UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double ambition : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

➔ Séance 1 – Vendredi 23 octobre 2009

DIFFUSION ET RÉCEPTION DE LA TAD

1. Les temps à venir

a) La période qui s'est ouverte à l'issue de la 15e école d'été de didactique des mathématiques (qui s'est tenue à Clermont-Ferrand du 16 au 23 août 2009) est dominée par la perspective du IIIe Congrès international sur la TAD, qui se tiendra à Sant Hilari Sacalm du lundi 25 janvier, 16 h, au vendredi 29, 15 h.

b) Les séances de ce séminaire feront en conséquence écho à la préparation du congrès, dont les deux premiers jours seront occupés par un « Cours de

TAD pour les chercheurs ». Cette innovation est évidemment *une* réponse au constat que les chercheurs en didactique ayant un intérêt pour la TAD sans être étroitement associés à son élaboration en ont en général une connaissance approximative, parfois même invalidante (avec des effets de contamination touchant les jeunes générations). Bien entendu, on doit voir là, en partie, une conséquence d'un état de la didactique où la polémique, plutôt que le simple débat, est trop souvent préférée à l'étude. Gaston Bachelard notait dans *La flamme d'une chandelle* : « J'étudie ! Je ne suis que le sujet du verbe étudier. Penser je n'ose. Avant de penser, il faut étudier. Seuls les philosophes pensent avant d'étudier. » La remarque est à méditer…

c) J'expliciterai d'abord dans ce qui suit quelques observations illustrant certaines des difficultés qui affectent la diffusion et la réception de la TAD. Mais, une fois n'est pas coutume, je commencerai ici même par une rencontre inattendu faite au fil de la lecture d'un court texte récemment publié, intitulé *Le principe d'Université* (Nouvelles Éditions Lignes, 2009), et signé d'un enseignant de philosophie de l'université de Paris 8, Plinio Prado. À la page 31 de ce texte (disponible en ligne http://www.editions-lignes.com/IMG/pdf/PRADO_LePrincipedUniversite_-2.pdf), on lit en effet ceci (c'est moi qui souligne) :

> L'agitation et la déstabilisation sont la condition impliquée dans l'accueil de l'événement, de ce qui arrive selon l'inattendu, quel que soit le champ d'activités (de disciplines) auquel on s'adonne : science, arts, technologie, littérature, philosophie, éthique, *didactique*, politique.

Mise en abyme inattendue de l'inattendu ! Mais revenons à la réalité courante : je le ferai d'abord à propos d'étudiants en sciences de l'éducation.

2. Auprès des « étudiants »

a) Dans le cas des enseignements que je suis amené à dispenser, la TAD n'apparaît guère que sous l'étendard de la didactique : sa réception est d'abord celle de ce *mot*. J'ai récemment demandé à un petit nombre d'étudiants de première année du master *professionnel* de sciences de l'éducation de l'université de Provence d'attribuer un « score », sur dix échelles différentes de 0 à 6, à certains mots ou expressions, dont « sciences de l'éducation », « didactique » et « Internet ». J'ai reproduit ci-après les scores obtenus par « didactique » : chaque colonne correspond à l'une des 10 échelles, chaque ligne de scores correspond à l'un des 9 étudiants sollicités. Pour chaque échelle, les deux dernières lignes indiquent respectivement le score moyen (sur 6) des 9 scores et le pourcentage correspondant du score moyen maximal (qui est 6). Les échelles, désignées ci-après par un code de type X/Y, sont les suivantes :

S/P	Superficiel / Profond
F/C	Froid / Chaud
PU/U	Peu utile / Utile
I/A	Irritant / Apaisant
PF/F	Peu fiable / Fiable
A/C	Abstrait / Concret
I/O	Inorganisé / Organisé
L/B	Laid / Beau
P/A	Passif / Actif
F/D	Facile / Difficile

Voici donc le tableau des scores.

Didactique

S/P	**F/C**	**PU/U**	**I/A**	**PF/F**	**A/C**	**I/O**	**L/B**	**P/A**	**F/D**
3	3	5	1	3	1	3	3	3	6
0	0	0	0	2	0	1	0	2	6
6	0	3	0	3	0	3	0	3	0
5	3	6	5	5	5	6	5	6	4
6	0	6	1	6	0	6	3	6	6
6	4	6	2	4	3	5	3	6	4
6	6	6	6	3	3	3	6	6	3
5	2	5	1	5	4	5	4	5	4
5	0	5	3	5	5	5	3	4	5
4,7	2,0	4,7	2,1	4,0	2,3	4,1	3,0	4,6	4,2
78 %	**33 %**	**78 %**	**35 %**	**67 %**	**39 %**	**69 %**	**50 %**	**76 %**	**70 %**

« Didactique », ainsi, serait (pour ce groupe, globalement) *froid*, *irritant*, *abstrait*… Les scores moyens attribués par les 9 personnes sollicitées sont respectivement (de haut en bas du tableau) les suivants :

3,1 ; 1,1 ; 1,8 ; 5 ; 4 ; 4,3 ; 4,8 ; 4 ; 4.

Les six derniers scores moyens semblent de bon augure ; mais les trois premiers, et surtout les deuxième et troisième, ne laissent pas de surprendre. Le score moyen le plus faible, 1,1, correspond à la suite de scores que voici :

S/P	F/C	PU/U	I/A	PF/F	A/C	I/O	L/B	P/A	F/D
0	0	0	0	2	0	1	0	2	6

Pour cette répondante, dont nous pouvons savoir par ailleurs qu'elle n'a jamais rencontré de didactique, « didactique » serait totalement *superficiel*, *froid*, *inutile*, *abstrait* et *laid*. Il est en outre très *inorganisé*, et aussi peu *actif* que peu *fiable*. Seul trait « positif » : « didactique » est très *difficile*. Notons que tel n'est pas l'avis de la troisième répondante, dont la moyenne des scores (1,8/6) n'est pas beaucoup plus élevée, mais pour qui « didactique » est on ne peut plus *facile* (quoique… très *profond*) :

S/P	F/C	PU/U	I/A	PF/F	A/C	I/O	L/B	P/A	F/D
6	0	3	0	3	0	3	0	3	0

b) On peut comparer les scores de « didactique » à ceux de deux autres mots soumis au même groupe d'étudiants : « sciences de l'éducation » et « Internet ». Sans entrer dans le détail, voici les scores moyens en pourcentage du score maximal pour ces trois mots :

S/P	F/C	PU/U	I/A	PF/F	A/C	I/O	L/B	P/A	F/D
78	33	78	35	67	39	69	50	76	70
74	57	94	59	80	57	80	65	67	70
63	57	94	59	70	70	83	59	94	37

On voit que, si « didactique » (1re ligne) est un peu plus profond que « sciences de l'éducation » (2e ligne) et l'est nettement plus que « Internet » (3e ligne), il est nettement plus froid qu'eux, sensiblement moins utile, franchement plus irritant, beaucoup plus abstrait, moins organisé et d'une beauté inférieure. Il n'est comparable à « sciences de l'éducation » que pour la difficulté (qui n'est pas petite), les deux ensemble étant trouvés à cet égard inférieurs à « Internet » (qui est presque moitié moins difficile qu'eux). On notera enfin que « didactique » est le moins fiable des trois, même si « Internet » le dépasse à peine sur ce point.

c) Si l'on se fie à ce tableau, on songera avec une once de compassion aux contraintes sous lesquelles l'enseignant devra opérer. Par delà les variations individuelles, qui ne peuvent guère être ignorées (que faire avec la participante de la 2e ligne, par exemple ?), il lui faudra travailler avec un groupe qui, globalement, regarde le mot de didactique comme *froid*, *irritant*, *abstrait* et relativement *difficile*.

3. Résistances « savantes »

a) Le thème des résistances « savantes » a déjà été évoqué. La résistance peut prendre la forme d'une feinte indifférence, appuyée sur une véritable ignorance. Mais elle prend beaucoup plus souvent soit des formes polémiques, soit, plus sourdement, la forme d'une discrète censure. En vérité, il semble que la résistance la plus solide s'arc-boute d'un même mouvement d'abord aux « mots » propres à la TAD, ensuite, et plus fortement encore, aux « formalismes » qu'on y utilise. C'est ainsi que l'on devinera aisément (je les indique par une ondulation) ce que les éditeurs d'un livre à paraître, ayant légitimement à suggérer des coupes dans un texte récent, ont pu envisager de voir disparaître de préférence dans le passage suivant :

> La structure praxéologique la plus simple se compose d'un *type de tâches* T, d'une *technique* τ, manière réglée d'accomplir les tâches t du type T, d'une *technologie* θ, discours raisonné (*logos*) sur la technique (*tekhnê*) censé rendre τ intelligible comme moyen d'accomplir les tâches du type T, enfin d'une composante *théorique* Θ, qui gouverne la technologie θ elle-même, et donc l'ensemble des composantes de la praxéologie. Une telle praxéologie se note alors $[T/\tau/\theta/\Theta]$: elle comporte une partie pratico-technique ou *praxis* (qu'on peut nommer « savoir-faire »), $\Pi = [T/\tau]$, et une partie technologico-théorique ou *logos* (qu'on peut identifier à un « savoir » au sens usuel du terme), $\Lambda = [\theta/\Theta]$.

b) Ici, le quadruplet $[T/\tau/\theta/\Theta]$ résiste assez bien, même si d'aucuns l'ont cependant très vite rebaptisé « les quatre T » (sans doute pour ne pas utiliser – *horresco referens* – ces lettres grecques : τ, θ, Θ). Mais voici maintenant la suite du passage précédent (à gauche) et sa réécriture (à droite) par la même plume :

Un aspect crucial du concept de praxéologie est qu'il n'existe pas de *praxis* sans *logos*, même quand celui-ci paraît absent, parce que non visible. Si l'on note $\Pi\oplus\Lambda$ une praxéologie $[T/\tau/\theta/\Theta]$ existant en une institution I, sa *transposée* en une autre institution I^*, qu'on peut écrire $(\Pi\oplus\Lambda)^*$, pourra en certains cas s'écrire $\Pi\oplus(\Lambda^*)$, avec une *praxis* identique mais un *logos* changé. La praxéologie transposée pourra parfois s'écrire $(\Pi^*)\oplus\Lambda$, avec, donc, un *logos* maintenu, mais une *praxis* modifiée, qui, parfois, sera même vidée de sa substance (on aura $\Pi^* \approx \varnothing$). Ces altérations et recombinaisons praxéologiques sont au cœur de l'histoire sociale des praxéologies et au cœur du problème que nous voudrions soulever dans ce qui suit.	Un aspect crucial du concept de praxéologie est qu'il n'existe pas de *praxis* sans *logos*, même quand celui-ci paraît absent, parce que non visible. Une praxéologie existant en une institution, peut être *transposée* en une autre institution avec une *praxis* identique, mais un *logos* changé, ou, à l'inverse, avec un *logos* maintenu, mais une *praxis* modifiée, qui, parfois, sera même vidée de sa substance. Ces altérations et recombinaisons praxéologiques sont au cœur de l'histoire sociale des praxéologies et au cœur du problème que nous voudrions soulever dans ce qui suit.

Les disparitions qu'on peut constater ici ne sont pas contingentes ; elles sont même, me semble-t-il, un symptôme d'une difficulté essentielle (qui transcende le petit monde – auteurs et éditeurs compris – où tout cela se passe) : une science ne gagne rien *à renoncer à ses moyens ostensifs* (et, donc, à ses moyens non ostensifs) pour faire mine de « parler comme tout le monde » et ainsi ne pas montrer sa différence spécifique par delà son genre prochain. Dans un processus de transposition, il y a une première institution, une institution « de départ », et il y a une seconde institution, une institution « d'arrivée ». Pourquoi accepter ces métaphores cinématiques (départ, arrivée) et refuser des dénominations structurelles – I pour la première, I^* pour la seconde – sinon pour ne pas déplaire à la culture courante, qui, elle, ne s'est pourtant jamais donnée pour tâche de penser les processus transpositifs ?

c) Une vieille technique pour tenter de faire barrage au développement d'un champ scientifique, une technique à laquelle la didactique a payé un certain tribut déjà, consiste à réprouver le fait qu'on y emploie des mots « déjà pris », dont d'autres se disent propriétaires par droit du premier occupant – pour parler comme certaine dame au nez pointu. Cette volonté de censure, nous devons éviter de lui donner raison par nos propres tentations d'autocensure : nous devons parler droitement de *type* de tâches (dans un monde qui parle généralement de *la* tâche), de *technologie* (dans un monde qui, par ignorance de la TAD, croit avoir de ce mot un emploi incompatible avec celui qu'en fait la TAD), nous devons parler de praxéologies (au pluriel), et non de *la* praxéologie, tout court (selon une confusion qui est le fruit d'une inculture historique vraie et, chez quelques-uns, d'une volonté malsaine de troubler) ; nous devons écrire sans façon « le rapport institutionnel $R_I(p\ ;\ O)$ », « le système didactique $S(X\ ;\ Y\ ;\ Q)$, « la réponse $R^\heartsuit$ », et bien entendu, *primus inter pares*, « le schéma herbartien semi-développé $[S(X\ ;\ Y\ ;\ Q) \Rightarrow M] \hookrightarrow R^\heartsuit$ », etc. Comme en toute langue, le plein usage des moyens ostensifs disponibles peut donner lieu, certes, à des assertions délicates à décoder ; mais cela n'est pas une raison autre que mondaine de renoncer à ce que cette langue permet de *penser*. Il y a là un critère de vitalité que je crois indépassable.

d) La question de la *réception* est au cœur du mémoire de 1re année de master de sciences de l'éducation de Julia Marietti, que vous trouverez en ligne sur mon site personnel : *Le concept de PER et sa réception actuelle en mathématiques et ailleurs. Une étude préparatoire.* Comme le thème des PER est au cœur de notre travail cette année, j'aurai l'occasion d'y revenir ici même.

À PROPOS DES PER

1. Quelle définition d'un PER ?

a) Comme vous le savez, l'école d'été récente a été l'occasion de travailler le concept de PER, et cela à propos de la question – qui sous-tendait l'ensemble de cette école d'été – de l'*ingénierie didactique*. J'y ai donné un cours intitulé (un peu longuement) *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD*. En outre, trois ateliers ont été proposés sous le titre commun *Vers une ingénierie didactique des PER*, respectivement par Michèle Artaud et Gisèle Cirade, par Marianna Bosch ainsi que par Floriane Wozniak et moi-même.

b) Le travail suscité par ces interventions a produit des avancées sur quelques points. Je voudrais en mentionner certaines, en revenant sur la notion de PER. Formellement, le premier trait à quoi se reconnaît un PER est ce qu'on est censé y faire : l'enjeu didactique y est, en effet, une certaine *question* Q : le système didactique $S(X ; Y ; ♥)$, où ♥ est l'enjeu didactique, c'est-à-dire la « chose » qu'on étudie, s'écrit alors $S(X ; Y ; Q)$. Une question, je le souligne, est une *œuvre* : c'est une création de l'activité humaine. Mais c'est une œuvre d'un certain type : ce n'est pas une *réponse* ou, de façon directe, un *outil* pour produire des réponses, même quand cela jalonne le chemin vers la réponse cherchée. Cela noté, je soulignerai que, lorsque, quel que soit le contexte institutionnel et didactique, se forme un système du type $S(X ; Y ; Q)$, la vie de ce système peut ne pas excéder quelques instants et, pourtant, s'achever de façon adéquate au *projet* dont la considération a amené à se poser la question Q. (Il y a là un point essentiel sur lequel il conviendra de revenir : d'où viennent les questions Q étudiées ?) Il n'y a alors aucune raison de refuser au cheminement du système didactique $S(X ; Y ; Q)$ le nom de « parcours d'étude et de recherche », même si le mot de parcours a été introduit à l'origine pour désigner un temps *long* par contraste avec le temps *court* des activités scolaires usuelles (en mathématiques, au moins). Il faut donc ne retenir qu'une définition très ouverte, délibérément très *faible*, de la notion de PER : il y a PER dès lors qu'un système didactique étudie une certaine question Q. Dans cette perspective, il faut alors pouvoir *qualifier* ce PER.

c) Je ferai trois remarques à propos de ce qui précède. La première sera venue spontanément à l'esprit à suivre les considérations faites ici : dans une classe scolaire, se dira-t-on peut-être, il y aurait donc, de façon erratique souvent, mais profuse parfois, des PER, des micro-PER peut-être, voire des nano-PER, mais des PER ! C'est bien cela qu'il faut concéder, en effet. Et c'est alors cette réalité qu'il nous faudra apprendre à qualifier.

J'ajoute que cette remarque débouche naturellement sur une petite enquête qu'il reste à mener à bien : inventorier (et analyser) les (micro-)PER existant dans le cadre de classes ordinaires. Pour les mathématiques, cela pourrait se faire à partir d'un corpus de comptes rendus de visites de professeurs stagiaires.

d) La deuxième remarque a pour objet de souligner que la non-distinction que je préconise est en fait imposée par la vie même d'une classe $[X, Y]$: le PER en quoi se concrétisera le fonctionnement de $S(X\,;\,Y\,;\,Q)$ sera très différent selon que Q relève d'un *type* de questions encore *problématique* pour $[X, Y]$ ou, au contraire, d'un type de questions devenu depuis un certain temps *routinier*. La troisième remarque renforce encore, de façon décisive, la conclusion à laquelle nous sommes arrivés : elle concerne l'évolution des contraintes liées aux *infrastructures*, phénomène que j'illustrerai ici d'un exemple. Supposons que la question posée à $[X, Y]$ soit celle-ci : quelles sont les cent décimales du nombre π qui occupent les rangs 501 à 600 ? (Ici, le *projet* qui suscite la question pourrait être celui de voir si ces décimales se distribuent à peu près au hasard.) Ainsi qu'on vient de le souligner, le « travail » de $S(X\,;\,Y\,;\,Q)$ sera différent selon que $[X, Y]$ a élaboré ou non une technique bien maîtrisée pour déterminer les décimales de π allant du n-ième rang au $(n + p)$-ième rang. Mais si une telle technique n'est pas encore disponible dans $[X, Y]$, sa *création* représentera un travail différent *en quantité et en nature* selon que $S(X\,;\,Y\,;\,Q)$ opère vers 1960 ou aujourd'hui, et cela parce que les *infrastructures* auront entre temps changé. C'est ainsi que, aujourd'hui, la page Web http://www.brouty.fr/Maths/pi.html permet à quiconque d'accéder à un tableau de décimales dont voici le début :

1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510
5820974944	5923078164	0628620899	8628034825	3421170679
8214808651	3282306647	0938446095	5058223172	5359408128
4811174502	8410270193	8521105559	6446229489	5493038196
4428810975	6659334461	2847564823	3786783165	2712019091
4564856692	3460348610	4543266482	1339360726	0249141273
7245870066	0631558817	4881520920	9628292540	9171536436
7892590360	0113305305	4882046652	1384146951	9415116094
3305727036	5759591953	0921861173	8193261179	3105118548
0744623799	6274956735	1885752724	8912279381	8301194912
9833673362	4406566430	8602139494	6395224737	1907021798
6094370277	0539217176	2931767523	8467481846	7669405132
0005681271	4526356082	7785771342	7577896091	7363717872
1468440901	2249534301	4654958537	1050792279	6892589235

Les décimales sont ici rangées par groupes de 10, eux-mêmes réunis en groupes de cinq : on a donc 50 décimales par ligne, et les décimales cherchées occupent en conséquence les lignes 11 et 12 :

```
9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798
6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
```

On notera en passant que les effectifs des nombres de 0 à 9 dans ces deux lignes sont respectivement 9, 8, 10, 13, 11, 5, 14, 14, 6, 10, ce qui n'est pas exactement uniforme. Bien entendu, on n'aura fait parler ici qu'un unique média, et l'enquête n'est donc pas close ; mais je passe.

2. La question des questions

a) Lorsqu'on observe la formation d'un système didactique $S(X ; Y ; Q)$, on peut d'abord s'interroger sur la question Q en la situant sur un segment orienté dont l'origine (0) et l'extrémité (1) sont définies respectivement par les critères suivants : la question Q est là seulement parce que l'effort pour lui apporter réponse paraît devoir provoquer telle ou telle rencontre praxéologique prisée pour elle-même ; la question Q est là seulement parce qu'on attribue un certain *prix* au fait de lui apporter réponse. On sait qu'on parlera alors, dans le premier cas de PER praxéologiquement *finalisé*, dans le second de PER praxéologiquement *ouvert* (non finalisé). Ce qu'on peut penser, c'est que, plus la question Q est vécue comme un alibi (i.e. plus elle est proche de l'origine 0), et plus son existence est, à terme, menacée : la question Q étant moins prisée pour elle-même que pour ce que son étude ferait rencontrer, il apparaîtra vite plus économique d'organiser la rencontre praxéologique visée sans s'imposer le détour par l'étude de Q ni de quelque autre question.

b) Le fait lui-même que l'étude d'une question Q soit prisée pour elle-même doit cependant être interrogé. Ce peut être, bien sûr, parce que, tant qu'on ne sait pas lui apporter réponse, cette question *bloque* la réalisation d'un certain projet qui nous importe. Mais ce peut être aussi parce qu'il s'agit d'une question emblématique d'un certain domaine de connaissance *prisé pour lui-même* (plutôt que pour ce qu'il pourrait apporter à l'étude de telle ou telle question posée indépendamment de lui). Je prendrai pour exemple ici celui d'un opuscule paru dans la collection « Les carnets du lycée » et intitulé *Enseignement scientifique. Les repères essentiels* et destinés aux élèves de 1re L et de 1re ES concernés (Rue des écoles, 2006). La partie consacrée aux « sciences de la vie » y est découpée en sept chapitres dont le deuxième s'intitule « La communication nerveuse (série ES) ». Ce deuxième chapitre lui-même – c'est cela que je voudrais souligner – est découpé en six « questions » dont voici le libellé :

1. Comment le message de la douleur est-il transmis jusqu'au cerveau ?
2. Quelle est la nature des messages nerveux ?

3. Comment les messages nerveux se transmettent-ils au niveau des synapses ?

4. Comment certaines substances peuvent-elles modifier la transmission des messages nerveux ?

5. Comment la morphine peut-elle être à l'origine d'une sensation de plaisir ?

6. Pourquoi les substances comme la morphine ou l'héroïne engendrent-elles tolérance et dépendance ?

Considérons à titre d'exemple la question 3 ; le livret consulté fait suivre la question du texte ci-après, qu'on doit regarder comme la réponse proposée :

> **3. Comment les messages nerveux se transmettent-ils au niveau des synapses ?**
> Le message nerveux se propage le long des fibres nerveuses et se transmet d'un neurone à l'autre au niveau d'une **synapse**. Cette communication ne peut se faire que dans un seul sens. Lorsque le message nerveux arrive à l'extrémité de l'axone pré-synaptique, il déclenche la libération de substances chimiques : les **neurotransmetteurs**. Ces molécules se fixent alors sur des récepteurs spécifiques situés sur la membrane du neurone post-synaptique, ce qui peut, selon la nature du neurotransmetteur, faire naître un nouveau message électrique.

On voit ainsi que « connaître une œuvre » – en l'espèce, « les sciences de la vie » – s'identifie ici à la capacité de *restituer les réponses* que cette œuvre apporte (ou est censée apporter) à certaines questions. Nous sommes à un carrefour : on ne s'intéresse pas à une œuvre parce qu'elle permet d'apporter réponse à certaines questions que l'on prise ; on s'arrête (brièvement) sur quelques questions, souvent en elles-mêmes peu motivées, auxquelles l'œuvre est réputée apporter réponse *simplement parce que l'on prise l'œuvre* dont elles paraissent emblématiques. Bien entendu, le fait d'interroger une œuvre sur la réponse qu'elle apporterait à une question qui nous importe n'en demeure pas moins un geste fondamental et irremplaçable de la diffusion sociale des connaissances. Mais on voit qu'ici cette interrogation n'est pas le fait de l'élève ou de l'étudiant : la « réponse » leur est en effet donnée *toute faite*. Dans le schéma herbartien réduit,

$$S(X\,;\,Y\,;\,Q) \hookrightarrow R^{\heartsuit},$$

X passe sans étude ni recherche de Q à $R^{\heartsuit} = R^{\Diamond}_{Y}$; et ce que représente la flèche $\hookrightarrow$ se réduit donc à « prendre le cours » (et à l'apprendre).

e) Il est un cas encore qui mérite d'être cité. Lorsque, par contraste avec le cas précédent, X aura à enquêter sur des questions relevant de divers domaines de réalité, il gagnera à améliorer sa maîtrise des praxéologies de l'enquête en ces domaines, notamment dans ce qu'elles ont de générique. L'étude d'une question *Q* peut alors avoir un objectif de *formation à l'enquête* (codisciplinaire et, en tout cas, multi-instrumentée). C'est de ce cas que relève l'*Atelier « Enquêtes sur Internet »* animé par quelques-uns d'entre nous au collège Vieux Port de Marseille : il s'agit de faire que les élèves y apprennent à enquêter sur une question *Q* en usant des ressources disponibles sur Internet. La situation de ces questions *Q* sur le segment orienté invoqué plus haut est alors *intermédiaire* entre 0 et 1, et plus près de 1 que de 0, le critère principal de leur choix étant, sauf exception, le prix qu'on attache à la question, alors que les rencontres qui seront suscitées par l'enquête demeurent un critère secondaire de choix. C'est ainsi que la question récemment qui sera bientôt mise à l'étude dans l'atelier susnommé procède d'une volonté d'expliciter les liens présupposés entre deux ordres de phénomènes « écologiques » : *Pourquoi le réchauffement climatique ferait-il monter le niveau des mers ?* Cette question vaut pour elle-même, indépendamment de toute « matière scolaire ». Ce qu'elle ne manquera pas de faire rencontrer, si précieux soit-il, sera en quelque sorte « donné par surcroît ».

3. Propriétés des PER

a) On a vu déjà deux grands types de questions à soulever à propos d'un PER observé ou projeté. Tout d'abord, y a-t-il bien une question *Q* à étudier, et *pourquoi* cette question est-elle ainsi proposée à l'étude ? Ensuite, la réponse $R^{\heartsuit}$ est-elle l'aboutissement d'un travail substantiel de la part de *X* ou est-elle un apport allogène minimisant ce travail ? Mais je voudrais maintenant élargir ce questionnement aux trois grandes dimensions solidaires d'un processus d'étude et de recherche en un système didactique $S(X\,;\,Y\,;\,\heartsuit)$: la *chronogenèse*, la *topogenèse*, la *mésogenèse*.

b) La chronogenèse, c'est la genèse du temps de l'étude mesuré par la « matière » étudiée. Dans le paradigme dominant de l'étude scolaire, dans ce que j'ai proposé d'appeler le paradigme *de la visite des savoirs*, dont on connaît les dérives monumentalistes (voire fétichistes), l'introduction de questions à étudier ne fait pas en elle-même avancer le temps didactique : celle-ci, on le sait, se mesure à l'aune des savoirs visités. C'est pourquoi j'ai formulé l'hypothèse que l'émergence d'un *enseignement par PER* ne pouvait s'accomplir que solidairement avec un changement de *paradigme de l'étude scolaire* et, plus précisément, avec l'avènement de ce que je propose de nommer le paradigme *de questionnement du monde* : ce que fait une classe [*X*, *Y*], ce sur quoi *Y* doit rendre des comptes à l'institution mandante, ce ne serait plus alors les *savoirs visités* mais les *questions étudiées*. Un tel changement peut paraître bien radical et, par suite, bien peu probable dans un avenir proche. Mais ce changement ne l'est peut-être pas autant qu'on pourrait le croire, du moins du côté de *X*. À ce propos, je citerai ici un bref échange avec un élève d'une classe de 4e à qui Christophe Bergèse et moi venions de présenter l'Atelier « Enquêtes sur Internet », en indiquant nettement qu'on y étudiait « des questions ». Cet élève me demande alors : « L'an dernier, vous en avez étudié combien de questions ? » Ma réponse – « En tout, quatre dans l'année » – paraît le décevoir, ou du moins le surprendre. Mais ce qui importe ici, c'est la facilité avec laquelle cet élève s'est placé mentalement dans le paradigme de questionnement du monde, en adoptant d'emblée et sans effort apparent une comptabilité sans doute parfaitement inédite pour lui : « Combien de questions ? »

c) Du côté de *Y*, toutefois, les choses seront sans doute plus lentes à changer. Traditionnellement, en effet, le métier de professeur est imprégnée par ce que je nommerai une *pédagogie d'enseignant*, c'est-à-dire une pédagogie dont le but est de *« montrer »* la matière au programme : le professeur est depuis des siècles un « montreur de savoir ». Une petite digression linguistique est de mise à ce propos. On sait que, en espagnol, *enseñar* signifie à la fois *montrer* et *enseigner*. En français, hier encore, « enseigner » signifiait d'abord « montrer », « indiquer » (le dictionnaire d'Émile Littré donne ainsi cet exemple : « Enseigner le chemin le plus court à un voyageur égaré »). Semblablement, en anglais, *to teach* renvoie à l'origine à la même idée, comme l'indique le *Dictionary of Word Origins* de John Ayto (1994) :

> **teach** [OE] To *teach* someone is etymologically to 'show' them something. The word goes back ultimately to the prehistoric Indo-European base **deik-* 'show,' which also produced Greek *deiknúnai* 'show' (source of English *paradigm* [15]) and Latin *dīcere* 'say' (source of English *diction*, *dictionary*, etc). Its Germanic descendant was **taik-*, which produced English *token* and German *zeigen* 'show.' From it was derived the verb **taikjan*, ancestor of English *teach.* ► *diction, dictionary, paradigm, token*

Le *Onelook dictionary* (en ligne), quant à lui, précise ceci :

> O.E. *tæcan* (past tense and pp. *tæhte*) "to show, point out," also "to give instruction," from P.Gmc. **taikijanan* (cf. O.H.G. *zihan*, Ger. *zeihen* "to accuse," Goth. *ga-teihan* "to announce"), from PIE **deik-* "to show, point out" (see ***diction***). Related to O.E. *tacen*, *tacn* "sign, mark" (see ***token***). O.E. *tæcan* had more usually a sense of "show, declare, warn, persuade" (cf. Ger. *zeigen* "to show," from the same root); while the O.E. word for "to teach, instruct, guide" was more commonly *læran*, source of modern ***learn*** and ***lore***. *Teacher*

> “one who teaches” emerged c.1300; it was used earlier in a sense of “index finger” (c.1290).

Comme on le voit, plusieurs notions voisines se mêlent : enseigner, ainsi, c’est aussi *guider*. Certes. Mais enseigner c’est d’abord montrer, et même montrer du doigt. Comme le précise le *Dictionnaire historique de la langue française* (1993), « *enseigner* a d’abord, comme le latin *insignire*, correspondu à “faire connaître par un signe” (1050), valeur qui ne survit que régionalement, remplacée par *renseigner* ». Le métier reste pourtant sous-tendu par cette notion primordiale, refoulée des consciences linguistiques d’aujourd’hui, mais qui longtemps affleura dans la langue ordinaire, comme le suggère cet extrait de l’article « Maîtres écrivains » du *Dictionnaire de pédagogie* de Ferdinand Buisson (1911) :

> Le privilège accordé aux maîtres-écrivains d’enseigner seuls l’écriture et le calcul ne pouvait manquer de susciter des réclamations de la part des maîtres d’école. En effet, ceux-ci se voyaient contester un droit dont ils avaient joui jusque-là moyennant l’autorisation du grand-chantre, pour les écoles épiscopales, ou celle des curés, pour les écoles de charité des paroisses. À Paris, la question fut portée, presque aussitôt après la fondation de la corporation, devant les autorités judiciaires. Le Châtelet rendit, le 25 juin 1598, une sentence favorable aux maîtres écrivains, par laquelle il était ordonné que les maîtres d’école « ne pourraient bailler à leurs écoliers aucuns exemples que de monosyllabes ». Mais les maîtres d’école firent appel de ce jugement ; le 22 avril 1600 le Parlement de Paris leur donna raison, en décidant que, « suivant les arrêts des 15 janvier 1580 et 5 septembre 1584, les maîtres d’école de la ville et faubourgs de Paris pourront enseigner leurs écoliers à former les lettres et écrire, et outre leur bailler exemples en lignes, sans pouvoir tenir école d’écriture ni montrer l’art d’icelle séparément ». Le droit des maîtres d’école à « bailler exemples en lignes » ayant été reconnu, on se querella ensuite pendant un demi-siècle à propos du nombre de lignes dont les exemples d’écriture pourraient être formés. Un arrêt du 2 juillet 1661 régla ce point important, et défendit aux maîtres d’école « de mettre plus de trois lignes dans les exemples qu’ils donneront à leurs écoliers » ; mais ce même arrêt leur reconnut le droit exclusif de montrer à lire, et défendit aux maîtres-écrivains d’empiéter sur ce terrain réservé, en concédant toutefois à ceux-ci le droit d’enseigner l’orthographe : les maîtres-écrivains, dit le Parlement, « pourront avoir des écrits ou des livres imprimés pour montrer l’orthographe, sans que pour ce ils puissent aucunement montrer à lire ».

d) Ce qui devrait se créer et diffuser, donc, c’est une *pédagogie de l’enquête* adéquate au paradigme de questionnement du monde. Une telle pédagogie doit évidemment permettre – et même favoriser – des évolutions décisives en matière de chronogenèse, de topogenèse, de mésogenèse. Avant de décrire plus précisément ces évolutions, je rappelle une fois encore le schéma herbartien dans sa forme *semi-développée*, à savoir

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \Rightarrow M] \Rightarrow R^{\heartsuit},$$

puis dans sa forme *développée* :

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \Rightarrow \{\, R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, \ldots, O_m \,\}] \Rightarrow R^{\heartsuit}.$$

Cela fait, je reprendrai ici simplement un passage un peu long de mon cours à l'école d'été de Clermont-Ferrand, où je me réfère à une classe $[X, y]$, c'est-à-dire où $Y = \{\, y \,\}$:

> J'aborderai ici ces propriétés de façon volontairement formelle, en commençant par la mésogenèse, « fabrication » du milieu *M*. Première condition à satisfaire : *M* n'est pas « tout fait » ; il est constitué par la classe à partir de productions diverses, *externes* à la classe comme *internes* à celles-ci. Ces dernières incluent notamment les réponses R_x éventuellement proposées par des élèves *x* à partir de leur activité propre, la réponse R_x étant regardée, en référence au schéma herbartien, comme « estampillée » *ipso facto* par son proposant, *x* lui-même, de la même façon que $R^{\heartsuit}$ sera estampillée par la classe $[X, y]$. Notons à cet égard que le milieu
>
> $$M = \{\, R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, \ldots, O_m \,\}$$
>
> doit permettre au moins (a) de soumettre chacune des réponses $R_i^{\lozenge}$ qui le composent ainsi que la réponse $R^{\heartsuit}$ en cours d'élaboration à l'épreuve d'une dialectique des médias et des milieux adéquate, et (b) d'offrir des matériaux idoines pour construire une réponse $R^{\heartsuit}$ validée et satisfaisant les contraintes imposées.
>
> Par rapport aux usages scolaires traditionnels, un fait doit être clairement souligné : plusieurs types d'œuvres qui peuvent, *en principe*, venir constituer le milieu *M* d'un PER sont exclues *par principe* de l'enseignement traditionnel, même s'il arrive qu'elles y soient présentes clandestinement (comme il en va des corrigés d'exercices tout faits utilisés discrètement par les élèves). À cet égard, on verra plus loin que le « travail » sur le milieu change en même temps que change ainsi la *nature* du milieu. La condition mésogénétique rappelée va de pair avec une condition relative à la *topogenèse* : la constitution du milieu *M* est le fait *de la classe* $[X, y]$, non de *y* seul. Le *topos* des élèves doit recevoir à cet égard une extension importante : non seulement un élève pourra apporter *sa* réponse personnelle R_x (comme il en va classiquement quand il produit *sa* solution de tel problème donné à chercher par *y*), mais encore il pourra proposer d'introduire dans *M* toute œuvre qu'il souhaitera, par le

truchement d'une documentation qu'il apportera ou suggèrera. À ce changement dans le *topos* des élèves correspond un changement important dans le *topos* de celui qu'on nommera ici le *directeur d'étude* – il dirige l'étude de Q – ou le *directeur d'enquête* – il dirige l'enquête sur Q. C'est ainsi y (ou Y, plus généralement) qui décidera *en dernier ressort*, non sans en expliciter les attendus, si la classe verra ou non son milieu d'étude être augmenté de telle ou telle œuvre, documentée de telle ou telle façon (et cela y compris s'agissant de réponses de la forme R_x). De la même façon, y pourra verser au milieu M telle pièce documentant une certaine réponse $R^\lozenge$ qui ne sera pas nécessairement « sa » réponse personnelle (s'il en a une). Dans tous les cas, la réponse notée plus haut R_y ne sera pas traitée autrement que les autres réponses $R_i^\lozenge$: ainsi sera-t-elle soumise à la dialectique des médias et des milieux, nul média n'ayant ici le privilège d'être « cru sur parole ».

La *chronogenèse* est ce par quoi un PER se distingue en principe de la façon la plus facilement repérable des épisodes didactiques usuels à l'école (si l'on excepte IDD et TPE notamment) : la constitution et le « travail » du milieu M sont en effet à l'origine d'une *dilatation du temps didactique* et donc, corrélativement, d'une *extension du temps d'horloge* requis. C'est ainsi que le travail de M en vue de produire $R^\heartsuit$ comportera *notamment* une étude finalisée *plus ou moins poussée* (elle peut être très sommaire en certains cas) des œuvres O_j, exigence fonctionnelle qui conduit le système didactique $S(X\ ;\ Y\ ;\ Q)$ à se transformer momentanément en un système didactique de type « classique », $S(X\ ;\ Y\ ;\ O_j)$. Cette étude de l'œuvre O_j – qui est, je le répète, finalisée par l'élaboration de $R^\heartsuit$: comment se servir de O_j pour déconstruire $R_i^\lozenge$, ou pour tirer profit de telle autre œuvre O_k, ou pour « fabriquer » $R^\heartsuit$? – peut supposer *pour cela même* une étude plus large de O_j – quelles en sont les raisons d'être et comment « fonctionne »-t-elle, etc. ? En tout cela, la direction de l'étude confiée à y suppose que y ne se laisse pas déborder par l'habitus professoral consistant à « pousser l'étude » de façon artificielle pour y inclure des outils non appelés par l'enquête en cours mais ayant par exemple la vertu d'être usuellement associés, dans l'organisation disciplinaire dominante, aux outils dont l'emploi semble effectivement requis.

e) Les analyses et descriptions qui précèdent fournissent ainsi un ensemble de questions permettant de qualifier plus adéquatement un PER observé ou scénarisé ; nous y reviendrons.

4. Étudier une œuvre ?

a) Dans un PER relatif à une question Q, dans une enquête sur une question Q, on rencontre des réponses $R^\lozenge$ et des œuvres O. Le *but* de l'enquête est un but de recherche : *produire* une réponse $R^\heartsuit$ à Q. L'étude d'une réponse $R^\lozenge$ ou, plus généralement, d'une œuvre O, est un *moyen* au service de cette fin.

L'emprise du paradigme de la visite des savoirs et de la pédagogie d'enseignant tend en règle générale à faire prendre les moyens pour des fins et à faire oublier le but véritable de l'enquête. Mais cela n'annule pas, en saine doctrine, l'obligation de s'arrêter pour étudier, de façon *finalisée*, des réponses $R^\lozenge$ et des œuvres *O*. Cette étude doit être adéquate à la fin que l'on s'est fixée – répondre à la question *Q*. Or ce critère, fondamental dans une pédagogie de l'enquête, n'est nullement familier dans la culture didactique scolaire traditionnelle. Je ne ferai ici, touchant la question de l'étude d'une œuvre dans le cadre d'un PER, que quelques remarques très simples.

b) Je m'arrête un instant d'abord sur le cas d'une œuvre de laquelle on espère excrire une réponse à une certaine question, c'est-à-dire sur le problème de la lecture *questionnante* d'une œuvre : que dit cette œuvre à propos de telle question ? Je reviens ici sur un type de situations dont j'ai déjà parlé lors de la séance 8 du séminaire TAD/IDD 2008-2009 : l'examen sanctionnant l'UE de licence de sciences de l'éducation intitulée « Théorie de l'apprentissage et didactique pluridisciplinaire », comporte deux questions extraites d'une liste de questions rendue publique bien avant l'examen. Lors de la deuxième session de cet examen, la question suivante était proposée.

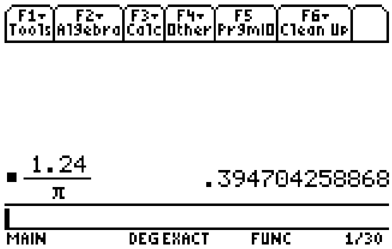
> **Partie 1.** En n'utilisant que les éléments disponibles dans le cours de didactique fondamentale (y compris le « Forum des questions »), rédigez une réponse à chacune des deux questions suivantes :
>
> 1. Quand on parle d'*évitement de la division*, à quoi fait-on référence plus précisément dans les pratiques arithmétiques populaires d'autrefois ? Quel exemple de cet évitement peut-on donner à propos du « cubage des grumes » ?
>
> 2. …

c) Il s'agissait donc d'extraire du texte du « cours de didactique fondamentale » que j'ai enseigné (et dont les candidats auraient dû avoir avec eux un exemplaire, tous les documents étant autorisés) la réponse inscrite en ce texte. La recherche des matériaux pour ce faire était guidée par une table de concordance également disponible bien à l'avance (on se reportera là-dessus aux explications données dans le journal de la séance 8 du séminaire 2008-2009). Les considérations sur l'évitement de la division avaient été suscitées, dans le cours mentionné, par la question du « cubage des bois » (ou « des grumes »), qui appartenait traditionnellement au programme de géométrie de l'école primaire et qui, dans le cours donné, permet d'illustrer plusieurs notions d'analyse praxéologique. La technique enseignée par un manuel publié en 1921 conduisait normalement à devoir effectuer une division par π : c'est cette situation qui avait motivé les remarques sur l'*évitement* de la division. Voici le passage pertinent du cours.

c) La demi-circonférence moyenne vaut donc 1,24 m. Il faut alors « diviser par π » (T^c_2) ladite « demi-circonférence » obtenue, soit calculer (ici)

$$\frac{1,24}{\pi}.$$

Aujourd'hui, la chose est immédiate, grâce aux calculatrices électroniques ; on obtient ceci.



En fait, bien longtemps encore après 1921, cette manière de faire fera défaut. Généralement, on recourt alors au calcul mental ou au calcul « posé », mais en remplaçant la division, opération toujours délicate, par une *multiplication* (T^c_{21}) ; on a en effet

$$\frac{1,24}{\pi} = 1,24 \times \frac{1}{\pi}$$

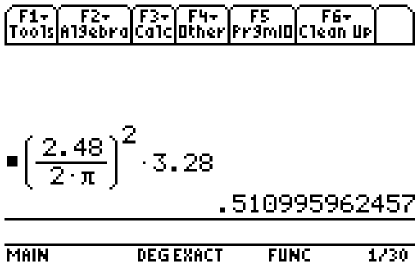
et comme $\frac{1}{\pi} \approx 0,318$ (c'est là un résultat que l'on sait « par cœur »), on effectue finalement la multiplication (T^c_{22}) indiquée par le produit $1,24 \times 0,318$, voire par $1,24 \times 0,32$, ce qui peut se faire « de tête » ainsi : « en ignorant les virgules, 124 multiplié par 32, c'est 125 multiplié par 32, moins 32 ; comme 125 est le huitième de mille, 125 multiplié par 32 est égal au huitième de 32 000, soit 4000 ; à cela on retranche 30, ce qui donne 3970, puis 2, ce qui conduit à 3968. Le produit $1,24 \times 0,32$ est donc égal 0,3968 et on a ainsi : $\frac{1,24}{\pi} = 1,24 \times \frac{1}{\pi} \approx 1,24 \times 0,318 \approx 1,24 \times 0,32 = 0,3968 \approx 0,4$. »

Ce dernier résultat est à peine surévalué : 0,4 au lieu de 0,39470 environ.

d) Il convient alors de « faire » le « carré du quotient obtenu », autre tâche de calcul (T^c_3) imposée par la technique τ^c. On doit ici calculer, simplement, le carré de 0,4 ; ce qui est immédiat : $0,4^2 = 0,16$. Il faut alors avoir mesuré la longueur du tronc d'arbre (T^c_4), ce qui requiert une technique qui peut varier selon que l'opérateur peut compter sur un coup de main d'une autre personne ou non. On imagine ici que le tronc mesure 3,28 m.

e) Dernière opération : multiplier le résultat trouvé plus haut (à savoir, ici, 0,16) par la longueur du tronc d'arbre (T^c_5) : il faut donc multiplier 0,16 par

3,28, ce qu'on peut faire *par exemple* comme suit : « 328 par 2, c'est 656 ; en multipliant 656 par 3, on obtient 1968, en sorte que $0{,}06 \times 3{,}28 = 0{,}1968$. Le produit $0{,}16 \times 3{,}28$ vaut donc 0,328 plus 0,1968, soit 0,5248. » Le volume du tronc d'arbre serait donc un peu supérieur à 0,5 m^3. L'utilisation de la calculatrice donnerait ceci, qui n'est pas bien éloigné de ce résultat.



3.5.3. On notera, sans plus de commentaire pour le moment, ce qui peut apparaître comme une anomalie. Un tronc d'arbre de plus de trois mètres de long et dont le diamètre mesure en mètres $\frac{2{,}48}{\pi}$, c'est-à-dire à peu près 80 cm, aurait un volume d'un 0,5 m^3 *seulement*. Est-ce vraiment là le résultat que l'on pouvait attendre ?... Nous reviendrons sur ce mystère dans la prochaine unité.

a) On s'arrêtera maintenant un instant sur un aspect qui peut surprendre le lecteur d'aujourd'hui : *l'« évitement » de la division*. Un nouvel extrait de l'ouvrage de Jacques Ozouf, *Nous les maîtres d'école* (pp. 109-110) nous éclairera en nous rappelant combien la division – comme d'ailleurs, à plus forte raison, l'« extraction de la racine carrée », qui lui est apparentée – fut longtemps une opération réputée difficile. Ce texte est extrait de l'autobiographie d'une institutrice née en 1875, qui exerçait dans les Hautes-Alpes.

> Mon grand-père, Alexis B., né en 1802 comme Victor Hugo, exilé comme lui, était, avant la loi Jules Ferry, « maître d'école ». En ce temps-là pendant les mois d'hiver, quand la neige paraissait sur les cols, il y avait dans quelques communes des Alpes et de la Drôme une foire, appelée en provençal « la fiero di mestres d'escolo » (la foire des maîtres d'école). Mon grand-père était un « Savantas », sachant faire les divisions, ayant le droit, par conséquent, de mettre deux plumes au chapeau. Il avait été choisi par les gens de Verclause (petite commune de la Drôme) pour instruire pendant les 5 mois d'hiver les enfants de ce village. Une grande remise, presque sans feu, servait de salle de classe, et chaque famille devait nourrir « lou mestro » autant de semaines qu'elle avait d'enfants à l'école. Mon grand-père ne changea jamais de quartier et devint, par la suite, maire de Verclause. Mais la fin de sa carrière d'école fut un triomphe qu'il aimait à raconter.

Après les lois instituant l'école « obligatoire et gratuite », les Inspecteurs primaires de l'époque avaient été chargés de retrouver ces vieux maîtres, et la République leur avait octroyé une « retraite » de 80 francs par an, que mon grand-père allait chaque année toucher chez le percepteur – ce dont il était très fier !

b) Cet évitement de la division s'est perpétué dans une certaine tradition mathématique populaire. L'extrait ci-après d'une page du site « Les amoureux du bois d'ameublement » intitulée « Cubage – Abattage – Débardage des bois » [1] nous le montrera : on verra en effet que l'évitement de la division se retrouve aujourd'hui encore dans ce document (dont nous avons respecté la graphie). On notera tout particulièrement l'exhortation adressée au lecteur de ne pas s'émouvoir d'une apparente complication « théorique » dont le véritable objet est en fait de *simplifier la pratique*.

III - LE CUBAGE DES BOIS

A - Principes généraux.

○ Le cubage ou toisé des bois est une évaluation du volume qui ne prétend pas à l'obtention du volume réel, mais à une approximation du rendement en bois parfait, c'est-à-dire ne tenant compte ni de l'écorce ni de l'aubier.

○ – Cela conduit à un certain nombre de règles spéciales, de conventions, dont il ne faut pas s'étonner que leur application donne des résultats assez sensiblement différente les uns des autres.

○ – Le principe générale est le suivant : on considère que le "cube grume" d'un arbre est d'un cylindre qui aurait comme base la section moyenne du tronc et pour hauteur la hauteur du fût.

○ – La section moyenne est considérée comme un cercle et on prend pour obtenir sa surface, une formule peu usitée dans les calculs classiques : $\frac{C^2}{4\pi}$ soit le carré de la circonférence, divisée par 4 fois 3,14. Avidament cette formule équivaut absolument aux deux formules Plus couramment employées qui sont :

Surface du cercle : πR^2 ou $\frac{\pi D^2}{4}$

Pourquoi cette formule $\frac{C^2}{4\pi}$ qui apparaît plus compliquée ?

♦ 1) Il est souvent facile de mesurer la circonférence d'une grume au moyen d'une ficelle par exemple.

♦ 2) La formule $\frac{C^2}{4\pi}$ peut se mettre sous la forme $\frac{1}{4\pi} * C^2$

♦ et le nombre $\frac{1}{4\pi}$ a une valeur évidemment constante, calculée une fois pour toutes.

C'est 0.079578.

♦ En nous bornant aux trois premières décimales : 0,079.

[1] Voir http://passion.bois.free.fr/le%20materiau%20bois/l%27abattage/abattage.htm.

♦ On peut donc dire qua la surface d'un cercle est égale au carré de la circonférence multiplié par 0,079
$S = 0{,}079\ C^2$

c) On notera, dans l'exemple précédent, un fait *général*, et *déterminant* : l'effort pour créer des techniques *qui s'intègrent le plus simplement possible dans la pratique de ceux à qui elles sont adressées*. Faute d'un tel effort d'adaptation, nombre de tentatives pour diffuser – par exemple à l'école – telle ou telle technique n'obtient le plus souvent que des succès éphémères : tout le monde a appris à résoudre des équations du second degré (T_1), mais qui sait encore le faire dix ans après ?

---

d) À la question proposée aux candidats, voici d'abord une très bonne réponse :

Supposons que je veuille éviter la multiplication ; ayant à déterminer le produit 6×23, j'écris ce produit sous la forme d'une somme, à savoir : 23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23 que je remplace par la somme 46 + 46 +46, etc. J'ai ainsi évité d'avoir à effectué une multiplication. Si maintenant je dois déterminer $\frac{127}{20}$ et si je sais (parce qu'on me l'a appris) que diviser par 20, c'est multiplier par 0,05, je peux remplacer le quotient proposé par le produit $127 \times 0{,}05$. J'ai ainsi évité la division (de 127 par 20). Si je dois tracer dans un parc un cercle d'environ 30 mètres de long, comme la longueur d'un cercle est donnée par $\ell = 2\pi R$, le rayon du cercle à tracer est donné par $R = \frac{\ell}{2\pi} = \frac{30}{2\pi} = \frac{15}{\pi}$. Je dois donc calculer $\frac{15}{\pi}$. Pour éviter la division (de 15 par π), je remplace ce quotient par un produit, à savoir $15 \times \frac{1}{\pi}$. Je dois en ce point savoir que $\frac{1}{\pi} \approx 0{,}32$ (de même que je sais que $\pi \approx 3{,}14$) : il me reste donc à calculer le produit $15 \times 0{,}32$. J'aurai ainsi évité d'avoir à effectuer une division (par π). C'est exactement ce qui se passe pour le cubage des grumes, où l'on doit calculer $V = \frac{C^2 \times L}{4\pi}$: pour éviter la division (par 4π), on peut écrire ce quotient sous la forme d'un produit $V = \frac{1}{4\pi} \times C^2 \times L$, en ayant en tête le fait $\frac{1}{4\pi} = 0{,}08$.

La rédactrice de cette réponse a manifestement une maîtrise du style mathématique courant ; en outre, elle s'implique dans le problème présenté, ce qui lui épargne la tentation du commentaire induite par les positions d'extériorité souvent adoptées par les candidats. Par contraste, dans la réponse suivante, on assiste à un naufrage : faute d'avoir identifié la nature du phénomène à décrire – l'évitement de la division –, l'auteur divague, accumulant confusions et incompréhensions.

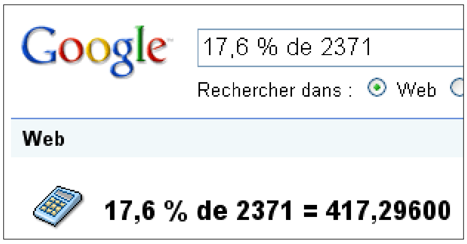
> Quand on parle d'évitement de la division dans les pratiques arithmétiques populaires d'autrefois, c'est pour parler de l'utilisation d'une fiche technique qui permettait aux élèves d'apprendre par cœur des formules proposées sans faire de justification. On parle donc de technique. Par exemple le cubage des grumes où pour calculer le volume de la grume la formule était
>
> $$V = \left(\frac{1}{2} \times \frac{C}{\pi}\right)^2 \times \ell$$
>
> La fiche technique sur le cubage du bois nous donnait comme formule $V = S \times \ell$ et S était donnée par la formule simplifiée $S = 0{,}079\ C^2$. On obtenait une formule trop compliquée $S = \frac{C^2}{4\pi}$ alors que $S = \pi R^2$ est beaucoup plus simple. On l'utilise encore maintenant pour calculer la surface d'un cercle.

L'égarement n'est pas moindre dans la réponse suivante, qui évite pourtant prudemment à peu près toute présence mathématique :

> Il s'agit d'éviter la pratique de la division qui était à l'époque, une pratique jugée difficile. Pour cela, on utilisait d'autres moyens arithmétiques jugés plus faciles, notamment la multiplication, afin d'obtenir à peu près le même résultat qu'avec une division – même si pour cela il fallait multiplier les types tâches à effectuer pour la mise en œuvre de la technique. On peut donner cet exemple à propos du « cubage des grumes ». Ainsi, pour éviter la pratique de la division, on multiplie les types de tâches pour utiliser la technique de cubage proposée.

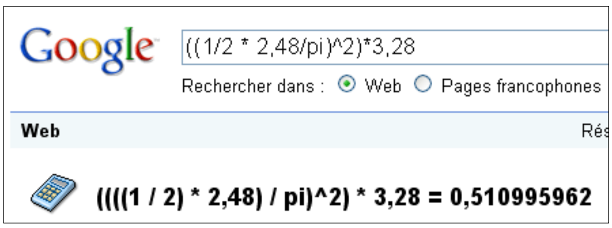
Je ne commenterai pas plus les erreurs commises. Il me suffit de noter que rédiger un compte rendu de lecture questionnante ne va nullement de soi pour une majorité de ces étudiants. On peut penser qu'un tel type d'opération est l'objet, dans la formation scolaire et universitaire courante, d'une attention insuffisante et surtout qu'elle se trouve gênée par la prédominance du *commentaire* (et, à travers lui, par la propension à « l'expression de soi ») sur le compte rendu objectif. Il s'agit là, en tout cas, d'un type de tâches pour lequel un équipement praxéologique adéquat, non troublé par des habitus contraires, fait majoritairement défaut, me semble-t-il.

e) Reste le grand problème – sur lequel il nous faudra progresser – de l'étude d'une œuvre *O* finalisée par l'enquête sur une question *Q*. À cet égard, je me limiterai à une remarque un peu périphérique mais non moins essentielle : notre connaissance des œuvres potentiellement pertinentes est souvent insuffisante et cela, en nombre de cas parce que notre étude de ces œuvres reste souvent insuffisante. Je prendrai ici un exemple « facile » : notre connaissance fréquemment inadéquate et surtout à peu près figée de ces œuvres que sont les logiciels utiles à nos travaux ; et j'illustrerai cet exemple par un cas très simple, au reste déjà croisé (toujours dans la huitième et dernière séance du séminaire 2008-2009) : celui de la calculatrice Google. Il me semble, mais je me trompe peut-être, que peu de gens en connaissent l'existence ou, du moins, la diversité des emplois. Je suppose, hélas ! qu'il sera doux à plus d'un ancien élève de collège de savoir que, pour calculer la valeur de, disons, 17,6 % de 2371, il suffit de taper exactement cela – 17,6 % de 2371 – dans la « boîte de recherche » de Google, comme on le voit ci-après :

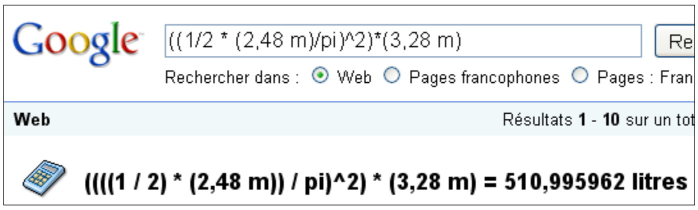


S'agissant du cubage des grumes vu plus haut, on peut bien évidemment calculer les quantités « difficiles » que sont $\frac{1}{\pi}$ ou $\frac{1}{4\pi}$:

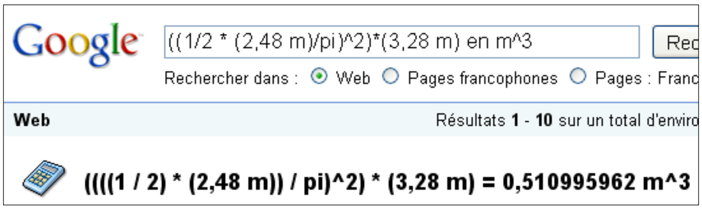
On peut bien sûr confier aussi à cette calculatrice le calcul complet de la valeur de V = $\left(\frac{1}{2} \times \frac{C}{\pi}\right)^2 \times \ell$ pour C = 2,48 m et ℓ = 3,28 m. On peut pour cela « laisser tomber les unités », comme ci-après :



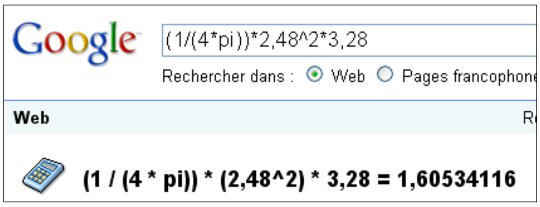
On peut aussi conserver les unités, ce qui réserve quelquefois de petites surprises, comme ci-après :



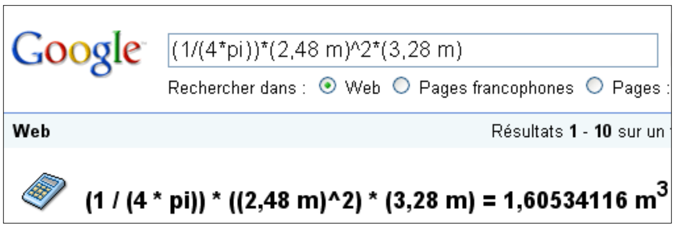
On peut rectifier le tir comme suit par exemple :



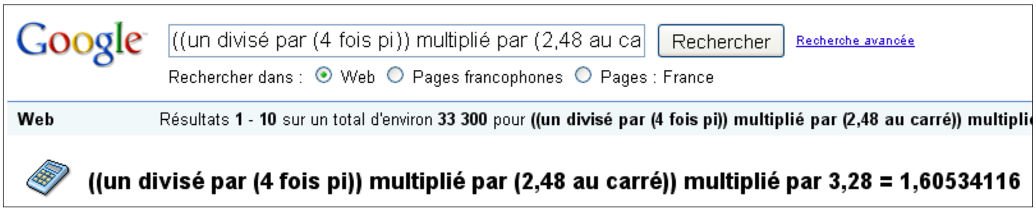
On aura observé que, en vérité, la formule $V = \left(\frac{1}{2} \times \frac{C}{\pi}\right)^2 \times \ell$ est erronée : elle fournit une valeur π fois inférieure à la vraie valeur. La bonne valeur est donnée par $V = \frac{1}{4\pi} \times C^2 \times \ell$. Pour les valeurs de C et ℓ déjà rappelées, et en omettant les unités, on a alors ceci :



En incluant les unités, on obtient semblablement :



Là comme ailleurs, on peut aussi interroger la calculatrice de Google en « langue naturelle », même s'il faut alors employer force parenthèses :



Bien sûr, toute œuvre a ses mystères. J'en citerai un concernant la calculatrice Google : peut-on – et alors comment – fixer la précision de l'affichage ? Petite enquête à mener !

QUESTIONS D'INFRASTRUCTURE

1. La notion d'infrastructure

a) Sauf erreur, la notion d'infrastructure a, dans le cadre du séminaire TAD/IDD, été introduite lors de la séance 4 de l'année 2008-2009. C'est une notion qui doit encore « travailler » ; mais je note qu'elle ne semble pas fort éloignée de cette définition de dictionnaire que propose le *Trésor de la langue française informatisé* (TLFi) : « Support, base indispensable à l'édification, au maintien, ou au fonctionnement d'une structure concrète ou abstraite. »

b) Cette notion nous rappelle que chacun n'est pas seul au monde et que l'enseignement, en particulier, n'est pas une robinsonnade : l'enseignant ne peut exister que parce qu'existent – et généralement *préexistent* – des infrastructures qui, à la fois, contraignent et rendent possible son intervention. Le terme d'infrastructure didactique désigne le système des infrastructures de tous niveaux – disciplinaire, pédagogique, scolaire, sociétal, civilisationnel – sur lequel s'élève la superstructure didactique.

c) Deux grands faits solidaires ont présidé à l'introduction formelle de la notion d'infrastructure : tout d'abord, le constat de l'existence continuée de l'illusion subjective du professeur comme « petit producteur indépendant » (ou comme membre d'un groupement de petits producteurs indépendants) ; ensuite, le constat de l'affaissement ou de l'absence de certaines infrastructures indispensables aux enseignements envisagés, qui constitue une partie essentielle du problème des « ressources manquantes » de la profession.

2. Un exemple : l'algèbre élémentaire

a) Je m'arrêterai sur des carences infrastructurelles de nature *mathématique*. Je commence par un exemple bien connu, celui de l'algèbre élémentaire. On peut partir pour cela d'une question naïve : quand on parle d'*expression algébrique*, quelle entité celle-ci *exprime*-t-elle – algébriquement ? Voici d'abord un court extrait de l'article "Elementary algebra" de l'encyclopédie en ligne *Wikipedia*.

> In elementary algebra, an "expression" may contain numbers, variables and arithmetical operations. These are usually written (by convention) with "higher-power" terms on the left (see polynomial); a few examples are:
>
> $x + 3$,
>
> $y^2 + 2x - 3$,
>
> $z^7 + a(b + x^3) + 42/y - \pi$,
>
> In more advanced algebra, an expression may also include elementary functions.
>
> An "equation" is the claim that two expressions are equal. Some equations are true for all values of the involved variables (such as $a + b = b + a$); such equations are called "identities". "Conditional" equations are true for only some values of the involved variables: $x^2 - 1 = 4$. The values of the variables which make the equation true are called the "solutions" of the equation.

Il est possible de regarder de telles écritures symboliques comme n'exprimant rien et ne renvoyant qu'à elles-mêmes. Mais cela pose un problème majeur : quand dira-t-on alors que deux telles entités sont « égales » ? Par exemple, les écritures $a + b$ et $b + a$ sont formellement distinctes ; pourquoi dira-t-on, comme le rédacteur du passage reproduit ci-dessus, que l'écriture $a + b = b + a$ est une « identité » ? Pourquoi dira-t-on, de même, que $x^2 = x$ *n'est pas* une « identité » ?

b) On peut évidemment répondre qu'il existe un *calcul* portant sur les expressions algébriques, et qui permet de conclure que l'égalité formelle $a + b = b + a$ est une « identité » mais ne permet pas de conclure de même à propos de l'égalité formelle $x^2 = x$. Mais d'où viennent alors les *règles* de ce calcul ? On connaît la solution traditionnelle, qui avait pourtant disparu durant plusieurs décennies de l'enseignement de l'algèbre élémentaire : une expression algébrique exprime un certain *programme de calcul*, que l'on peut imaginer comme s'énonçant « en mots ». Ainsi $x^2 - x$ exprime-t-il le programme de calcul qui consiste, étant donné un nombre entier (par exemple), à l'élever au carré, puis à soustraire du nombre ainsi obtenu le nombre choisi lui-même. Pour 3, on calculera d'abord $3^2 = 9$, puis on soustraira 3, obtenant ainsi $9 - 3 = 6$; pour 10, on obtiendra d'abord $10^2 = 100$, puis $100 - 10 = 90$. Considérons alors le programme de calcul suivant : on prend un nombre et on le multiplie par son prédécesseur dans la suite des entiers : pour 8, on obtiendra ainsi $8 \times 7 = 56$, pour 12, $12 \times 11 = 132$, etc. Il n'est pas facile de voir que les deux programmes de calcul exprimés en mots sont en fait « équivalents », en ce sens que, quel que soit le nombre auquel on les applique, ils rendent le *même* résultat. D'où le détour par leur *expression* algébrique et par le *calcul* algébrique : le premier a pour expression $x^2 - x$, le second $x(x - 1)$; or quiconque connaît le calcul algébrique peut écrire qu'on a par exemple

$$x(x - 1) \equiv x \times x - x \times 1 \text{ puis } x \times x - x \times 1 \equiv x^2 - x$$

et donc qu'on a finalement $x(x - 1) \equiv x^2 - x$, c'est-à-dire que l'égalité formelle $x(x - 1) = x^2 - x$ est une *identité*.

b) D'où viennent les règles du calcul algébrique ? Du calcul sur les nombres. Le fait que, lorsqu'on additionne un premier nombre et un second, on trouve le même résultat que lorsqu'on additionne le second et le premier fournit l'*identité* $a + b = b + a$, laquelle ne fait qu'énoncer l'*équivalence* des programmes de calcul dont l'expression algébrique est respectivement $a + b$ et $b + a$, soit encore le fait noté ci-dessus $a + b \equiv b + a$. Mais d'où sait-on que cette équivalence est toujours vraie, quels que soient les entiers a et b (par exemple) ? Bien entendu, cela vient de l'universalisation d'un constat jamais mis en défaut dans le domaine numérique effectivement observé : on retrouve ici une induction de style expérimental, que les calculs axiomatisés ne peuvent occulter – mais je passe là-dessus.

c) Il y a cependant une similitude essentielle entre le passage de la « numérosité » au calcul arithmétique et le passage des programmes de calcul (arithmétique) au calcul algébrique : dans chaque cas, la « syntaxe » du calcul (arithmétique, algébrique) se fonde sur une « sémantique » – soit ce que je nomme ici « numérosité », dans le premier cas, et programmes de calcul, dans le second. Mais si l'on met entre parenthèses cette sémantique et, si je puis dire, la pragmatique associée, calcul arithmétique et calcul algébrique ne sont plus que des *systèmes formels* dont les règles peuvent bien être formulées et mises en œuvre pour produire des énoncés ; mais nous ne savons plus alors à quoi ces énoncés se rapportent.

d) En quoi la notion d'infrastructure est-elle impliquée dans ce qui précède ? L'enseignement de l'algèbre élémentaire suppose à l'origine une infrastructure mathématique complexe, faite d'une pragmatique, d'une sémantique et d'une syntaxe. Le passage du temps a évidé cette infrastructure parce que, dans un enseignement formel – et non pas fonctionnel –, la syntaxe seule compte : pragmatique et sémantique sont rapidement refoulées. Le calcul algébrique se trouve ainsi naturalisé comme pure syntaxe : il donne l'impression *de tenir debout tout seul*. L'idée qu'il y aurait autre chose que des expressions formelles s'estompe, à tel point que la confusion, fréquente chez les débutants (où elle procède d'une syntaxe imaginée), entre x^2 et $2x$ n'est pas invalidée par l'observation que les programmes de calcul ainsi exprimés *ne sont pas équivalents* (pour 3 par exemple, le premier donne 9 et le second 6), mais par le fait *qu'on n'a jamais établi* (i.e. déduit) l'identité $x^2 = 2x$. (Bien entendu, on suppose ici que les règles du calcul algébrique sont telles que ce qui est sémantiquement *faux* n'est pas syntaxiquement *démontrable*.)

e) Il y a là un exemple d'un phénomène général de *vieillissement culturel* qui conduit à couper le mathématique du mathématisé. Ainsi en va-t-il en géométrie lorsque, comme cela est de plus en plus vrai aujourd'hui, on tend à identifier, sans autre forme de procès, le plan à l'ensemble $\mathbb{R}^2$ ou l'espace à l'ensemble $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire la réalité au modèle. On substitue ainsi à la mathématisation d'une réalité physique l'étude formelle d'une structure mathématique que l'on finit par identifier à la réalité qu'à l'origine elle prétendait seulement modéliser. Revenir sur ce glissement ontologique ne va pas de soi : il faut réinvestir la réalité modélisée, il faut reprendre le processus de mathématisation, et enfin maîtriser le modèle, ce qui suppose une organisation infrastructurelle relativement lourde qui ne se réinvente pas en un tournemain.

3. Les probabilités : une syntaxe sans sémantique ?

a) Lors de la récente école d'été, Floriane Wozniak et moi-même avons animé l'un des ateliers évoqués plus haut sous le titre commun *Vers une ingénierie didactique des PER*. Cet atelier portait sur *L'aléatoire et la variabilité*. Le problème d'ingénierie didactique proposé aux participants à l'atelier – au nombre d'une dizaine dans un rassemblement de quelque 120 personnes, je crois – était le suivant : *Que pourrait être* un *scénario de PER qui fasse vivre les probabilités comme modélisant la variabilité statistique dans une classe de 3ᵉ aujourd'hui ?* Ce qui est à remarquer, ici, c'est qu'il n'est nullement question de PER *ouvert* : le scénario de PER attendu doit conduire les élèves à *rencontrer* le calcul des probabilités (comme modélisant la variabilité statistique). Mais on voit que la finalisation praxéologique n'est pas ici quelque chose de simple : il ne s'agit pas de faire rencontrer, par exemple, la notion de symétrie axiale, ou de produit scalaire, ou d'ellipse. Le morceau est beaucoup plus gros à avaler : il s'agit de faire rencontrer le calcul des probabilités « comme modélisant la variabilité statistique ». Classiquement, le travail requis doit aboutir à proposer une question génératrice Q dont on puisse montrer que son étude conduit – sous certaines contraintes et dans certaines conditions – à rencontrer les probabilités « comme modélisant la variabilité statistique ». Mais ici, pour concevoir une telle question, il faut avoir des idées assez précises sur la manière dont les probabilités « modélisent la variabilité statistique ». Et c'est d'abord là que le bât blesse !

b) Quand on se demande en quoi les probabilités peuvent modéliser la variabilité statistique, on arrive très vite à se demander ce qu'est au juste une « probabilité ». Or, à cette interrogation, la plupart des exposés actuels de calcul des probabilités ne répondent pas : la notion de probabilité y est définie de façon formelle, par voie axiomatique. Voici par exemple un extrait d'un mince mais dense opuscule, dû à Paul Jaffard, professeur au CNAM, intitulé *Probabilités. Résumé de cours. Exercices. Problèmes* (Masson, 1993). Le premier chapitre en est découpé en cinq sections : la première s'intitule « Événements », la deuxième « Lois de probabilité ». Le chapitre 1 s'ouvre par ces mots : « Un problème qui relève du Calcul des Probabilités se ramène à l'étude du tirage au sort d'un élément ω dans un ensemble Ω » (p. 1). La notion de « tirage au sort » semble supposée primitive – dans cette première section (qui traite d'événements, non de probabilités), elle ne réapparaîtra que dans un exemple : « Le tirage au sort consiste à jouer à “pile ou face” 3 fois de suite. En posant 1 pour pile et 0 pour face, on peut prendre $\Omega = \{ 0, 1 \}^3$, etc. » C'est au début de la deuxième section qu'on la retrouve, dans un passage crucial :

> Étant donné un tirage au sort dans un ensemble Ω, la **loi de probabilité** *P* de ce tirage associe à chaque événement *A* la probabilité $P(A)$ pour que *A* soit réalisé au cours de ce tirage. $P(A)$ est un nombre réel et les propriétés suivantes sont vérifiées :
>
> 1) $0 \leq P(A) \leq 1$.
>
> 2) $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$
>
> 3) $P(A^c) = 1 - P(A)$.
>
> 4) $P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$.
>
> On en déduit :
>
> $$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$$

On voit que l'auteur ne fait ici qu'*évoquer* un « tirage au sort » qui suivrait telle loi de probabilité *P*, sans dire à quoi un tel « tirage au sort » se reconnaît, ni en quoi il peut consister. La notion de probabilité est, de fait, définie axiomatiquement : une fois de plus, on nous donne la syntaxe de la notion sans nous faire connaître sa sémantique – qui, ce sera là mon point principal, tend à *disparaître* de la culture commune.

c) L'exemple précédent est tiré d'un *résumé* de cours et on pourrait envisager que le *cours* lui-même soit plus explicite. Voici maintenant un *Calcul des probabilités* riche, précis et concis dû à Lucien Chambadal et paru en 1969 (chez Dunod). Il s'ouvre par deux pages consacrées au « Vocabulaire des événements », suivies par le chapitre 1 intitulé « Probabilités sur les ensembles finis », lequel commence par cette *définition* :

DEFINITION I. 1. – Probabilités. *Soit Ω un ensemble fini non vide. On appelle probabilité sur Ω toute application P de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des événements de l'ensemble dans l'ensemble* $\mathbf{R}_+$ *des nombres réels positifs, satisfaisant aux deux conditions suivantes* :

a) *La probabilité de Ω est égale à* 1 :

$$P(\Omega) = 1.$$

b) *Pour tout couple* (A, B) *d'événements incompatibles,*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Au lieu de « *probabilité sur Ω* », *on dit aussi* « *loi de probabilité sur Ω* ».

Au plan de la syntaxe, la notion de probabilité sur un ensemble Ω fini se réduit à cela, en effet. Mais d'où vient cette notion ? De quelles réalité éventuellement extramathématiques est-elle la mathématisation ? Cela ne nous est pas dit.

d) Comment, dans ces conditions, pourrait-on voir un lien entre probabilités et variabilité statistique ? Je m'arrête un instant pour illustrer cette dernière notion en remontant aux débuts de son histoire. Au Séminaire 2005-2006 destiné aux PCL2 de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille (séminaire que, grâce à l'énergie de Gisèle Cirade, vous trouverez désormais en ligne sur mon site), j'emprunte quelques pages du compte rendu de la séance 20.

---

c) Dès la *Political Arithmetic* élaborée par les Anglais John Graunt (1620-1674) et William Petty (1623-1687), la science statistique s'inscrit en faux contre ces fausses finesses.

1) Dans ses *Observations on the Bills of Mortality* (1662), John Graunt, faisant œuvre de pionnier, présente les causes de mortalité à Londres pour diverses années. Voici, en traduction française, la table qu'il dresse pour l'année 1632 (pour des indications sur la nature exacte des causes recensées, voir http://www.ac.wwu.edu/~stephan/Graunt/graunt.html).

Abcès : 74
Angine : 7
Aphtes et affections de la bouche : 40
Assassinés : 7
Brûlés et échaudés : 5
Chancre : 1
Chancre et lupus : 10
Colique, pierre et strangurie : 56

Consomption : 1797
Contusions, écoulements, plaies et ulcères : 28
Convulsions : 241
Dépression : 8
Écrouelles : 38
Épilepsie : 7
Éruptions et varioles : 531
Étouffés et morts de faim en nourrice : 7
Exécutés et torturés à mort : 18
Femmes mortes en couche : 171
Fièvre : 1108
Fistule : 13
Flux de ventre, diarrhée et dysenterie : 348
Folie : 5
Foudroyés par une planète : 13
Gangrène : 5
Goutte : 4
Hémorragie : 3
Hémorroïdes : 1
Hernie : 9
Hydropisie et ballonnements : 267
Hypertrophie du foie : 87
Indigestion : 86
Jaunisse : 43
Léthargie : 2
Mordu par un chien enragé : 1
Mort subite : 62
Morts dans la rue et de faim : 6
Morts de chagrin : 11
Nouveaux nés et enfants en bas âge : 2268
Noyés : 34
Opérations de la pierre : 5
Paralysie : 25
Peste : 8
Phtisie : 34
Pleurésie et atrabile : 36
Poussée des dents : 470
Rhume et toux : 55
Rougeole : 80
Sciatique : 1
Scorbut et gale : 9
Soulèvement des poumons : 98
Suicidés : 15

Tués dans divers accidents : 46
Tympanite : 13
Typhus et scarlatine : 38
Varicelle : 6
Vérole : 12
Vers : 27
Vomissements : 1

2) L'un des buts essentiels du travail engagé est de donner aux personnes des indications sur ce qui les conduira à quitter ce monde, en leur permettant d'aller au-delà de la réponse de l'ignorance et de la crainte immotivée – « ça dépend ». Graunt écrit à ce propos :

> In the next place, whereas many persons live in great fear, and apprehension of some of the more formidable, and notorious diseases following; I shall only set down how many died of each: that the respective numbers, being compared with the Total 229250, those persons may the better understand the hazard they are in.

La table présentée est celle-ci.

Apoplex: 1306
Bleeding: 069
Cut of the Stone: 0038
Burnt, and Scalded: 125
Falling Sickness: 0074
Drowned: 829
Dead in the Streets: 0243
Excessive drinking: 002
Gowt: 0134
Frighted: 022
Head-Ach: 0051
Grief: 279
Jaundice: 0998
Hanged themselves: 222
Lethargy: 0067
Kil'd by several accidents: 1021
Leprosy: 0006
Lunatique: 0158
Murthered: 0086
Overlaid, and Starved: 0529
Poysoned: 014
Palsy: 0423
Smothered: 026

Rupture: 0201
Shot: 007
Stone and Strangury: 0863
Starved: 051
Sciatica: 0005
Vomiting: 136
Sodainly: 0454

On voit ainsi, par exemple, que la fréquence des décès du fait d'un accident, relativement élevée, n'est que de $\frac{1021}{229250} = \frac{1021000}{229250}$ ‰ ≈ 4,45 ‰ : il y a moins de 5 « chances » sur 1000 de périr d'un accident.

d) L'objectif de la statistique est ainsi de faire entendre qu'il est faux qu'on ne puisse rien dire, ni rien savoir. Tout n'est pas également probable : il existe des régularités statistiques qui nous assurent que, si la survenue de tel événement est bien possible, elle est de faible « probabilité ». Cela revient à dire que les distributions de fréquences ne sont pas, en général, uniformes. Et ce sont ces distributions de fréquences que les études statistiques vont s'efforcer de porter à la lumière.

---

e) Ce qui précède ébauche *in fine* la sémantique de la notion de probabilité : celle-ci est une « fréquence théorique », c'est-à-dire une fréquence considérée comme stabilisée dès lors qu'on la calcule sur une longue série de données observées. C'est sur ce point que je m'arrêterai maintenant.

4. Des fréquences aux probabilités

a) Lors de l'atelier de l'école d'été, nous avons proposé aux participants de retrouver la « sémantique » de la notion de probabilité en se penchant sur un texte de deux probabilistes russes très connus, B. V. Gnedenko et A. Ia. Khintchine. J'ai réuni en fait tout un corpus de textes analogues : je choisis ici de me référer à un classique en langue française, le traité en deux volumes de Pierre Dagnelie, *Théorie et méthodes statistiques* (Les Presses agronomiques de Gembloux, 1973). Voici un premier extrait du chapitre 4 (« La probabilité mathématique et les distributions théoriques : généralités ») du volume 1, *La statistique descriptive et les fondements de l'inférence statistique*.

4.2.1. La définition classique de la probabilité

1° La définition de la probabilité mathématique est liée aux notions d'expérience et d'événement aléatoires.

Une *expérience* ou une *épreuve* est dite *aléatoire* lorsqu'on ne peut en prévoir exactement le résultat, en raison du fait que tous les facteurs qui déterminent ce résultat ne sont pas maîtrisés ou contrôlés. Un *événement aléatoire* est un événement qui peut se réaliser ou ne pas se réaliser au cours d'une expérience aléatoire.

Citons comme *exemples* d'expériences et d'événements aléatoires : le tirage d'une carte d'un paquet de cartes à jouer et le fait d'extraire un cœur, la mise en germoir d'une graine et la germination de cette graine, la fécondation de deux individus l'un par l'autre et la naissance d'un individu mâle.

Si m résultats peuvent se produire avec des chances égales au cours d'une expérience aléatoire, et si k de ces résultats conduisent à la réalisation de l'événement A, on définit classiquement la *probabilité* de l'événement A comme étant le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles ou également possibles :

$$\boxed{P(A) = k/m}$$

Par exemple, si un paquet de 52 cartes contient 13 cœurs, et si toutes les cartes ont des chances égales d'être tirées, la probabilité d'extraire un cœur en prélevant une carte est :

$$P(\text{cœur}) = 13/52 = 1/4.$$

2° Cette *définition classique* de la probabilité présente cependant divers inconvénients. Elle est tout d'abord incomplète, en ce sens qu'elle revient à définir la notion de probabilité à partir de la notion d'égale probabilité des différents cas.

En outre, cette définition n'est pas suffisamment générale, car elle n'est utilisable que quand les différents cas envisagés sont également probables et dénombrables. Cette définition ne s'applique *par exemple* pas à l'étude du sexe observé à la naissance, car de nombreuses observations montrent que les deux événements « naissance mâle » et « naissance femelle » ne sont pas également probables : dans l'espèce humaine notamment, les naissances masculines sont plus fréquentes que les naissances féminines. De même, si on doit choisir au hasard une ou plusieurs parcelles cultivées dans une région donnée, en sélectionnant au hasard un ou plusieurs points de la carte cadastrale correspondante, la définition classique de la probabilité ne s'applique pas : on peut éventuellement admettre ici que tous les cas sont également possibles, c'est-à-dire que tous les points ont la même probabilité d'être choisis, mais ces différents cas ne sont évidemment pas dénombrables.

Pour remédier à ces divers inconvénients, une *définition plus générale* de la probabilité peut être introduite par analogie avec la notion empirique de fréquence.

4.2.2. La définition fréquentielle de la probabilité

1° Lorsqu'une expérience aléatoire a été répétée un certain nombre de fois n, on peut déterminer le nombre de réalisations de l'événement A qui y est associé, c'est-à-dire sa fréquence absolue n_A, et en calculer la fréquence relative :

$$n_A' = n_A / n.$$

Si l'expérience est répétée un grand nombre de fois dans des conditions uniformes, on constate généralement que la fréquence relative a tendance à se stabiliser à la longue. Ce phénomène est connu sous le nom de phénomène de *stabilité des fréquences* ou de *régularité statistique.*

On peut alors postuler, pour tout événement aléatoire qui satisfait à ces conditions, l'existence d'un nombre fixe dont la fréquence relative a tendance à s'approcher. Ce nombre est par définition la *probabilité mathématique* de l'événement considéré.

Telle est donc l'origine *statistique* de la notion de probabilité. Je n'accumulerai pas, ici, les textes explicitant ce point de vue, dit souvent « fréquentiste ».

b) Comme en géométrie, comme en algèbre, les axiomes de base du calcul des probabilités, qui permettront de disposer d'une syntaxe probabiliste d'utilisation aisée, proviennent de la sémantique qu'on lui donne : le mathématique procède du mathématisé. La chose est ici on ne peut plus facile ; voici à ce propos un deuxième extrait de l'ouvrage de Dagnelie déjà cité :

4.3.1. Les axiomes de base

La notion de probabilité n'est cependant pas suffisamment définie par son seul postulat d'existence. Aussi doit-on lui attribuer un certain nombre de propriétés, tout d'abord sous forme d'axiomes. Ceux-ci sont établis par analogie avec certaines propriétés fondamentales de la fréquence relative.

1° La fréquence relative étant toujours comprise entre 0 et 1, on admettra que la probabilité de tout événement aléatoire A est elle aussi comprise entre 0 et 1 :

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}.$$

2° De plus, la fréquence relative de tout événement qui doit nécessairement se réaliser étant égale à 1, on admettra également que la probabilité correspondante est égale à un. Un tel événement, de probabilité unitaire, est appelé un *événement certain.*

Toutefois, la probabilité d'un événement peut être égale à 1 sans que celui-ci soit absolument certain. Tout événement de ce type est dit *presque certain* ou *stochastiquement certain.* Il est presque certain *par exemple* qu'une pièce de monnaie lancée en l'air retombera sur une de ses deux faces, de telle sorte qu'il est logique d'attribuer une probabilité 1 à cet événement. Il n'est cependant pas impossible que la pièce retombe exceptionnellement sur la tranche.

3° Considérons d'autre part deux événements A et B associés à une même expérience aléatoire, mais ne pouvant pas se produire simultanément. De tels événements sont dits *exclusifs*. Si l'on observe, à l'issue de n répétitions de cette expérience, n_A réalisations de A et n_B réalisations de B ($n_A + n_B \leq n$), on a :

$$n'_A = n_A/n, \qquad n'_B = n_B/n \quad \text{et} \quad n'(\text{A ou B}) = (n_A + n_B)/n.$$

D'où aussi : $n'(\text{A ou B}) = n'_A + n'_B$.

Par analogie, on admettra pour la probabilité de deux événements exclusifs, la relation :

$$\boxed{\text{P(A ou B)} = \text{P(A)} + \text{P(B)}}.$$

Cet axiome est connu sous le nom *d'axiome d'additivité* ou *de la probabilité totale* ou *de la probabilité de l'un ou de l'autre*. Cet axiome justifie aussi le fait d'écrire parfois (A + B) au lieu de (A ou B).

Si, *par exemple*, la probabilité d'extraire un cœur et celle de tirer un carreau d'un jeu de cartes sont toutes deux égales à 1/4, la probabilité de tirer une carte rouge est :

$$\text{P(rouge)} = \text{P(cœur ou carreau)} = \text{P(cœur)} + \text{P(carreau)} = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

c) Voici enfin un troisième extrait du même ouvrage. Il montre comment la mathématisation probabiliste de la notion statistique de fréquence permet de disposer de la notion de « probabilité conditionnelle » :

4.4.1. La probabilité conditionnelle

La plupart des propriétés établies jusqu'à présent sont relatives à des expériences aléatoires isolées, auxquelles sont associés deux ou plusieurs événements exclusifs. Considérons maintenant plus en détail le cas d'événements non exclusifs, puis celui de plusieurs expériences simultanées ou successives.

1° Soit une expérience aléatoire pouvant conduire à la réalisation ou à la non-réalisation de deux événements A et B non nécessairement exclusifs. Si, à l'issue de n répétitions de cette expérience, on observe :

n_{11} réalisations de A et B,

n_{12} réalisations de A sans B,

n_{21} réalisations de B sans A,

n_{22} non-réalisations de A et de B,

la *fréquence conditionnelle relative* de A sous la condition B est (paragraphe 2.2) :

$$n'_{A|B} = \frac{n_{11}}{n_{11} + n_{21}} = \frac{n_{11}}{n_{.1}} = \frac{n(\text{A et B})}{n(\text{B})} = \frac{n'(\text{A et B})}{n'(\text{B})} \;;$$

et on a de même pour B sous la condition A :

$$n'_{B|A} = \frac{n_{11}}{n_{11} + n_{12}} = \frac{n_{11}}{n_{1.}} = \frac{n(\text{A et B})}{n(\text{B})} = \frac{n'(\text{A et B})}{n'(\text{B})}.$$

....

2° Par analogie, lorsque P(B) ≠ 0, on définit comme suit la *probabilité conditionnelle* ou *liée* de A sous la condition B :

$$P(A \mid B) = P(A \text{ et } B)/P(B).$$

Et de même, si P(A) ≠ 0 :

$$P(B \mid A) = P(A \text{ et } B)/P(A).$$

Cette définition conduit immédiatement à la *propriété de multiplicativité* ou *de la probabilité composée* ou *de la probabilité de l'un ou de l'autre*, qui reste valable même si P(A) ou P(B) = 0 :

$$\boxed{P(A \text{ et } B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)}.$$

Cette propriété justifie le fait d'écrire parfois (A B) au lieu de (A et B).

Pour m événements non nécessairement exclusifs A_1, ..., A_m, on démontre par récurrence que :

$$P(A_1 \text{ et} \ldots \text{et } A_m) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \ldots P(A_m \mid A_1 \ldots A_{m-1}),$$

$P(A_m \mid A_1 \ldots A_{m-1})$ désignant la probabilité conditionnelle de A_m sous la condition $A_1 \ldots A_{m-1}$ c'est-à-dire sous la condition que les événements A_1, ..., A_{m-1} se soient tous réalisés.

d) Je terminerai ce court florilège avec un exemple introductif proposé par Gnedenko et Khintchine dans leur *Introduction à la théorie des probabilités* (Dunod, 3e éd. 1969) dont j'ai déjà parlé.

3. Problème

Énoncé. – Un tireur fait mouche dans 80 % des cas ; un autre (placé dans les mêmes conditions), atteint le but dans 70 % des cas. On demande quelle est la probabilité pour que le but soit touché si les deux tireurs le visent simultanément. (On considère que le but est atteint, indifféremment, s'il l'est par une ou par deux balles.)

PREMIERE MANIERE DE RESOUDRE LE PROBLEME. – Admettons que les tireurs effectuent 100 tirs couplés. Lors de 80 de ces tirs environ, le but sera atteint par le premier tireur. Restent 20 tirs environ qui sont manqués en ce qui le concerne. Mais nous savons que le second tireur fait mouche en moyenne 70 fois sur 100, c'est-à-dire 7 fois sur 10. Nous pouvons donc escompter que, sur les 20 tirs où le premier tireur manque le but, il l'atteindra, lui, 14 fois environ. Par conséquent, sur 100 tirs couplés, le but sera touché approximativement 80 + 14 = 94 fois. La probabilité pour que le but soit atteint en cas de tir simultané de nos deux tireurs est donc de l'ordre de 94 %, ou 0,94.

SECONDE MANIERE DE RESOUDRE LE PROBLEME. – Admettons de nouveau que les tireurs effectuent 100 tirs couplés. Nous avons déjà vu que le premier tireur manquera le but environ 20 fois. Le second tireur échouant, quant à lui, 30 fois sur 100, soit 3 fois sur 10, il est à prévoir que sur les 20 tirs manqués par le premier, il s'en trouvera 6 également manqués par le second. Lors de ces six tirs, le but restera donc intact, alors que pour les 94 autres tirs, l'une au moins des deux balles tirées fera mouche. Nous sommes ainsi amenés à conclure, comme plus haut, que le but sera atteint dans 94 cas environ sur 100, autrement dit, que la probabilité du coup au but, par tir conjugué, est de 94 %, ou 0,94.

Le problème que nous venons d'envisager est très simple. Il ne nous en conduit pas moins à une conclusion très importante, Il est souvent utile, en effet, de déterminer la probabilité de certains événements, d'après celle d'autres événements, moins complexes. C'est là un procédé qui trouve de très nombreuses applications dans toutes les sciences et dans tous les domaines d'activité pratique comportant des opérations ou des phénomènes massivement répétés.

Il serait évidemment très malcommode d'avoir, en présence de chaque nouveau problème de ce genre, à définir un mode particulier de solution. La science tend toujours à établir des règles générales, susceptibles d'être appliquées mécaniquement ou quasi mécaniquement à la solution de problèmes similaires.

> Dans le domaine des phénomènes caractérisés par une répétition multiple, la science qui s'occupe d'établir de telles règles a nom *théorie des probabilités*. Le présent ouvrage en expose les fondements.
>
> La théorie des probabilités est l'un des chapitres des mathématiques, comme l'arithmétique ou la géométrie. Sa méthode est donc celle du raisonnement exact, et ses instruments les instruments propres aux mathématiques : formules, tableaux, figures, etc.

Telle est l'infrastructure du calcul des probabilités qui lui donne sa sémantique « statistique ».

5. Une infrastructure disparue et ses conséquences

a) L'infrastructure fréquentiste du calcul des probabilités semble avoir presque totalement disparu de la culture probabiliste « ordinaire ». Lorsque ce n'est pas le cas, elle est parfois mentionnée si rapidement qu'il faut la connaître par avance pour comprendre l'hommage qui lui rendu. À titre d'illustration, voici un extrait de l'ouvrage de François Dress *Probabilités et statistique pour les sciences de la vie* (Dunod, 2002) :

> Le passage d'une *description* de type ensembliste des phénomènes aléatoires à l'élaboration d'un véritable *modèle mathématique* se fait en introduisant lles mesures de probabilité.
>
> *Une mesure de probabilité P est une application de l'ensemble des événements dans l'intervalle [0, 1], qui satisfait les deux propriétés suivantes (ou « axiomes »)*
>
> $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B).$
>
> $P(\Omega) = 1$
>
> Le point essentiel est que le concept mathématique de *probabilité* modéliser les notions intuitives de *proportion* et de *fréquence*. Quand on pose, par exemple, que la probabilité d'être immunisé contre la tuberculose est de 0,8, on modélise le fait qu'environ 80 % de la population est immunisée contre la tuberculose. Quand on pose, par exemple, que la probabilité d'obtenir le 3 lorsque l'on jette un dé est égale à 1/6, on modélise le fait que, lorsque l'on répète un très grand nombre de fois le jet d'un dé (non truqué), le quotient du nombre de fois où l'on a obtenu le 3 sur le nombre total de jets, c'est-à-dire la fréquence du 3, est très voisine de 1/6 (d'autant plus voisine que le nombre de jets est plus grand).

> De ces axiomes découlent les propriétés *additives* des probabilités, d'usage permanent, qui sont récapitulées ci-dessous…

La différence avec les auteurs cités plus haut, pourtant, tient ici à ce que l'auteur ne montre pas *explicitement* comment la mathématisation évoquée conduit audites propriétés.

b) Si l'on veut concevoir un PER *modélisant la variabilité statistique*, il convient évidemment de revenir sur les liens entre probabilité et variabilité statistique. Pour cela, il faut revenir à ce qui apparaît comme une autre Atlantide du corpus mathématique enseigné : l'infrastructure fréquentiste du calcul des probabilités. Celle-ci ne soulève guère de problèmes techniques, et résout maint problème conceptuel (la version mathématisée de l'idée d'indépendance de deux événements devient alors très claire, par exemple). Mais elle a disparu de la culture commune et fait même l'objet, quelquefois, d'une stigmatisation au motif qu'elle ne serait pas « rigoureuse », accusation qui ne peut résulter que d'une confusion entre les plans du mathématique et du mathématisé, du théorique et de l'empirique – alors même que nous sommes dans un contexte de mathématiques mixtes, où se rencontrent réalités extramathématiques et réalités mathématiques « pures ».

c) Tout cela permet de rouvrir le chemin vers une solution au problème posé : déterminer une question Q dont l'étude conduirait à faire rencontrer le calcul des probabilités comme modélisant la variabilité statistique. Nous y reviendrons.

That's all, folks!