UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double ambition : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

➔ Séance 3 – Vendredi 11 décembre 2009

« LE FAIT DE LA RECHERCHE »

1. Se former à la TAD

a) Pour la première fois, le congrès international sur la TAD, qui se tiendra à Sant Hilari (Catalogne) du mardi 26 janvier après-midi au vendredi 29 janvier matin, sera précédé de deux demi-journées (représentant 8 h en tout) d'un « cours de TAD » portant sur certaines des connaissances fondamentales qu'un chercheur peut avoir besoin de rencontrer en matière de TAD.

b) Le mécanisme envisagé consiste à demander aux participants de faire connaître à l'avance des questions sur lesquelles ils souhaiteraient travailler dans le cadre de cet atelier. Ces questions seront exploitées lors des séances de « cours » dans le cadre de « groupes de questions » ayant chacun à les examiner pour faire connaître tant les éléments de réponse qui leur paraissent assurés (mais qui ne le sont peut-être pas) que leurs doutes et interrogations à leur propos.

c) Un outil concret de repérage des éléments de la TAD devrait, selon moi, être élaboré au long cours (avec, prioritairement, une version en anglais afin de toucher des « publics » élargis par exemple aux pays nordiques) : un *glossaire*. Ce travail a été commencé dans le cadre du mémoire de Julia Marietti ; pour en illustrer l'idée, je le reproduis ci-après.

Chronogenèse. Genèse du temps didactique c'est-à-dire du temps de la construction praxéologique.

Clinique. En TAD, ce terme est englobant : toute recherche, et en particulier toute *expérience* (au sens des sciences expérimentales) suppose et implique un abord et une connaissance cliniques de l'objet de la recherche (par exemple les AER ou les PER). L'expérience est ainsi une modalité de la clinique. Les recherches en didactique, qu'elles soient fondamentales ou appliquées, s'inscrivent nécessairement dans une *clinique du didactique* (à propos de l'objet étudié).

Conditions et contraintes. Ce qui est décrit ordinairement en termes de « variables » ou de « facteurs » l'est en TAD, de façon générique, en termes de *conditions*. Étant donné une position p dans une institution I, on dit qu'une condition est une *contrainte* pour les personnes occupant la position p si, en tant qu'elles occupent cette position, elles n'ont pas le pouvoir de modifier cette condition.

Dialectique des médias et des milieux. L'une des sept dialectiques de l'enquête codisciplinaire. L'opération élémentaire de cette dialectique consiste à soumettre un énoncé issu d'un *média* (c'est-à-dire d'un système émettant des messages à l'intention de certains publics) au verdict d'un *milieu* « adidactique » par rapport à cet énoncé et à celui qui l'interroge à son propos, c'est-à-dire d'un système dont on peut supposer que la réponse à la question de la vérité de cet énoncé est dépourvue d'intention à l'endroit de celui qui le questionne.

Didactique. La didactique est définie en TAD comme la science des conditions et des contraintes de la diffusion des entités praxéologiques auprès des personnes et des institutions. On parle de la didactique de tel ou tel complexe praxéologique : didactique de la grammaire du français, didactique de l'orthotypographie, didactique de l'algèbre élémentaire, didactique de la danse classique, didactique des PER, etc. L'objet central de la didactique est *le* didactique, dimension du réel présente en toute situation institutionnelle où une personne ou une institution fait ou envisage de faire quelque chose pour qu'une personne ou une institution rencontre telle ou telle entité praxéologique : on parle à cet égard d'*intention didactique* et de *geste didactique* (intentionnel).

Institution. Tout système social lentement évolutif imposant aux personnes qui en sont les sujets un équipement praxéologique déterminé (dépendant de leur position dans l'institution) dans certains domaines d'activité. Une classe est une institution, de même qu'une école ; une bande de copains peut l'être tout autant.

Mésogenèse. Genèse du milieu didactique, c'est-à-dire du système des ressources utilisées dans le processus de construction praxéologique.

Objet. En TAD, tout est objet (comme tout est ensemble en théorie des ensembles). La didactique est un objet, une institution I est un objet, une personne x est un objet, de même qu'une classe $[X, y]$, etc.

Personne. Tout individu est une personne, c'est-à-dire la résultante évolutive d'une foule d'assujettissements passés et présents à des institutions dont cet individu est ou a été le sujet, et qui ont engendré son équipement praxéologique personnel actuel.

Position. Situation au sein d'une institution I donnée qu'une personne ne peut en principe occuper si son équipement praxéologique personnel n'est pas conforme à l'équipement praxéologique que I requiert de ses sujets dans cette situation. Dans une classe, on distingue ordinairement la position d'élève et celle de professeur, dans une famille, celle de père, celle de mère, celle d'aîné de la fratrie, etc.

Problème (de la profession). Un problème est une difficulté que l'on fait reconnaître en tant que telle par une institution existante ou nouvellement créée autour de ce problème. La difficulté en question est alors reconnue comme un problème posé *à* l'institution, dont celle-ci se sent responsable de la résolution : c'est un problème *pour* l'institution. Un problème de la profession (voir ce mot) est un problème *pour* la profession, dont celle-ci reconnaît en outre qu'il n'affecte pas tant certains de ses membres que le *métier* même qu'ils exercent.

Profession. Une profession est une institution qui organise un *métier* et ceux qui l'exercent en recherchant les moyens optimaux de l'adéquation praxéologique de ce métier à sa mission sociale. La profession de professeur est l'organisation qui prend en charge le métier de professeur. Ce qu'on appelle ici « la profession », tout court, est l'institution rassemblant les professeurs de mathématiques des collèges et lycées, les responsables officiels de l'enseignement scolaire des mathématiques (inspecteurs généraux, inspecteurs pédagogiques régionaux, etc.), des militants et responsables associatifs ou pédagogiques (ceux œuvrant à l'APMEP ou dans les IREM par exemple), ainsi que les chercheurs en didactique des mathématiques travaillant sur les *problèmes de la profession*.

Praxéologie. Le concept de praxéologie est une généralisation anaxiologique des notions courantes de savoir et de savoir-faire. Dans le cas le plus simple, celui d'une praxéologie *ponctuelle*, une praxéologie s'écrit $[T / \tau / \theta / \Theta]$ où T est un *type de tâches* (par exemple additionner deux entiers, se moucher, composer un opéra, enseigner par PER), τ est une *technique* pour accomplir au moins certaines tâches t du type T, θ est une *technologie* relative à la technique τ, c'est-à-dire un « discours » susceptible de justifier, de rendre intelligible, voire de contribuer à produire la technique τ, et Θ est une théorie de la technologie θ qui, à son tour, permet de justifier, de rendre intelligible, voire de contribuer à produire la technologie θ. Généralement, une technologie θ est telle à l'endroit de plusieurs techniques τ_i relatives à autant de type de tâches T_i $(1 \leq i \leq n)$: on note alors $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$ la praxéologie correspondante. Alors qu'une praxéologie du premier type est dite *ponctuelle* (elle est construite autour de ce « point » qu'est le type de tâches T), une praxéologie du deuxième type est dite *locale*. Une praxéologie peut être scindée en un bloc pratico-technique ou *praxis*, $[T / \tau]$, et un bloc technologico-théorique ou *logos*, $[\theta / \Theta]$. La diffusion praxéologique opère fréquemment des modifications dans la structure des praxéologies, lorsqu'une praxéologie « habitant » dans une institution I donnée est transposée dans une autre institution I' : on parle alors de *transposition institutionnelle* – et de transposition *didactique* lorsque celle-ci procède d'une intention didactique. Le système total, plus ou moins intégré, des praxéologies qu'une personne ou une institution peut, à un moment donné de son histoire, mobiliser sous des conditions idoines est appelé son *équipement praxéologique*.

Raisons d'être. Par raisons d'être d'une œuvre – c'est-à-dire de tout objet créé et diffusé par l'activité humaine –, on entend l'intention qui a présidé à sa création ou à sa diffusion en telle institution, l'usage (ou les usages) que l'on compte en faire, l'utilité qu'on lui reconnaît. Les raisons d'être – et d'être *là* – d'une œuvre constituent la réponse à la question sans apprêt « À quoi ça sert ? » ou « En quoi cela peut-il être utile ? » En quoi est-il utile de distinguer angle saillant et angle rentrant, par exemple ? Bien entendu, les raisons d'être d'une œuvre dépendent en règle générale, mais dans une certaine mesure seulement, de l'institution qui lui sert d'habitat (voire de la position à l'intérieur d'une telle institution). C'est dans le refoulement de la question des raisons d'être que la TAD voit l'origine de la « perte de sens » identifiée par la profession.

Rapport. Une personne x a une certaine relation à un objet O qui découle de cette partie de son équipement praxéologique personnel dont l'objet O est un élément constituant – le rapport d'une personne à l'objet « fonction logarithme » peut ainsi inclure ou non le fait que cette fonction permet de résoudre l'équation $1{,}25^t = 2$. On parle de *rapport personnel*, que l'on note $R(x, O)$. Bien entendu, $R(x, O)$ peut être vide : on dit alors que *x ne connaît pas O*. On parle de même de *rapport institutionnel* à propos du système noté $R_I(p, O)$ qui désigne le rapport qu'une personne *x* occupant la position *p* à l'objet *O* est censé avoir : on parle alors du rapport institutionnel à *O* pour les personnes occupant la position *p* dans *I*. D'une façon générale, le rapport personnel $R(x, O)$ est *une* résultante de tous les rapports institutionnels $R_I(p, O)$ tels que la personne *x* ait été (ou soit) assujettie à l'institution *I* en position *p*. Comme dans le cas du rapport personnel, le rapport $R_I(p, O)$ peut être vide : on dit alors que les sujets de *I* en position *p* n'ont pas, en tant que tels, à connaître *O*.

Topogenèse. Genèse des équipements praxéologiques (et des rapports institutionnels associés) selon les positions d'élève et de professeur au cours de la construction praxéologique. Le *topos* (le lieu, en grec ancien) de l'élève (respectivement du professeur) est cette partie de la position d'élève (resp. de professeur) qui a trait aux entités praxéologiques construites ou en cours de construction dans la classe.

d) Bien entendu, un tel glossaire, toujours provisoire, doit être regardé comme un chantier permanent. À ce titre, je propose d'en faire à la fois un objectif et un étalon du travail qui sera réalisé dans le cadre « du cours » de TAD pour chercheurs.

2. « Lecture critique d'article »

a) Depuis 2004, le concours de l'internat qui structurait les études médicales a été remplacé par les ECN – les *épreuves classantes nationales* – organisées en 12 filières dont la filière « médecine générale » (là-dessus, je renvoie à l'article « Épreuves classantes nationales » de *Wikipédia*). Depuis 2009, les ECN comportent une épreuve redoutée, la LCA, la *lecture critique d'article*, la part accordée à cette épreuve aux ECN devant progressivement croître au fil des années (voir par exemple http://www.mediwiki.fr/Lecture_critique_d%27article). Je reproduis un commentaire que l'on trouve sur le site de l'université de Paris 5 (http://www.cnci.univ-paris5.fr/medecine/LectureCritiqueArticle.pdf) :

> L'objectif de l'épreuve est d'amener l'étudiant à lire de façon critique et à analyser le contenu d'un article en vue de son autoformation actuelle et future.
> Le mot « critique » ne doit pas être entendu dans le sens où l'on demanderait aux étudiants de chercher systématiquement tous les défauts d'un article.

Cette épreuve part du principe que toute information médicale doit être analysée avec du recul, en cherchant les défauts éventuels mais aussi les limites, les implications, l'utilité pour la pratique.

b) Les articles analysés relèvent de ce qu'on nomme en anglais l'*evidence-based medicine*, la « médecine fondée sur des données établies » (voir l'article de même nom dans *Wikipedia* et l'article correspondant dans la version française de cette encyclopédie). Ils ont en principe la « structure IMRAD », dont voici une présentation figurant sur le site de la Société française de stomatologie et chirurgie maxillo-faciale : ainsi qu'on le verra, le contenu explicité et le ton employé illustrent bien le niveau de standardisation formelle, voire de ritualisation, de ce secteur de la recherche médicale (http://www.sfscmf.fr/index2.php?ref=IMRAD)

La structure IMRAD

C'est la structure imposée de tout résumé soumis à acceptation

Rédaction d'un article scientifique médical :

– Objectif : transmettre un message scientifique
– Technique dérivée de la science et non de la littérature ou de la poésie
– Le but, c'est d'être lu : le contenu importe plus que le style (rigueur, clarté concision)

Structure univoque et stéréotypée : IMRAD

– **Introduction** :

Rappel des connaissances sur le sujet
On situe la localisation sur un point ou un sujet particulier
But : **poser une question** (et une seule !)

– **Matériel et méthode** :

Quel est le matériel d'étude ?
Qu'a-t-on cherché à évaluer ?
Quels ont été les critères de jugement ?

– **Résultats** :

tous les résultats et **rien que les résultats**

– **Discussion** :

Elle commence toujours par la **réponse à la question** posée dans l'introduction
Comparer les données de la littérature sur certains points
Critiquer l'étude
Ce n'est pas de l'enseignement

– **Références bibliographiques** :

But : justifier tout fait énoncé :
Présentation standardisé (normes de Vancouver)
Toutes doivent être présentes dans **Medline**, (sinon refus !)

Pour un cas clinique :

– **Introduction**
– **Observation**
– **Discussion**

c) Voici maintenant une présentation de la structure IMRAD dans la langue d'origine (je l'emprunte à l'article "IMRAD" de *Wikipedia*) :

IMRAD is an acronym for **I**ntroduction, **M**ethods, **R**esults **A**nd **D**iscussion. It relates to the standard main structure of a scientific paper, which typically includes these four sections in this order:[1]

■ **Introduction** – why and where was the study undertaken? What was the purpose?

■ **Materials & Methods** – how was the study done? What materials and methods were used?

■ **Results** – what did the study find?

■ **Discussion** – what might it mean, why does it matter, what next? And, last but not least, How does it fit in with what other researchers have found?

d) En fait, la structure IMRAD est celle-là même que propose par ailleurs l'APA (*American Psychological Association*), comme on peut le lire dans un exposé en ligne (http://www.uta.fi/FAST/FIN/RESEARCH/imrad.html) intitulé "The *IMRAD* Research Paper Format" :

IMRAD (**I**ntroduction, **M**ethods, **R**esearch [and] **D**iscussion) is a mnemonic for a common format used for academic ['scientific'] research papers. While used primarily in the hard sciences, like physics and biology, it is also widely used in the social and behavioral sciences. The IMRAD format is also known as the APA format, as the American Psychological Association employs the IMRAD headings in its APA stylesheet.

De fait, la présentation des *empirical studies* que propose le *Publication Manual of the American Psychological Association* (6e édition, 2009) est la suivante :

1.01 Empirical Studies

Empirical studies are reports of original research. These include secondary analyses that test hypotheses by presenting novel analyses of data not considered or addressed in previous reports. They typically consist of distinct sections that reflect the stages in the research process and that appear in the following sequence:

- **introduction:** development of the problem under investigation, including its historical antecedents, and statement of the purpose of the investigation;
- **method:** description of the procedures used to conduct the investigation;
- **results:** report of the findings and analyses; and
- **discussion:** summary, interpretation, and implications of the results.

e) En quoi tout cela nous intéresse-t-il ? Le master de recherche de sciences de l'éducation comporte, en première année, deux unités d'enseignement (UE) – une par semestre – intitulées respectivement *Actualités de la recherche 1* et *2*. La seconde de ces UE devrait cette année être organisée autour d'un type de tâches que j'appelle simplement, et sans doute provisoirement, *Lecture et analyse d'articles scientifiques* (LAAS), ce qui est en grande partie nouveau. Contrairement à l'épreuve de LCA des ECN, les articles lus et analysés ne seront pas seulement des *empirical studies*, pour reprendre ici une classification présentée lors de la séance 2 de ce séminaire :

1.01 Empirical Studies
1.02 Literature Reviews
1.03. Theoretical Articles
1.04. Methodological Articles
1.05 Case Studies
1.06 Other types of Articles

Un article à lire et à analyser devrait faire l'objet d'abord d'une lecture *inventoriante* qui en dégage la structure et en résume les contenus, suivie d'une lecture *questionnante*, qui interroge le même texte sur certains points clés non dégagés (ou dégagés insuffisamment) par la lecture inventoriante. Dans tous les cas, un *système de questions* devrait être élaboré et proposé afin de guider lecture et analyse. La première de ces questions devrait demander de situer l'article analysé par rapport à la classification que je viens de rappeler. Une deuxième question aura trait à la question *Q* étudiée. Une question ultérieure conduira certainement à évaluer la place donnée dans l'article à *l'apport propre de l'auteur* (ou des auteurs) par contraste avec la place allouée à simplement mentionner d'autres auteurs et leurs travaux (travaux dont on devra analyser le lien, ou la ténuité du lien, avec l'étude de la question *Q* proposée par l'auteur). Mais je n'irai pas plus loin sur ce sujet aujourd'hui.

MODÉLISATION ET TAD

1. Une « commande »

a) Il y a quelque temps déjà, André Pressiat m'a contacté en vue d'une intervention dans le cadre du groupe de travail « Mathématiques et réalités » dirigé par Alain Kuzniak dans le cadre du laboratoire André Revuz de l'université de Paris 7. Il m'a précisé sa « commande » dans un courriel que je me permets de reproduire ci-après.

> Notre groupe travaille depuis quelques temps sur la modélisation (*Mathematical modelling*) telle qu'elle apparaît à la lecture des deux numéros 38.2 et 38.3 de *ZDM* (avril et juin 2006) [...]. Notre but est de faire une brochure présentant une lecture critique de ces articles (un peu comme nous l'avons fait dans la brochure *Du monde réel au monde mathématique*, publiée en 2008 à l'IREM de Paris 7, en ce qui concerne l'approche italienne des DDE et l'approche de la *Realistic Mathematics Education*, mais en augmentant la partie critique).
>
> Le mot “modélisation” apparaît assez tôt dans tes travaux, à travers l'article bien connu de *Petit x* n° 19 (*Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*, 2e partie, 1989) mais également la publication moins connue de l'IREM de Marseille n° 16, *Arithmétique, algèbre, modélisation. Étapes d'une recherche*, qui date de la même année, dans laquelle tu évoques la situation des boîtes flottantes. Tu y dresses d'ailleurs un chantier bibliographique (pages 167 à 170) dans lequel figure le *mathematical modelling* qui en était alors à ses premiers développements. Plus récemment, tu évoques encore la modélisation dans ton cours à l'EE11 *Organiser l'étude : 1. Structures et fonctions* quand tu décris la “modélisation” du moment de première rencontre avec une tâche problématique (système, modèle, travail du modèle).
>
> Pourtant, tu t'es affranchi du cadre du *mathematical modelling* pour construire les développements de la TAD (praxéologies mathématiques et didactiques). Nous souhaiterions que tu essaies de nous dire quelles en ont été les raisons. L'article *Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics* écrit par Fco Javier García, Josep Gascón, Luisa Ruiz Higueras et Marianna Bosch (que je te joins également ci-dessous) donne implicitement une réponse a posteriori à la question : les auteurs réinterprètent le *mathematical modelling* dans le cadre de la TAD, en l'intégrant dans un “modèle épistémologique plus général des activités mathématiques institutionnelles”, ce dernier permettant de résoudre certains problèmes curriculaires (l'exemple du PER sur les plans d'épargne y est développé). On imagine que la réponse du bâtisseur de la TAD à l'époque de

l'élaboration des praxéologies mathématiques et didactiques n'a pas été la même…

Les trente-cinq thèses pour un débat que tu as développées au chapitre 5 de ta publication de 1989 à l'IREM de Marseille donnent des pistes sur la réponse que tu donnais à ce moment-là (Thèses 16, 17 et 18) :

Thèse 16 :
Il existe aujourd'hui en divers pays, et notamment aux États-Unis, un mouvement, attesté par de nombreuses publications, en faveur de l'enseignement de la modélisation, ou, encore, de l'enseignement des mathématiques (et en particulier des mathématiques appliquées) par la modélisation. Il ne semble pas qu'un mouvement analogue, semblablement développé, existe en France à l'heure actuelle. […] il convient d'examiner les conditions de possibilité de l'introduction d'une telle modification dans le système d'enseignement. […].

Thèse 17 :
Face à ce problème - qui met en jeu des rapports de forces au sein de la société toute entière -, il existe des stratégies d'évitement […] une troisième stratégie consiste à tenter d'intégrer, dans des proportions variables, l'étude et l'emploi de modèles dans un enseignement mathématique globalement traditionnel.

Thèse 18.1 :
[…] À rebours de "l'enseignement des modèles" (ou "par les modèles"), l'activité de modélisation semblerait mieux admise par les mathématiciens (parce qu'elle se rapproche de l'activité mathématique savante, dans laquelle la "modélisation" existe aussi, même si elle porte sur une réalité elle-même mathématique). Mais, bien qu'acceptable dans son principe, cette activité, se référant nécessairement à une réalité extramathématique, pose problème aux mathématiciens, dans la mesure où elle introduit du non-mathématique dans un enseignement de mathématiques. […] L'introduction dans l'enseignement de l'activité de modélisation supposerait une redéfinition du découpage en matières enseignées, qui introduirait par exemple une discipline "modélisation mathématique" ayant son statut, ses horaires, ses enseignants, etc. Cela suppose en amont un consensus social assez puissant pour faire apparaître l'activité de modélisation comme une pratique digne de rentrer à l'école, dont l'intérêt fasse à son tour apparaître acceptables au sein de l'école la matière première sur laquelle elle porte et les produits de l'activité de modélisation – les modèles – eux-mêmes.

Thèse 18.2 :
La difficulté à ce qu'apparaisse un tel consensus est lié au fait que la fabrication sociale de modèles aussi bien que leur mise en œuvre dans des pratiques sociales spécifiques sont des faits socialement "cachés". […]

Thèse 18.3 :
L'effort à fournir pour atténuer l'opacité qui retranche la plupart des pratiques de savoir spécifique de la vue de ceux qui n'en sont pas les agents directs ou les familiers immédiats est immense et ses résultats, incertains. [...] On atteint ainsi une limite possible de notre capacité actuelle de poser et résoudre, théoriquement et pratiquement, le problème posé.

C'est sur l'évolution de ta réponse depuis cette date jusqu'aux développements récents de la TAD que nous souhaiterions que tu interviennes.

Enfin, la lecture de ZDM montre que l'apprentissage de la modélisation est vue comme une compétence en mathématique (*modelling competence*) dans le projet KOM (Niss, 2003 : http://www7.nationalacademies.org/mseb/Mathematical_Competencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf), articulé autour du cercle de modélisation de Werner Blum. Par le canal de PISA et d'autres mouvements noosphériens au niveau mondial, cette *modelling competence* gagne du terrain, y compris en France (voir le programme de seconde actuel). Lors de la discussion qui suivra ton intervention, nous te solliciterons pour connaître ton avis sur cette évolution, et sur ce que la TAD permet d'en dire.

b) Comme on le voit, le programme proposé n'était pas vide ! Dans ce qui suit, j'ai réuni les notes que j'ai rédigées en vue de l'intervention proposée, qui s'est déroulée comme prévue le 4 décembre dernier. Après avoir beaucoup hésité, j'ai choisi de mélanger, si l'on peut dire, « ordre de découverte » et « ordre d'exposition », même si l'ordre de découverte l'emporte largement. Le titre et le résumé que j'ai dû proposer étaient les suivants (on notera leur prudence) :

Titre : **TAD et modélisation**

Résumé : l'exposé portera sur les notions de modèle et de modélisation telles qu'elles ont été employées jusqu'ici en TAD et montrera leurs liens avec les notions de praxéologie et de PER.

2. Systèmes et modèles

a) L'emploi du mot de *modèle* est en vérité très tôt ubiquitaire dans les travaux auxquels je suis associé. Pour s'en assurer, on pourra par exemple demander au moteur de recherche Google de repérer sur mon site (http://yves.chevallard.free.fr/), bien qu'encore très incomplet, les mots « modèle » et « modélisation » : on verra qu'ils y fleurissent, dans des contextes très divers. Dans les 509 pages du séminaire adressé aux PLC2 de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille pour l'année 2000-2001, par exemple, « modélis » a 100 occurrences exactement.

b) De fait, avant même de rencontrer Guy Brousseau et la didactique des mathématiques (en juin 1976), j'avais créé à l'IREM d'Aix-Marseille un atelier « Mathématiques et interdisciplinarité » (AMI), auquel participait notamment Alain Mercier. De cet atelier sortit en particulier un livre d'une centaine de pages intitulé *Deux études mathématiques sur la parenté* (CEDIC, Paris, 1977), opuscule pour lequel, m'avait-on rapporté à l'époque, Claude Lévi-Strauss en personne avait eu un mot gentil lors d'un entretien avec François Le Lionnais sur France Culture.

c) J'en viens à la notion clé : celle de *système*. C'est là une notion que je prends volontairement aussi *faible* qu'il semble possible : un système est un *objet* (au sens de la TAD) que l'on regarde comme potentiellement composé d'objets – de « composants » – supposés en interrelation et cela de façon plus ou moins intégrée (le bas latin *systema* et le grec *sustêma* dont il dérive renvoient à l'idée d'assemblage). On n'aura pas tort de conclure que tout ou presque peut alors être regardé comme un système.

d) Le minimalisme sémantique qui gouverne l'emploi que je fais du mot *système* est pour moi essentiel. Je resterai minimaliste en introduisant maintenant la notion de *modèle* : un modèle μ d'un système σ est lui-même un système qui permet de produire des connaissances sur σ. Généralement, pour au moins certaines assertions A relatives à σ, on sait *interpréter* A dans μ, et *réciproquement*. Le problème crucial est alors de savoir si, lorsque A_μ est vraie dans μ, alors son interprétation $A_\sigma = A$ est vraie dans σ :

$$\models_\mu A_\mu \overset{?}{\Rightarrow} \models_\sigma A_\sigma$$

L'idée est ainsi que, à certains égards, le système σ *se comporte comme* son modèle μ, et réciproquement. Dans le cas le plus général, cependant, une telle supposition demeure conjecturale.

e) Ce qui précède revient à interroger et à « faire parler » μ en lieu et place de σ : faute de pouvoir interroger σ, on interroge μ « à sa place ». Le modèle μ est ainsi promu au statut de « porte-parole » de σ. C'est en ce sens seulement que je dirai que μ *représente* σ ou en *est un représentant* : le mot de représentant a ici la valeur qu'on lui confère quand on parle de représentant diplomatique, de représentation politique d'un pays, etc. Bref, μ est alors considéré « à la place de σ ». Pour tout cela, j'ai beaucoup insisté autrefois sur le fait qu'un modèle d'un système n'a pas à « ressembler » à ce système en un sens naïf du terme : en quoi par exemple l'équation $y = 2x + 7$ « ressemble »-t-elle à la droite d'un plan, qui, dans un certain repère affine de ce plan, passe par les points ayant respectivement pour coordonnées (–2, 3) et (2, 11) ? Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'on espère que le comportement du modèle nous informera *à certains égards* sur le comportement du système. Ainsi, si l'on se demande si le point de coordonnées (45, 91) est bien sur la droite considérée plus haut, on aura avantage interroger le modèle « analytique » de la droite plutôt qu'à procéder à une inspection graphique de la droite.

f) La notion de modèle utilisée généralise des notions « partielles », classiques en mathématiques, mais davantage contextuelles. Ainsi est-il usuel de dire que la fonction $y = 2x + 7$ « représente » une certaine droite, et que, inversement, cette droite est une « interprétation » (géométrique) de la fonction $y = 2x + 7$. L'intérêt de cette généralisation, on le verra, est notamment d'unifier des points de vue qui sont ordinairement séparées en permettant de désigner aussi bien des modèles de systèmes *mathématiques* que de systèmes *extramathématiques*.

g) Dans tous les cas, l'intérêt fondamental de remplacer σ par μ devrait être clair : on espère que l'interrogation du modèle se révèlera *plus facile* et *plus fiable* que celle du système et que la réponse apportée par μ sera *plus audible* et *plus univoque*, même si l'on subodore que cette réponse n'est – en un sens à préciser – qu'une « approximation » de la réponse qui *pourrait* être celle de σ. Bien entendu, il se peut que, ayant obtenu de σ une réponse par d'autres voies – par la voie expérimentale pratiquée directement sur σ, notamment –, on découvre que la réponse de μ est incompatible avec celle obtenue de σ : on conclura alors que, *du point de vue considéré*, μ n'est pas « un bon modèle » de σ.

3. Systèmes mathématiques

a) J'ai laissé entendre dans ce qui précède que σ pouvait être un système « mathématique ». Il y a là, après le minimalisme de la notion de modèle, un autre point capital : le point de vue développé en TAD, en effet, est que l'activité de modélisation de systèmes (mathématiques) *est au cœur du travail mathématique*, même si – pour des raisons sur lesquelles je vais revenir – la chose n'est pas toujours perçue clairement.

b) Je commencerai par un exemple simple, qui permettra d'illustrer plusieurs notions relatives à l'activité de modélisation. Prenons pour « système » le nombre $\sqrt{2}$. En quoi d'abord, demandera-t-on peut-être, est-ce là un système ? Réponse : c'est bien un objet ; et sa description même désigne en lui plusieurs composants mis en interrelation – le *nombre* 2 et (disons) la *fonction* $\sqrt{\ }$ (ou l'*opération* « racine carrée », la 5^{e} opération de l'arithmétique d'autrefois). Cela noté, considérons l'équation suivante :

$$x = \frac{2-x}{x-1}.$$

Cette équation est un « système » (au sens donné à ce terme plus haut) et ce système peut être regardé comme un modèle de $\sqrt{2}$ *en ce sens* que $\sqrt{2}$ en est une solution positive ; on a en effet :

$$\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})} = \sqrt{2}.$$

Voyons alors comment on peut faire « parler » l'équation

$$x = \frac{2-x}{x-1}$$

à propos de la question Q suivante : que sont les quatre premières décimales de $\sqrt{2}$? Posée au modèle choisi, cette question s'énonce ainsi : que sont les quatre premières décimales d'une solution positive de l'équation

$$x = \frac{2-x}{x-1}\ ?$$

Pour répondre, on va « travailler » ledit modèle. Si $x > 0$ vérifie cette équation, on a

$$\frac{2-x}{x-1} > 0,$$

ce qui implique que, soit $2 - x < 0$ et $x - 1 < 0$, soit $2 - x > 0$ et $x - 1 > 0$. Dans le premier cas on devrait avoir à la fois $x > 2$ et $x < 1$, ce qui n'est pas possible. On a donc la seconde paire d'inégalités, qui s'écrit encore

$$1 < x < 2.$$

Ce « résultat » – si x est une solution positive de l'équation, alors $x \in\ ]1, 2[$ – est certes peu spectaculaire, mais la *manière de faire parler* l'équation que l'on a employée mérite d'être retenue. On a en effet

$$x = \frac{2-x}{x-1} = \frac{2 - \frac{2-x}{x-1}}{\frac{2-x}{x-1} - 1} = \frac{2(x-1)-(2-x)}{(2-x)-(x-1)} = \frac{3x-4}{3-2x}$$

en sorte qu'on peut conclure, de même, que l'on a $3 - 2x > 0$ et $3x - 4 > 0$ ou $\frac{4}{3} < x < \frac{3}{2}$, c'est-à-dire encore $1,33\ldots < x < 1,5$. À partir de l'égalité

$$x = \frac{3x-4}{3-2x}$$

on obtient ensuite

$$\frac{3x-4}{3-2x} = \frac{3\,\frac{3x-4}{3-2x} - 4}{3 - 2\,\frac{3x-4}{3-2x}} = \frac{9x - 12 - 12 + 8x}{9 - 6x - 6x + 8} = \frac{17x-24}{17-12x}$$

et, de là, $\frac{24}{17} < x < \frac{17}{12}$ ou $1{,}4117\ldots < x < 1{,}4166\ldots$ Une itération de plus donne

$$\frac{17x-24}{17-12x} = \frac{17\,\frac{17x-24}{17-12x} - 24}{17 - 12\,\frac{17x-24}{17-12x}} = \frac{577x-816}{577-408x}$$

et donc $\frac{816}{577} < x < \frac{577}{408}$ ou $1{,}414211\ldots < x < 1{,}414215\ldots$, ce qui permet de répondre à la question proposée : les quatre premières décimales d'une solution positive de l'équation, et donc de $\sqrt{2}$, sont 4, 1, 4, 2 (la cinquième décimale étant 1).

c) Dans le cas précédent, l'intérêt de remplacer le système $\sqrt{2}$ par le modèle

$$x = \frac{2-x}{x-1}$$

tient à ce qu'on peut « travailler » ce modèle de multiples façons. Supposons ainsi qu'il existe $x \neq \sqrt{2}$ vérifiant cette équation ; en posant $\sqrt{2} = \alpha$ pour alléger les écritures, on a alors

$$\frac{x(x-1)}{2-x} = 1 \text{ et } \frac{\alpha(\alpha-1)}{2-\alpha} = 1.$$

Il en résulte que l'on a :

$$1 = \frac{x(x-1)}{2-x} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2-\alpha} = \frac{x(x-1)-\alpha(\alpha-1)}{(2-x)-(2-\alpha)} = \frac{x^2-\alpha^2-(x-\alpha)}{-(x-\alpha)} = 1-(x+\alpha).$$

On a donc $x = -\alpha = -\sqrt{2}$, valeur dont on vérifie aisément qu'elle est bien solution de l'équation considérée. On déduit de là en particulier que la seule solution positive de l'équation est $x = \sqrt{2}$. J'ajoute que ce même modèle permet aussi d'établir que $\sqrt{2}$ est un nombre *irrationnel*. Si en effet, pour une solution x de l'équation, il existait des entiers p et q tels que $x = \frac{p}{q}$ (avec p et q premiers entre eux), on aurait :

$$x = \frac{2-x}{x-1} = \frac{2-\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}-1} = \frac{2q-p}{p-q}.$$

Puisque $2q > p$, on devrait conclure alors que $p - q < q$, amorçant ainsi une descente infinie évidemment impossible.

d) Dans plusieurs textes, Marianna Bosch et Josep Gascón ont souligné le phénomène selon lequel l'étude mathématique d'un système $\mu_0 = \sigma$ se traduit généralement par la fabrication d'une chaîne de modèles $(\mu_i)_{1\leq i\leq k}$ dans laquelle μ_i est un modèle de μ_{i-1}. C'est ainsi que, dans le cas du système $\sqrt{2}$, l'étude du modèle équationnel μ_1 conduit à construire comme suit un modèle μ_2 de ce modèle afin d'accroître la puissance productive du modèle utilisé. Soit d un décimal choisi de façon que $1 \leq d < \sqrt{2}$; on a alors :

$$x^2 = 2 \Rightarrow x^2 - d^2 = 2 - d^2 \Rightarrow (x-d)(x+d) = 2 - d^2 \Rightarrow x = \frac{2-d^2}{x-d} - d = \frac{2-dx}{x-d}.$$

D'une manière évidente, l'équation paramétrique

$$x = \frac{2-dx}{x-d}$$

est un modèle μ_2 de l'équation numérique initiale μ_1. Cette fois, on en tire que l'on a

$$d < x < \frac{2}{d}$$

ou $x \in \left]d, \frac{2}{d}\right[$. En passant, on peut noter une valeur approchée « remarquable » de x : le milieu de l'intervalle $\left]d, \frac{2}{d}\right[$, soit

$$x_{\mathrm{H}} = \frac{1}{2}\left(d + \frac{2}{d}\right),$$

avec $|x - x_{\mathrm{H}}| < \frac{2}{d} - d$, majorant qui décroît lorsque d croît en restant inférieur à x. Mais on peut reprendre alors avec μ_2 le travail accompli sur μ_1 ; il vient :

$$x = \frac{2-dx}{x-d} = \frac{2 - d\,\dfrac{2-dx}{x-d}}{\dfrac{2-dx}{x-d} - d} = \ldots = \frac{(2+d^2)x - 4d}{2 + d^2 - 2dx}.$$

On en déduit alors que $\frac{4d}{2+d^2} < x < \frac{2+d^2}{2d}$ avec donc

$$x_{\mathrm{H}}(d) = \frac{1}{2}\left(\frac{4d}{2+d^2} + \frac{2+d^2}{2d}\right) = \frac{(2+d^2)^2 + 8d^2}{4d(2+d^2)}$$

et

$$\delta = \frac{2+d^2}{2d} - \frac{4d}{2+d^2} = \frac{(2+d^2)^2 - 8d}{2d(2+d^2)} = \frac{(2-d^2)^2}{2d(2+d^2)}.$$

Pour d = 1,4, par exemple, on a

$$x_{\mathrm{H}}(1,4) = \frac{(2 + d^2)^2 + 8d^2}{4d(2 + d^2)} = \frac{3,96^2 + 8 \times 1,96}{4 \times 1,4 \times 3,96} = 1,4142135\ldots$$

et $\delta = \dfrac{0,04^2}{2 \times 1,4 \times 3,96} = 1,443\ldots \times 10^{-4}$.

e) J'arrêterai là l'étude de l'exemple précédent pour en tirer quelques conclusions. Ce qui me paraît émerger à travers cet exemple est bien ce qui fait l'intérêt de regarder l'activité mathématique – même élémentaire – comme activité de modélisation, où l'on crée des modèles et où on les travaille pour les faire parler : à savoir le sentiment non pas de simplement visiter des monuments tout faits mais bien de découvrir des situations, des points de vue, des manières inédites (ou partiellement inédites) d'interroger le réel mathématique en ouvrant des chemins non encore parcourus. Pour le dire autrement : on peut simplement *analyser de l'extérieur* l'activité mathématique comme activité de modélisation ; mais si l'on *vit de l'intérieur* l'activité mathématique comme activité de construction et de travail de modèles, on vit alors une autre activité mathématique.

f) Tout ce qui précède n'est pas récent. C'est ainsi que, dans le séminaire adressé aux PCL2 déjà mentionné figure entre autres le passage suivant (qui s'insère dans un développement plus vaste, qu'on me pardonnera de ne pas reproduire en entier) :

• Ainsi, associer à la ***formule*** $h = \sqrt{2xr+x^2}$ la ***fonction*** définie par $h(x) = \sqrt{2xr+x^2}$, c'est modéliser un système relevant ***de l'algèbre élémentaire*** par un modèle relevant ***de l'analyse élémentaire***, ce qui permet alors de disposer de notions et de moyens de travail jusque-là non disponibles (monotonie, dérivabilité, etc.).

• De même, récrire l'expression

$$h^2(x)(r+x+1)^2-h^2(x+1)(r+x)^2$$

sous la forme

$$\mathrm{A(B+C)-(A+C)B}$$

revient à ***modéliser la première expression par la seconde***. Celle-ci peut être regardée comme une « miniature » de la première : elle est en tout cas ***plus facile à travailler***, et fournit donc à peu de frais l'information recherchée à propos du « système » étudié.

• C'est le même principe de miniaturisation qui, dans l'étude des variations de la fonction φ_u, avait conduit – très classiquement – à modéliser cette fonction par une autre fonction, sa dérivée φ_u'.

– Cette extension de la notion de modélisation permet notamment une ***vision d'ensemble*** de l'activité mathématique, qui peut dès lors être décrite – de manière toute formelle, certes – par une suite (finie) de systèmes, (σ_n), où σ_n est un modèle de σ_{n-1}, les systèmes σ_n étant « mathématiques », à l'exception peut-être de σ_0, dont la nature seule spécifie les cas d'interventions extramathématiques des mathématiques :

$$\sigma_0 \rightarrow \sigma_1 \ldots \rightarrow \sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_n \rightarrow \ldots$$

– Ce schéma formel suggère que l'on retrouve, en toute activité mathématique, l'essentiel des caractères reconnus plus haut aux ***interventions extramathématiques des mathématiques***. En particulier, que le système de départ soit ***ou non*** de nature mathématique, l'approfondissement de l'étude suppose, en règle générale, la mobilisation de ressources mathématiques plus nombreuses ou, du moins, plus avancées. Inversement, une même situation du monde – du monde mathématique ou du monde extramathématique – pourra être « exploitée » à des niveaux d'approfondissement différents, et apparaîtra alors comme lieu d'intervention de différents outils mathématiques.

g) Voici maintenant un extrait du Séminaire adressé aux PCL2 durant l'année 2002-2003. On y verra la plasticité de la conception du travail mathématique que permet le concept de modèle. On y notera surtout que « modéliser » *n'a pas de sens univoque* (j'y reviendrai) : ce que l'on fait sous ce nom dépend de la question à laquelle on veut répondre, qui spécifie le type du modèle cherché.

③ Une part essentielle des apprentissages mathématiques secondaires a pour objet la maîtrise de semblables ***mises en relation*** entre les domaines ***numérique***, ***géométrique***, ***algébrique***, ***analytique***, ***probabiliste***, etc. Bien entendu, la relation de système à modèle ($\sigma \rightarrow \mu$) continue de décrire adéquatement la structure du travail mathématique ***même lorsqu'il n'y a pas changement de cadre***. Ce cas est fréquent, notamment dans la phase de ***travail du modèle*** : c'est ce qui se produit par exemple lorsque, au cours d'un calcul algébrique, on est amené – comme on l'a fait lors de la séance 20 – à « poser » telle expression égale à telle autre.

❶ Ce ***jeu avec les modèles*** sera illustré ici à propos du système σ qu'est l'expression numérique $A = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^3}$. […]

……………………………………………………………………………………………

④ L'exemple précédent montre en particulier que le travail mathématique à accomplir sur un modèle dépend de la « nature » du modèle. Inversement, si l'on fixe *a priori* le style de travail que l'on entend accomplir sur le modèle, il convient d'établir un modèle d'un type approprié.

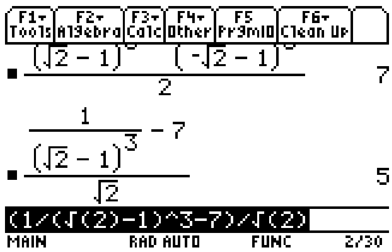
❶ Supposons ainsi que, dans l'exemple précédent, à la place du travail ***algébrique*** réalisé, on envisage d'accomplir un travail ***numérique***, et cela à l'aide d'une ***calculatrice***. En d'autres termes, supposons qu'on se propose de calculer ***l'expression canonique*** $a + b\sqrt{2}$ de $A = \dfrac{1}{(\sqrt{2}-1)^3}$ ***à l'aide d'une simple calculatrice***. La chose est-elle possible ?

❷ La question cruciale est ici : comment – si on le peut – exprimer les coefficients a et b au moyen de l'expression A ? La réponse consiste à remplacer le modèle μ précédemment utilisé par le ***modèle*** $\boldsymbol{\mu_{calc}}$ ci-après :

$$\begin{cases} A = a+b\sqrt{2} \\ a = \dfrac{A(\sqrt{2})+A(-\sqrt{2})}{2} \\ b = \dfrac{A-a}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Cette modélisation est fondée essentiellement sur le résultat technologique (dont la démonstration est laissée au lecteur) selon lequel, si $A(\sqrt{e})$ est une expression contenant $\sqrt{e}$ (avec e entier naturel non carré parfait), et si $A(\sqrt{e}) = a+b\sqrt{e}$, alors on a : $A(-\sqrt{e}) = a-b\sqrt{e}$.

❸ Le travail « à la calculatrice » requis est illustré sur le contenu d'écran reproduit ci-après :



On obtient bien : $A = 7+5\sqrt{2}$.

4. La modélisation et l'enseignement

a) Comment se fait-il que le regard jeté ordinairement sur l'activité mathématique scolaire ne permette pas de la voir comme activité de modélisation ? À cela il y a, je crois, une raison simple mais radicale : l'enseignement des mathématiques ordinaire fait travailler les élèves, de façon souvent très guidée, sur des modèles mathématiques *tout faits*, souvent *canoniques*, que ces mêmes élèves n'ont pas eu à construire et dont le problème de la construction reste toujours extérieur au travail de la classe. Pour la racine carrée, ainsi, à un certain niveau d'études, l'élève visitera la *méthode de Newton*, dont l'emblème est la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)},$$

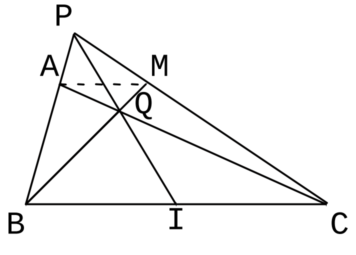
avant de visiter l'*application* de la méthode de Newton au cas où $F(x) = x^2 - 2$, qui donne ici

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

On retrouve ainsi une formule que nous avons vu apparaître au fil d'un parcours « original », ouvert par l'étude du « système » $\sqrt{2}$, et non pas « programmée » par une tradition désignant ce qu'il y a lieu de visiter à tel ou tel niveau des études scolaires.

b) D'une façon générale, dans l'enseignement des mathématiques, on peut considérer trois types de rapports aux modèles et à la modélisation. Dans un *premier type de rapports*, l'élève visite des *modèles tout faits*, que l'ancienneté de leur présence dans le curriculum a naturalisés et qui ne sont donc plus vus comme des modèles qu'il a fallu un jour construire et que l'on pourrait aujourd'hui « discuter », « revisiter », si j'ose dire ! Cet état de choses a *notamment* pour conséquence, je le souligne en passant, que le modèle tend à l'emporter sur le système qu'il prétend modéliser, système qui n'est plus, bien souvent, que le faire-valoir, voire le repoussoir, du modèle. À l'extrême pointe de cette évolution, le modèle devient tout et le système modélisé n'est plus rien : il disparaît. Ainsi en va-t-il aujourd'hui du calcul des probabilités, dont, sauf exception, on semble ne même plus savoir ce qu'il modélise.

c) Un *deuxième type de rapports* fait intervenir des modèles *régionaux* : ceux-là sont rencontrés *tout faits* par les élèves ou étudiants ; c'est en principe leur *emploi* pour fabriquer des modèles *locaux* qui fait l'objet du travail de la classe. Pour tracer une ligne de démarcation entre premier et deuxième rapports, je prendrai un exemple où le modèle régional est la « géométrie analytique » du plan. Voici un énoncé de problème dont la résolution suppose que l'élève fabrique un modèle local :



Soit un triangle ABC ; par le milieu I de [BC] on mène une droite coupant (AB) en P et (AC) en Q. Montrer que le point de rencontre de (BQ) et de (CP) est situé sur la parallèle à (BC) passant par A.

L'ouvrage auquel j'emprunte cet énoncé (en le modernisant) date de 1963 : il s'agit du manuel pour la classe de mathématiques élémentaires intitulé *Géométrie* et sous-titré *Géométrie analytique – Géométrie descriptive*, signé de Joanny Commeau et paru chez Masson dans une collection dirigée alors par Georges Cagnac et Lucien

Thiberge. L'exercice y est proposée (p. 180) dans un chapitre intitulé *Repère affine*, et s'assortit de cette indication bienveillante : *On prendra pour repère* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. On imagine aisément comment un énoncé d'aujourd'hui organiserait une rencontre sévèrement guidée avec un modèle local « donné » du système géométrique en question :

> On prend pour repère $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
> 1. Quelles sont les coordonnées de I ?
> 2. Soit $(p, 0)$ et $(0, q)$ respectivement les coordonnées de P et de Q. Vérifier que la droite (PQ) admet l'équation suivante : $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. En déduire que l'on a : $2pq = p + q$.
> 3. …

Je poursuis librement. Si l'on sait que, de façon générale, la droite passant par les points U(α, 0) et V(0, β) admet l'équation

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

alors on peut conclure que la droite (BQ) admet pour équation $\frac{x}{1} + \frac{y}{q} = 1$ et que la droite (CP) admet de même l'équation $\frac{x}{p} + \frac{y}{1} = 1$, en sorte que les coordonnées de M, point de rencontre de (BQ) et (CP), constituent la solution du système

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{q} = 1 \\ \dfrac{x}{p} + y = 1 \end{cases}.$$

La solution de ce système est

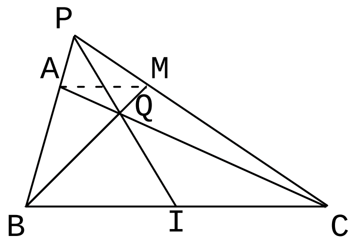
$$\begin{cases} x = \dfrac{pq - p}{pq - 1} \\ y = \dfrac{pq - q}{pq - 1} \end{cases}.$$

On a donc :

$$x_M + y_M = \frac{2pq - (p + q)}{pq - 1} = 0.$$

La droite d'équation $x + y = 0$ passe donc par M ; comme elle passe aussi par A(0, 0), c'est la droite (AM). Elle est en particulier parallèle à la droite (BC), dont une équation est $x + y = 1$: (AM) est donc parallèle à (BC).

d) Le *troisième type de rapports* est celui où l'on doit situer ce qui est présenté usuellement, dans la noosphère internationale, comme le *mathematical modeling*. (On écrit *modelling* en anglais britannique et canadien, *modeling* en anglais américain.) À ce niveau, on ne donne à l'élève qu'une description de base du système σ ainsi bien sûr que la question *Q* que l'on se pose à son sujet. Le cadre de la modélisation, le modèle lui-même, en particulier ce qu'on doit prendre en compte dans le système, *font ici partie du problème*. Dans le cas du problème de géométrie vu plus haut, ainsi, le choix du repère et même le choix de l'outil analytique seraient à la charge de l'élève (ou de la classe) : tout en principe est à faire ! Par exemple, pour qui connaît le théorème de Ceva, le système géométrique proposé dans



l'énoncé gagne à être modélisé par le triangle PBC dans lequel les droites (PI), (CA), (BM) sont regardées comme des céviennes particulières, ce qui conduit à l'égalité $\frac{\text{CI}}{\text{IB}}\frac{\text{AB}}{\text{AP}}\frac{\text{MP}}{\text{MC}} = 1$; puisque I est le milieu de [BC], on arrive à l'égalité $\frac{\text{PM}}{\text{MC}} = \frac{\text{PA}}{\text{AB}}$, d'où il résulte (d'après le théorème de Thalès) que (AM) est parallèle à (BC).

e) J'illustrerai le cas de systèmes extramathématiques avec un exemple très simple que j'emprunte à un auteur espagnol, Sixto Ríos (1913-2008), regardé comme "el padre de la estadística española" (voir l'article qui lui est consacré dans *Wikipedia*). Dans son livre *Modelización* (Alianza Universidad, 1995), il propose de modéliser la circulation d'un cycliste qui veut aller de Valladolid à Cuéllar pour revenir ensuite à Valladolid. Ríos suppose d'abord des conditions qui sont les suivantes :

B_1) Su velocidad en carretera horizontal y bien acondicionada sin viento es 30 km/hora.
B_2) Hace un poco de viento en la dirección y sentido de la marcha.
B_3) Puede mantenerse en forma normal sin fatiga durante unos 100 km.
B_4) La temperatura en la tarde va a ser 22 ° y, probablemente, no lloverá.
B_5) La carretera está en buen estado y es prácticamente horizontal en todo el trayecto.

En outre, il imagine que le cycliste parvient à la conclusion que, lorsqu'il roulera contre le vent, sa vitesse sera diminuée d'environ 3 km/h, et augmentée d'autant quand il roulera avec le vent dans le dos. Tout un ensemble de « simplifications » précisées et commentées par l'auteur conduisent à écrire plus généralement la formule suivante donnant la durée *t* du trajet aller-retour en fonction de la distance *d* entre les deux villes, avec un vent de vitesse *v*, pour une vitesse constante sans vent du cycliste égale à *c* :

$$t(d) = \frac{d}{c+v} - \frac{d}{c-v}.$$

Cette formule constitue-t-elle un « bon modèle » du système étudié ? Une propriété remarquable du modèle est la suivante :

$$t(d) \propto d.$$

En d'autres termes, la durée du trajet est proportionnelle à la longueur du trajet (alors même que celui-ci comporte deux étapes parcourues à des vitesses différentes). Cela permettra de confronter *par l'expérience* le modèle et le système, en donnant à d des petites valeurs, de l'ordre de quelques kilomètres. J'ajoute que, bien entendu, le travail de modélisation réalisé s'inscrit dans un modèle régional, celui de la cinématique la plus élémentaire ; mais le « choix du modèle », sa construction sont supposées ici *à la charge de l'élève* (ou, ici, du cycliste évoqué par l'auteur). Par contraste, on peut imaginer la réduction que subirait ce problème dans le cadre scolaire traditionnel : il prendrait la forme d'un énoncé que l'on peut imaginer proche du suivant.

> Un cycliste fait un aller-retour entre une ville A et une ville B distantes de 50 km. À l'aller, il aura le vent dans le dos et roulera à une vitesse constante de 33 km/h ; au retour, il aura le vent de face et roulera à une vitesse constante de 27 km/h.
>
> 1. Quelle sera la durée de l'aller-retour ?
>
> 2. En fait, au tiers du trajet de A vers B, il s'aperçoit que l'orage gronde au loin et il décide en conséquence de revenir vers A aussitôt. Est-il vrai que cet aller-retour aura duré alors le tiers du temps qu'il lui aurait fallu pour aller jusqu'à B et en revenir ?

Ici, le système n'est plus qu'une évocation lointaine : on travaille directement sur le modèle *imposé* par l'énoncé, modèle qui n'est plus vu comme tel mais comme qui devient une réalité d'opérette. Surtout, il n'y a plus, ici, de travail de modélisation ; il y a seulement le travail d'un modèle qui n'en est pas un, parce qu'il passe pour la réalité.

5. Systèmes extramathématiques et codisciplinarité

a) Je reviendrai plus loin sur la perspective dans laquelle la TAD situe aujourd'hui les trois types de rapports à la modélisation et aux modèles que je viens de brosser. Mais je vais maintenant m'arrêter sur une difficulté engendrée par des contraintes scolaires et extrascolaires et pesant sur l'écologie de la modélisation de systèmes *extramathématiques* dans la classe de mathématiques. J'évoquerai ici, trop rapidement sans doute, deux ordres de contraintes que l'on peut réunir en disant qu'il n'existe pas aujourd'hui, de façon régulière, dans l'enseignement secondaire français, de lieu ouvert à la *codisciplinarité.*

b) Un premier ordre de contraintes tient à ce que, dans la classe de mathématiques *d'aujourd'hui*, des objets regardés comme non mathématiques ne sauraient vivre longtemps, sinon sous une forme ancillaire (tels les jeux de cartes en « probabilités »). C'est là une situation qui s'est durcie tout au long du XXe siècle. Pour ne prendre qu'un exemple, voici ce qu'était encore le programme de cosmographie du 24 juin 1948 pour les classes terminales de *Philosophie* et de *Sciences expérimentales* :

Classes de Philosophie et de Sciences expérimentales.

1° Le Ciel et les constellations. – Sphère céleste locale ; verticale et horizon. Coordonnées horizontales ; azimut et hauteur. Théodolite.

Lois du mouvement diurne (explication par la rotation de la Terre) ; équatorial. Sphère des fixes ; axe du Monde : équateur céleste. Méridien astronomique ; points cardinaux.

Angle horaire d'une étoile : temps sidéral. Coordonnées célestes équatoriales : ascension droite et déclinaison. Instrument méridien.

2° La Terre. – Coordonnées géographiques : longitude et latitude. Notions sommaires sur la forme et les dimensions du géoïde.

3° Mouvement apparent du Soleil sur la sphère des fixes ; écliptique. Mouvement diurne du Soleil ; inégalité des jours et des nuits aux diverses latitudes, crépuscules. Saisons.
Année tropique. Calendriers.
Temps universel (T. U.). Temps légal; fuseaux horaires.

4° Le système solaire. – Les Planètes. Système de Copernic ; lois de Klépler [*sic*] ; loi de Newton.
Les planètes principales. Leurs distances moyennes au Soleil.
Dimensions du Soleil et des planètes. Description physique des planètes. Comètes, météores et météorites.

5° La Lune. – Révolution sidérale. Phases ; révolution synodique. Rotation. Description physique.
Notions sur les éclipses de Lune et de Soleil. Le saros.

6° Constitution physique du Soleil : photosphère, taches, chromosphère, protubérances, éruptions, couronne solaire.

7° Les étoiles. – Leurs distances à la Terre.
Étoiles doubles. Étoiles variables. Céphéïdes. Novae.
La galaxie. Nébuleuses galactiques et extragalactiques. Matière interstellaire.

Tout cela, dois-je le rappeler ?, était confié *au professeur de mathématiques*. Mais ce programme marque en vérité un *recul substantiel*, contre lequel des auteurs de manuels fort connus – Roland Maillard et Albert Millet – protestent énergiquement dans la préface de l'édition de 1953 (chez Hachette) de leur *Cosmographie* pour lesdites classes, en indiquant ce qu'a été leur ligne de résistance à l'agression contre ce qu'ils regardent alors comme une partie intégrante de leur discipline, les mathématiques :

> Le programme de Cosmographie, commun aux classes de *philosophie* et de *Sciences Expérimentales,* est réduit au minimum de ce qu'un homme cultivé ne peut ignorer.
>
> En comparant ce programme à celui de la classe de Mathématiques, on se rend compte de suppressions pour lesquelles aucun doute n'est permis ; par exemple : le *nivellement*, la *représentation plane d'un hémisphère terrestre*, la *précession des équinoxes*, *l'année sidérale*, ne font pas partie du programme des classes de Philosophie et de Sciences expérimentales.
>
> Mais on peut hésiter devant d'autres suppressions. Comment parler de la *constitution physique du Soleil* en ignorant tout du *spectre solaire* ? Et peut-on donner une idée de la *distance des étoiles à la Terre* sans quelques notions sur la *magnitude des étoiles* et sur les *spectres stellaires* ?
>
> Les questions nettement supprimées n'ont pas été traitées dans ce Cours ; celles dont le libellé a disparu mais qui nous ont semblé nécessaires à la bonne compréhension d'autres parties du programme ont été exposées succinctement.

C'est là, à l'évidence, un état de la cartographie – évolutive ! – des disciplines scolaires qui surprendra plus d'un professeur d'aujourd'hui, qu'il professe « les mathématiques », « la physique et la chimie » ou « les SVT »…

c) L'autre ordre de contraintes que j'ai annoncé n'est que le revers de l'avers que je viens d'évoquer : de même que des objets « non mathématiques » ne sauraient vivre que de façon plus ou moins clandestine dans la classe de mathématiques, de même les objets *réputés relever*, scolairement (et déjà parfois « savamment »), de telle autre discipline enseignée (physique, chimie, biologie, géologie, géographie, etc.) ne sauraient, pour les desservants de cette discipline, être « manipulés » légitimement, au double plan épistémologique et didactique, par des agents enfermés dans leur habit strictement coupé de « mathématiciens ». Aujourd'hui encore, les corporatismes disciplinaires, ce que j'ai appelé aussi, plus crûment, les « ethnicismes disciplinaires », portent leurs agents à regarder comme de leur devoir de *soupçonner* le membre de l'autre ethnie qui prétend s'affubler d'emblèmes « disciplinaires » qui ne sont pas les siens. Cette *idiotie* *disciplinaire* – je prends idiotie au sens grec du mot, bien entendu – a sans doute son utilité. Par exemple, elle oblige les « mathématiciens » à croire qu'ils seraient « compétents » en mathématiques, les physiciens-chimistes à penser qu'ils seraient compétents en physique et chimie – et plus encore qu'ils seraient *seuls* compétents en ces matières –, etc. Ces soupçons croisés, ordinairement réservés aux élèves, se manifestent en l'endroit des membres des autres ethnies disciplinaires comme une seconde nature : ces « mathématiciens » ne confondent-ils pas *densité* et *masse volumique* ? Et d'ailleurs savent-ils *vraiment* ce qu'est la masse volumique ? Etc.

d) On connaît la recette employée lorsqu'on veut tenter d'atténuer les rigueurs de ces impérialismes épistémologiques têtus : se mettre à deux professeurs (par exemple en TPE), chacun se portant implicitement garant de l'autre, et autorisant l'autre à prendre part à une activité « bidisciplinaire » pour laquelle il n'a pas institutionnellement qualité. Il s'agit là sans doute d'un moyen d'ébranler les interdictions disciplinaires croisées qui n'est pas à négliger. Mais cela reste bien loin d'une configuration véritablement codisciplinaire, où l'exigence n'est pas tant la présence d'un « physicien », d'un « biologiste » ou d'un « mathématicien » par exemple que la disponibilité de *connaissances* adéquates en physique, en biologie ou en mathématiques. La figure stérilisante du « commissaire disciplinaire », qui hante la culture épistémologique actuelle de l'enseignement secondaire et supérieur, nous pouvons espérer qu'elle dépérisse. Du moins devons-nous apprendre collectivement à nous émanciper de sa tutelle.

6. Mathématicités

a) À partir de quand a-t-on un modèle d'un système ? Réponse : dès lors qu'on « a » le système, c'est-à-dire dès qu'on l'évoque à travers l'usage d'ostensifs, car *le système est le premier de ses modèles*. Pour beaucoup de gens, ainsi, il y a un système qui a nom « l'opinion publique » – même si, pour Pierre Bourdieu, « L'opinion publique n'existe pas » (1972). À propos d'un modèle outrageusement simplifié de ce système, je cite Sixto Ríos :

> Si consideramos como sistema *S* la opinión pública de un país, que va pasando en épocas sucesivas de posiciones radicales a conservadoras y viceversa, un modelo *M* de *S* puede ser el movimiento de un péndulo…

Bien entendu, le modèle choisi aurait pu être aussi bien (ou aussi mal) un essuie-glaces de voiture. Cela noté, Ríos poursuit ainsi :

> … un modelo *M* de *S* puede ser el movimiento de un péndulo (se trata de un modelo *cualitativo* o *verbalista*). En estos modelos las relaciones entre las

variables no se expresan cuantitativamente, lo que es, en general, una imperfección del modelo.

Le modèle en question nous dit que l'opinion publique va changer – passer de l'état « conservateur » à l'état « radical », ou l'inverse. Mais, par exemple, il ne nous dit pas dans *combien de temps* elle le fera, ou *avant* combien de temps, ce qui est une « imperfection » de ce modèle en ce sens qu'il ne peut répondre à la question : c'est là une connaissance que le modèle en question semble incapable de produire.

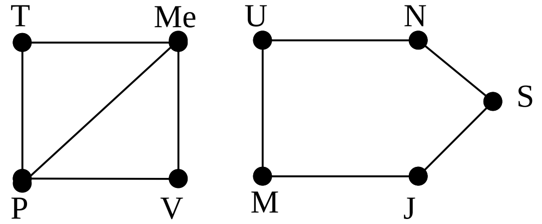
b) Pour qu'un modèle soit « mathématique », faut-il qu'il contienne des composants « quantitatifs » ? Remarquons que le modèle du pendule contient un tel composant : le *nombre d'états* – pas trois, par exemple, mais deux – entre lesquels il prétend que le système *S* va osciller. C'est là, pourra-t-on penser, le niveau zéro de la « mathématicité ». Mais je prendrai au sérieux ce qui peut apparaître d'abord comme une boutade, en considérant qu'il y a « de la mathématicité » dès lors qu'on distingue diverses entités dans le système examiné. Où commence le mathématique ? Je me refuse à tracer une frontière absolue. Voici un exemple que je tire du séminaire déjà évoqué.

Nous sommes en 2951. Un voyageur *x* souhaite aller de la Terre sur Mars. Dans un catalogue, il repère une agence de voyages qui propose les liaisons régulières suivantes : Terre-Mercure, Pluton-Vénus, Terre-Pluton, Pluton-Mercure, Mercure-Vénus, Uranus-Neptune, Neptune-Saturne, Saturne-Jupiter, Jupiter-Mars et Mars-Uranus.

……………………………………………………………………………………………

• Un « mathématicien praticien » *x** qui ne connaîtrait que les mathématiques de l'enseignement scolaire actuel ne saurait guère vers quel type de modèles « mathématiques » se tourner…

• Le type de modèles nécessaire existe pourtant : le modèle approprié est ici un ***graphe***, et plus précisément le graphe des itinéraires des navires spatiaux. Les ***sommets*** de ce graphe correspondent aux planètes et les ***arêtes*** indiquent les itinéraires des navires entre les planètes :



• Il suffit alors d'***observer*** ce modèle pour répondre à la question posée. Le modèle μ obtenu ***montre*** que l'énoncé A_μ = « Il est possible d'aller du point T au point M sur le graphe » est ***faux*** : il n'existe pas de lien entre les deux sous-ensembles de sommets { T, P, V, Me } et { Ur, Ma, J, S, N }. L'énoncé A_σ = « Il est possible d'aller de la Terre à Mars par cette l'agence de voyages » est donc lui-même faux.

c) Bien entendu, dans la vision usuelle des mathématiques, un seuil est franchi lorsque des variables quantitatives sont dégagées et des relations entre elles établies. Voici un autre extrait encore du séminaire 2000-2001 des PLC2 de Marseille :

– En cela le mathématicien paraît se distinguer du commun des mortels... Dans l'Égypte ancienne, un contremaître ayant à distribuer leur ration de pains à ses ouvriers ne pouvait guère opérer qu'ainsi (C. Grimberg, *Histoire universelle*, tome 1, Marabout Université, Paris, 1963, pp.130-131) :

« Il [faisait] ranger les ouvriers sur un rang et [donnait] à chacun un pain, puis un autre, jusqu'à épuisement de la provision. Si à la dernière distribution, quelques hommes ne [recevaient] rien, le contremaître [n'avait] plus qu'une chose à faire : reprendre la dernière distribution et diviser les pains jusqu'à ce que chacun ait reçu une part égale. »

Par contraste, le scribe, faisant usage de l'arithmétique, pouvait ***calculer*** la ration de pain à attribuer à chaque ouvrier. Si, par exemple, il s'agissait de répartir 19 pains entre 8 ouvriers, il était capable d'indiquer au contremaître que chaque homme devait recevoir 2 pains, plus un quart de pain, plus un huitième de pain, information qu'il tirait d'un modèle de la situation que nous écririons

$$\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

L'historien déjà cité commente ce fait dans les termes suivants :

« Les illettrés étaient fort impressionnés par ce scribe qui pouvait calculer la ration quotidienne de chaque travailleur, sans devoir prendre lui-même les pains en main, sans même devoir quitter sa chambre. »

Mais il est important d'observer qu'il existe une mathématique *pré-arithmétique* – celle du contremaître égyptien. Des praxéologies intermédiaires existent d'ailleurs. Imaginons qu'on modélise les ouvriers chacun par un caillou, chaque ouvrier donnant au contremaître un caillou ; le contremaître peut alors opérer avec les cailloux ainsi qu'il le faisait avec les ouvriers eux-mêmes. Un pas encore : il remplace les pains par des tessères ; le travail du modèle ne requiert plus dès lors qu'il manipule les pains mêmes. Même s'il ne sait pas *nommer* le nombre d'ouvriers et le nombre de pains, il aura construit ainsi un modèle dont la mathématicité n’est pas *nulle*. On peut de même réaliser un partage équitable sans effectuer de division au sens arithmétique du terme. Supposons qu’on ait des bonbons à distribuer entre des enfants ; l’ensemble des bonbons est mis en bijection avec l’ensemble des b, celui des enfants avec l’ensemble des e ci-après : bbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbb ; eeeeeee. On peut procéder d’une façon évidente pour aboutir à ceci (sur le papier) :

e	e	e	e	e	e	e
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b

Il reste des bonbons : bbbb. Si l’on désigne par $\cancel{b}$ la moitié d’un bonbon, les bonbons restant donneront des moitiés de bonbons en bijection avec l’ensemble de symboles final : bbbb ➘ $\cancel{b}\cancel{b}$bbb ➘ $\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}$bb ➘ $\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}$b ➘ $\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}$ $\cancel{b}\cancel{b}$. La distribution des moitiés sera modélisée par :

e	e	e	e	e	e	e
$\cancel{b}$	$\cancel{b}$	$\cancel{b}$	$\cancel{b}$	$\cancel{b}$	$\cancel{b}$	$\cancel{b}$

et il restera une moitié de bonbon : $\cancel{b}$. On pourrait écrire :

bbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbb

=

e	e	e	e	e	e	e
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
$\cancel{b}$	$\cancel{b}$	$\cancel{b}$	$\cancel{b}$	$\cancel{b}$	$\cancel{b}$	$\cancel{b}$

+

$\cancel{b}$

Certes, on est loin encore de pouvoir écrire : $46 = 7 \times \left(6 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$; mais on s’en rapproche…

d) Travailler avec une notion minimaliste de modèle et en même temps avec une idée minimaliste de mathématicité paraît essentiel pour le didacticien, qui analyse en divers contextes (pas seulement à l'école maternelle) des activités mathématiques *in statu nascendi*. Je vais y revenir, mais je donnerai d'abord, ici, un nouvel extrait du séminaire adressé aux PLC2 « marseillais » en 2000-2001 : on y retrouvera que, même à l'école, « le mathématique » se fabrique avec une diversité de matières ostensives.

Déterminer trois nombres dont la somme est 100, tels que le deuxième est égal au premier plus 10, et le troisième est égal au deuxième plus 5.

• On peut évidemment modéliser le système indiqué par le système

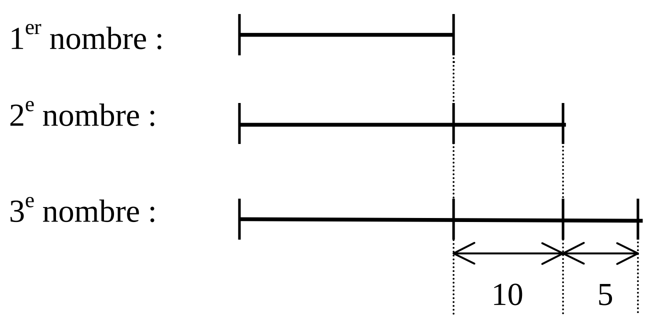
$$\begin{cases} x \text{ est le } 1^{\text{er}} \text{ nombre} \\ x + 10 \text{ est le } 2^{\text{e}} \text{ nombre} \\ (x + 10) + 5 \text{ est le } 3^{\text{e}} \text{ nombre} \\ x + (x+10) + ((x+10) + 5) = 100 \end{cases}$$

L'équation $x+(x+10)+((x+10)+5) = 100$ donne lieu à un travail classique de ***calcul (algébrique)*** :

$$x + (x+10) + ((x+10)+5) = 100 \Leftrightarrow 3x + 25 = 100 \Leftrightarrow 3x = 75 \Leftrightarrow x = \frac{75}{3} = 25$$

Le 1^{er} nombre est donc 25, le 2^{e} est 35, le 3^{e} est 40 : la somme est bien égale à 100.

• Il existe toutefois une modélisation ***pré-algébrique*** – en fait de nature ***numérico-graphique*** – qui a pu être utilisée autrefois dans les premières classes du collège, et qui remplace avantageusement l'équation algébrique précédente :



Ce modèle ***montre*** que trois fois le 1^{er} nombre, plus 10+10+5 est égal à 100 ; par conséquent, trois fois le 1^{er} nombre est égal à 100–25 = 75, et le 1^{er} nombre vaut 75÷3 = 25, le 2^{e}, 25+10 = 35, et le 3^{e}, 35+5 = 40.

– Le travail du modèle est ici, pour l'essentiel, ***discursif*** : il s'effectue surtout avec des ***mots***, sous la forme d'un ***discours***, chose plus typique encore de l'***arithmétique*** traditionnelle, comme l'illustre le problème suivant, où le modèle ne se distingue pas du système.

On veut payer 100 F avec 32 pièces de 2 F et 5 F. Combien devra-t-on donner de pièces de chaque espèce ?

La « solution arithmétique traditionnelle, qui procédait par application de la « règle de fausse position », prenait la forme du travail discursif suivant, aujourd'hui oublié :

Supposons qu'on donne 32 pièces de 2 F. On verserait ainsi 32 fois 2 F, soit 64 F, et il manquerait donc 100 F moins 64 F, soit 36 F.

Si on remplace alors une pièce de 2 F par une pièce de 5 F, la somme versée augmentera de 3 F.

Pour qu'elle augmente de 36 F, « il faut employer autant de pièces de 5 F qu'il y a de fois l'augmentation due à une pièce (3 F) dans l'augmentation totale (36 F) », soit 36 divisé par 3 ou 12.

Il faut donc verser 12 pièces de 5 F, et 32 moins 12, égale 20 pièces de 2 F.

On a bien : 12 fois 5 F plus 20 fois 2 F égale 100 F.

7. *Mathematical modeling* et TAD

a) À l'époque où est parue, à l'IREM d'Aix-Marseille, la brochure intitulée *Arithmétique, algèbre, modélisation. Étapes d'une recherche* (1989), l'idée que l'école pourrait un jour offrir un habitat stable à une pratique de la modélisation mathématique était bien présente, mais le point de vue sur lequel se concluait notre travail demeurait dubitatif. Je reproduis à cet égard quelques-unes des 35 thèses formulées à ce propos dans le chapitre V du compte rendu de notre recherche.

Thèse 16
Il existe aujourd'hui en divers pays, et notamment aux États-Unis, un mouvement, attesté par de nombreuses publications, en faveur de l'enseignement de la modélisation, ou, encore, de l'enseignement des mathématiques (et en particulier des mathématiques appliquées) par la modélisation. Il ne semble pas qu'un mouvement analogue, semblablement développé, existe en France à l'heure actuelle. Quoi qu'il en soit, et sans prendre parti sur la question de son intérêt didactique et/ou social, il convient d'examiner les conditions de possibilité de l'introduction d'une telle modification dans le système d'enseignement. Une première condition est celle de la place éventuellement reconnue à un tel enseignement. Il ne saurait s'intégrer à l'enseignement des mathématiques en n'y occupant qu'une place marginale (comme c'est le cas actuellement des problèmes « concrets »), parce qu'il suppose une problématique assez éloignée de la problématique qui prévaut traditionnellement dans cet enseignement et parce qu'il exige un volume horaire important. Il doit, pour exister de manière durable, se voir

reconnu une place pleine et entière, et pour cela obtenir la reconnaissance de sa dignité et de son intérêt. Il doit donc apparaître au moins comme un objet d'enseignement socialement légitime et, éventuellement, socialement souhaité.

Thèse 17

Face à ce problème – qui met en jeu des rapports de forces au sein de la société toute entière –, il existe des stratégies d'évitement, qui tentent d'apporter des solutions locales, traitant les problèmes d'écologie didactiques du savoir sans affronter les problèmes « macro-écologiques » liés à l'insertion du système d'enseignement dans une société donnée. Certaines de ces stratégies sont permanentes et structurelles : il en est ainsi dans les enseignements professionnels ou à finalité professionnelle, à quelque niveau qu'ils soient situés (enseignement des mathématiques financières par exemple). Dans ce cas, un tel enseignement est souvent donné à part, à titre de spécialité justifiée et exigée, non par les demandes de la société en général, mais par les besoins d'un secteur professionnel particulier. En revanche, une autre stratégie consiste à (tenter de) détourner l'enseignement des mathématiques, en promouvant un enseignement « par les modèles ». Il semble qu'en France du moins (mais sans doute aussi en d'autres pays) cela ne soit toléré que dans les filières d'enseignement sur lesquelles le contrôle et la pression des mathématiciens (comme communauté se tenant pour responsable de ce qui s'enseigne sous le nom de mathématiques) se trouvent relâchées (enseignement des mathématiques pour les étudiants en sciences sociales, en biologie, etc.). Enfin, une troisième stratégie consiste à tenter d'intégrer, dans des proportions variables, l'étude et l'emploi de modèles dans un enseignement mathématique globalement traditionnel. Cette troisième solution apparaît encore moins viable à terme que ne l'est la précédente.

Thèse 18.1

Dans tous les cas cependant, il y a une propension à enseigner des modèles – éléments de savoir bien définis et dont l'enseignement peut donc faire l'objet d'une négociation sociale explicite –, plutôt que « la modélisation », activité plus floue, sur laquelle le contrôle social et administratif manque de prises. À rebours de « l'enseignement des modèles » (ou « par les modèles ») , l'activité de modélisation semblerait mieux admise par les mathématiciens (parce qu'elle se rapproche de l'activité mathématique savante, dans laquelle la « modélisation » existe aussi, même si elle porte sur une réalité elle-même mathématique). Mais, bien qu'acceptable dans son principe, cette activité, se référant nécessairement à une réalité extramathématique, pose problème aux mathématiciens, dans la mesure où elle introduit donc du non-mathématique dans un enseignement de mathématiques. En fait, il y a là une difficulté qui n'est pas liée à l'humeur des mathématiciens (elle est ressentie aussi bien par les enseignants et par les élèves), mais, plus profondément, à l'état du champ scolaire du savoir et à son découpage entre les diverses disciplines enseignées.

L'introduction dans l'enseignement de l'activité de modélisation supposerait une redéfinition du découpage en matières enseignées, qui introduirait par exemple une discipline « modélisation mathématique » ayant son statut, ses horaires, ses enseignants , etc. Cela suppose en amont un consensus social assez puissant pour faire apparaître l'activité de modélisation comme une pratique digne d'entrer à l'école, dont l'intérêt fasse à son tour apparaître acceptables au sein de l'école la matière première sur laquelle elle porte et les produits de l'activité de modélisation – les modèles – eux-mêmes.

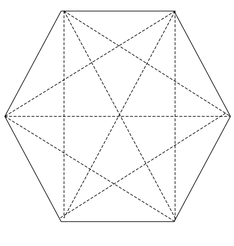
Thèse 18.2

La difficulté à ce qu'apparaisse un tel consensus est liée au fait que la fabrication sociale de modèles aussi bien que leur mise en œuvre dans des pratiques sociales spécifiques sont des faits socialement « cachés ». Hormis en ce qui concerne les « grands modèles » (ceux de la physique, etc.), les pratiques correspondantes manquent en général de dignité scientifique et (donc) sociale, puisque ce sont le plus souvent des ingénieurs, des techniciens ou des chercheurs non mathématiciens – membres invisibles de la communauté scientifique, ou extérieurs à la communauté mathématique – qui en sont les agents. Le blocage est ici consubstantiel à une transparence sociale insuffisante des pratiques de savoir spécifiques au sein de la société.

Thèse 18.3

L'effort à fournir pour atténuer l'opacité qui retranche la plupart des pratiques de savoir spécifiques de la vue de ceux qui n'en sont pas les agents directs ou les familiers immédiats est immense et ses résultats, incertains. De plus, on ignore dans quelle mesure cette opacité n'est pas fonctionnellement nécessaire à la perpétuation de ces pratiques : il se pose ici un problème, théorique et pratique, d'écologie des savoirs au sein de la société (et plus seulement au sein de l'école). On atteint ainsi une limite possible de notre capacité actuelle de poser et de résoudre, théoriquement et pratiquement, le problème étudié.

b) Que peut-on conserver des analyses précédentes vingt plus tard ? Je crois pouvoir dire que nous avons progressé – je dirai comment dans un instant. Mais je voudrais d'abord souligner, pour écarter tout malentendu, deux points contrastés : 1° la culture scolaire actuelle ne prépare pas les élèves à concevoir et à exploiter des modèles ; 2° pourtant les élèves sont, potentiellement, parfaitement capables de le faire – c'est-à-dire qu'ils peuvent le faire dès lors qu'ils travaillent dans des conditions idoines. Pour illustrer le premier point, je rappellerai une observation de classe présentée lors de la séance 3 du séminaire TAD/IDD 2008-2009 et où l'on voit des élèves sud-africains de 15-16 ans soutenir qu'un hexagone possède *trois* diagonales exactement, au mépris de la figure qu'ils ont pu tracer (voir ci-contre). À l'inverse, les élèves peuvent accéder à



une culture « de la modélisation » : j'évoquerai à cet égard, à gros traits, le travail dit « des boîtes flottantes », dont la narration est au cœur de la brochure *Arithmétique, algèbre, modélisation*. Ce travail a été mené à bien avec des élèves de 3e dans le cadre d'un « atelier de modélisation mathématique ». Le problème était le suivant : si l'on plonge dans l'eau une boîte en plomb, cette boîte peut-elle flotter ? Sous quelles conditions ? Nous disposions de boîtes à base carrée (afin de simplifier la modélisation), ouverte vers le haut (sans « plafond »). Un premier choix de trois boîtes avait été fait de façon à « perturber » certaines hypothèses spontanément émises : la plus petite des trois boîtes coulait, la plus grande flottait. Pour les boîtes qui coulaient, il fut décidé de se procurer des boîtes de même base mais plus hautes. Si la boîte plus haute flottait, cela confirmait l'idée qu'en augmentant la hauteur des parois latérales, on arrivait à faire flotter une boîte. Dans certains cas, pourtant, les boîtes plus hautes disponibles coulaient toutes… On pouvait évidemment faire fabriquer des boîtes plus hautes encore, sans savoir par exemple si l'on n'arriverait pas ainsi à une situation peu gérable expérimentalement à l'aide des moyens disponibles – on ne pouvait imaginer des boîtes de 15 cm de large et de 3 m de haut par exemple. Comment faire alors ? Réponse d'élèves : « Par le calcul ! » En d'autres termes, il fallait fabriquer, non pas des boîtes, mais un modèle « mathématique », ici algébrique. Si L est le côté de la base, et H la hauteur, la paroi en plomb a pour aire

$$L^2 + 4\ LH$$

tandis que le volume de l'eau déplacée pour un « enfoncement » X est L^2X. Désignons par m la masse surfacique du matériau utilisé pour les boîtes, par u la masse volumique de l'eau ; le principe d'Archimède conduit à l'égalité

$$uL^2X = m(L^2 + 4\ LH)$$

et on a donc : $X = \frac{m}{u} + 4\,\frac{m}{uL}\,H$. Pour que la boîte flotte, il faut que l'on ait $X < H$, soit $\frac{m}{u} + 4\,\frac{m}{uL}\,H < H$, ce qui équivaut à $\left(1 - 4\,\frac{m}{uL}\right)H > \frac{m}{u}$. Ce résultat livrait une surprise : pour que l'inéquation ait une solution positive, il est en effet nécessaire que l'on ait

$$1 - 4\,\frac{m}{uL} > 0$$

soit encore $L > 4\,\frac{m}{u}$. En d'autres termes, si la boîte a une base carrée *trop petite*, elle ne pourra *jamais* flotter, *quelle que soit sa hauteur*. (Nous avions en l'espèce $\ell = \frac{m}{u} \approx 1{,}74$ cm et donc $4\ell \approx 6{,}96$ cm.) Le travail de l'atelier, que je ne saurais résumer ici, mettait ainsi au jour un résultat que nous n'avions pas anticipé. Un autre résultat était le suivant : alors qu'une photo (sans décor) d'une boîte ne permet pas de connaître sa taille, mais seulement ses proportions (est-elle large de 10 cm et haute de 12, ou de 50 et de 60, ou de 120 et de 144 ?), la photo (sans décor) d'une boîte *plongée dans l'eau* permet de déterminer sa vraie taille : si l'on connaît le rapport X/H, en effet, comme

$$X = \frac{m}{u} + 4\,\frac{m}{uL}\,H = \ell + 4\ell\,\frac{H}{L}$$

on a $H = \frac{1}{X/H}\,X = \frac{1}{X/H}\left(\ell + 4\ell\,\frac{H}{L}\right)$ d'abord et ensuite $L = H\,\frac{1}{H/L}$. Bien d'autres aspects du travail accompli mériteraient d'être soulignés, par exemple le fait que, sans qu'on le leur demande, mais pour des raisons d'utilité pratique, les élèves mémorisaient les relations affines obtenues, qu'ils pouvaient restituer de mémoire lors de la séance suivante, telle celle-ci (qui correspond à $L = 15$ cm) : $X = 0{,}464\,H + 1{,}74$.

c) L'étude des boîtes flottantes était en vérité ce que nous appelons maintenant un *parcours d'étude et de recherche*, un PER – un PER codisciplinaire. Un tel parcours est la réalisation concrète de l'étude d'une question *Q*, ou, comme on dit aussi, d'une enquête sur *Q*. Dans l'enquête sur les boîtes flottantes, la question *Q* était : « Une boîte en plomb plongée dans l'eau peut-elle flotter ? Sous quelles conditions ? » Le schéma de base symbolisant une telle enquête est, on le sait, celui-ci :

$$S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightarrow R.$$

Dès qu'une question *Q* est posée devant une communauté d'étude [*X*, *Y*], potentiellement une enquête se profile qui suivra tel ou tel parcours d'étude et de recherche. Mais comment expliquer l'émergence de la notion de PER par rapport à la notion de « modélisation mathématique » ? Cet avènement se comprend à la lumière d'une analyse qui *prolonge en la rectifiant* la perspective dessinée par les thèses de 1989. Le destin scolaire de la modélisation de systèmes extramathématiques ne saurait s'expliquer *seulement* par la nature non mathématique des systèmes à modéliser : cela, on peut l'inférer du fait que le destin scolaire de la modélisation de systèmes *mathématiques* n'est pas meilleur, cette modélisation n'existant qu'à travers des vestiges, l'étude de modèles tout faits, qui ne sont plus vus comme des modèles. Comment l'analyse développée depuis 1989 rectifie-t-elle les vues de l'époque ? Tout d'abord, elle déplace le centre de gravité de la conceptualisation alors adoptée : la modélisation *n'en est plus l'alpha et l'oméga* ; c'en est seulement un *moyen*, indispensable et indépassable sans doute, mais qui n'en est pas le tout : l'essentiel, c'est le mouvement que désigne le schéma herbartien rappelé plus haut, qui prend son essor à partir d’une question *Q* posée et reçue. Quel est alors le rôle de la modélisation ? La réponse tient en peu de mots : pour fabriquer une réponse *R* à la question *Q*, on doit construire un ou des modèles du type de systèmes auxquels la question *Q* se rapporte. Ce déplacement capital fait apparaître crûment que « modéliser un système » *n’a de sens univoque* : on modélise un système *pour* répondre à une certaine question *Q* relative à ce système : le modèle à construire *dépend de la question* à laquelle il doit aider à répondre. Les notions solidaires d’enquête et de PER concrétisent ce déplacement.

d) Pourquoi l’évolution récente au sein de la noosphère internationale a-t-elle promu le *mathematical modeling* en en faisant une réalité en soi et pour soi – une hypostase ? C’est à mes yeux le symptôme majeur de la résistance qu’oppose, dans nos sociétés, ce que j’ai appelé le *paradigme scolaire de la visite des savoirs*, typique des sociétés héritières de l’Ancien Régime et qui définit le contrat du professeur avec la société en termes de savoirs visités avec ses élèves (et qui, ajouterai-je, regarde le chercheur comme un « savant », celui qui sait, et non comme celui *qui questionne et tente de répondre*). C’est là un paradigme de l’étude scolaire qui façonne les élèves en *spectateurs*, à qui l’on montre les savoirs, à qui l’on donne un petit rôle dans le spectacle du savoir, mais que l’on maintient à distance de ses tenants et aboutissants – motivation, utilité, usages. Mais à quoi résiste le paradigme de la visite des savoirs ? À une évolution planétaire (quoique inégalement développée) vers ce que j’ai appelé le *paradigme de questionnement du monde* – lequel, de ce fait, tarde à émerger. Or c’est ce paradigme seulement qui *permettrait* d’« enseigner par PER », et cela parce qu’il *obligerait* à enseigner ainsi, le contrat du professeur avec la société s’énonçant dès lors en termes de *questions étudiées* (et non plus de savoirs visités), comme il en va d’un programme de recherche.

e) Bien entendu, le passage au paradigme de questionnement du monde s’accompagne de ruptures significatives avec la culture dominante, celle de la visite des savoirs. Ainsi la vénération quasi fétichiste des « savoirs » perd-elle sa légitimité : si les savoirs et autres œuvres sont plus que jamais des moyens précieux des enquêtes à mener, ils cessent d’être « intouchables ». Le schéma herbartien réduit présenté plus haut s’écrit de façon semi-développée

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \text{➦} M] \text{➥} R.$$

où *M* est le milieu didactique, lequel s’écrit lui-même

$$M = \{\, R_1^\lozenge,\ R_2^\lozenge,\ \ldots,\ R_n^\lozenge,\ O_{n+1},\ \ldots,\ O_m \,\}.$$

Cette « formule » indique que M sera fait de *réponses* $R_1^\lozenge$, $R_2^\lozenge$, …, $R_n^\lozenge$ existant « toutes faites » (dans la culture courante) à la question Q et des « œuvres » O_{n+1}, …, O_m regardées comme des *outils* de travail pour construire la réponse attendue. Cette réponse elle-même sera alors notée $R^\heartsuit$ pour signifier qu'elle a été construite pour « vivre » sous certaines contraintes et dans certaines conditions (à savoir les conditions et contraintes inhérentes au projet Π dans le cadre duquel la question Q a surgi). Le bilan du travail du système didactique pourra alors s'écrire ainsi (c'est le schéma herbartien « développé ») :

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \Rightarrow \{\,R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge, O_{n+1}, \ldots, O_m\,\}] \Rightarrow R^\heartsuit.$$

Aller « regarder » les réponses $R^\lozenge$ et les œuvres O existant dans la culture est traditionnellement *prohibé* dans le paradigme de la visite des savoirs – où l'on ne saurait avoir avec elles qu'un *commerce strictement contrôlé* – alors que c'est là une obligation – à titre heuristique ou vérificatoire – dans la culture de questionnement du monde. Bien entendu, la mésogenèse, qui n'est plus ici l'apanage du professeur, suppose des choix : cela vaut-il la peine d'aller examiner telle réponse $R^\lozenge$ ou de prendre le temps d'étudier telle œuvre O au lieu de « chercher » directement ? Éternelle question, que j'illustrerai par ce souvenir d'Emilio Segrè (prix Nobel de physique en 1959) à propos du physicien italien Enrico Fermi (1901-1954), lauréat du prix Nobel de physique en 1938, dont il fut l'étudiant à l'université de Rome, souvenir que cite l'historienne Françoise Waquet dans son ouvrage *Parler comme un livre. L'oralité et le savoir (XVIe - XXe siècle)* publié chez Albin Michel en 2003 (pp. 311-312) :

> Déjà à cette époque [1928], Fermi faisait peu d'usages des livres […]. S'il avait besoin d'une équation compliquée qui se trouvait dans un livre de la bibliothèque, il proposait souvent un pari, disant qu'il dériverait l'équation plus vite que nous ne la trouverions dans un livre. En général, il gagnait […].

En même temps que les créations humaines retrouvent leur rôle de moyens que l'on n'honore vraiment qu'en les mettant en œuvre dans des enquêtes visant l'accroissement de notre équipement praxéologique, les frontières durement imposées par le découpage pluridisciplinaire des ressources didactiques, terre d'élection des ethnicismes épistémologiques et ressort par excellence tant des ostracismes que des autocensures (on ne touche pas à la physique si l'on est déclaré mathématicien sur sa carte d'identité académique, etc.) tendent à s'estomper : on les franchit désormais non parce qu'on aurait obtenu – de qui, d'ailleurs ? – l'autorisation formelle de le faire, ou parce qu'on y est contraint comme élève (par le passage des heures au long d'une journée d'école), mais parce que le *besoin* de l'étude en cours y pousse. L'enquête, le PER, qui peut en quelques cas être quasi monodisciplinaire, est en fait normalement *codisciplinaire*, c'est-à-dire suppose une *synergie disciplinaire* : la « modélisation mathématique » apparaît à cet égard comme le fruit d'un découpage infidèle à la réalité du travail d'étude et de recherche que la TAD s'efforce d'assumer.

f) En suivant les observations formulées par André Pressiat, je voudrais encore ajouter une remarque sur les liens entre modèles et modélisation d'un côté et *praxéologies* de l'autre. Le noyau d'une praxéologie (ponctuelle) est un *type de tâches* T. Les tâches de ce type portent sur un certain *type de systèmes* Σ : la simple mention de T porte en elle une référence à Σ (à travers tel ou tel système $\sigma \in \Sigma$). Depuis toujours, une technique τ relative à T a été conçue en TAD comme l'union d'un *dispositif* et de *gestes* permis par ce dispositif. Or l'ensemble dispositif + gestes (c'est-à-dire la technique τ relative à T) suppose un *modèle approprié de* Σ, dont il découle. Ainsi, lorsqu'on effectue une division d'un entier par un autre entier – disons, de 537 par 24 – selon la technique apprise à l'école primaire, on dresse d'abord ce dispositif :

$$\begin{array}{r|l} 537 & 24 \\ \cline{2-2} & \\ \end{array}$$

Celui-ci découle d'un modèle de la division qu'en même temps il concrétise (et, bien souvent, dissimule). L'accomplissement des gestes adéquats conduira alors à faire parler comme suit le modèle en question à propos du système étudié, le couple d'entiers (537, 24) :

$$\begin{array}{r|l} 537 & 24 \\ \cline{2-2} 57 & 22 \\ 9 & \\ \end{array}$$

Ainsi arrive-t-on à l'égalité $537 = 24 \times 22 + 9$. Notons que, là encore, il existe d'autres modèles, tel celui que l'on voit fonctionner sur la suite d'égalité ci-après, laquelle naît d'un dispositif quelque peu inusuel ($a \div b$ y désigne le quotient entier q) : on a $q = 537 \div 24 = 536 \div 24 = 268 \div 12 = 134 \div 6 = 67 \div 3 = 66 \div 3 = 22$ et donc $r = 537 - 24 \times 22 = \ldots = 9$. D'une façon générale, un modèle adéquat (adéquat à la technique τ relative à T) participe du *logos* de la praxéologie construite autour de T : il engendre la technique τ en lui donnant son dispositif et en inspirant ses gestes. Bien entendu, et comme je l'ai déjà souligné, le modèle de Σ à mobiliser *dépend de T*. Pour le dire à l'aide d'un exemple extérieur au monde mathématique, et qui me permettra de généraliser ce que je viens de dire, « se moucher » est un type de tâches qui a trait à un système que, dans le langage courant, on désigne comme étant « le nez ». Un instant de réflexion montrera que la technique que nous mettons en œuvre pour nous moucher (ou pour moucher autrui), quelle qu'elle soit, suppose un certain modèle du système « nez » ; et que ce modèle est fort différent de celui auquel nous nous référons quand nous voulons, non pas *moucher* un nez, mais *dessiner* un nez. D'aucuns voudront à cet égard parler de la *représentation* que nous avons du nez, soit comme nez à moucher, soit comme nez à dessiner. J'ai dénoncé il y a déjà longtemps (voir mon site, à l'adresse http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=97), les dangers du mot de représentation pour ne pas réintroduire ce mot là où on n'en a pas besoin : dire que l'on dispose d'un modèle – lequel appartient au *logos* de la praxéologie – ne dit rien, volontairement, quant à son mode de manifestation psychique. L'a-t-on « devant soi », comme le suggère le sens classique de « représentation », ou l'a-t-on « derrière la tête », ou même est-il « refoulé » quoique non moins à la source de nos gestes ? Il s'agit là d'une autre question, qui concerne seulement la manifestation psychique du modèle, non le modèle comme constitutif de la praxéologie.

That's all, folks!