\circ$.

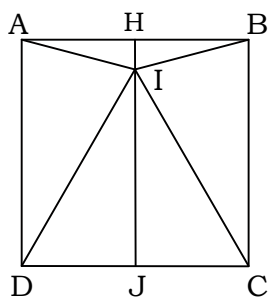
Je conclusais alors le passage que je viens de citer par ces mots :

... je me permets de solliciter vivement les participants pour qu'ils m'adressent *des solutions autres que celle-ci*, que je viens en quelque sorte de « sacrifier » ; j'en prendrai connaissance et y reviendrai lors d'une prochaine séance pour analyser les outils effectivement utilisés.

Quelques-uns d'entre vous ont accédé à ma demande et je les en remercie. Qu'ont-ils proposé ?

c) La solution la plus souvent avancée est aussi la plus « ancienne » : le triangle ADI est isocèle en D, puisque $DI = DC = DA$; comme on a $\widehat{CDI} = 60^\circ$, on a $\widehat{ADI} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ et donc $\widehat{DAI} = \widehat{DIA} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$; de là

que $\widehat{BAI} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$. Cette solution fait apparaître le fait de répondre à la question posée comme un *exercice* – un exercice qu'ont réalisé sans coup férir Jean-Jacques Salone, Éric Hakenholz, Catherine Combelles et Michel Jullien. Ce dernier ajoute une autre solution, « par le produit scalaire ».



En posant $AB = 2a$, observe-t-il, on obtient : $\vec{AI} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AB} = 2a^2$. Il vient donc : $\cos \widehat{BAI} = \frac{2a^2}{AI \cdot AB} = \frac{a}{AI}$.

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle AHI donne : $AI^2 = AH^2 + HI^2 = a^2 + HI^2$. Dans le demi-triangle isocèle IJD, on a $IJ^2 = ID^2 - DJ^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$ et donc $IJ = a\sqrt{3}$, si bien que $HI = 2a - a\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})a$. Il vient ainsi $AI^2 = a^2 + (2 - \sqrt{3})^2 a^2 = \dots = 4(2 - \sqrt{3})^2 a^2$ et donc $AI = 2a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Finalement, on a :

$$\cos \widehat{BAI} = \frac{a}{2a\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

Michel ajoute : « La calculatrice fournit $\widehat{BAI} = 15^\circ$, ce qu'on peut vérifier en utilisant $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ puisque $2\cos^2 \widehat{BAI} - 1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$. » On aura noté la similitude de cette façon de conclure (en recourant à une calculatrice) avec celle adoptée dans la solution que j'avais présentée lors de la séance 1. Dans les deux cas, le recours à la calculatrice est un geste *didactique*, qui, on va le voir, n'aura pas à apparaître dans la construction mathématique qu'il permet.

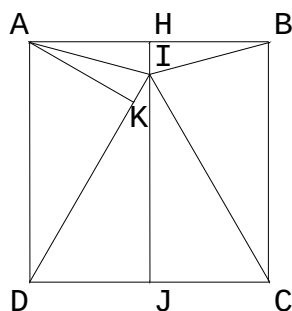
d) Dans la solution précédente, le recours au produit scalaire peut en fait être écarté : dans le triangle HAI, on a $\cos \widehat{IAH} = \frac{AH}{AI}$ et on a donc $\cos \widehat{BAI} =$

$\frac{AH}{AI}$. Ayant obtenu que $\frac{AH}{AI} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$, on peut alors éliminer la calculatrice en usant directement de l'identité si $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, qui donne ici, comme on l'a vu, $\cos 2t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc $2t = 30^\circ$, ce qui fournit $t = 15^\circ$. Bien entendu, la calculatrice aura pu permettre de *découvrir* que l'on a $\cos^{-1} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} = 15^\circ$ et inspirer le recours à l'identité trigonométrique exploitée ici ; mais il s'agira alors, je le répète, d'un geste d'étude, d'un geste

didactique, et non d'un composant inscrit dans l'organisation mathématique que constitue la solution donnée ici à ce problème : là comme ailleurs, il faut distinguer *le didactique*, et plus exactement *le didactico-mathématique*, du mathématique *stricto sensu*, qui est *le produit de ce didactique*.

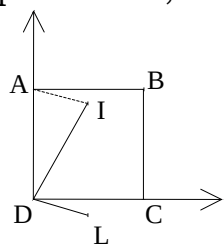
e) Bien entendu, les diverses solutions évoquées se situent à des niveaux trophiques différents, et on peut vouloir abaisser ce niveau (on pourrait aussi, pour d'autres raisons, vouloir l'élever...). Mais c'est sur un autre point que je voudrais attirer l'attention maintenant. Je noterai d'abord que le processus d'étude et de recherche doit aboutir à un *produit* qui est une « solution » du « problème » ; mais ce *processus* de production, peut emprunter des *parcours* divers : les praxéologies *d'étude* mises en jeu peuvent donc varier. Je souhaite surtout insister sur un point qui s'est effacé, me semble-t-il, de la culture mathématique scolaire. Pourquoi rechercher *plusieurs* manières d'arriver à la conclusion que $\widehat{BAI} = 15^\circ$? Il ne s'agit nullement – comme porte à le croire une certaine culture mathématique qui règne, par exemple, au CAPES – d'exhiber sa virtuosité mathématique en multipliant les démonstrations à l'aide d'outils mathématiques divers, les uns très simples, les autres plus sophistiqués ! Il s'agit simplement de s'assurer que le résultat auquel on est parvenu par une voie est bien « solide » ; il s'agit tout simplement, donc, d'une exigence de technique didactique qui consiste à varier les « stratégies » d'étude *au nom de la dialectique des médias et des milieux*. Bien entendu, dans la culture mathématique scolaire traditionnelle, cela n'a guère de sens : quand on a donné la démonstration par les angles, on considère que le résultat est sûr et certain, que l'incertitude est entièrement dissipée. Mais cela est une *illusion scolaire*, due au fait que l'on suppose un « maître de vérité » – le professeur – qui vienne garantir la validité de la démonstration, et qui n'est remplaçable par aucun autre « milieu adidactique ». Dans la problématique de l'enquête, au contraire, le « maître » est un milieu parmi d'autres et il convient donc de rechercher d'autres milieux pour vérifier, contrôler le résultat obtenu ou conjecturé.

f) Supposons ainsi que nous ayons fait parler un certain « milieu » et recueilli sa réponse : $\widehat{HAI} = 15^\circ$. Comment *contrôler* cette réponse ? Poser cette question, vouloir y répondre est, je le répète, un interdit de la culture scolaire traditionnelle – un crime de lèse-professeur. Mais c'est un interdit dont, dans la perspective du questionnement du monde, on peut vouloir se débarrasser ! Voici par exemple une manière non encore envisagée de contrôler le résultat obtenu. Soit K le projeté orthogonal de A sur (DI) ; il est immédiat que $\widehat{KAD} = 60^\circ$; il en résulte aussitôt que $\widehat{HAK} = 30^\circ$.



S'il est vrai que $\widehat{HAI} = 15^\circ$, la demi-droite $[AI]$ est la *bissectrice* de l'angle $\widehat{HAK}$ et l'on devrait avoir, en conséquence, $IH = IK$. On voit alors que, *en sens inverse*, pour démontrer que $\widehat{HAI} = 15^\circ$, il suffit de démontrer que l'on a $IH = IK$. Or, en prenant pour unité de longueur le côté du carré, on a $IK = ID - KD = 1 - 1 \times \cos 30^\circ$; par ailleurs on a $IH = HJ - IJ = 1 - 1 \times \cos 30^\circ$, CQFD.

g) Voici un autre *contrôle*, utilisant cette fois les *nombre complexes*. Soit le repère orthonormal direct $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$; dans ce repère, les points I et A ont pour affixe, respectivement, $z_I = e^{i\pi/3}$ et $z_A = i = e^{i\pi/2}$. Le nombre complexe $z_I - z_A = e^{i\pi/3} - i = e^{i\pi/3} - e^{i\pi/2}$ est l'affixe z_L du point L tel que $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{AD}$. Si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ est la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAI}$, le



nombre $z_L e^{i\theta}$, affixe du point image de L par la rotation de centre D et d'angle θ , est réel positif. Pour *contrôler* la valeur antérieurement trouvée pour $\widehat{BAI}$, à savoir

$$15^\circ = \frac{15}{180} \times 180^\circ = \frac{1}{12} \times \pi \text{ rad} = \frac{\pi}{12} \text{ rad},$$

on peut tenter de montrer que le nombre $z_L e^{i\pi/12}$ est réel positif en essayant de le faire apparaître sous la forme $\rho(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$, avec $\rho > 0$. Mais en procédant ainsi dans le cas général, on peut aussi vouloir tenter de (*re*)trouver la valeur de $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ telle qu'il en soit ainsi. On a : $z_L e^{i\theta} = e^{i\theta}(e^{i\pi/3} - i) = e^{i\theta}(e^{i\pi/3} - e^{i\pi/2})$

$= e^{i(\pi/3 + \theta)} - e^{i(\pi/2 + \theta)}$. Pour la raison qu'on a évoquée – arriver à une écriture de la forme $\rho(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$ –, écrivons que l'on a : $-e^{i(\pi/2 + \theta)} = e^{-i\pi} e^{i(\pi/2 + \theta)} = e^{i(\theta - \pi/2)}$. Il vient alors : $z_L e^{i\theta} = e^{i(\pi/3 + \theta)} + e^{i(\theta - \pi/2)}$. Pour que θ convienne, donc, il faut que l'on ait $\theta - \frac{\pi}{2} = -\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$. Cette égalité s'écrit encore $2\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$, soit $\theta = \frac{\pi}{12}$:

on retrouve ainsi le résultat attendu. On peut vérifier que l'on a : $z_L = e^{i\pi/3} - e^{i\pi/2} = e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/2} = e^{-i\pi/12} (e^{i(\pi/3 + \pi/12)} + e^{i(-\pi/2 + \pi/12)}) = e^{-i\pi/12} (e^{i(5\pi/12)} + e^{i(-5\pi/12)}) = (2\cos \frac{5\pi}{12})e^{-i\pi/12}$. Il vient donc : $z_L e^{i\pi/12} = 2\cos \frac{5\pi}{12} > 0$. Notons en outre que,

comme $AI^2 = \frac{1}{4} + \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{4} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$, on a $2\cos \frac{5\pi}{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ et donc

$\cos \frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$. Comme $\cos \frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12}$, et comme on a vu

que $\cos \frac{\pi}{12}$ ($= \cos 15^\circ$) $= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$, on vérifie qu'on a bien $\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 1$, ce qui fait toujours plaisir.

2. Praxéologies didactiques

a) Plusieurs d'entre vous auront reconnu au passage, dans ce qui précède, le maniement de cet outil didactique que constituent ce que j'ai appelé des questions *cruciales*. Mais il faut à nouveau que je souligne ce que l'adjectif « didactique » signifie en TAD. Je pourrais reproduire la définition formelle que je donne du didactique, que, en l'espèce, je formulerai ainsi : est didactique tout « geste » accompli par quelque instance (personne ou institution) qui vise, par définition, à aider quelque instance à établir un certain rapport à une certaine œuvre (♥). Pratiquement, un geste didactique a pour objectif de provoquer la *formation* et/ou le *fonctionnement* de certains systèmes didactiques $S(X; Y; ♥)$. À l'intérieur d'un tel système, un geste didactique peut être accompli aussi bien par $x \in X$ que par $y \in Y$. Ce que je veux souligner par là, c'est que le qualificatif « didactique » *n'est pas réservé à y*. À plus forte raison n'est-il pas réservé au professeur dans une classe scolaire. Lorsqu'un élève propose à la classe $[X; y]$ (via le professeur y) de faire tel « geste » lors de l'étude d'une certaine question Q (supposée être l'enjeu didactique ♥), c'est, *volens nolens*, un geste didactique à l'endroit de X , ou plutôt de $[X; y]$, que x accomplit (même si la réalisation de ce geste est soumise à l'accord de y). Lorsqu'un élève x étudie *seul*, à sa table de travail, une question Q proposée par y , il effectue un certain nombre de gestes didactiques, qui, en l'espèce, commencent par être autodidactiques avant de devenir peut-être, un peu plus tard, $[X; y]$ -didactiques.

X

b) Pour une personne x (cela peut être l'un de nous par exemple) qui étudie la question de l'angle $\widehat{BAI}$, se poser la question « Comment trouver la valeur d'un angle dans une figure géométrique ? » est un geste didactique. Répondre à celle-ci en disant « On peut le faire par des considérations angulaires tirant profit des triangles composant la figure (triangles isocèles, équilatéraux, rectangles, etc.) ou qu'on peut y faire apparaître », cela constitue un autre geste didactique, qui ouvre un parcours d'étude et de recherche éventuel. Répondre à la même question en (se) disant que « On peut le faire à l'aide de la trigonométrie » ouvre encore d'autres parcours d'étude et de recherche possibles. Se poser la question « Comment démontrer qu'un angle a telle valeur donnée » ou, plus précisément, « Comment démontrer qu'un angle est de 15° ? » est encore un geste d'étude ; répondre à cette dernière question en disant « On peut essayer de le faire en démontrant que le double de l'angle est complémentaire d'un angle de 60° » est encore un geste didactique. Etc. Notons que chacun de ces

gestes peut, dans une classe scolaire, être le fait *d'un élève ou du professeur* : le « tissage topogénétique » de la réponse n'est pas le même selon le cas, mais le geste d'étude et de recherche, le geste didactique, lui, est *invariant*.

c) À ces rappels, qui sont aussi des mises au point, j'ajoute que l'étude d'une œuvre, quelle qu'en soit la nature, suppose plus généralement des *praxéologies didactiques* organisées autour de l'enjeu que l'on se donne, praxéologies qui apparaissent au regard extérieur comme formant une *organisation* praxéologique de nature *didactique*, dont certains composants essentiels sont des organisations *mathématiques* (ou autres) antérieurement produites ou que le système didactique $S(X; Y; \heartsuit)$ se rend disponibles (ce qui suppose de sa part une activité d'étude *finalisée*). Dans le cas très général où $\heartsuit$ est une question Q (par exemple une question Q_i à propos d'une œuvre O), la TAD analyse de telles organisations didactiques, au premier ordre, par le modèle des *moments de l'étude*, lesquels se réfèrent à la construction de la réponse $R^\heartsuit$ qui apparaît dans le schéma herbartien semi-développé, que je rappelle ici : $[S(X; Y; Q) \rightrightarrows M] \rightrightarrows R^\heartsuit$. En supposant que celle-ci propose une réponse justifiée à une question du type « Comment réaliser la tâche t ? », le modèle évoqué comporte six grands moments, c'est-à-dire que le travail d'étude et de recherche se situe dans un espace à 6 dimensions (notez que je modifie ici légèrement la formulation du premier moment) :

1. le moment de *l'identification d'un type de tâches* $T \ni t$ et de *la première rencontre avec* T ;
2. le moment de *l'exploration* (plus ou moins poussée) du type de tâches T et de *l'émergence de la technique* τ ;
3. le moment *technologico-théorique*, qui voit *la création du bloc* $[\theta/\Theta]$ (ce moment est contemporain notamment du premier moment, lorsqu'il faut identifier T) ;
4. le moment *du travail* de l'organisation praxéologique $[T/\tau/\theta/\Theta]$ ainsi ébauchée, et en particulier *du travail de la technique*, où *l'on fait travailler* les éléments de l'organisation élaborée pour s'assurer qu'ils « résistent » (et, le cas échéant, pour les améliorer), et où, en même temps, on *travaille sa maîtrise* de l'organisation considérée, et en particulier de la technique τ ;
5. le moment de *l'institutionnalisation*, où l'on *met en forme* l'organisation praxéologique $[T/\tau/\theta/\Theta]$, en précisant chacun de ses composants, et en l'amalgamant le cas échéant à un complexe praxéologique existant ;
6. le moment de *l'évaluation*, où l'on évalue sa *maîtrise* de l'organisation praxéologique créée, mais aussi où l'on évalue *cette organisation praxéologique elle-même*.

d) La réalisation de ces moments didactiques suppose des praxéologies didactiques appropriées. Mais on bute en ce point sur une difficulté qu'il vaut la peine de commenter. Comment les professeurs font-ils pour résoudre le problème de détermination de l'angle $\widehat{BAI}$? Comment ont fait ceux dont j'ai cité le nom plus haut et que je ne saurais trop remercier ? Pour eux, comme on le dit dans la langue du sérail, « c'est immédiat ». La réponse, ils l'obtiennent par la mise en œuvre presque mécanique d'une praxéologie mathématique « toute montée », qu'ils ont, depuis longtemps, fait travailler : la praxéologie « des angles », que je ne prendrai pas la peine d'explicitier davantage ici. Le problème est bien différent pour qui n'a pas la « maîtrise » de cette praxéologie. Ainsi en va-t-il pour l'élève qui vient de la découvrir dans un processus de construction encore (et peut-être définitivement) inachevé : en ce cas, la « mécanique mathématique » se cherche encore, en même temps que le travail didactique de construction se poursuit, si peu que ce soit. Or, et cela *dans tous les cas*, il y a sur cela *comme un silence*, un silence didactique, un silence sur un faire didactique : comment le professeur, comment l'élève parviennent-ils (ou non) à la réponse qu'ils proposeront ? *Ordinairement, cela est tu*. On sait que, là où le professeur a normalement le secours d'une culture pourvoyeuse de moyens praxéologiques éprouvés, l'élève débutant en ces matières est abandonné à lui-même avec, au mieux, l'aide du « cours » délivré par le professeur et des exercices faits et corrigés sous sa direction, par exemple. En fait, tout se passe comme si l'on supposait que ce silence masque l'intervention (ou, trop souvent, l'absence d'intervention) de quelque *muse* – mathématique, ou physique, etc. Tout se passe comme si on était là devant une scène *indicible* et qui, de toute façon, *doit être laissée à son mystère*. Sur ce seuil, semble-t-on nous dire, s'arrête toute analyse didactique. À moins de violer les consciences. D'entrer dans la tête du « sujet » ; ce que d'aucuns brûlent au reste de faire.

e) Le « mauvais élève », qui deviendra « ancien mauvais élève », est alors tout près d'imaginer quelque « magie », voire un peu de sorcellerie... Mais laissons cela et demeurons matérialistes ; et revenons pour cela aux fondamentaux : x dispose d'un certain milieu pour l'étude M , dont le schéma herbartien développé explicite ainsi la structure générique :

$$M = \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m \}.$$

Comme on le sait, cette description rompt avec une fiction scolaire indurée en ce qu'elle fait une place explicite à la recherche de réponses « toutes faites » : les réponses notées $R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond$. En référence à une pédagogie de l'enquête ébauchée jadis à propos des TPE et des IDD, j'avais indiqué « cinq gestes de base », que je rappelle ici :

- 1) *Observer* les réponses $R^\diamond$ déposées dans la culture ou les pratiques sociales.
- 2) *Analyser*, au double plan expérimental et théorique, ces réponses $R^\diamond$.
- 3) *Évaluer* ces mêmes réponses $R^\diamond$.
- 4) *Développer* une réponse propre $R^\heartsuit$.
- 5) *Diffuser et défendre* la réponse $R^\heartsuit$ ainsi produite.

Ainsi qu'on le voit, non seulement il n'y a pas, ici, scotomisation de la recherche des $R^\diamond$, mais le travail d'enquête sur les réponses $R^\diamond$ éventuelles n'est pas dissocié du travail d'élaboration de la réponse $R^\heartsuit$ recherchée : l'un et l'autre sont en règle générale solidaires, et une partie du travail requis consiste justement à *associer et à dissocier* les réponses $R^\diamond$ recueillies et la réponse $R^\heartsuit$ en construction (j'illustre cela un peu plus loin). Six complexes de praxéologies didactiques furent, dès l'année 2000, désignées comme cruciales dans l'ensemble de ce travail et explicitées sous le nom de *dialectiques* – je parlerai maintenant de *dialectiques de l'enquête* :

- 1) La dialectique *du sujet et du hors-sujet*.
- 2) La dialectique *du parachutiste et du truffier*.
- 3) La dialectique *des boîtes noires et des boîtes claires*.
- 4) La dialectique *de l'« excription » et de l'inscription*.
- 5) La dialectique *des médias et des milieux*.
- 6) La dialectique *de la diffusion et de la réception*.

Je ne les commenterai pas plus ici, sauf pour souligner, une fois de plus, que ces dialectiques, dont certaines concernent plus étroitement la recherche et l'analyse des réponses $R^\diamond$, ne séparent pas travail autour des $R^\diamond$ et construction de $R^\heartsuit$.

3. Une brève enquête mathématique

a) Je voudrais illustrer tout cela à propos de la question de géométrie sur laquelle nous nous sommes arrêtés plus haut. Une élève de collège, x , recherche des $R^\diamond$ et, fouillant le Web, trouve rapidement ceci (à l'adresse <http://www.ilemaths.net/forum-sujet-162438.html>) :

Mesure d'un angle dans carré + triangles équilatéraux Posté le 28-10-07 à 14:29

Posté par florian0250

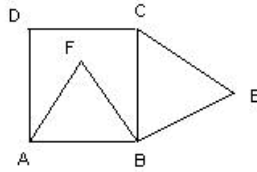
Bonjour,

Je bloque sur un exercice et j'aimerais avoir une petite aide :\$!

Voici l'énoncé :

“Dans le carré ABCD, on construit les triangles équilatéraux directs ABF et CBE.

Figure (approximative) :



1) Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DA} ; \overrightarrow{DF})$

J'ai déjà essayé en décomposant avec la relation de Chasles de différentes façon mais j'ai abouti pas ! C'est sûrement quelque chose de simple que je ne vois pas... Si quelqu'un pourrait m'aider s'il vous plaît ...

Je vous remercie

Bonne journée !

Mesure d'un angle dans carré + triangles Posté le 28-10-07 à 15:11

Posté par cva

bonjour

$$\widehat{DAF} = \frac{\pi}{6}$$

le triangle AFD est isocèle donc

$$\widehat{FDA} = \frac{1}{2} (\pi - \widehat{FAD}) = \frac{1}{2} (\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{5\pi}{12} \quad (2\pi)$$

bon courage

re : Mesure d'un angle dans carré + triangles équilatéraux Posté le 28-10-07 à 17:53

Posté par florian0250

Merci beaucoup !!!!!!!

Par contre, je bloque encore sur une autre question : s :

“Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CD} ; \overrightarrow{CE})$ et en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{DE})$ ”

Pour la première partie, j'ai réussi :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{CD} ; \overrightarrow{CE}) &= (\overrightarrow{CD} ; \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CE}) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

Mais pour en déduire $(\overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{DE})$, je ne vois pas ...

Je vous remercie =)

re : Mesure d'un angle dans carré + triangles équilatéraux Posté le 28-10-07 à 18:04

Posté par florian0250

Encore une histoire de triangle isocèle que j'avais pas vu -_-' !

Merci quand même !

angles orientés

Posté le 03-11-07 à 12:38

Posté par master titan

je suis en premiere
 bonjours a tous, j'ai exactement le meme exercice que toi florian0250 et je n'y arrive pas
 non plus.

j'aimerais savoir, sur ta figure le triangle AFD est isocèle ????

angles orientés

Posté le 03-11-07 à 13:20

Posté par cva

bonjour

par hypothèse:

AD=AF=AB donc ADF est isocèle en A(2 côtés consécutifs égaux)

a bientôt

re : Mesure d'un angle dans carré + triangles équilatéraux Posté le 03-11-07 à 14:28

Posté par master titan

je n'arrive pas a repondre a cette question : " determiner une mesure de l'angle (DF ; DE).

Que peut-on en deduire pour les points D, F et E ?"

MERCI DE VOTRE ATTENTION

re : Mesure d'un angle dans carré + triangles équilatéraux Posté le 03-11-07 à 15:11

Posté par master titan

?????????

re : Mesure d'un angle dans carré + triangles équilatéraux Posté le 03-11-07 à 15:49

Posté par cva

bonjour

la relation de Chasles donne:

(FD,FE)=(FD,FA)+(FA,FB)+(FB,FE) (en termes de vecteurs)

$$= \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} (2\pi)$$

$$= \pi (2\pi)$$

les points D;E;F sont alignés

a bientôt

re : Mesure d'un angle dans carré + triangles équilatéraux Posté le 03-11-07 à 16:26

Posté par master titan

ce que tu viens de faire, c'est pour prouver que D, E et F sont alignés.

MAIS la mesure de (DF ; DE) c'est quoi.

Moi, j'ai écrit que c'était égal a 0. est ce juste ??????

re : Mesure d'un angle dans carré + triangles équilatéraux Posté le 03-11-07 à 16:56

Posté par cva

bonjour
si les points sont alignés que peut valoir l'angle DF,DE
l'examen graphique confirmera la réponse que vous attendez
cordialement

re : Mesure d'un angle dans carré + triangles équilatéraux Posté le 03-11-07 à 16:58

Posté par master titan

c'est bien ça, c'est égal à 0.
merci beaucoup de votre aide

re : Mesure d'un angle dans carré + triangles équilatéraux Posté le 06-11-07 à 23:31

Posté par master titan

bonjour, excuse moi, comment a-tu trouvé (FB ; FE) ?
merci de votre attention

[Répondre à ce sujet](#)

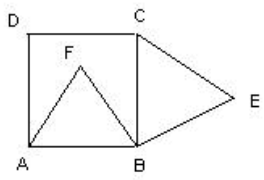
Comme on l'aura noté, l'échange précédent, amorcé le 28 octobre 2007, prend fin abruptement le 6 novembre. Il y a là, exposée de façon non structurée, certes, une réponse $R^\diamond$ dont l'élève x peut vouloir tirer avantage pour bâtir sa réponse $R^\heartsuit = R^\diamond_x$. Sans entrer ici dans une analyse approfondie de cet épisode « interdidactique », on notera simplement, en se référant à la question originale évoquée plus haut, les aspects suivants.

b) Tout d'abord, la question que x étudie n'apparaît ici que de façon incidente : le but est en fait de démontrer que les points D, E et F sont alignés. C'est donc une « sous-réponse » qu'il faut excrimer. (Démontrer cet alignement de points était en vérité la motivation de la question relative à l'angle $\widehat{BAI}$.)

c) Une telle excription de la question idoine se heurte à l'emploi, dans l'échange examiné, de plusieurs œuvres mathématiques *inconnues de x*, notamment les angles de vecteurs orientés, la relation de Chasles pour ces angles et la mesure des angles en radians : x ne trouvera ainsi nulle part dans ce document la valeur de 15° « attendue ». Lui faut-il alors étudier ces œuvres et jusqu'à quel point ? Telle est toujours la grande question didactique. Imaginons ici que x parvienne à la conclusion qu'il lui suffit (1) de remplacer chaque fois les écritures inconnues du type $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE})$, écrites quelquefois sans les flèches, par la notation $\widehat{CDE}$ et, (2), en ignorant la notation (2π) , qui revient trois fois sous la « plume » de cva, d'exprimer en degrés tous les angles ainsi obtenus, par exemple à l'aide d'un convertisseur trouvé sur Internet. Cette technique d'excription permettra alors à x , en se

guidant sur la figure, d'inscrire dans son carnet de bord (brouillon, etc.) ce qui suit :

Notes 1



$\widehat{DAF} = 30^\circ$.

le triangle AFD est isocèle donc

$$\widehat{FDA} = \frac{1}{2} (180^\circ - \widehat{FAD}) = \frac{1}{2} (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$$

$$\widehat{DCE} = \widehat{DCB} + \widehat{BCE} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

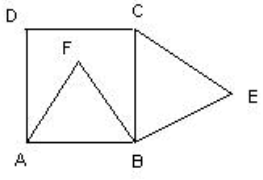
$AD = AF = AB$ donc ADF est isocèle en A (2 côtés consécutifs égaux)

$$\widehat{DFE} = \widehat{DFA} + \widehat{AFB} + \widehat{BFE} = 75^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ.$$

les points D, E, F sont alignés

d) Cela ne lui donnera pas encore une réponse $R^\heartsuit = R_x^\diamond$. Pour cela, x devra produire d'abord une réorganisation de ses notes, qui pourrait par exemple prendre la forme suivante :

Notes 2



$\widehat{DAF} = 30^\circ$ [complémentaire de $\widehat{FAB} = 60^\circ$]

le triangle AFD est isocèle en A car $AD = AF = AB$ (2 côtés consécutifs égaux)

donc

$$\widehat{FDA} = \frac{1}{2} (180^\circ - \widehat{FAD}) = \frac{1}{2} (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$$

$$[\text{et donc } \widehat{CDF} = \widehat{CDA} - \widehat{FDA} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.]$$

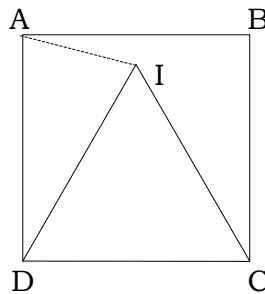
e) Finalement, la rédaction que proposera x – que je suppose latiniste... – en utilisant les notations de l'énoncé donné dans la classe pourrait être la suivante (on notera le commentaire de la professeure en fin de micro-copie) :

Micro-devoir n° 17

Classe : 4^e 3

Élève : Agathe Curti

Le triangle IDC étant équilatéral, on a $\widehat{IDC} = 60^\circ$. Il en résulte que l'on a : $\widehat{ADI} = \widehat{ADC} - \widehat{IDC} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.



Du fait que $DI = DC = DA$, le triangle ADI est isocèle en A. On a donc : $\widehat{IAD} = \widehat{AID} = \frac{180^\circ - \widehat{ADI}}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$. Il découle de cela qu'on a : $\widehat{BAI} = \widehat{BAD} - \widehat{IAD} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$, QED.

Note : 2/5

Commentaire : C'est correct mais il est évident que vous avez été aidée. D'où votre note.

L'élève x (dont nous connaissons enfin l'identité !) a péché sous le rapport de la dialectique de la diffusion et de la réception ! Cela dit, contre des idées encore dominantes, on devra s'interroger (comme y invite l'absurde commentaire professoral) sur l'importance du travail supposé réalisé par x et sur ses effets d'apprentissage éventuels ; mais je ne le ferai pas ici.

f) Ce qui précède suggère, je crois, que la question des œuvres que l'on note O_{n+1} , ..., O_m dans le schéma herbartien développé *reste à étudier plus nettement*. Dans l'exemple illustratif que j'ai pris ci-dessus, il semble possible

de « traduire » les références aux œuvres supposées inconnues de x dans des termes relatifs à des œuvres supposées, elles, bien connues : il y a là un exemple suggestif de maniement de la dialectique des boîtes noires et des boîtes claires. En nombre de cas, cependant, un tel évitement n'est pas si facile et il convient d'étudier les œuvres rencontrées ne serait-ce que pour estimer dans quelle mesure on ne peut sans passer... Nous reviendrons sur tout cela.

NÉGATIVITÉS ET POSITIVITÉS DIDACTIQUES

1. Problématiques en didactique : un bref rappel

a) Lors de la séance précédente de ce séminaire, j'écrivais ceci :

[Dans la problématique *contraire* de la problématique de base, on] recherche les ensembles C de conditions réalisables tels que $\text{non-}\mathfrak{R}(K_0, C, \wp_0, U_0)$, c'est-à-dire tels que, sous les contraintes K_0 , l'instance U_0 *ne rencontre pas* l'entité praxéologique $\wp_0$. Soulignons que la didactique est la science de la diffusion *et de la non-diffusion* des entités praxéologiques, de la rencontre *et de l'évitement* des praxéologies... On peut parler ici de problématique de base *positive* et de problématique de base *négative*. On peut et on doit développer une didactique *négative* des mathématiques (et des sciences), qui montre comment les institutions organisent l'évitement de praxéologies mathématiques ou scientifiques, par exemple dans le cadre de l'éducation au développement durable : développer la didactique du développement durable suppose ainsi de développer en son sein une didactique *négative* des mathématiques et des sciences (notamment).

b) À ces problématiques contraires, il faut associer les problématiques duales que sont la problématique *possibiliste* et la problématique *impossibiliste*, contraires l'une de l'autre, dont je rappelle une formulation :

Une problématique complémentaire, dite duale de la problématique de base, est la problématique *possibiliste*, dans laquelle on cherche à identifier les entités praxéologiques $\wp$ telles que $\mathfrak{R}(K_0, C_0, \wp, U_0)$, où K_0 , C_0 et U_0 sont fixés ; cette problématique s'exprime « en mots » de la façon suivante : « Étant donné un certain ensemble de conditions C_0 et un certain ensemble de contraintes K_0 auxquelles telle instance U_0 est soumise, quelles entités praxéologiques $\wp$ est-il possible que cette instance U_0 rencontre ? » Cette question doit être complétée par celle-ci, qui définit la problématique *contraire*, qu'on peut appeler *impossibiliste* : « Étant donné un certain ensemble de conditions C_0 et un certain ensemble de contraintes K_0 auxquelles telle instance U_0 est soumise, quelles entités praxéologiques $\wp$ est-il vraisemblable que cette instance U_0 ne rencontre pas ? » L'expression symbolique correspondante est

ici : $\text{non-}\mathfrak{R}(K_0, C_0, \wp, U_0)$. L'identification des entités praxéologiques $\wp$ telles que $\mathfrak{R}(K_0, C_0, \wp, U_0)$ et celles qui vérifient $\text{non-}\mathfrak{R}(K_0, C_0, \wp, U_0)$ permet la reconnaissance de l'*offre praxéologique* adressée à U_0 sous les contraintes K_0 et dans les conditions C_0 .

c) J'ajoute à cela deux autres problématiques duales l'une de l'autre, la problématique *primordiale* et la problématique *interventionniste* :

[La problématique *primordiale* peut être formulée ainsi :]

Étant donné un projet d'activité Π_0 dans lequel telle institution ou telle personne U_0 envisage de s'engager, quel est, pour cette institution ou cette personne, l'équipement praxéologique $\{ \wp \}$ qui peut être jugé indispensable ou simplement utile dans la conception et l'accomplissement de ce projet ?

On note $\mathfrak{S}(\wp, \Pi_0, U_0)$ le fait que $\wp$ soit utile ou indispensable à U_0 pour concevoir et accomplir Π_0 . La problématique duale de la problématique *primordiale* est dite *interventionniste* : elle conduit à identifier les projets Π tels que $\mathfrak{S}(\wp_0, \Pi, U_0)$. Dans le premier cas, pour une instance U_0 – personne ou institution – qui souhaite s'engager dans la conception et la réalisation d'un projet Π_0 , on se demande quelles sont les praxéologies $\wp$ utiles ou indispensables ($\mathfrak{S}$). Dans le second cas, on se demande à quels projets Π concernant telle instance U_0 , la praxéologie $\wp_0$ apparaît utile, voire indispensable.

2. Une recherche en développement

a) Ces rappels étant faits, je m'arrêterai maintenant sur une recherche qui vient de démarrer et qui devrait aboutir dans un petit nombre d'années à une soutenance de thèse, celle de Sineae Kim. Le sujet officiellement déposé est le suivant :

Contribution à l'étude de l'économie et de l'écologie didactiques des connaissances mathématiques et scientifiques dans les études scolaires et universitaires en sciences humaines et sociales et en particulier en sciences de l'éducation.

La formulation précédente est accompagnée, dans le dossier de dépôt de la thèse, d'une présentation que je reproduis partiellement ci-après :

La recherche que nous nous proposons de mener à bien se situe dans le cadre de la *théorie anthropologique du didactique* (TAD). Élaborée à propos de la diffusion sociale des connaissances mathématiques, notamment dans le cadre scolaire et universitaire, cette théorie a, depuis une dizaine d'années, été mise

en œuvre dans l'étude de la diffusion sociale d'autres types de connaissances, en particulier celles relevant de diverses disciplines scolaires.

La problématique générale dans laquelle s'inscrit cette recherche vise à faire progresser notre connaissance fine de ce que l'on nomme en TAD *l'économie et de l'écologie institutionnelles* des connaissances mathématiques et scientifiques, que celles-ci apparaissent pour elles-mêmes ou, plus généralement, en relation avec des outils qui les mobilisent de façon explicite (comme dans certains modèles) ou incorporée (comme dans certains logiciels). Les institutions étudiées appartiennent à l'univers des sciences sociales et humaines dans l'enseignement scolaire et universitaire et tout particulièrement à celui des sciences de l'éducation dans l'enseignement universitaire. À leur propos, une tradition ancienne, illustrée par l'ouvrage classique de C. P. Snow, *The Two Cultures* (1960), a souligné le divorce contemporain entre cultures « humanistiques » et cultures scientifiques, divorce qui affecte une majorité d'institutions appartenant globalement au monde dit des *humanités*.

En un temps où le projet plus que séculaire (1902) de constituer, à côté des humanités classiques, des *humanités scientifiques* semble reprendre vie, notre recherche vise plus concrètement à analyser les conditions et contraintes de la vie des connaissances scientifiques (et en particulier mathématiques) dans les institutions humanistiques, en vue d'éclairer les possibilités d'évolution de ces conditions et contraintes.

À cet égard, nous examinerons tout particulièrement les stratégies institutionnelles (et personnelles) par lesquelles se construit le déficit fonctionnel apparent de connaissances scientifiques – marqué notamment par la rareté, voire l'absence de formalismes de type scientifique – dans les sciences humaines et sociales, où nous nous efforcerons d'identifier les divers effets praxéologiques du phénomène crucial d'édulcoration (*fading*) des connaissances scientifiques.

b) Pour dire les choses autrement, la recherche vise à élucider *l'écologie et l'économie de l'équipement praxéologique des personnes et des institutions en matière mathématique et scientifique* ainsi que les *dynamiques praxéologiques* qui les modifient à court, moyen et long termes. Une telle étude doit porter, bien entendu, sur les *types de tâches*, les *techniques*, les *technologies*, les *théories* – c'est-à-dire sur les praxéologies – à *teneur mathématique et scientifique*. Dans quelles conditions et sous quelles contraintes, de telles praxéologies diffusent-elles ou ne diffusent-elles pas ? Tel est le problème.

c) Avant d'entrer de plain-pied dans la présentation de quelques données empiriques relatives à ce problème, je voudrais souligner encore le phénomène – sur lequel nous aurons à revenir – de la *pénurie praxéologique*, lié à la *rareté de l'offre praxéologique institutionnelle*, que je crois être un

phénomène *général* (il ne concerne pas que les mathématiques, par exemple, non plus que les études universitaires en sciences de l'éducation seulement). Pour illustrer ce point, je reviens un instant sur le cas du levier (sur lequel nous nous sommes arrêtés lors des deux premières séances de ce séminaire), à propos de la notion de *moment d'une force*. Dans un manuel de physique pour la classe de seconde conforme au programme de 1957, le « Lamirand et Joyal » (publié chez Masson en 1960), le summum en la matière se trouve dans la définition suivante :

48. **Moment d'une force par rapport à un axe.** – Dans l'étude précédente, nous constatons que l'action d'un poids est caractérisée par le produit $P \times l$. Cette quantité s'appelle le **moment** du poids P par rapport à l'axe O .

La notion de moment par rapport à un axe peut se généraliser. Nous nous bornerons au cas d'une force F *orthogonale* à un axe Δ .

Considérons une force F située dans un plan π et un axe Δ , *perpendiculaire au plan π* , coupant ce plan en O (fig. 67).

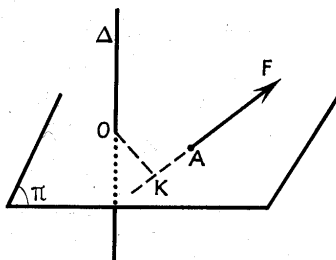


Fig. 67. – Le moment de la force F par rapport à l'axe Δ est : $F \times OK$.

On appelle moment de la force F par rapport à l'axe Δ le produit de l'intensité F de la force par la distance OK du point O à la ligne d'action de la force.

$$M^t = F \times OK.$$

Insistons sur le fait que la définition précédente n'est valable que si la force est *orthogonale* à l'axe Δ . C'est le cas des poids dans l'expérience de la figure 65, l'axe O étant horizontal.

En introduisant la notion de moment, l'équation (1) [$Pl = P'l'$] du paragraphe précédent, exprime, qu'à l'équilibre de la règle, **les moments par rapport à l'axe O des poids P et P' sont égaux.** (pp. 59-60)

On aura observé la limitation explicite imposée à la définition donnée par ces auteurs : « Nous nous *bornerons* au cas... » Pourquoi n'avoir pas considéré le cas d'une force *quelconque* ? Peut-être parce que, si j'ai bon souvenir, la considération de situations *quelconques* de l'espace était, à cette époque (et traditionnellement) réservée à la classe de 1^{re}. Que se passe-t-il alors ? Les auteurs annoncent ensuite, sur la même, ce qu'on nomme le *théorème des moments*, qu'ils font suivre d'une remarque éclairante :

Pour qu'un corps solide mobile autour d'un axe et soumis à des forces soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments par rapport à l'axe des forces qui tendent à faire tourner le corps dans un sens soit égale à la somme des moments par rapport à l'axe des forces qui tendent à le faire tourner en sens inverse.

REMARQUE. – Dans l'énoncé du théorème des moments, nous n'avons pas précisé que les forces étaient *orthogonales* à l'axe, car l'énoncé est *général*. Toutefois nous n'aurons à l'appliquer que pour des forces orthogonales à l'axe de rotation.

Bien entendu, l'élève qui ne connaît pas (en principe) le cas *général* doit donner un sens à un énoncé mentionnant « des forces qui tendent à faire tourner le corps dans un sens » et « des forces qui tendent à le faire tourner en sens inverse ». On voit ainsi se créer concrètement le *déficit praxéologique* dont j'ai parlé plus haut en termes généraux. Mais nous nous arrêterons maintenant sur deux autres phénomènes qui, je crois, entrent en jeu dans la non-diffusion des praxéologies mathématiques.

3. Théories communes des mathématiques

a) Comme le titre de cette section le suggère, le premier phénomène tient à l'existence de *théories personnelles et institutionnelles* de cet objet que sont « les mathématiques ». Je rappelle que, en TAD, on considère que toute personne et toute institution qui a un rapport si pauvre soit-il avec un objet est *ipso facto*, et fût-ce à son insu, porteuse d'une *théorie* de cet objet. Je rappelle aussi que cette théorie, presque jamais formulée d'un tenant de façon explicite, s'exprime au contraire par bribes, voire à travers des émotions, des mimiques, bref, des comportements de nature diverse. Cela rappelé, la question étudiée dans ce qui suit est la suivante : si elle existe, en quoi consiste donc la théorie « moyenne » des mathématiques dans notre société (et peut-être dans notre civilisation) ?

b) Avant d'enquêter sur cette question même, je voudrais illustrer le *type de tâches* que cette enquête demande d'accomplir, et cela en donnant de ce type de tâches un exemple de réalisation fort éloigné du champ où nous évoluons. Dans la récente réédition de son livre *Les animaux pensent-ils ?* (Bayard, 2010), la philosophe Joëlle Proust examine ce que j'appellerai la théorie « commune » – dans nos sociétés – relative aux animaux et y met en évidence la thèse dite discontinuiste, en analysant notamment cette institution sociale qu'est le zoo :

Le zoo a systématisé, au cours du XIX^e siècle, la pratique antique de la collection d'espèces exotiques : les dignitaires égyptiens, babyloniens, chinois se constituaient volontiers des ménageries – la plus ancienne que l'on

connaissance, excavée à Hiérakonpolis en Égypte, remonte au IV^e millénaire avant notre ère. Dès le IV^e siècle av. J. C., les cités grecques en ont fait une attraction populaire. Les Romains ont tout naturellement intégré les animaux aux jeux sanglants dans leurs arènes, comme le fait encore la tauromachie dans nos contrées. Le zoo, comme la simple collection animalière, a dès l'origine une fonction pédagogique : permettre d'identifier ici des hippopotames, là les girafes, plus loin les éléphants. Le zoo contemporain renseigne aussi le visiteur sur la multiplicité des sous-espèces, leur répartition géographique, leurs moyens de subsistance. De plus en plus, il cherche à sensibiliser le public aux problèmes de l'environnement et à la menace qui pèse sur la survie de certaines espèces. (pp. 10-11)

Derrière ce zoo que nous connaissons tous, l'auteure met au jour un fait essentiel de notre civilisation :

Toutes ces fonctions pédagogiques du zoo entrent pourtant en tension avec sa fonction symbolique initiale, peut-être moins immédiatement apparente, mais sans doute d'autant plus fermement exercée, consistant à confirmer la rupture ontologique entre l'humain et le non-humain.

Ce qui dissimule cette fonction symbolique, c'est qu'elle est intégrée à une pratique multifonctionnelle : quoi de plus innocent que d'aller visiter un zoo en famille ? N'est-ce pas ce que pensaient, eux aussi, les visiteurs du zoo du Bronx, en 1905, qui pouvaient contempler à loisir, dans l'enclos des grands primates, un Pygmée du Congo aux côtés d'un chimpanzé et d'un orang-outang ? Les expositions coloniales successives n'ont-elles pas, jusqu'en 1958, étendu la formule du zoo à des « villages » congolais transférés pour l'occasion à Paris ou à Bruxelles ? L'organisation du parc zoologique rend les classifications savantes accessibles à tous. Mais en même temps, elle convie le visiteur à se situer lui-même relativement à ce qu'il observe. Lors même que les êtres humains sont eux aussi des vivants, produits de l'évolution, et matière à évolution future, le zoo participe d'une représentation fixiste et mythique de la non-appartenance des humains à la nature animale : l'homme doué de langage et de conscience contemple le vaste domaine du non-humain, où règnent l'instinct, la survie par la brutalité et l'absence de pensée (les termes de « brute » et de « bête », par lesquels on fait référence à l'animal sont en eux-mêmes éloquents). (pp. 11-12)

Joëlle Proust explicite alors, dans une forme ramassée, la *théorie* (au sens de la TAD) que porte – et qui porte – le rapport à l'animal que manifeste et que nourrit le zoo :

Voici, à grands traits, le credo discontinuiste contemporain :

La maîtrise du langage, la faculté d'apprendre et l'essor de la culture qui lui sont associés permettent à l'humanité de s'extraire de la lutte pour la survie, et d'échapper aux pressions évolutives. Les gènes des êtres humains n'entrent plus en compétition pour se reproduire : leurs idées le font. Une idée peut en supplanter une autre, mais la biologie de l'évolution n'a plus rien à voir avec cela. La culture a creusé un fossé avec la nature tel que l'humanité est passée dans un nouveau règne.

Cette représentation naïve est rarement explicitée ; elle forme un compromis entre la conviction centrale (nous ne sommes pas des animaux) et la reconnaissance que les hommes, en effet, sont porteurs de gènes, et qu'ils sont les produits de l'évolution. La solution de cette contradiction consiste dans l'idée intuitive que la possession du langage et de la pensée, souvent attribués à l'origine divine des hommes, les élève au-dessus du règne animal et met un terme à l'évolution biologique des hommes. (pp. 12-13)

c) C'est à des analyses de semblable facture que je m'efforcerai ici, mais à propos d'un tout autre objet : *les mathématiques*. Quel *logos* concernant cet objet la culture où nous baignons porte-t-elle en son sein ? L'enquête peut examiner beaucoup de réalités qui nous entourent. Par exemple, le dictionnaire des synonymes proposé par le logiciel de traitement de textes que j'utilise ici donne pour synonymes de l'adjectif « mathématique » les qualificatifs « précis », « rigoureux », « logique ». Le *Dictionnaire des synonymes et nuances* des éditions Le Robert-Sejer (2005) offre, lui, les deux articles suivants :

mathématique *adj.* **1** – **cartésien** • logique • **2** – **exact** • précis • rigoureux • scientifique

♦ **c'est mathématique** c'est inévitable • c'est automatique • c'est aussi sûr que deux et deux font quatre

mathématiquement *adj.* **1** – **exactement** • rigoureusement • **2** – **nécessairement** • automatiquement • immanquablement • inévitablement • infailliblement • logiquement

Les mathématiques apparaissent là comme un formidable *surmoi* : nous y reviendrons. Mais je voudrais interroger maintenant la suite de quatre articles que propose le *Dictionnaire de la langue française* (1872-1877) d'Émile Littré, aux entrées successives « Mathématicien », « Mathématiques », « Mathématiquement », « Mathématisme ». Voici d'abord « Mathématicien » :

1°

Celui qui fait son étude des mathématiques.

Si l'on n'a mis enseigne de poète, de mathématicien, PASC. Pens. VI, 15, éd. HAVET.

Qu'un grand mathématicien se travaille tant qu'il voudra l'esprit pour découvrir de nouveaux astres dans le ciel ou pour marquer le chemin des comètes, NICOLE, Ess. de mor. 1er traité, ch. 7.

Il [Ozanam] était jeune, assez bien fait, assez gai, quoique mathématicien, FONTEN. Ozanam.

Il serait inutile de dire que M. Leibnitz était un mathématicien du premier ordre ; c'est par là qu'il est le plus généralement connu, FONTEN. Leibnitz.

Ceux qui ne voient les mathématiques que de loin, c'est-à-dire qui n'en ont pas de connaissance, peuvent s'imaginer qu'un géomètre, un mécanicien, un astronome, ne sont que le même mathématicien, FONTEN. Lahire.

Vous ne me ferez pas longtemps l'objection des nues et des exhalaisons qui flottent dans l'air, si vous voulez lire dans le premier mathématicien qui vous tombera sous la main, les lois des fluides, VOLT. Mél. litt. à M***.

Le mathématicien éternel, Dieu.

Je ne puis concevoir comment de si habiles mathématiciens nient un mathématicien éternel, VOLT. Lett. Mme du Deffant, 27 janv. 1766.

S. f. Femme qui s'occupe de mathématiques. Sophie Germain est une mathématicienne assez renommée.

Fig.

La nature : je suis le grand tout ; je n'en sais pas davantage ; je ne suis pas mathématicienne ; et tout est arrangé chez moi selon les lois mathématiques, VOLT. Dict. phil. Nature.

2°

Il s'est dit anciennement pour astrologue. Le vulgaire a confondu par abus les astrologues sous le nom de mathématiciens, G. NAUDÉ, Apologie pour les grands hommes soupçonnés de magie, ch. V.

On a fait mettre en prison un mathématicien qui s'est avisé de prédire que, le mois prochain, il y aura un grand changement dans la fortune du Mazarin, GUI PATIN, Lett. t. II, p. 181.

HISTORIQUE

XIV^e s.

Et les mathématiciens appellent telle proportionnalité géométrique, ORESME, Eth. 147. XVI^e s. Un citoyen de Cyzique acquit jadis réputation de bon mathématicien, pour avoir appris la condition de l'herisson ; il a sa tanière ouverte à divers endroits et à divers vents, et, prévoyant le vent advenir, il va boucher le trou du côté de ce vent là ; ce que remarquant, ce citoyen apportoit en sa ville certaines prédictions du vent qui avoit à tirer, MONT. II, 180. Mathématique.

ÉTYMOLOGIE

Mathématique

Ce qui ressort de ce texte, et notamment des citations qu'il contient, c'est le fait que, être un mathématicien, est quelque chose de particulier.

Mathématicien, semble-t-il, *tout le monde ne l'est pas*. Et, quand quelqu'un est mathématicien, cela se sait (y compris, au reste, quand ce quelqu'un est une femme). Cela dit, ce qu'est un mathématicien reste un peu mystérieux, et en tout cas assez extérieur aux préoccupations normales des gens : le mathématicien s'occupe d'astres, de comètes, de fluides ; il est aussi bien géomètre, mécanicien, astronome ; et il a pu être confondu avec ceux qui se livrent à l'astrologie ! En outre, en nombre de choses, le mathématicien n'est pas semblable au commun des mortels : ainsi Ozanam était-il « assez bien fait, assez gai, quoique mathématicien », rapporte Fontenelle (sur Jacques Ozanam [1640-1718], voir l'article de *Wikipédia*). Les mathématiciens qui, en certaines matières, semblent sans doute être seuls à connaître la vérité, en d'autres semblent aveugles à ce que le sens commun tient pour évident. Je résume : *la figure du mathématicien est une figure d'exception, une figure qui sort de l'ordinaire*. Voilà ce que je retiendrai du murmure théorique qui se fait entendre ici.

d) Je voudrais insister sur le fait qu'il y a là une condition – ou plutôt une *contrainte* ! – qui ne va pas de soi. En première approximation, je dirai qu'une figure donnée peut être *ordinaire* ou être *extraordinaire*, c'est-à-dire être ce que j'ai appelé une *figure d'exception*. Faire du ski « tout simplement » vous change en skieur, ce qui est une figure (très) ordinaire, en sorte qu'on n'entendra pas une dame à qui l'on demande ce qu'est son mari répondre « Il est skieur » (ou « nageur », etc.). Il y a des cas plus ambigus : j'ai entendu, à la télévision, une femme définir son compagnon comme un « motard » – ce qui, semble-t-il, dans sa bouche, impliquait tout un mode de vie et ne désignait pas simplement une profession ni, à plus forte raison, quelqu'un qui se déplace à moto ! Tout le monde peut se dire skieur, ou nageur ou même motocycliste ; mais on ne peut se dire si simplement « motard », ce qui, en une certaine culture périphérique, constitue une figure d'exception. Bien entendu, ce qui est figure ordinaire ou figure d'exception *varie selon les sociétés, les milieux, les époques*. Voici de cela un exemple qu'il m'est arrivé déjà de mentionner. Dans son *Autobiographie* (Stock, 1967), qui couvre la période 1872-1914, Bertrand Russell (1872-1970) raconte un souvenir datant de 1897, à l'occasion de sa première visite au logicien français Louis Couturat (1868-1914) :

La première fois que j'ai vu Couturat, il me fit savoir qu'il ne pratiquait aucune forme de sport. Peu après, comme je lui demandais s'il faisait de la bicyclette, il me répondit : « Mais non, voyons, puisque je ne suis pas un sportif. » (p. 169)

Ici, c'est la figure du « sportif » qui fonctionne – pour Couturat – comme une figure d'exception (et semble l'empêcher de se faire « cyclotouriste

ordinaire »). Une figure d'exception est essentiellement une réalité ambivalente : attirante au-delà de tout *for the few* ; mais indéfiniment hors de leur vie *for the many*. Un adolescent de notre temps voudra peut-être très fort devenir un « grafeur », un « tagueur », ou encore un « skateur », etc. ; mais la plupart ne seront que des spectateurs, indifférents ou passionnés, de ces figures extraordinaires. Quelquefois, il est vrai, la société héberge une double figure, subsumée en un certain nombre de cas sous les catégories du *professionnel* et de l'*amateur*. Chacun peut ainsi jouer au foot en amateur, et cela même assez tard ; mais un « footballeur » est autre chose. De la même façon, on peut changer un joint de robinet sans être pour cela un plombier. Problème : peut-on résoudre une équation du second degré si l'on n'est pas un « mathématicien » ? Il *semble* qu'il y ait eu à cet égard un durcissement de la frontière : du fait de la progression de la scolarisation secondaire, plus de gens, aujourd'hui, savent (ou ont su naguère) résoudre une équation du second degré ; mais il semble aussi que *l'on ne s'autorise pas plus à le faire*, si d'aventure l'occasion se présente.

e) Je fais en passant un bref retour sur la notion de *frontière*. J'avais jadis parlé de frontière à propos de l'informatique ou de l'anglais : peut-on savoir de l'informatique, ou de l'anglais, quand on n'est pas « informaticien » ou « angliciste » ? Les figures d'exception sont ainsi associées à des frontières qu'une société *peut éprouver la plus grande difficulté à franchir*. La société française a franchi la frontière de la lecture et de l'écriture, nonobstant la figure d'exception du « lettré », du *litteratus*. Mais la frontière de l'anglais n'est pas encore dépassée. En 1897, en tout cas, Couturat ne l'avait pas franchie, comme le rapporte Russell :

De l'année 1897 j'ai gardé fort peu de souvenirs, hors celui de la publication de mes *Fondements de la géométrie*. Je me rappelle aussi la joie que me causa une lettre élogieuse de Louis Couturat, avec qui je n'avais pas encore eu de contacts personnels, mais dont j'avais recensé pour une revue l'ouvrage sur *l'Infini mathématique*. J'avais toujours souhaité recevoir de l'étranger des lettres flatteuses et ce rêve se réalisait pour la première fois. Couturat me racontait comment il s'était débrouillé dans mon ouvrage, « armé d'un dictionnaire », car il ne savait pas un mot d'anglais. (pp. 168-169)

La frontière n'a que peu bougé depuis. Dans l'émission *Cinémas* de Serge Moati (sur la chaîne de télévision France 5) du samedi 26 février 2011, on a pu entendre ainsi l'amphitryon se demander si l'on devait prononcer « True Grit » ou « True Graite » le titre d'un film récemment sorti ; et, en dépit de l'indication reçue en retour, on l'entendit plusieurs fois hésiter encore entre les deux prononciations, comme si, au fond, *on ne pouvait pas savoir de*

science sûre, parce que savoir, en ce cas, relèverait d'une érudition tellement étrangère à l'honnête culture d'un Français fou de (vraie) culture !

f) Revenons au dictionnaire de Littré. Voici l'article « Mathématiques », le plus long des quatre :

1°

Adj. qui a rapport à la science des nombres, des figures et des mouvements. Vérité mathématique. Langage mathématique.

Quoi qu'il eût été fort répandu dans le monde, sa simplicité et son ingénuité naturelle n'en avaient point été altérées, et le caractère mathématique avait toujours prévalu, FONTEN. Sauveur.

Il se mêle à l'optique mathématique un jugement de l'âme, fondé sur l'expérience ; c'est ce qui fait que nous nous formons des idées des distances, sans nous servir d'aucune mesure, VOLT. Mél. litt. à M***.

L'un des plus grands avantages des théories mathématiques et le plus propre à établir leur certitude, consiste à lier ensemble des phénomènes qui semblent disparates, en déterminant leurs rapports mutuels, non par des considérations vagues et conjecturales, mais par de rigoureux calculs, LAPLACE, Expos. IV, 17.

Point mathématique, le point considéré abstractivement, comme n'ayant aucune étendue. Suivant les géomètres, le point mathématique est l'extrémité de la ligne.

2°

S. f. Science qui a pour objet les nombres, les figures et les mouvements. Théorème, problème de mathématique. Étudier en mathématique.

Nulle science humaine ne le peut garder [l'ordre] ; saint Thomas ne l'a pas gardé ; la mathématique le garde, mais elle est inutile en sa profondeur, PASC. Pens. XXV, 108, éd. HAVET.

Comme il avait dessein d'instruire mon frère dans les langues et qu'il savait que la mathématique est une science qui remplit et qui satisfait beaucoup l'esprit, Mme PÉRIER, Vie de Pascal.

D'Aguesseau se plaisait à toutes les parties de la physique et de la mathématique, SAINT-SIMON, 453, 124.

Le mouvement des astres, celui de notre petite terre autour du soleil, tout s'opère en vertu des lois de la mathématique la plus profonde, VOLT. Dict. phil. Athéisme.

Fig.

Ce n'est pas l'ordinaire de parler si précisément des vertus soit de l'entendement, soit de la volonté, ni de faire de la morale une mathématique, LAMOTHE LE VAYER, Vertu des païens, II, Julien.

Étui de mathématique, étui dans lequel sont renfermés les instruments nécessaires aux mathématiciens.

Il est plus usité au pluriel, quoiqu'il soit préférable de dire la mathématique, comme on dit la mécanique, la statique, etc. (autrefois on disait les mécaniques, les statiques, ce qu'on fait encore en anglais ; l'Académie dit qu'on ne l'emploie jamais au singulier avec l'article ; c'est une erreur en fait, puisque les meilleurs auteurs s'en sont servis ainsi ; et en droit, puisqu'il n'y a aucune raison grammaticale à cette prescription). Il sait les mathématiques. Un cours de mathématiques.

Il faut que les mathématiques domptent les écarts de notre raison ; c'est le bâton des aveugles, on ne marche point sans elles ; et ce qu'il y a de certain en physique est dû à elles et à l'expérience, VOLT. Mél. litt. à M***.

Dès qu'il s'agit d'expliquer nos sensations, les mathématiques deviennent impuissantes, VOLT. ib. (la 2e pièce).

Mathématiques pures, celles qui ne s'occupent que de la théorie, sans aucune idée d'application, et mathématiques mixtes, celles qui considèrent les propriétés de la grandeur dans certains corps ou sujets particuliers.

La quantité abstraite, objet des mathématiques pures, est ou nombrable ou étendue, D'ALEMB. Explic. syst. conn. hum. Oeuvr. t. I, p. 337, dans POUGENS.

Les mathématiques mixtes ont autant de divisions et de sous-divisions qu'il y a d'êtres réels dans lesquels la quantité peut être considérée, D'ALEMB. ib.

Dans les lycées et établissements d'instruction secondaire, on distingue deux classes et deux cours de mathématiques : les mathématiques élémentaires, qui comprennent l'arithmétique et les éléments de géométrie, et les mathématiques spéciales (voy. SPÉCIAL).

3°

Mathématiques s'est dit de l'ensemble des sciences où interviennent les théories des nombres.

Il ne s'agit, dans ces deux passages, ni d'arithmétique, ni de géométrie, ni de musique, ni d'astronomie, sciences que l'on comprend, chez les gens de lettres, sous le nom de mathématiques, et approuvées universellement d'un chacun, G. NAUDÉ, Apologie pour les grands hommes, ch. V.

HISTORIQUE

XIVe s.

Mesure mathématique ou précise. - Sciences mathématiques, ORESME, Thèse de MEUNIER. XVIe s.

Sire, entre les autres sciences dignes des plus grands princes et monarques du monde, je croy qu'il n'y a celui qui ne soit de ceste opinion que les mathématiques doivent marcher devant toutes les autres, FORCADEL, Éléments d'Euclide, Au roy.

Je sçay que il y a quatre parties en la mathématique, MONT. I, 154.

ÉTYMOLOGIE

Provenç. mathematic, mathematica ; espagn. et ital. matematico, matematica ; du latin mathematicus, qui vient du grec signifiant, instruction (l'instruction, la science

par excellence). L'origine du grec, est controversée : selon Curtius, il appartient à la racine *man*, penser, se souvenir, avec un adjectif, comme il y en a beaucoup d'exemples ; selon Kuhn, c'est la racine *math*, *manth*, qui signifie agiter ; on comprend d'ailleurs la transition d'agiter à penser, apprendre.

Qu'entend-on ici de la théorie commune des mathématiques ? On entend, me semble-t-il, qu'il y a un *langage* mathématique et qu'il y a surtout une *vérité* mathématique : on retrouve là que les mathématiques relèvent d'un *genre propre*. Il y a en effet des réalités propres aux mathématiques, tel le « point mathématique », qui est « le point considéré abstractivement, comme n'ayant aucune étendue ». Les citations proposées illustrent des propriétés théoriques diverses des mathématiques. Le mathématique, ainsi, se distingue du mondain : il est du côté de la simplicité, de l'ingénuité, et se situe donc – peut-on penser – à l'opposé de l'alambiqué, du spécieux, du captieux, de l'affecté, du frelaté... Il s'éloigne également du vague et du conjectural ; il établit des rapports inattendus, certes, mais cela par le moyen de « rigoureux calculs » où triomphe la « mesure mathématique », c'est-à-dire la « mesure précise ». En cela, le mathématique se marie avec l'expérience, pour aller au-delà des calculs mêmes : à côté des mathématiques *pures*, « celles qui ne s'occupent que de la théorie, sans aucune idée d'application », il y a les « mathématiques *mixtes* » (telle l'optique géométrique), « qui considèrent les propriétés de la grandeur dans certains corps ou sujets particuliers ». Pour le redire dans un langage anachronique, il n'y a pas d'autisme des mathématiques : car dès qu'il y a quantité, il y a (en puissance) mathématiques. Selon une opinion répandue, les mathématiques, qui comportaient traditionnellement l'arithmétique, la géométrie, la musique, l'astronomie, « doivent marcher devant toutes les autres » sciences reconnues dignes des grands de ce monde, « princes et monarques ». Le mot de mathématiques lui-même signifie en grec « l'instruction, la science par excellence » ; il vient d'une racine qui signifierait « agiter » : « on comprend d'ailleurs la transition d'agiter à penser, apprendre », note finement Littré. Le mathématicien apparaît ainsi comme une figure singulière et lointaine, comme un agitateur d'idées par nature proche des princes du monde.

g) On arrive ainsi à l'article « Mathématiquement » :

Selon les règles des mathématiques.

Je le trouverais encore assez bien partagé, quand il serait à M. Euler (pour parler mathématiquement) en même proportion que Descartes et Newton sont à Bayle, D'ALEMB. Lett. au roi de Prusse, 1er mars 1765.

Fig.

Rigoureusement, exactement.

Son fils [du chancelier] [était] aussi universellement abhorré qu'il était mathématiquement détestable, SAINT-SIMON, 301, 168.

ÉTYMOLOGIE

Mathématique, et le suffixe ment.

L'adverbe « mathématiquement » peut, certes, s'employer par métaphore (par exemple en référence à une proportion du type « x est à y comme z est à t »). Mais il renvoie en règle générale à l'idée de « rigueur mathématique », d'« exactitude mathématique », etc. Pourtant, la citation de d'Alembert pour illustrer l'acception « selon les règles des mathématiques » est un tantinet particulière si on la compare par exemple à celle donnée dans l'article « Géographiquement » (qui, elle, *n'est pas* métaphorique) :

D'une manière géographique, selon les principes de la géographie.

Avancer est chose impossible dans la position où nous nous trouvons [au fond de l'Italie] ; cela est vrai, moralement et géographiquement parlant, P. L. COUR. Lett. I, 164.

En d'autres termes, il y aurait un « durcissement » de l'adverbe « mathématiquement », qui signifierait *plus* que ce qu'il signifie littéralement, ce que suggère la citation de Saint-Simon visant une personne supposée « mathématiquement détestable ».

h) Le dernier article est « Mathématisme » (qui appartient au Supplément du *Dictionnaire*) :

Doctrine d'après laquelle tout s'opère conformément à des lois mathématiques.

Le mathématisme de la nature, MANGIN, Journ. offic. 18 août 1872, p. 5738, 3e col.

Au-delà des mathématiques *mixtes*, il y aurait ainsi le mathématisme, qui voit l'univers régi par des « lois mathématiques ». Le mathématique devient alors la terre d'élection, voire la source, de la loi, de la règle. Les mathématiques seraient ainsi du côté des puissances – et des puissants – de ce monde, à une distance marquée des humbles mortels.

4. Le destin des pressions

a) Jouer du piano, se déplacer à vélo, conduire une automobile, faire la cuisine, tout cela est possible (dans notre société, et aujourd'hui) sans qu'on ait à se dire pour autant « pianiste », « coureur cycliste », « pilote automobile », « chef ». Il n'en va pas de même pour d'autres activités ; pour l'activité mathématique, en particulier. Je vois là une condition importante dans la diffusion (et la non-diffusion) des connaissances mathématiques. On

peut garder cela en mémoire : rendre une figure extraordinaire, c'est la rendre désirable *for the few* ; mais c'est du même coup la rendre inaccessible, voire indésirable *for the many*. Louez les mathématiques, tracez-en des portraits emphatiques, et vous éloignerez de toute pratique mathématique le commun des mortels !

b) Bien entendu, toute activité spécifique se découpe de façon ostensive – mais pas nécessairement ostentatoire – sur le fond des autres activités de la cité. Dans tous les cas, on « se met à... ». On se met au volant de sa voiture et on se met à conduire ; on s'assoit devant le clavier de son ordinateur ou de son piano, on se met à préparer le repas, etc. Toute activité déterminée crée une discontinuité dans le flux de l'activité ordinaire ; mais toute activité n'est pas nécessairement regardée comme *extraordinaire*. Cela rappelle encore, si, maintenant, on laisse de côté un instant la distinction de l'ordinaire et de l'extraordinaire, la question qui surgit est celle-ci : qu'est-ce qui fait que l'on pratique telle activité et non telle autre ? Qu'est-ce qui fait, par exemple, que chacun ou presque conduit une automobile alors que monter à cheval est devenu une activité *for the few* ? Une réponse simple nous guidera : c'est le fait qu'une *pression institutionnelle* s'exerce en faveur de la pratique de cette activité et non de cette autre (voire s'exerce *contre* la pratique de cette autre). Pourquoi la plupart des Français ne pratiquent-ils pas le grec moderne ? Ou le marathi – langue de l'Inde qui compte parmi ses locuteurs l'écrivain de langue anglaise Salman Rushdie par exemple ? La réponse est évidente : *aucune pression* ne s'exerce *en règle générale* en faveur de la pratique de ces langues. Une telle pression n'existe que dans des institutions très particulières, par exemple dans une famille française d'origine grecque récente dans laquelle le grec continue d'être parlé dans des contextes privés ; ou encore dans des institutions internationales, commerciales ou administratives, où la pratique de cette langue paraît quasi obligatoire, au risque de se trouver hors du coup, marginalisé ; etc.

c) J'ajoute aux remarques précédentes une distinction : parlant de la pression en faveur de la *pratique* de telle activité, je ne parle pas de la pression en faveur *de son étude et de son apprentissage*. Cette dernière est énorme s'agissant des rudiments des mathématiques, par exemple ; mais la pression générale en faveur de la *pratique* de ces rudiments est faible, voire nulle. C'est là précisément l'une des questions clés de la recherche engagée : quelles pressions institutionnelles, et en quelles institutions, existent qui pousseraient à avoir des activités à teneur mathématique non nulle, et lesquelles ? Ce sont, me semble-t-il, les pressions existantes – ou leur absence – qui font le destin des besoins praxéologiques, depuis leur reconnaissance jusqu'à leur satisfaction en général partielle. Je voudrais présenter ici un exemple de telle pression que je dois à Caroline Ladage.

Ayant adressé une proposition de communication aux organisateurs d'un colloque, des auteurs reçoivent un retour globalement positif mais critique sur certains points. La proposition de communication comporte notamment le tableau ci-après, qu'il faut lire comme suit : les étudiants de la promotion 2009-2010 ayant obtenu à un certain examen une note tombant dans l'intervalle [5 ; 10[(par exemple) avaient effectué en moyenne 2,9 tests sur les 6 tests en ligne (facultatifs) qu'il leur était proposé de faire – sous le titre commun *Testez vos connaissances* – pour se préparer à l'examen.

Classes de notes	Nombre moyen de tests 2009	Nombre moyen de tests 2010
1 [0 ; 5[	1,7	2,0
2 [5 ; 10[	2,9	2,8
3 [10 ; 15[	4,2	4,3
4 [15 ; 20]	5,6	4,3
Moyenne	3,9	3,9

Les auteurs apportent à ce tableau le commentaire suivant, qui va être durement critiqué par l'un au moins des évaluateurs de leur proposition de communication :

Ces chiffres confirment que la pratique des tests amène à la réussite, car si faire les tests n'est pas toujours garant d'une bonne note, comme en témoignent 3 étudiants qui entrent dans la classe 2 (avec des notes entre 5 et 10), nous observons que le fait de faire les 6 tests semble bien corrélé à l'obtention d'une bonne note : les 16 meilleures notes – composant la classe 4 (entre 15 et 20) – ont été obtenues par des étudiants dont 11 ont fait les 6 tests, 4 en ont fait 5 et un étudiant en a fait 4.

Voici donc le contenu de la critique :

... il est difficile d'interpréter la faible utilisation des tests. Le tableau 1 fait état de l'accès aux tests en fonction des notes des étudiants (classées par quartiles) alors qu'un calcul de corrélations notes/accès aurait été parlant. Le commentaire des auteurs à propos de ce résultat, de plus, est tout à fait risqué : ils établissent que « le fait de faire les 6 tests semble bien corrélé à l'obtention d'une bonne note » (p. 6), en signalant un rapport de cause à effet « tests $\Rightarrow$ notes », alors que l'interprétation inverse est tout aussi valide, voire plus (les bons étudiants sont consciencieux et passent le plus de tests).

d) Ce passage contient en fait *plusieurs* critiques. La première, qui se solde par la demande d'un coefficient de corrélation (de Pearson-Bravais, je suppose) n'est certes pas illégitime ; mais elle semble faire bon marché d'un

fait qui saute aux yeux, en tout cas pour l'année 2009 : le nombre moyen de tests passés *croît strictement* avec la classe de notes (pour l'année 2010, cependant, cette croissance n'est pas stricte). Prenons pour variable X le centre de la classe et pour variable Y le nombre moyen de tests ; pour l'année 2009, on a (en utilisant le calculateur qu'on trouvera à l'adresse <http://easycalculation.com/statistics/correlation.php>) :

To Calculate Correlation Co-efficient:

X Value	Y Value
2.5	1.7
7.5	2.9
12.5	4.2
17.5	5.6

[Add More..](#) [Fewer..](#)

Results:

Total Numbers :	4
Correlation :	0.999408808697959

Le coefficient de corrélation est très voisin de 1 : on pouvait s'y attendre et, en toute rigueur intellectuelle, ce calcul est inutile (je n'ai nul besoin de peser deux personnes de même taille dont l'une est obèse et l'autre étique pour comparer leur poids). Pour l'année 2010, le coefficient de corrélation est à peine moins élevé :

To Calculate Correlation Co-efficient:

X Value	Y Value
2.5	2
7.5	2.8
12.5	4.3
17.5	4.3

[Add More..](#) [Fewer..](#)

Results:

Total Numbers :	4
Correlation :	0.9474755530693773

Cela dit, il est vrai que rien ne prouve que, au sein de chaque classe, il y ait une bonne corrélation : on peut *imaginer* qu'il n'y ait plus corrélation entre notes et nombre de tests passés... Imaginons ainsi que la classe [5 ; 10]

contiennent les 9 valeurs indiquées dans la colonne de gauche du tableau ci-après :

Notes obtenues	Tests passés
5,5	6
6	5
6,5	4
7	3
7,5	3
8	2
8,5	1
9	1
9,5	0
7,5	2,8

La colonne de droite donne le nombre de tests passés : ici, l'étudiant ayant obtenu la plus faible note du lot (5,5) a passé les 6 tests, etc. La dernière ligne donne les moyennes, conformes à celles de la deuxième ligne du tableau 1 pour l'année 2010-2011. Par construction de ces données (fictives), les choses vont en quelque sorte à l'envers de ce que le tableau « compacté » montre : plus la (modeste) note que l'on a obtenue est élevée, et moins on a fait de tests ! De fait, le coefficient de corrélation est cette fois *négatif*, et fort proche de -1 , comme on le voit ci-après :

To Calculate Correlation Co-efficient:

X Value	Y Value
5.5	6
6	5
6.5	4
7	3
7.5	3
8	2
8.5	1
9	1
9.5	0

[Add More..](#)
[Fewer..](#)

Calculate

Results:

Total Numbers : 9

Correlation : -0.9882229035203816

On voit ainsi que, si l'on ne fait pas confiance aux auteurs, on est en droit, de leur demander de fournir le tableau *complet* des valeurs du couple de caractères (X, Y), où X désigne cette fois la note obtenue et Y le nombre de tests passés par l'étudiant.

e) L'évaluateur de la proposition de communication se situe, apparemment, à mi-chemin (selon l'usage dans les SHS) : il apprécierait qu'on lui indique le coefficient de corrélation, mais ne demande pas plus. Faisons-le ici. Dans le cas des données de 2009, il y avait 100 étudiants et donc 100 couples de valeurs (X_i, Y_i) ; dans le cas des données de 2010, il y avait 65 étudiants, et donc 65 couples de valeurs (X_i, Y_i). Le coefficient de corrélation est, dans le premier cas (2009), supérieur à 0,52 et, dans le second cas (2010), supérieur à 0,4. Si les deux variables X et Y étaient indépendantes, et comme on le verra ci-après (d'après <http://faculty.vassar.edu/lowry/ch4apx.html>) la probabilité d'obtenir un coefficient de corrélation aussi grand que 0,52 serait inférieure à un dix-millionième (soit 10^{-7}) : il est donc plus que raisonnable de rejeter l'hypothèse d'indépendance entre X et Y.

Test for the Significance of the Pearson Product-Moment Correlation Coefficient

If the true correlation between X and Y within the general population is $\rho=0$ (see Chapter 4), and if the size of the sample, N, on which an observed value of r is based is equal to or greater than 6, then the quantity

$$t = \frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(N-2)}}$$

is distributed approximately as t (see Chapters 9-12) with $df=N-2$. Application of this formula to any particular observed sample value of r will accordingly test the null hypothesis (see Chapter 4, et seq.) that the observed value comes from a population in which $\rho=0$.

To assess the significance of any particular instance of r , enter the values of $N[\geq 6]$ and r into the designated cells below, then click the 'Calculate' button. (For the distinction between a directional and non- directional test, see also Chapter 4, et seq.)

N = 100	r = 0.52
Reset	Calculate
t	df
6.027	98
Probability	
directional	<.0000001
non-directional	<.0000001

Capture

Pour les données de 2010, on a ceci :

N = 65	r = 0.4
Reset	Calculate
t	df
3.464	63
Probability	
directional	0.000481
non-directional	0.000962

Ici, si les deux variables étaient indépendantes, la probabilité d'obtenir un coefficient de corrélation aussi grand que 0,4 serait inférieure à 10^{-3} : on est donc conduit à nouveau à rejeter l'hypothèse d'indépendance de X et Y.

f) L'évaluateur déjà cité exprime à l'endroit des auteurs un autre grief ; rappelons-le :

Le commentaire des auteurs à propos de ce résultat [la corrélation de X et Y], de plus, est tout à fait risqué : ils établissent que « le fait de faire les 6 tests semble bien corrélé à l'obtention d'une bonne note » (p. 6), en signalant un rapport de cause à effet « tests $\Rightarrow$ notes », alors que l'interprétation inverse est tout aussi valide, voire plus (les bons étudiants sont consciencieux et passent le plus de tests).

Les auteurs écrivent bien, et à bon droit, que « faire les 6 tests semble bien corrélé à l'obtention d'une bonne note ». Cette affirmation peut être précisée : en 2009, parmi les étudiants qui ont fait les six tests (ils sont au nombre de 37 sur 100), 92 % ont eu la moyenne et 51 % ont eu une note supérieure ou égale à 14 ; en 2010, parmi les étudiants qui ont fait les six tests (ils sont 20 sur 65, soit 31 %), ils sont 95 % à avoir eu une note supérieure ou égale à 11 et 70 % à avoir eu une note supérieure ou égale à 14. Bien entendu, avoir fait les six tests ne garantit pas absolument contre une note inférieure à la moyenne : en 2009, ils sont trois sur cent dans ce cas (avec pour notes 7, 7,5 et 9,5) tandis que, en 2010, un seul étudiant ayant fait les six tests n'a pas la moyenne (il obtient 7). Mais aucun, comme on le voit, n'obtient de note « catastrophique » (c'est-à-dire difficile à compenser par des résultats « bénéficiaires » dans d'autres matières). Cela dit, l'évaluateur reproche aux auteurs – et c'est là une critique forte, car dénonçant une erreur regardée comme « élémentaire » – d'avoir confondu corrélation et causalité. Mais cette critique n'est pas entièrement fondée. Le nombre de tests apparaît ici comme

un *prédicteur* de la réussite ; et *prédiction n'est pas causalité* ! La causalité est autre chose que la prédiction mais c'est, en effet, une chose que l'on risque de confondre avec la (simple) corrélation, comme le rappellent les préceptes latins *Cum hoc ergo propter hoc* (avec cela, donc à cause de cela) et *Post hoc ergo propter hoc* (à la suite de cela, donc à cause de cela) : lorsque deux caractères X et Y apparaissent bien corrélés, il se peut par exemple qu'intervienne un troisième caractère Z qui, tout à la fois, « cause » X et « cause » Y . (Là-dessus voir les articles de *Wikipédia* ayant pour titre chacune des expressions latines ci-dessus.) En vérité, la structure causale à laquelle semble se référer de façon un rien imprécise l'évaluateur paraît autre : les « bons étudiants » (c'est-à-dire les étudiants ayant de bonnes notes X) sont des étudiants sérieux (variable Z), et les étudiants sérieux font les tests (variable Y) : on aurait ainsi les implications causales $X \Rightarrow Z$ et $Z \Rightarrow Y$. Mais ce point ne mérite pas forcément une grande attention. En revanche, il convient d'examiner plus précisément ce que disent les auteurs ainsi critiqués. Pour cela, il faut aller voir ce qu'ils écrivent *après* le passage incriminé :

Ces résultats rejoignent les conclusions de Woit et Mason [06, p. 125] réalisées à partir de 4 études de cas : les étudiants sont plus performants à l'évaluation finale lorsqu'ils rencontrent d'autres évaluations sous forme de tests.

Or les auteurs avaient écrit (c'est moi qui souligne) :

Ces chiffres *confirment* que la pratique des tests amène à la réussite, car si faire les tests n'est pas toujours garant d'une bonne note, comme en témoignent 3 étudiants qui entrent dans la classe 2 (avec des notes entre 5 et 10), nous observons que le fait de faire les 6 tests semble bien corrélé à l'obtention d'une bonne note : les 16 meilleures notes – composant la classe 4 (entre 15 et 20) – ont été obtenues par des étudiants dont 11 ont fait les 6 tests, 4 en ont fait 5 et un étudiant en a fait 4.

Ils ne prétendent donc aucunement *déduire une causalité* – qu'ils affirment en reprenant Woit et Mason – *d'une corrélation* ; ils indiquent seulement que la corrélation obtenue *s'accorde* avec le résultat causal auquel ils se réfèrent (et qui n'est pas de leur cru). Ce qui leur manque ici, à mon sens, est d'explicitier ce résultat *avant* de parler de corrélation. Je leur suggérerais donc (si j'en avais le pouvoir) d'écrire plutôt quelque chose comme ceci (où j'ai échangé les référents de X et Y) :

Woit et Mason [06, p. 125] ont montré, à partir de quatre études de cas, que les étudiants sont plus performants à l'évaluation finale lorsqu'ils rencontrent d'autres évaluations sous forme de tests. S'il en est ainsi on peut s'attendre à

ce que le nombre de tests passé (variable X) et la note sur 20 obtenue (variable Y) soient corrélés positivement. À titre indicatif, voici une présentation groupée des données recueillies :

Y	$\bar{X}$ (2009)	$\bar{X}$ (2010)
1 [0 ; 5[	1,7	2,0
2 [5 ; 10[	2,9	2,8
3 [10 ; 15[	4,2	4,3
4 [15 ; 20]	5,6	4,3
Moyenne	3,9	3,9

Tableau 1. *Classes de notes et nombre moyen de tests effectués*

Ce tableau montre qu'en 2009 les personnes ayant obtenu une note entre 15 et 20 avaient effectué en moyenne 5,6 tests, alors que les personnes se situant dans la classe des notes entre 0 et 5 avaient effectué seulement 1,7 tests en moyenne. En 2010, on retrouve ces valeurs, avec une légère baisse du nombre moyen de tests réalisés pour la classe de notes la plus élevée. Le coefficient de corrélation de X et Y est, pour 2009 (où il y avait 100 étudiants), supérieur à 0,52 (ce qui donne $p < 10^{-7}$) ; pour 2010 (65 étudiants), il est supérieur à 0,4 (on a alors $p < 0,001$) : dans les deux cas, on peut rejeter l'hypothèse d'indépendance de X et Y . Un étudiant pris au hasard dans la promotion 2009 a une probabilité de 71 % d'avoir la moyenne ; mais, pour ceux qui ont effectué les six tests, cette probabilité dépasse 91 % ; pour la promotion 2010, on passe de même de 75 % à 95 %. Ces résultats, qui ne prétendent établir aucun lien causal, font cependant écho aux résultats de Woit et Mason. Ainsi est-on amené à s'interroger sur ce qui conditionne un usage si restreint des tests proposés, usage qui en outre diminue de 2009 (où 65 % des étudiants avaient passé plus de trois tests) à 2010 (où ce pourcentage tombe à 51 %). Ces phénomènes doivent être mis en relation, problématiquement, avec ce qu'on peut nommer (avec Depover, Karsenti et Komis [09]) le *potentiel cognitif* des tests en ligne proposés, surtout si l'on observe que la distribution des notes 2009 est *un peu moins bonne* que la distribution 2010 alors même que l'usage des tests diminue de 2009 à 2010 : en 2009, les quartiles valaient respectivement 8,5, 12 et 14, et la moyenne 11,05 ; en 2010, ils montent à 10,5, 13,5 et 15, avec une moyenne à 12,22.

g) Ce qui précède illustre deux grandes conditions clés de la diffusion et de la non-diffusion des connaissances. Tout d'abord et surtout, nous observons presque *in vivo* un fait de *pression* : pression de l'évaluateur sur les auteurs, qui conduit (ou conduirait) ces auteurs à « faire des mathématiques », ponctuellement, sous la forme de considérations et de calculs statistiques. Bien entendu, ces auteurs pourraient se soustraire à une telle pression en

retirant leur article, ou en renonçant à certains développements avant de le proposer à nouveau ! (J'imagine que cela doit se passer peut-être plus souvent qu'on ne le croit.) Mais je voudrais surtout souligner que, plutôt que de dire que l'évaluateur *exerce une pression*, il vaut mieux dire que celui-ci *transmet la pression* émanant de l'institution « recherche en sciences de l'éducation », laquelle exerce en règle générale une *certaine* pression, limitée et délimitée, en la matière (on sait qu'elle raffolait autrefois des tests du χ^2 par exemple). L'évaluateur, au demeurant, ne semble pas être un véritable expert en cette matière : on a vu par exemple que ses imputations causales n'étaient pas irréprochables ; on le voit ailleurs écrire (c'est moi qui souligne) que « le tableau 1 fait état de l'accès aux tests en fonction des notes des étudiants (*classées par quartiles*) », employant ainsi fautivement le terme de *quartile*. Il transmet donc une certaine pression. Mais – car ce n'est pas son rôle – il ne propose pas d'*offre preaxéologique* qui permettrait de répondre à cette pression. Il appartient donc aux auteurs de se tourner vers les praxéologies adéquates, ce qui est une autre difficulté, nous le savons.

That's all, folks!