UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

Toda pregunta implica la pérdida de una intimidad o el extinguirse de una adoración. María Zambrano (1904-1991)

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double visée : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

➔ Séance 1 – Vendredi 12 octobre 2007

POUR COMMENCER, À NOUVEAU

1. Le séminaire TAD/IDD

a) Cette année 2007-2008 est marquée par un certain changement par rapport aux deux années précédentes. Formellement, tout d'abord, le séminaire DSMF – « Didactique des savoirs mathématiques pour formateurs » – devient le séminaire TAD/IDD – « Théorie anthropologique du didactique & ingénierie didactique du développement ».

b) Ce séminaire devrait avoir quelque 9 séances : au-delà de cette première séance, les deux prochaines devraient avoir lieu respectivement le vendredi 23 novembre et le vendredi 14 décembre.

c) Pour tenir compte de l'évolution des conditions institutionnelles, les séances de ce séminaire ont été scindées en deux périodes de facture différente. La première période, de 15 h à 17 h, est uniquement présentielle ; elle est dévolue au travail sur des apports de participants ou d'invités, comme on l'a vu aujourd'hui. La seconde période, de 17 h 30 à 19 h 30, sera seule en visioconférence et pourra donc être suivie en temps réel à distance : sauf exception, j'en assumerai en totalité l'animation.

d) Ce séminaire est celui de la sous-équipe « Théorie anthropologique du didactique (TAD) » de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, équipe 1 dont le nom devrait être désormais le suivant : *« École et anthropologie didactique des savoirs »*. Cette équipe comporte une seconde sous-équipe, animée par Alain Legardez sous l'intitulé « École, production, contextualisation et diffusion des savoirs (ECTS) ». L'équipe 1 a ainsi deux co-responsables, Alain Legardez et moi-même, Yves Chevallard.

e) Le séminaire s'adresse aux chercheurs en didactique, confirmés ou débutants (il accueille donc les doctorants des secteurs concernés), ainsi qu'à toute personne impliquée dans le développement didactique des professions de l'enseignement, de l'éducation et de la formation, et en particulier aux acteurs et aux responsables de la formation à ces professions.

f) Le thème de l'année sera celui-là même qui a été retenu pour le II^{e} congrès international d'Uzès (qui se tiendra bientôt, du 31 octobre au 3 novembre) : *Diffuser les mathématiques et les autres savoirs comme outils de connaissance et d'action*. On verra plus loin une manière au moins de donner vie à cette problématique.

2. « École et anthropologie didactique des savoirs »

a) Avant de commenter la première partie de l'intitulé du séminaire, « théorie anthropologique du didactique » (la seconde partie, « ingénierie didactique du développement », sera commentée la prochaine fois), je m'arrête ici sur le nom que nous venons de proposer, Alain Legardez et moi, pour l'équipe 1 de l'UMR ADEF : « École et anthropologie didactique des savoirs ».

b) Lorsque la restructuration récente de l'UMR a remplacé les anciens « axes » par les actuelles « équipes », l'axe 2 cédant la place à l'équipe 1, le nom donné à l'équipe 1 était « Anthropologie didactique des connaissances scolaires ». Ce titre même avait succédé au titre initial, dont l'origine reste incertaine, celui de « Didactique et anthropologie des connaissances scolaires ». Récemment, il nous est apparu, à Alain et à moi-même, que ce titre avait quelque chose de limitatif en sa référence exclusive aux connaissances *scolaires* : en nombre de cas, les didacticiens s'intéressent aujourd'hui à des connaissances dont l'inscription dans le répertoire des connaissances scolaires est un simple *projet*, sinon un rêve ! Mais c'est un projet dont ces didacticiens étudient les conditions éventuelles de réalisation [1]. Ce faisant, ils prennent pour objet le processus par lequel un savoir extrascolaire supposé en vient un jour à être désigné comme « savoir *à*

---

[1] Un exemple contemporain est celui des connaissances en matière de « développement durable », soit ce que le ministère de l'Éducation nationale nomme l'EEDD, « Éducation à l'environnement et au développement durable ». Pour plus d'information sur ce sujet, voir http://www.cndp.fr/spinoo/cndp/frame.asp?Requete=d%E9veloppement+durable.

enseigner ». Un tel savoir, en effet, n'est pas à l'avance « scolaire » ; simplement, il se peut qu'il le devienne – par transposition (didactique) scolaire –, et c'est ce processus éventuel de « pénétration institutionnelle » qu'il s'agira précisément d'étudier.

c) Le remplacement de « connaissances » par « savoirs » est motivé par d'autres raisons. D'un côté, le mot de savoir est regardé généralement comme davantage emblématique du langage des didacticiens que celui de connaissance, qui appartient *a priori* à la langue commune. D'un autre côté, du point de vue didactique, on peut imaginer de « résumer » (imparfaitement) l'univers des connaissances par l'univers des savoirs, chaque connaissance procédant d'un savoir (ou de plusieurs) ou étant promise (parfois à très long terme) à y être intégrée.

d) Pour reprendre ce qu'il y a d'utile dans la référence que portait l'adjectif *scolaire*, nous avons alors introduit, en tête de l'intitulé, la mention de l'*École* : « École et anthropologie… » Cette modification rappelle qu'on fait droit ici à des travaux en « anthropologie didactique des savoirs » en ayant constamment en tête – c'est le cas de le dire ! – *l'École*, son analyse et son développement. La chose est évidemment essentielle. Elle n'est pas sans importante, notons-le sans ambages, d'un point de vue tristement tactique : la péjoration culturelle dont est victime, depuis la nuit des temps, la chose scolaire opère comme une amulette – *l'école !* – protégeant contre les regards inquisiteurs que la seule référence à l'*anthropologie* pourrait attirer sur nous du fait de son caractère intellectuellement patricien. (L'adjectif « didactique » accolé à « anthropologie » est, bien entendu, une autre amulette protectrice.)

3. « Théorie (…) du didactique »

a) Je commente ici mot à mot l'expression que nous avons pris l'habitude de résumer par le sigle TAD. Le premier point sans doute est de préciser le statut de la dénomination de *théorie*, qui y apparaît d'emblée.

b) Le mot de théorie renvoie bien à la notion de théorie développée, précisément, dans le cadre… de la TAD. Dans cette élaboration, en effet, l'un des concepts cardinaux est celui de *praxéologie*, mot qui désigne un système de taille très variable formé de quatre sortes de constituants (*types de tâches* T, *techniques* τ, *technologies* θ, *théories* Θ), et que résume, dans le cas le plus simple, celui des praxéologies *ponctuelles*, la formule bien connue $[T/\tau/\theta/\Theta]$.

c) Cela rappelé, « théorie » est employé ici par synecdoque, comme renvoyant à une « partie » pour désigner « le tout » : Θ désigne en vérité $[T/\tau/\theta/\Theta]$. Cette figure de rhétorique est des plus banales lorsqu'on parle de « théorie de… » : la « théorie des nombres », par exemple, n'est pas qu'une théorie – elle foisonne de types de problèmes, de techniques, etc.

d) Je profite de l'occasion pour m'arrêter un instant sur le *mot* de praxéologie. Le récent et magistral *Dictionnaire culturel en langue française* (sous la direction d'Alain Rey, Le Robert – Sejer, 2005), a une entrée à ce mot ; j'en reproduit ici le contenu.

PRAXÉOLOGIE [pʀakseolɔʒi] n. f. ⟨1882, L. Bourdeau, *Théorie des sciences ;* comp. sav. du grec *praxis* (→ praxie, praxis) et *–logie*)⟩

Didact. **1** Philos. Philosophie, science de l'action, des praxis.

2 Sc., techn. Ensemble des méthodes d'analyse de l'action, notamment en matière économique (organisation, prévision, recherche opérationelle, etc.).

[...] un type spécifique de recherches que l'on peut appeler « praxéologie » [...] et qui serait une théorie, essentiellement interdisciplinaire, des comportements en tant que relations entre les moyens et les fins, sous l'angle du rendement aussi bien que des choix.

J. Piaget, *Épistémologie des sciences de l'homme*, p. 314.

Dér. **PRAXÉOLOGIQUE** adj. (attesté mil. XX^e s.)

Le sens de « praxéologie » en TAD n'est pas si éloigné que d'aucuns pourraient l'imaginer de l'étymologie du mot, ce « composé savant ». La praxéologie $[T/\tau/\theta/\Theta]$, ainsi, est en effet la *« théorie »* (la *-logie*, soit le bloc $[\theta/\Theta]$) de la *praxis* $[T/\tau]$. Mais il s'agit de la théorie de cette « praxie » qui est reçue comme telle dans *l'institution I* où cette praxéologie est en vigueur, ou encore par *la personne x* qui en est équipée (en connaissance de cause ou à son insu) du fait de ses assujettissements institutionnels présents ou passés. Contrairement à ce que croit qui égale son petit Liré à l'univers tout entier [2], une théorie n'est *jamais* théorie *dans l'absolu* : c'est *toujours* une entité institutionnelle et/ou personnelle.

e) La TAD est une théorie *du didactique*. Dans des « leçons » que j'ai récemment rédigées dans le cadre d'un cours de « didactique fondamentale » à l'adresse des étudiants de licence de sciences l'éducation de l'Université de Provence à Aix, j'ai avancé la « définition » suivante [3].

D'une manière générale, une situation didactique est une situation sociale dans laquelle ***quelqu'un*** ou, plus généralement, ***quelque instance*** (personne ou institution) envisage de faire (ou fait) ***quelque chose*** afin de faire que ***quelqu'un*** ou ***quelque instance*** apprenne ***quelque chose***.

Ce qui importe en premier lieu dans cette formulation, c'est le dernier « quelque chose » mentionné. Ce « quelque chose », on peut l'appeler « connaissance », ou parfois savoir, ou savoir-faire ; d'une façon générale, il s'agit d'une entité *praxéologique* – praxéologie ou fragment de praxéologie. Mais c'est la référence à un tel « quelque chose » qui signe le fait *qu'on a affaire à du didactique*, et non pas seulement à des *conditions* ou des *contraintes* façonnant l'écologie (et s'imposant à l'économie) du didactique – cela d'une façon *a priori* indéterminée, tant qu'on n'en sait pas plus sur la nature du « quelque chose » dont l'apprentissage est visé.

---

2 La référence est ici à Joachim du Bellay (1522-1560), à son sonnet « Heureux qui, comme Ulysse, a fait un beau voyage... », et plus précisément aux vers suivants : « Plus que le marbre dur me plaît l'ardoise fine : // Plus mon Loir gaulois, que le Tibre latin, / Plus mon petit Liré, que le mont Palatin, / Et plus que l'air marin la douceur angevine. »

3 Voir http://lin.sp.educaix.com/dokeos/claroline/learnpath/learnpath_handler.php?learnpath_id=11&cidReq=LICENCEA07f1.

f) Un fait sur lequel j'ai beaucoup insisté dans les deux « leçons » que j'ai consacrées à ces questions est qu'il existe une *censure*, un *refoulement* immémorial du didactique – censure dont naît, à titre d'hypostase, le « pédagogique ». Mais je laisse cela de côté ici.

g) Le « problème didactique » implicite dans la définition du didactique rappelée plus haut me semble être beaucoup plus net lorsque, au lieu de s'en tenir, du côté de qui apprend, à un « quelqu'un » (une *personne*), on s'intéresse à « quelque instance » en forme d'*institution*. Que faire par exemple pour que la *profession* qui est celle des professeurs de mathématiques de France apprenne à concevoir et à mettre au point des situations didactiques scolaires permettant aux élèves des collèges et des lycées de rencontrer telle notion ou tel résultat – soit tel composant d'une praxéologie – *en tant* qu'outil pour résoudre certains problèmes de tel ou tel type ? Ou encore : que faire pour que cette même institution (qui est ici une profession, donc) apprenne à identifier et à classer tous les anneaux de nombres « compris » entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$? Bien entendu, l'institution peut être aussi bien une classe de collège ou de lycée, ou encore *tous* les élèves d'un niveau donné à l'intérieur d'un établissement (ou des établissements d'un certain territoire), ou aussi *tous* les personnels de tel établissement, etc. De même que les personnes apprennent, *les institutions apprennent*, et de tels apprentissages *institutionnels* sont, dialectiquement, des conditions clés des apprentissages *personnels*.

4. « Anthropologique »

a) Dans les leçons susmentionnées, j'ai avancé encore la définition suivante de *la didactique*.

> … ***toute science*** (y compris les sciences de la nature) peut être regardée comme vouée à l'étude, à des fins de connaissance ***et*** d'action, de certains types ***de conditions et de contraintes*** déterminant la vie des sociétés. Dans cette perspective, on dira donc (provisoirement) que ***la didactique est la science des conditions et des contraintes de la diffusion des connaissances, des savoirs, des savoir-faire dans les institutions de la société***.

Le caractère provisoire de la formulation proposée tient notamment au fait que, ne disposant pas à ce stade – dans le cours susmentionné – de la notion de praxéologie, on y parle de diffusion « des connaissances, des savoirs, des savoir-faire », au lieu d'indiquer, de façon plus concise et plus générale à la fois, que *la didactique est la science des conditions et des contraintes de la diffusion des praxéologies dans les institutions de la société*.

b) De façon plus particulière, on pourrait dire aussi que « *la* didactique est la science *du* didactique », c'est-à-dire la science de ces situations sociales dans lesquelles « *quelqu'un* ou, plus généralement, *quelque instance* (personne ou institution) envisage de faire (ou fait) *quelque chose* afin de faire que *quelqu'un* ou *quelque instance* apprenne *quelque chose* ». En nombre de cas, toutefois, cette dernière définition se révèle trop étroite : si *le* didactique est une condition essentielle, ubiquitaire, de la diffusion praxéologique, son étude requiert un champ d'investigation plus large, par exemple (mais pas seulement) parce qu'on peut penser a priori qu'il peut y avoir diffusion sans présence identifiable de didactique, apprentissage sans volonté d'enseignement (ni même d'auto-enseignement). Cette seconde définition fournit donc un repère par rapport auquel les travaux de didactique doivent se situer, sans pour autant limiter l'immensité du territoire que le didacticien peut être amené à explorer.

c) S'agissant de la présence de l'adjectif « anthropologique » dans l'expression « théorie anthropologique du didactique », je ne ferai ici qu'un seul commentaire, dans la ligne des remarques précédentes. On ne parvient généralement à analyser une situation didactique observée en ne tenant compte strictement que du *hic et nunc* de la situation étudiée. Que telle instance (« enseignante ») ait accompli (ou ait tenté d'accomplir) tel « geste » didactique (et non tel autre) afin de faire que telle instance (« enseignée ») apprenne telle chose, que ce geste ait eu tel ou tel résultat en termes d'apprentissage de la part de l'instance « enseignée » (par exemple que cette instance ait appris, non la chose visée mais telle autre chose non attendue et peut-être inopportune), cela ne peut être expliqué en règle générale qu'en « sortant » du cadre faussement limitatif d'une situation sociale institutionnellement estampillée, dont l'institution concernée (l'école par exemple) voudrait faire accroire qu'en elle se condense tout ce qu'il y a de « principe actif » au plan didactique. Cela supposerait en vérité une situation *infiniment robuste* face à toute condition ou contrainte « externe » possible – ce qui est, bien entendu, un fantasme de maîtrise dont même le plus plat sens commun connaît le caractère chimérique.

d) Tout cela a conduit à trier les conditions et contraintes *possibles* selon une échelle dite « de détermination didactique », que je reproduis ici.

Civilisation
↓↑
Société
↓↑
École
↓↑
Pédagogie
↓↑
Disciplines
↓↑
Domaines
↓↑
Secteurs
↓↑
Thèmes
↓↑
Sujets

Les formules générales avancées plus haut se concrétisent en particulier ainsi : lorsque, dans une classe, on travaille sur un *sujet d'étude* déterminé – au dernier échelon de l'échelle, au plus profond, si l'on veut –, ce qui se passe ne peut en règle générale s'expliquer si l'on ne prend pas en compte *certaines* des conditions et contraintes – à déterminer – ayant leur siège dans les échelons *supérieurs*.

e) Dans cet abord liminaire, je prendrai un exemple qui a le mérite de nous excentrer un peu des choses familières. Dans l'édition du quotidien *Le Monde* datée du 6 octobre 2007, deux économistes, Yann Algan (« professeur à l'université Paris-Est et à l'École d'économie de Paris, chercheur au Cepremap ») et Pierre Cahuc (« professeur à l'École polytechnique, chercheur au Crest-Insee ») publient un article intitulé *Une société de défiance*. Ils y dénoncent les effets d'opacité, d'inégalité statutaire et de repli corporatiste créés – selon eux – par les réglementations en vigueur en France visant à « protéger tel secteur ou telle profession » Cela noté, leur article s'ouvre par ces lignes.

> Selon un cliché bien établi, les Français seraient méfiants et peu civiques. Le *World Values Survey*, une des plus vastes enquêtes internationales d'opinion, indique que seuls 21 % des Français déclarent faire confiance aux autres. Cette proportion atteint plus de 60 % dans les pays scandinaves. Sur les 26 pays les plus riches de la planète, la France se trouve en 24e position, devant le Portugal et la Turquie. Les Français se méfient, plus que les autres, de la justice, du Parlement, des syndicats, de la concurrence et du marché.

Supposons un instant cela avéré [4] : une méfiance marquée à l'endroit de son prochain serait donc une condition bien établie à l'échelon de la *société* (française). Peut-on penser que cette condition pèse, par exemple, sur le didactique *scolaire* ? Si oui, comment ? À propos de quels enjeux didactiques cette pesée est-elle plus particulièrement sensible ? Ou bien est-elle uniforme à cet égard ? Une « société de confiance » est-elle plus favorable à la diffusion de certains types de praxéologies ? Quelles praxéologies ont-elles en revanche une diffusion facilitée par une « société de défiance » ? Autant de questions que, je crois, les didacticiens n'ont guère soulevées jusqu'à présent ! Par contraste, il semblerait qu'il en aille autrement chez les économistes, puisque les auteurs mentionnés n'hésitent pas à conclure leur article par ces mots : « selon plusieurs études, la défiance et l'incivisme freinent significativement la croissance. »

5. Mondes clos, mondes ouverts

a) Je m'arrêterai ici sur une autre condition, qui n'est pas sans lien avec la condition de défiance qui vient d'être évoquée : cette condition, c'est une certaine propension des collectifs humains *à se fermer*, en adoptant un point de vue insulaire, voire obsidional, sur le reste du monde ; en faisant leur, de façon généralement implicite, mais non moins tenace, un postulat d'*autosuffisance*, combiné avec une attitude d'ignorance qui peut en

[4] Voir http://www.worldvaluessurvey.org/.

quelques cas laisser place à un mouvement de défiance, mêlé parfois d'une certaine agressivité.

b) Cette fermeture concerne notamment le régime praxéologique au sein du groupe, du double point de vue statique (quelles praxéologies y prévalent-elles ?) et dynamique (quels changements praxéologiques s'y déroulent-ils ?). Ce que l'on y « sait », ce que l'on y *produit* n'est pas confronté aux savoirs et aux praxéologies du reste du monde : on en décide entre soi, « au mieux ». On aura reconnu là, je suppose, la tendance qui, notamment, prévaut – c'est du moins ce que je crois voir – dans les professions enseignantes, lesquelles à tous niveaux s'organisent en îlots normatifs *de fait*, sans vie de relation avec des « parties » du monde qu'un observateur extérieur pourrait pourtant juger affines par les intérêts qui semblent être les leurs. Ainsi en va-t-il des professeurs d'une discipline donnée au sein d'un établissement, des animateurs d'un IREM, des formateurs d'un IUFM en telle filière de formation, des membres de telle association professionnelle, des militants de tel mouvement pédagogique, pour qui, quand elles existent, les relations avec le reste du monde sont prudemment contrôlées, sélectionnées, notamment à travers la figure de l'*invité*, reçu dans le groupe à titre temporaire, non toujours sans suspicion, sinon avec crainte.

c) Peut-être y a-t-il là un universel anthropologique. Mais cette attitude, que d'aucuns cultivent en abondance, quelques-uns aussi ont dès longtemps entrepris de la contrebattre, en définissant un régime de relations *ouvert*, où les collectifs se conçoivent et se vivent intégrés dans des « chaînes » de collectifs organisant entre eux des relations durables, permanentes même, qui assurent une vie *au-delà du collectif*, faite de rapprochements, de confrontations, de coopérations, etc. C'est ainsi que Condorcet (1743-1794) conçoit un système d'instruction à cinq degrés : 1) écoles primaires ; 2) écoles secondaires ; 3) instituts ; 4) lycées, 5) enfin « Société nationale des Sciences et des Arts » sise à Paris et comportant 428 membres dont 194 Parisiens, 194 provinciaux, et 40 étrangers [5]. Une des idées fondamentales de cette organisation de l'instruction est qu'il ne pas faut en aucun cas « rompre la *chaîne* de l'instruction », principe qui renvoie d'abord, sans doute, à l'exigence d'une relation organique *top-down*, du haut vers le bas, mais qui, de façon duale, désigne du même mouvement l'exigence faite à chaque échelon *de se référer aux échelons supérieurs*. On ne s'instruit pas *seuls*, dans un isolationnisme soit naïf, soit défiant, soit, même, agressif. Condorcet lui-même, on le sait, a écrit des *Élémens d'arithmétique et de géométrie* pour commençants, qui ne parut qu'après sa mort (sa femme, Sophie de Grouchy, le publiera en 1799). J'en reproduis sans commentaires les quelques premières lignes, ainsi que les notes explicatives qui les accompagnent.

Moyens d'apprendre à compter
surement et avec facilité (1)

[5] Voir Dominique Julia, *Les trois couleurs du tableau noir. La Révolution*, Éditions Belin, Paris, 1981, p. 179.

[(1) Je ne mets pas le nom de la science dans le titre, parce qu'il faut en connoître les premiers élémens avant d'en bien entendre la définition.]

PREMIÈRE LEÇON

[J'ai conservé le mot leçon*, malgré l'idée un peu pédantesque qu'il peut réveiller ; car en employant un autre mot, il auroit en peu de tems le même sort.*

D'ailleurs, la prétention de cacher le maître et l'instruction directe dans un enseignement public, est une chimère ; c'est vouloir jouer une plate comédie dont tous les enfans ont le secret.]

En voyant deux choses qui nous paroissent semblables, en portant notre attention d'abord sur chacune d'elles en particulier, puis sur les deux réunies, nous avons l'idée d'une chose et de deux choses, d'*un* et de *deux*.

Si, après en avoir vu *une* et *deux*, nous en voyons *trois*, *quatre*, nous voyons d'abord l'idée de *un*, puis celle de *deux*, de *trois*, de *quatre*, qui ne sont pas *un*, et qui diffèrent entre eux : nous avons donc l'idée d'*unité*, et celle de ce qui est *un* répété plus ou moins de fois, c'est l'*idée de nombre* (a).

[(a) L'Instituteur aura soin d'expliquer ici aux Élèves, comment l'idée de nombre, née de la perception simultanée de plusieurs choses semblables, s'étend à des choses non semblables.

Il leur dira, qu'alors on suppose à ces choses différentes, une qualité semblable : on les considère seulement par rapport à cette qualité.

Ainsi on a dit, une pomme *et* une pomme*, sont* deux pommes *; ensuite,* une pomme *et* une poire, *sont* un fruit *et* un fruit*, sont* deux fruits *; puis encore,* une pomme *et* une poire*, sont* un corps *et* un corps*, sont* deux corps.

Enfin, on a fini par ne pas même considérer ces qualités semblables : on dit, une chose *et* une chose*, sont* deux choses *:* un *et* un *sont* deux*, en considérant ces deux choses comme ayant une qualité semblable quelconque, par rapport à laquelle on pouvoit les considérer comme les mêmes.*

Lorsque vous considérez une qualité commune à plusieurs objets, sans faire attention à celles qui les distinguent, et séparant l'idée de cette qualité commune, de celles des autres qualités, on dit que l'idée de cette qualité est une idée abstraite*, parce qu'on la sépare, ou l'*abstrait *des autres qualités avec lesquelles elle se trouve dans les divers objets. On l'appèle aussi* idée générale*, parce qu'elle est celle d'une qualité, ou de plusieurs qualités, qui sont communes à des objets, d'ailleurs différens.*

Plusieurs objets qui ont une ou plusieurs qualités communes, forment un genre d'objets.

Je ne crois pas nécessaire d'analyser en détail, pour les Élèves, les idées exprimées par les mots perception, attention, idée, objet, qualité *; il suffit de leur en faire comprendre le sens par des exemples.]*

J'ajoute simplement à cela que, dans la préface à l'ouvrage de Condorcet – préface signée de Jean-Baptiste Sarret mais que ce dernier dit avoir empruntée à Condorcet lui-même –, on lit ceci : « Il m'a paru qu'en général on ne devrait rien enseigner aux enfants, sans leur en avoir expliqué et fait sentir les motifs. »

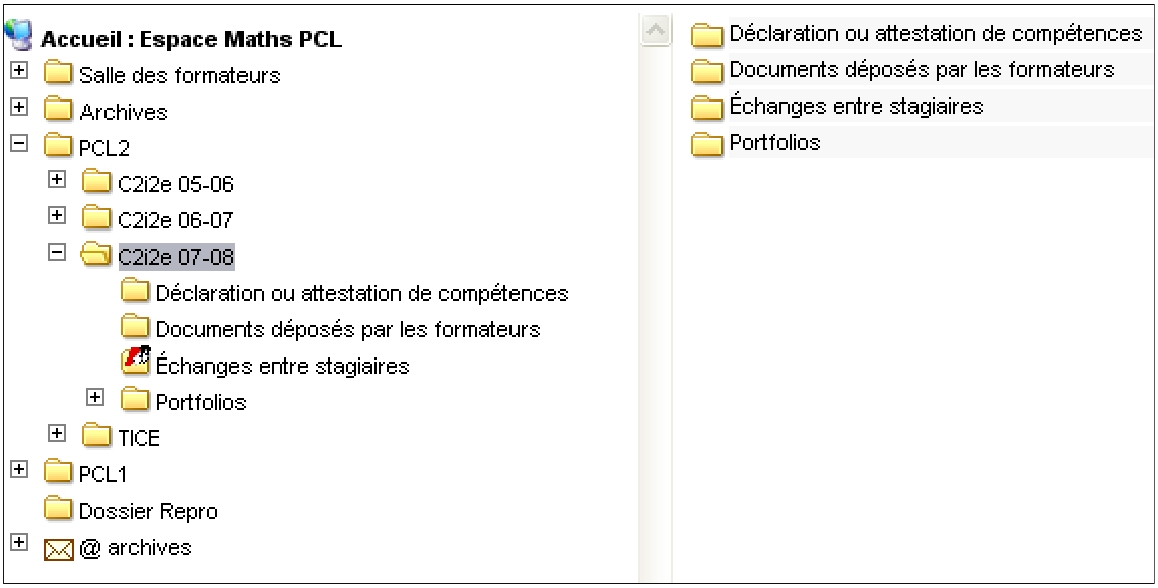
d) En relation avec l'exigence de continuité de la chaîne de l'instruction, j'ai été amené à énoncer, dans le cadre du séminaire du mardi matin que j'ai assumé jusqu'à il y a peu auprès des professeurs stagiaires de mathématiques, un principe de *supervision* dont voici la formulation telle qu'on la trouve dans les notes du Séminaire 2005-2006 (séance 7 du 8 novembre 2005).

> Depuis toujours, pourtant, il existe une condition que l'école (au sens large du terme) s'engage à réaliser : la « contamination » scolaire, quelle qu'en soit la forme, est placée sous le contrôle d'une *instance de vérification* – fonction qu'assume notamment les professeurs (chacun dans son domaine de compétence). Dans une classe, ainsi, les élèves sont appelés à s'exprimer, à proposer, à débattre, mais toujours, en dernière instance, *sous la supervision du professeur*. Dans le cas du travail du chercheur, cette supervision n'est pas, sauf exception, le fait d'un « superchercheur », mais de la *communauté des pairs* – ce qu'on nomme de façon commode *la* communauté scientifique. D'une façon plus générale, tout collectif de travail – qu'il soit nombreux ou réduit à une personne – doit se donner une *instance de supervision*, qui diminuera les risques de pollution épistémologique. Un thésard a un directeur de thèse (et présente le fruit partiel de ses travaux dans un séminaire de pairs, par exemple) ; un trinôme réalisant son TER – la chose deviendra bientôt d'actualité – est supervisé par le tuteur du GFP ; etc. Que cette supervision cesse d'exister et l'engagement formatif de l'institution concernée sera par définition néantisé.

Le Séminaire 2006-2007 (compte rendu de la séance 8 du 7 novembre 2006) reprend le passage précédent pour l'appliquer alors aux travaux des élèves professeurs leur permettant de voir valider les items du C2i2e.

> c) Ce principe implique que ne pourront être validés des travaux n'ayant bénéficié d'aucune supervision raisonnable ; pour le dire sans ambages, ***n'importe quoi n'est pas validable***. Ainsi, s'agissant par exemple du domaine de compétences B.1 (le « travail en réseau avec l'utilisation des outils de travail collaboratif »…), le travail en réseau éventuel avec des professeurs de l'établissement du stage en responsabilité, par exemple, ne saurait être allégué ***sans plus***, même accompagné de l'observation que les professeurs concernés se seraient déclarés « satisfaits » du travail réalisé. On est ainsi constamment conduit à rechercher le meilleur degré ***d'intégration dans la formation et sa validation*** telles qu'elles existent actuellement.

e) Le principe de supervision vient en contradiction avec, non pas la libre communication entre eux des formés (liberté qui, au reste, ne tient nullement à leur qualité d'« adulte »), mais avec une communication à la fois *favorisée par l'instance de formation et non supervisée par elle*. À l'IUFM d'Aix-Marseille, cela entre en conflit *potentiel* avec une disposition *structurelle* de l'ENT « ESPAR », organisé selon l'arborescence reproduite ci-après. Il semble clair que les concepteurs de cette architecture ont prévu un espace pouvant donner lieu à de libres échanges entre stagiaires, échanges non médiés par l'institution de formation, qui se limite à le favoriser. C'est trop ou trop peu ! Imaginons ce dispositif dans une institution de formation où les « formés » se préparent à un examen. L'un d'eux fait connaître à ses camarades de promotion, par le canal ainsi offert par l'institution, un document relatif à un certain sujet d'étude. Ce document est en fait *gravement erroné* – on ne peut même pas exclure qu'il le soit *volontairement.* Certains des formés l'examinent, le trouvent à leur goût. À l'examen, la question proposée se rapporte précisément au sujet traité dans ledit document. Plusieurs candidats, qui l'ont étudié attentivement, s'en inspirent lourdement pour répondre. Ils seront collés à l'examen. C'est alors *à bon* *droit* qu'ils pourront se retourner *contre l'institution de formation*, de la même façon que s'il s'agissait là d'un document mis en ligne à l'intention des formés par leur professeur.



La situation serait *toute différente* si, ce document n'ayant pas été mis en ligne sur le site de l'institution dans un espace offert aux échanges libres entre ses usagers, certains d'entre eux l'avaient prélevé, *motu proprio* et dans le cadre de leur travail *privé*, en quelque autre site du *Web*, quelques-uns ayant en outre « contaminé » certains de leurs camarades d'étude, de façon intentionnelle ou non.

f) Bien entendu, la disposition structurelle peut être amenée à *fonctionner* d'une façon tout à fait *responsable*, par exemple parce que le contrat explicitement passé entre formateurs et formés tient qu'un document mis en ligne par un stagiaire, si imparfait soit-il, l'est à l'instigation d'un formateur, en vue d'une *étude critique collective* que ce formateur *s'engage à conduire avec diligence*. En un tel cas, l'appellation « Échanges entre stagiaires » semblerait pour le moins inadéquate : il s'agira alors d'un simple lieu de *dépôt* documentaire, d'un *entrepôt* documentaire donc – ou, selon une image audacieuse, mais à la fois plus réaliste et plus colorée, d'un *dock* documentaire.

6. Le difficile réglage de l'ouverture

a) Les questions évoquées ici sont suscitées (ou posées dans des termes renouvelés) par le développement actuel des moyens de communication. Leur examen met en évidence, par contraste, certaines *conditions* traditionnelles de l'étude scolaire ou universitaire : le professeur définit strictement l'accès légitime aux ressources, jusqu'à parfois ne pas tolérer la rivalité du manuel, dont les élèves ne peuvent faire qu'un usage étroitement contrôlé. Dans ce contexte, un élève ne pourra même s'autoriser de ce que « c'était dans le manuel » pour protester contre une appréciation négative de tel passage de son devoir : tel développement, en effet, sera « juste » si le professeur le déclare tel, incorrect s'il en décide ainsi. Il s'agit là de contraintes relevant, dans l'échelle des niveaux de détermination, de l'échelon de la *pédagogie*. Or, parce qu'il a été historiquement affranchi des contraintes de contenus disciplinaires, cet échelon est fragile, « mobile », et devient facilement la cible des « innovateurs » intentionnels ou accidentels (lesquels n'analysent pas les conséquences des modifications opérées, parfois à leur insu, sur certaines conditions pourtant durement établies). Mais je voudrais signaler ici une autre modification que celle évoquée à propos de la condition de supervision, et qui touche, non tant aux sources dont se nourrissent éventuellement les travaux des élèves – au sens le plus large du terme – mais aux *travaux eux-mêmes*. Dans la pédagogie traditionnelle, le devoir remis au professeur n'est connu que du professeur (et de l'élève) ; ou du moins le professeur n'a-t-il pas le droit de le rendre, si peu que ce soit, *public*. Traditionnellement, il lira parfois à l'ensemble de la classe un devoir exemplaire par sa qualité, mais cela même requiert en principe l'accord de l'auteur de « l'œuvre ». Pourquoi cela ? Si j'écris un poème *en tant qu'élève*, et cela *sur l'injonction du professeur*, je ne dois pas avoir à souffrir de son éventuelle piètre qualité *en dehors de la relation de formateur à formé*. Et encore le formateur ne peut-il formuler à mon adresse aucun reproche qui ne se réfèrerait pas au poème en tant que production contribuant à ma formation poétique (ou littéraire, linguistique, etc.) sous sa direction expresse. Tout reproche d'une autre nature, relevant d'un autre registre serait déplacé et illégitime.

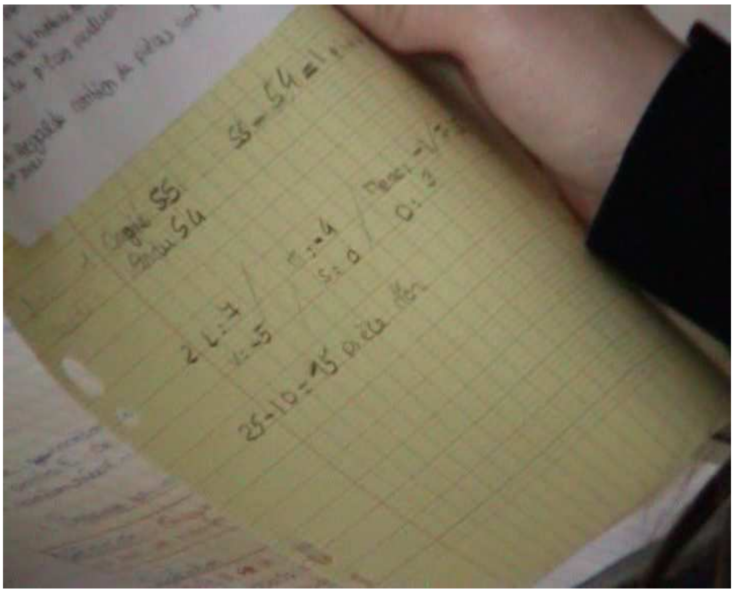
b) La situation d'élève procure ainsi une « impunité » propre, avec, il est vrai, des cas limites qui ne laissent pas de poser problème – comme lorsque l'élève fait, dans un devoir, l'aveu plus ou moins masqué de faits condamnables juridiquement, dont il aurait été l'artisan ou la victime. D'une façon générale, tout ce qui ne relève pas de la relation didactique est en principe exclu du jugement du professeur en tant que professeur adressé à l'élève en tant qu'élève. Imaginons maintenant non un cours de français, mais un cours qui n'existe pas aujourd'hui, un cours de journalisme, au collège ou au lycée. L'élève doit ici, non écrire un poème, mais un article de journal. Bien entendu, pas davantage que son poème n'a de raison de figurer dans un recueil de poésie vendu dans le commerce, son article n'a de raison de paraître dans un journal, payant ou gratuit, distribué au tout venant des lecteurs : l'un et l'autre sont des œuvres scolaires, soumises à la clause de confidentialité spécifique que j'ai précisée. Par rapport à cela, voici d'abord ce qui ne pose pas de problème particulier : l'élève dispose du fruit de son travail scolaire (on suppose que celui-ci n'est pas propriété de l'école) et s'emploie à le publier, le premier dans un bulletin de poésie qui veut bien l'accepter, le second, disons, dans un journal qu'il publie avec quelques amis et dont il est le rédacteur en chef. Peu importe alors son âge et tout autre caractère de l'auteur et de son œuvre : l'impunité scolaire cesse entièrement. Le travail exposé publiquement pourra être cruellement ridiculisé, commenté avec malveillance, critiqué sans mesure, attaqué devant un tribunal, à moins qu'il ne soit durement ignoré. L'article ou le poème seront ainsi soumis au régime « mondain » ordinaire, fort différent à plusieurs égards du régime *scolaire* des œuvres produites dans le cadre scolaire.

c) Entre régime mondain (non didactique) et régime scolaire (didactique), il existe des situations intermédiaires. Ainsi en va-t-il lorsque une institution enseignante tente d'exploiter une situation mondaine, non didactique, à des fins didactiques (par exemple par l'inscription d'une classe à un concours de poésie, de chant, d'histoire, etc.), dans la mesure où cette situation suscite des types de réalisations *assez proches* des types scolaires ordinaires, mais à propos desquelles prévalent des critères utiles (voire indispensables) à parfaire l'apprentissage et, dans le même temps, difficilement transposable de manière authentique dans le cadre scolaire strict. (On pensera ici au cas du restaurant d'un lycée hôtelier, qui permet d'amener le monde jusqu'à l'école, en un « sas » dont les acteurs concernés franchissent constamment la frontière entre les deux régimes praxéologiques, celui, dynamique, de l'apprentissage, celui, stabilisé, de la prestation « mondaine ».) En de tels cas, cependant, on s'expose à des traverses qui peuvent se révéler dommageables au but de formation poursuivi. Dans un concours mondain, par exemple, la prestation de l'élève devenu simple « concurrent » (sa qualité d'élève étant alors par principe ignorée, comme l'est celle de tel autre concurrent professeur de son état, etc.) pourra être jugée de très piètre qualité, et cela peut-être de façon humiliante, alors même que, dans la dynamique de l'apprentissage en classe, elle constituait une réalisation utile, point d'appui précieux pour des progrès ultérieurs ; ou encore parce que, à l'inverse, la prestation de l'élève aura un succès aux motifs étrangers à la logique de l'apprentissage, lié par exemple au jeune âge du concurrent, ou au contraste entre ses innocentes maladresses et le savoir-faire madré des familiers de ce genre de concours.

d) C'est une situation très voisine que l'on rencontre lorsque des productions réalisées dans le cadre scolaire sont promises *aussi*, ou même *sans plus*, à un destin mondain, extrascolaire, en lui-même forcément hypo-didactique. Il existe alors une tension essentielle entre le but scolaire ordinaire et l'objectif de participation à un certain genre d'activité extrascolaire, même lorsque, selon un schéma déjà évoqué, ce genre a été choisi pour des motifs explicites de formation. La vigilance didactique doit ici primer ; mais, paradoxalement, celle-ci passe souvent par l'assomption des critères extrascolaires de jugement de la réalisation demandée aux élèves, critères qui sont peut-être ce qu'il y a de didactiquement précieux dans les situations mondaines recherchées, à cause de leur valeur « éducative » éminente dans le domaine scolaire de référence. Lorsque des élèves s'engagent dans la rédaction d'un article de journal scolaire, ainsi, ils vont rencontrer – avec leurs professeurs – des exigences de forme et de fond dont certaines, généralement, ne parviennent que fort malaisément encore à vivre dans l'institution scolaire *stricto sensu*. Ainsi, l'attention orthographique vétilleuse, le souci orthotypographique presque entièrement absent de la culture scolaire, celui de la syntaxe et du style en fonction du lectorat probable (on n'écrit à l'école que pour son professeur, je le rappelais plus haut), le travail sur l'exactitude des faits rapportés (y compris des faits statistiques, arithmétiques, etc.), tout cela prend alors une valeur renouvelée, qu'à grand-peine le professeur peut faire vivre aujourd'hui dans la classe sans un tel *détour* par le monde extrascolaire. Il n'en reste pas moins que, lorsque la production des élèves sort ainsi de l'univers scolaire, l'immunité, l'impunité associées tout à coup *cessent*. Ainsi en va-t-il par exemple de l'irresponsabilité *juridique* scolairement assurée à l'élève s'agissant du *contenu* de ses productions scolaires, alors même qu'un plagiat avéré pourrait lui être imputé devant la juridiction compétente dès lors que sa « production » aura franchi le seuil de l'établissement. Nous sommes-là aux limites de ce que peut la *skholê* pour la formation de ses « usagers », dans une zone ombreuse où les genres se mêlent, parfois jusqu'à la plus inutile des confusions.

e) Cette dialectique de l'intérieur et de l'extérieur reste, me semble-t-il, largement à élaborer, au plan des pratiques comme au plan de la théorie. Mais je voudrais ajouter ici une simple remarque. Pour tenter de rendre plus favorables les divers environnements du travail scolaire (la communauté scolaire, les parents, le quartier, les notables, les employeurs potentiels, etc.), il convient de valoriser ce travail, son contenu, ses modalités. Or cela suppose que, d'une manière ou d'une autre, on puisse « donner à voir » (favorablement) à l'extérieur de la classe ce qui se passe dans la classe, et, de même, à l'extérieur de l'établissement ce qui se passe dans l'établissement. Se pose donc le problème de construire des « représentants » appropriés du travail des élèves et des professeurs. Une production scolaire qui rivalise avec des productions de même genre extérieures à l'école, issues du monde des professionnels, des spécialistes, etc., est chose trop rare, trop équivoque aussi, au plan de la pertinence didactique, pour que cela constitue la *base* d'une solution adéquate à ce problème – que, traditionnellement, tente de résoudre en partie la « fête de fin d'année » par exemple. *La* condition à respecter est évidemment que le fait de donner à voir certains aspects de la vie de la classe ne superpose pas à l'existant de nouvelles contraintes importunes, voire dirimantes, au plan didactique. Il faut donc montrer,

suggérer, tout en modulant l'information communiquée de manière à décourager des interprétations didactiques qui ne seraient pas très hautement conjecturales, et donc insignifiantes… Je ne donnerai ici qu'un exemple très simple. Voici trois images enregistrées dans une classe de 5e au cours d'une même séance. On y voit qu'il s'agit de mathématiques, dont le détail visible est simple, et même très simple. Mais cela ne permet pas de porter un jugement mathématique ou didactique sur l'activité de la classe, simplement de reconnaître une classe au travail. Le cliché ci-après, de même, ne permettra guère de décider s’il s’agit d’une classe active ou inattentive, engagée ou peu investie – seulement de voir un instantané d’une classe en action.



« DIDACTIQUE DE L’ENQUÊTE CODISCIPLINAIRE »

1. Problématiques alternatives

a) En prenant ce qui est, aujourd’hui, pour allant de soi, on oublie qu’il s’agit du fruit d’une *construction historique* qui aurait pu être autre qu’elle n’a été, qui a succédé à d’autres constructions, et qui se verra peut-être un jour supplantée par d’autres encore. Aujourd’hui, le travail en classe de mathématiques, on le sait, se réfugie au niveau les plus bas de l’échelle des niveaux de détermination didactique : l’élève est largement cantonné au niveau des *sujets* d'étude, tandis que le professeur, dont le port d'attache est le niveau des *thèmes* d'études, semble pour l'éternité devoir rester à quai. Or il a existé une autre façon au moins « d'étudier les mathématiques », qui demandait à l'élève de disserter (intelligemment) *sur* les mathématiques, de se pencher sur certains de ses problèmes *fameux*, sans lui demander pour autant de se rendre capable de *manier* (intelligemment) des mathématiques hors de ce cadre prédéfini et convenu – passé non encore dépassé dont la difficulté maintenue que nos systèmes d'enseignement ont à entrer dans l'ère de la « modélisation mathématique » continue de porter témoignage. L'enseignement que connut Descartes lorsqu'il était l'élève du collège royal de La Flèche était encore de cette nature-là. La *Ratio studiorum* de 1599 (Belin, Paris, 1997), qui régit le fonctionnement des collèges de Jésuites, est précise dans les termes suivants ce qu'elle nomme les « Règles du professeur de mathématiques » (*Regulae professoris mathematicae*).

[239] *Quels auteurs faut-il expliquer, en quels temps, à qui ?*

Le professeur de mathématiques expliquera en classe aux étudiants de physique, pendant trois quarts d'heures environ, les *Éléments* d'Euclide ; quand ils auront quelque peu pratiqués pendant deux mois, il ajoutera quelques notions sur la géographie, sur la sphère, ou sur les autres matières qui leur plaisent d'habitude, et cela en même temps qu'Euclide, le même jour, ou un jour sur deux.

[240] *Problème*

Chaque mois, ou au moins un mois sur deux, il aura soin de faire résoudre par un étudiant quelque problème mathématique fameux, dans une grande assemblée de philosophes et de théologiens ; après quoi, si on le juge bon, on argumentera.

[241] *Répétition*

Une fois par mois, de préférence le samedi, à la place de la prélection, on répétera publiquement les principales questions étudiées pendant le mois.

Tout cela renvoie, on le devine, à un enseignement « monumentaliste », inscrit dans une problématique qui survit ailleurs, en matière d'art plastiques ou de musique par exemple, où l'amateur (le mélomane, etc.) apprend à connaître les grandes œuvres, les œuvres *fameuses*, sans avoir pour autant appris le moins du monde, humblement, l'art du praticien. Il y a ici disjonction de principe de l'*acteur* et du *spectateur*, écho sans doute d'une organisation sociale qui, au long des siècles, distingue et hiérarchise durement l'artiste, au statut de domestique, et son mécène, qui prend rang parmi les princes et les aristocrates. Sans se situer exactement dans le temps historique et dans l'espace scolaire, on peut imaginer que l'élève ainsi formé pourra avoir à présenter, au plus haut niveau de formation sans doute, cette œuvre fameuse qu'est la résolution exacte, par Cardan et consorts, de l'équation générale du troisième degré ; ou encore la solution due à Gergonne du problème d'Appolonius, qui demande de construire un cercle tangent à trois cercles donnés [6]. De cette très ancienne tradition témoignait naguère encore la *question de cours* du baccalauréat, où il convenait de restituer adéquatement une certaine « œuvrette » mathématique. De la 7e édition d'un ouvrage intitulé *La question de cours de*

[6] Voir Heinrich Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their History and Solution*, Dover, New York, 1965, p. 154-160.

mathématiques au Baccalauréat 1re partie, sur laquelle un élève appose son nome en septembre 1943, j'extrais la rédaction suivante.

INSERTION DE MOYENS ARITHMÉTIQUES

On appelle *moyens arithmétiques* des nombres qui forment avec deux nombres donnés une progression arithmétique dont les nombres donnés sont les extrêmes.

Ainsi entre les nombres 27 et 2, on peut insérer 4 moyens arithmétiques 7, 12, 17 et 22, car les nombres 2, 7, 12, 17, 22, 27 forment une progression arithmétique de raison 5 dont 2 et 27 sont les termes extrêmes.

Pour résoudre le problème dans sa généralité, il faut chercher la raison de la progression.

Soit donc à insérer m moyens arithmétiques, entre les nombres a et b ; la progression demandée aura $m + 2$ termes, savoir les m moyens, plus les deux termes donnés.

$$\text{Donc } r = \frac{b-a}{m+2-1} = \frac{b-a}{m+1}.$$

Ainsi la raison de la progression s'obtiendra en divisant le dernier terme diminué du 1er, par le nombre des moyens à insérer plus un.

EXEMPLE. – *Insérer 7 moyens arithmétiques entre 21 et 37 ;*

la raison est $\dfrac{37-21}{8} = 2$

les moyens cherchés sont 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, car 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37 forment une progression de 7 + 2 = 9 nombres, de raison 2.

Application demandée en question de Cours.

Soit une progression arithmétique de n termes. On appelle a et b le premier et le dernier terme. Calculer le pme terme et la somme des n termes.

On développe de façon explicite la solution schématique suivante :

Si r est la raison et P le pme terme :

$$r = \frac{b-a}{n-1} \qquad \mathrm{P} = a + (p-1)\frac{b-a}{n-1} \qquad \mathrm{S} = \frac{a+b}{2}n$$

Bien entendu, une telle rédaction constitue un *minimum minimorum*. Les auteurs le signalent expressément à l'élève utilisant leur ouvrage.

PRÉCISION À L'USAGE DES ÉLÈVES

Les questions de Cours sont traitées ici sous forme de résumés qu'il faut apprendre intégralement. **On peut en augmenter le volume, mais un résumé de ces** résumés serait notoirement insuffisant.

Si donc ce texte est « suffisant », **il est surtout** « nécessaire » **et il représente le** minimum indispensable **que le candidat doit fournir pour être bien noté**.

b) Ces problématiques anciennes n'ont certes pas que des inconvénients : si elles participent de la logique de l'œuvre d'art *singulière* qu'on visite, qu'on admire, qu'on médite, qu'on « raconte », elle conduit *aussi* à monter *plus haut* dans l'échelle des niveaux de détermination didactique. C'est ainsi qu'on peut lire ce qui suit, dans le chapitre V, intitulé « L'avènement de l'algèbre », d'un ouvrage de Georges Bouligand et Jean Desbats qui n'est pas, certes, un manuel, mais qui entend présenter au lecteur *La Mathématique et son unité* (Payot, Paris, 1947).

> **42.** Finalement, les nombres négatifs ont donc cette raison d'être : rendre la *soustraction* toujours possible. De la même manière, les fractions permettent d'effectuer toujours la *division exacte* (par opposition à la division à une unité près, qui comporte en général un reste). Les nombres irrationnels ont été suscités, pour des fins analogues, par les extractions de racines carrées, cubiques, ou d'indice quelconque, portant sur des nombres positifs. Une dernière étape se présente dès lors, pour qui veut, aussi largement que possible, suivre les extensions progressives de la notion de nombre : en vertu de la règle conditionnant la multiplication de deux nombres affectés de signes (règle d'après laquelle moins par moins donne plus), un nombre négatif n'a pas de racine carrée. Que cette racine soit sollicitée dans certains calculs, pour s'en éliminer après coup, l'algébriste s'en autorisera pour l'envisager d'abord à titre symbolique, quitte à s'expliquer avec quiconque. viendrait ensuite, au nom d'exigences concrètes, lui demander raison de la hardiesse dont il a fait usage.

De fait, *tout* ce qui précède peut être subsumé sous le schéma « herbartien » bien connu, que je reproduis une fois encore.

$$(S(X, Y ; Q) \rightarrowtail R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge, O_{n+1}, \ldots, O_m) \rightarrowtail R^\heartsuit.$$

Dans l'enseignement le plus archaïque des mathématiques, on étudie des problèmes « fameux » Q, c'est-à-dire qu'on étudie telle ou telle réponse vénérable $R_i^\lozenge$, qu'il faut savoir restituer à la demande. On étudie aussi des œuvres « classiques » O_j, dans le meilleur des cas pour les questions Q qu'elles permettront de résoudre et, dans l'ordinaire des cas, pour elles-mêmes. Ce qui ne se fait pas, en revanche, c'est l'étude de questions Q qui ne soient pas « canoniques », inscrites au canon des œuvres fameuses [7]. On reste là dans une logique de *lector* ; la position d'*auctor* reste hors de portée. Le latin *augere* (d'où dérive *auctor*) signifie « faire croître » : on ne fait pas croître la connaissance, même un tout petit peu.

c) On sait que tout le travail de ces dernières années a poussé en avant une *autre* réalisation du schéma herbartien : on suppose une question Q, engendrée en général par un questionnement antécédent, et on cherche à lui apporter, sous un certain ensemble de contraintes et dans de certaines conditions, une réponse $R^\heartsuit$. Je m'arrêterai ici un instant sur une question qui m'a été proposée récemment par Christian Reymonet. La voici.

> On dispose d'une technique (que tu as eu l'occasion de décrire) permettant de représenter les rationnels sous la forme d'une somme d'un entier (éventuellement nul) et de fractions de numérateurs égaux à 1 (les quantièmes) et de dénominateurs distincts. Ce système pourrait donner lieu à une représentation des rationnels qui ne permettrait pas les calculs simples ou même les comparaisons comme tentent de le faire apprécier les exercices (de mon cru) dans le fichier attaché. Je pense qu'on peut ainsi représenter tout rationnel, mais je voudrais bien le prouver… C'est ma question.

[7] Le latin ecclésiastique *canonizare* signifiait « mettre au nombre des textes sacrés ».

La question Q formulée a une origine claire, liée à un souci didactique : l'idée d'utiliser une certaine façon de représenter les rationnels qui *compliquerait* les calculs et les comparaisons. Le travail de construction de $R^{\heartsuit}$ est un travail mathématique à visée didactique – très exactement : visant à nourrir un travail d'ingénierie didactique.

• Pour amorcer ce travail, je reviens à un « média » que j'ai autrefois beaucoup pratiqué, le livre de D. E. Smith, *History of Mathematics*, volume II (Dover, New York, 1925/1958). Pour l'utiliser aisément, il faut connaître la dénomination employée en anglais pour désigner ce que la question formulée appelle des *quantièmes* ; par extraordinaire, j'ai cela en mémoire : en anglais, on parle d'ordinaire de *unit fractions*, de fractions unitaires. L'index m'indique alors que l'ouvrage mentionne cette expression aux pages 210 et 212. Voici un premier extrait (p. 210-211) qui semble pertinent pour l'étude de la question Q envisagée.

> The essential feature of the early Egyptian treatment is the unit fraction. The arithmeticians had long been able to conceive of $\frac{1}{10}$ […] but they had no plural for it either verbally or mentally. By the time of Ahmes, however, an idea akin to that of ratio had developed. The number 2 was divided, say into 43 equal parts, and what is essentially the ratio of 2 to 43, or twice $\frac{1}{43}$, was expressed, using modern symbols, as
>
> $$2 : 43 = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}.$$
>
> Indeed, most of the ancient theory of fractions centered about the concept of ratio, and in such theoretical works as that of Boethius it lasted until the 16th century.
>
> ……………………………………………………………………………………………
>
> How these unit fractions were derived we do not know. It is evident that more than one solution is possible, but it is not always evident why any given one should be preferred to any other. For example,
>
> $$\begin{aligned} 2 : 43 &= \frac{1}{24} + \frac{1}{258} + \frac{1}{1032} \\ &= \frac{1}{30} + \frac{1}{86} + \frac{1}{645} \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{86} + \frac{1}{645} + \frac{1}{172} + \frac{1}{774} \\ &= \frac{1}{40} + \frac{1}{860} + \frac{1}{1720} \\ &= \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}, \text{ […]} \end{aligned}$$
>
> and so on, to which, of course, may be added $\frac{1}{43} + \frac{1}{43}$. Of all these possibilities Ahmes and his predecessors took the form
>
> $$2 : 43 = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}.$$

although $\frac{1}{24} + \frac{1}{258} + \frac{1}{1032}$ has the advantage that the first fraction is nearer the value of $\frac{2}{43}$ than it is in the others. Although there are numerous rules for forming the unit fractions, no one of them applies to all the cases. This shows that the treatise combined the results of earlier computers, each working by a secret rule of his own, or else that each solution was worked out laboriously by repeated trials. [1]

Une note de bas de page précise en ce point ce qui suit.

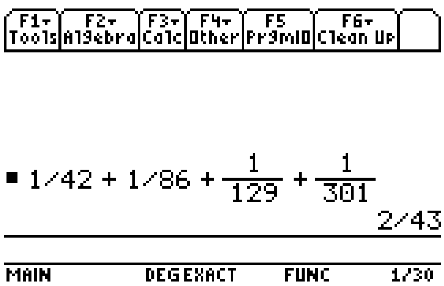
[1]*E. g.,* when $b + c = ka$, we have

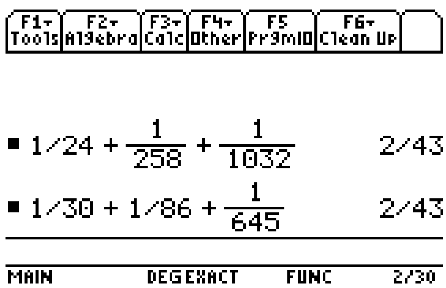
$$\frac{a}{bc} = \frac{1}{b \cdot \frac{b+c}{a}} + \frac{1}{c \cdot \frac{b+c}{a}}.$$

and this gives the Ahmes result in certain cases but not in others. Thus, $\frac{2}{15} = \frac{2}{3 \cdot 5}$, and $3 + 5 = 4 \cdot 2$. This fraction, therefore, is equal to $\frac{1}{12} + \frac{1}{20}$, but Ahmes gives $\frac{1}{10} + \frac{1}{30}$. See Eisenlohr, *Ahmes Papyrus,* p. 28; G. Loria, *Bibl. Math.,* VI (2), 97; VII (2), 84; Peet, *Rhind Papyrus,* p. 34.

• Bien que daté, le média consulté est en principe un très sûr : il peut être regardé *a priori* comme un *milieu*, et ce qu'il répond comme assuré. On en tire en particulier ceci : l'écriture d'une fraction comme une somme de quantièmes n'est pas *unique*. Mais il serait léger de s'en tenir là. Ce qui importe pour nous n'a pas trait, en l'espèce, à *l'histoire* des mathématiques, mais aux *phénomènes* mathématiques que cette histoire a rencontrés et dont l'historien se fait ici l'écho. On va donc vérifier les énoncés *mathématiques*, et cela en consultant maintenant un second milieu, une calculatrice d'aujourd'hui.

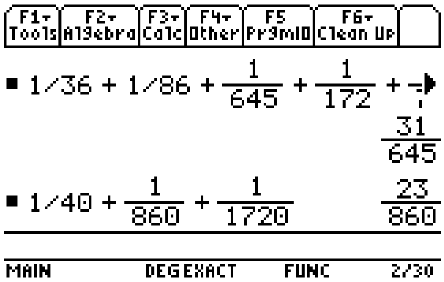
• Pour les trois premières égalités énoncées par l'auteur, on obtient ceci.





La calculatrice confirme donc le message du média consulté.

• De façon inattendue, les choses changent avec les deux égalités suivantes : la calculatrice, cette fois, ne délivre pas la réponse espérée sur la foi du média écouté.



Dans le premier cas, en effet, on attendait $\frac{30}{645}$, fraction égale à $\frac{2}{43}$; or on obtient $\frac{31}{645}$. Le second cas est beaucoup plus loin du but : on a en effet, ici, $\frac{23}{860} \approx \frac{2}{75}$.

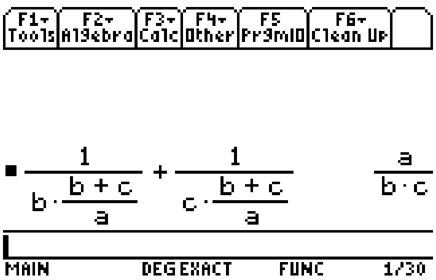
• La conclusion tirée plus haut – la non-unicité de la décomposition d'une fraction en quantièmes – n'en est pas moins confortée. De plus, pour qui connaît le calcul algébrique sur les fractions – autre milieu essentiel –, l'égalité

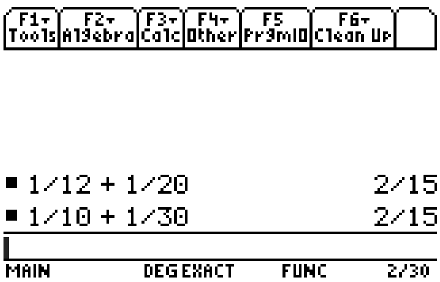
$$\frac{a}{bc} = \frac{1}{b \cdot \frac{b+c}{a}} + \frac{1}{c \cdot \frac{b+c}{a}}$$

est de vérification immédiate ; on a en effet ceci.

$$\frac{1}{b \cdot \frac{b+c}{a}} + \frac{1}{c \cdot \frac{b+c}{a}} = \frac{a}{b(b+c)} + \frac{a}{c(b+c)} = \frac{ac}{bc(b+c)} + \frac{ab}{bc(b+c)} = \frac{a(c+b)}{bc(b+c)} = \frac{a}{bc}.$$

Au demeurant, la calculatrice déjà utilisée confirme la chose (ci-dessous, à gauche). Et on a bien, également, les deux autres décompositions avancées (ci-dessous, à droite).





• L'occurrence signalée par l'index à la page 212 se trouve dans le titre de la section intitulée *Later Development of Unit Fractions*. Smith y insiste sur la longue résistance qu'a opposée, historiquement, l'emploi des fractions unitaires, en dépit de progrès mathématiques ultérieurement accomplis et dûment consignés par Fibonacci dans son *Liber Abaci* dès 1202.

• On peut maintenant se tourner vers des médias « modernes ». Il est en fait facile de trouver sur le Web une *foule* de documents contribuant à fabriquer une réponse à la question examinée. Par exemple, dans l'article de l'encyclopédie Wikipedia intitulé *Unit fraction* [8], on lit ceci.

> Any positive rational number can be written as the sum of unit fractions, in multiple ways.

L'article *Egyptian Fraction* du site Wolfram MathWorld livre de nombreuses informations [9] ; on en a reproduit les deux premiers paragraphes.

> An Egyptian fraction is a sum of positive (usually) distinct unit fractions. The famous Rhind papyrus, dated to around 1650 BC contains a table of representations of $2/n$ as Egyptian fractions for odd n between 5 and 101. The reason the Egyptians chose this method for representing fractions is not clear, although André Weil characterized the decision as "a wrong turn" (Hoffman 1998, pp. 153-154). The unique fraction that the Egyptians did not represent using unit fractions was 2/3 (Wells 1986, p. 29).
>
> Egyptian fractions are almost always required to exclude repeated terms, since representations such as 1/5+1/5+1/5 are trivial. Any rational number has representations as an Egyptian fraction with arbitrarily many terms and with arbitrarily large denominators, although for a given fixed number of terms, there are only finitely many. Fibonacci proved that any fraction can be represented as a sum of distinct unit fractions (Hoffman 1998, p. 154).
>
> ....
>
> No algorithm is known for producing unit fraction representations having either a minimum number of terms or smallest possible denominator (Hoffman 1998, p. 155). However, there are a number of algorithms (including the binary remainder method, continued fraction unit fraction algorithm, generalized remainder method, greedy algorithm, reverse greedy algorithm, small multiple method, and splitting algorithm) for decomposing an arbitrary fraction into unit fractions. In 1202, Fibonacci published an algorithm for constructing unit fraction representations, and this algorithm was subsequently rediscovered by Sylvester (Hoffman 1998, p. 154; Martin 1999).

Une démonstration du résultat obtenu par Fibonacci peut être trouvée sur le site PlanetMath [10]. Le principe en est simple. Soit une fraction $\frac{a}{b} \in \,]0\,;\,1[$. (Le cas $\frac{a}{b} = 1$ est trivial : on a $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.) On cherche le plus grand quantième $\frac{1}{n}$ (c'est-à-dire le plus petit entier n) tel que

$$\frac{1}{n} \leq \frac{a}{b}.$$

Comme $\frac{a}{b} - \frac{1}{n} = \frac{na - b}{nb}$, il s'agit de choisir le premier entier n tel que na dépasse (au sens large) l'entier b. Par exemple, pour $a = 2$ et $b = 43$, on a $n = 22$. D'une façon générale, cela revient à choisir n comme le plus petit entier tel que

[8] Voir http://en.wikipedia.org/wiki/Unit_fraction.
[9] Voir http://mathworld.wolfram.com/EgyptianFraction.html.
[10] Voir http://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&id=3127.

$$\frac{a}{b} \geq \frac{1}{n} \text{ ou } \frac{b}{a} \leq n.$$

L'entier n est donc le quotient de b par a si celui-ci est entier, le quotient augmenté de 1 sinon ; soit le « plafond » (*ceiling*), qu'on note

$$n = \left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil.$$

On a alors : $\frac{a}{b} = \frac{1}{n} + \frac{a'}{b'}$ où $\frac{a'}{b'} = \frac{na-b}{nb}$. Il resterait maintenant à démontrer que

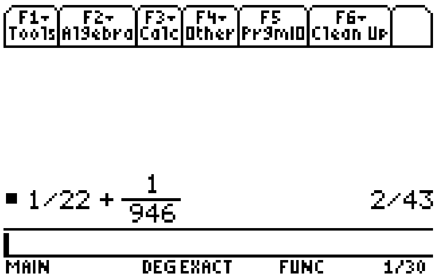
– en répétant sur $\frac{a'}{b'}$ l'opération réalisée sur $\frac{a}{b}$ on obtient un entier $n' > n$;

– l'algorithme se termine.

Pour tout cela, on se reportera au document indiqué. À titre d'exemple, examinons le cas de $\frac{a}{b} = \frac{2}{43}$. On a vu que $n = 22$; on a $\frac{a'}{b'} = \frac{na-b}{nb} = \frac{1}{946}$: l'algorithme se termine là, et il vient donc

$$\frac{2}{43} = \frac{1}{22} + \frac{1}{946}$$

ce que confirme la calculatrice.



Ajoutons qu'on trouvera des compléments divers sur la page *Number Theory* du site MathPages [11]. Le *Dictionnaire Penguin des nombres curieux* de David Wells (2e édition française, Eyrolles, Paris, 1998) consacre au nombre 2/3 un développement que je reproduis ici.

2/3

Seule fraction « égyptienne » non représentative, puisque les Égyptiens n'utilisaient que des fractions unitaires, à l'exception de celle-ci. Toutes les autres grandeurs fractionnelles *(sic)* étaient exprimées par des sommes de fractions unitaires.

Extrait du papyrus Rhind : diviser 7 pains à *(sic)* 10 hommes. – Réponse :

$$2/3 + 1/30.$$

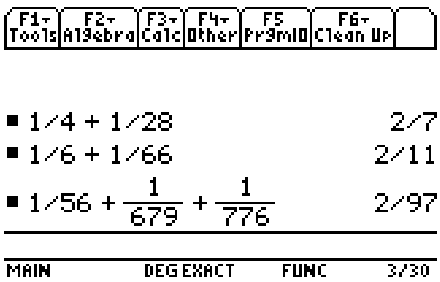
Comme ils multipliaient par doublements répétés et additions, ils utilisaient des tables donnant les doubles fractions unitaires. Le papyrus Rhind fournit ainsi une table qui va jusqu'au double de 1/101.

$$2/7 = 1/4 + 1/28$$
$$2/11 = 1/6 + 1/66$$
$$2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776$$

[11] Voir http://www.mathpages.com/.

Les fractions égyptiennes sont fertiles en problèmes. Erdös et Sierpinski ont par exemple conjecturé, respectivement, que $4/n$ et $5/n$ sont chacune décomposable, pour tout n, en somme de 3 fractions unitaires. [Guy]

On a bien $\frac{2}{3} + \frac{1}{30} = \frac{20}{30} + \frac{1}{30} = \frac{21}{30} = 7$. On notera que, cette fois, les décompositions restantes ne sont pas contestées par la calculatrice (ci-après).



Et on soulignera surtout que le travail d'*ingénierie didactique* envisagé pourrait soulever des problèmes *mathématiques* qui, sans être forcément difficiles à résoudre, peuvent fort bien ne pas trouver place dans le riche inventaire que recèle la littérature imprimée ou en ligne accessible – par exemple parce que ces problèmes seront nés d'interrogations jusque-là inédites.

2. L'enquête codisciplinaire

a) L'enquête précédente peut être dite (mono)disciplinaire au sens où elle porte sur une question relevant d'une discipline bien identifiée : les mathématiques. Dans la plupart des questions qui surgissent hors des classes de collège ou de lycée, toutefois, cet emblème de l'enseignement secondaire qu'est la (mono)disciplinarité – celle de l'outillage de l'enquête, et en particulier des *milieux* qui y seront mis en jeu –, ne peut être sauvé. Plus encore, on ne peut savoir à l'avance quelles praxéologies, relevant de quels champs disciplinaires, devront être mobilisées ou (re)produites à nouveaux frais. On ignore même si ces praxéologies entreront nettement dans une « discipline » connue (sans parler même des seules disciplines aujourd'hui enseignées au secondaire). C'est alors cette ignorance épistémologique que désigne l'adjectif « codisciplinaire » dans l'expression *enquête codisciplinaire* : le préfixe *co-* y indique que des praxéologies relevant de diverses « disciplinarités », *a priori* inconnues et peut-être à construire (en partie), y interviendront « de concert », ce concert polyphonique pouvant osciller largement entre symphonie et cacophonie épistémologiques.

b) Dans l'en-tête des notes de ce Séminaire, tout le monde ne l'aura peut-être pas remarqué, j'ai précisé ceci.

Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

Cette mention d'une « didactique de l'enquête codisciplinaire » a une signification qu'il faut un rien préciser. On voit d'abord que l'expression semble désigner la didactique d'une « discipline » – d'une « disciplinarité » – qui n'existe pas comme telle, aujourd'hui, dans l'enseignement français. Comme souvent, pourtant, la référence est ici à un champ d'activités sociales *pluriel*, *peu intégré*, et qui, en l'espèce *s'ignore aujourd'hui comme champ*. (Par les deux premiers critères, le champ de « l'enquête codisciplinaire » ressemble par exemple à « la littérature » ; par le troisième, il en diffère sensiblement.) Ce champ en puissance, en devenir, contient certainement, par exemple, l'enquête *scientifique* (celle de la recherche scientifique), et aussi l'enquête *journalistique* (celle, en particulier, du journalisme d'investigation), et encore (malgré qu'en ait certains au sein de la profession) l'enquête *policière* (qui passionne tant de téléspectateurs dans sa version romancée).

c) Une enquête codisciplinaire, ou, pour faire court, une enquête engendre un *parcours d'étude et de recherche*, un PER dont les moyens – médias et milieux – forment un « système ouvert », aux limites non assignables, même si, à chaque instant, ses acteurs sont bien *quelque part*, et non ailleurs. Regardons alors encore une fois la formule déjà rappelée.

$$(S(X, Y ; Q) \rightarrowtail R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge, O_{n+1}, \ldots, O_m) \rightarrowtail R^\heartsuit.$$

Dans un PER, on le sait, on peut être amené à tenter de tirer parti d'une œuvre O_j déjà *connue* de nous, et il faudra alors se la « remettre en tête » (ou « en mains ») ; ou encore d'une œuvre pratiquement *inconnue* de nous, et il faudrait alors l'étudier spécialement, ou renoncer à en tirer profit ; et semblablement pour les réponses $R_i^\lozenge$ que l'on croisera en un parcours non écrit à l'avance. Le travail d'enquête a ainsi pour vertu de pouvoir donner une seconde vie, après leur mort scolaire ou universitaire, à une foule de savoirs disciplinaires que la fin de l'apprentissage officiel (attestée par exemple par un examen ou un diplôme) a conduits à travers l'Achéron. D'un même mouvement, l'enquête donne vie, *pour l'« enquêteur »* au moins, à des œuvres qu'il n'a jamais rencontrées, processus par lequel il finira, aux yeux d'autrui, par devenir « savant ». Bien entendu, il y a une dialectique entre l'enquête proprement dite et l'étude, qu'elle requiert, d'œuvres existantes ou à augmenter, voire à créer *ab ovo*.

d) Je commencerai à illustrer ce type de situation à l'aide d'un exemple sur lequel j'ai été conduit à travailler en dirigeant la thèse en cours de Caroline Ladage. Caroline est, dans la vie extra-universitaire, une spécialiste de ce qu'on nomme en anglais le *search engine optimization* et, en français, plutôt le *référencement*. L'objet de cette spécialité est de faire par exemple qu'un site Web donné soit bien référencé par les moteurs de recherche et placé en bonne position sur les pages de résultats pour certaines requêtes. Là où le profane ne voit souvent qu'une supposée transparence du média utilisé, elle voit, elle, à l'instar de ses collègues référenceurs de métier, une redoutable opacité, très imparfaitement élucidable, et constamment changeante. L'idée qui lui est venue était donc, je crois, celle-ci : certains savoirs du référenceur ne devraient-ils pas être portés à la connaissance de l'usager profane des moteurs de recherche et des sites Web ? Tel était le point de départ. L'interrogation a depuis été élargie en une problématique dont je ne donnerai ici qu'une version simplifiée : quelles connaissances, quels savoirs, quels savoir-faire, quelles praxéologies est-il bon de mobiliser (en les produisant éventuellement) pour faire un usage raisonnable des moyens d'accès aux ressources de l'Internet ? Je ne ferai, sur ce sujet, qu'un petit nombre de remarques non définitives.

• D'abord une observation liminaire : lorsqu'une « technologie » nouvelle apparaît – et il en apparaît constamment –, on voit s'affairer autour d'elle une troupe de passionnés – amateurs, semi-professionnels et même professionnels – qui dressent autour d'elle une barrière difficilement franchissable par les usagers potentiels qui, eux, adopteraient d'emblée une posture de béotien et de malappris. Je formule ici une conjecture : cela tient, je crois, à ce que ceux qu'on nomme en anglais, avec plus ou moins d'admiration ou de morgue, des *geeks* ou, plus péjorativement, des *nerds*, créent autour de la technologie en question une culture particulière, avec sa rhétorique, son jargon, liée à un univers praxéologique en partie neuf et spécifique, certes, mais qui tend à dissimuler ainsi ce qu'il y aurait véritablement *à savoir* pour être simplement un utilisateur « raisonnable » – et non un aspirant *hacker*. Une « défiance attentive » et même bienveillante, mais toujours lucide, est donc de mise pour qui s'engage dans le tri évoqué à propos du sujet de la thèse de Caroline Ladage.

• Voici une seconde conjecture. Comme, à l'expérience, il y a bien tout de même des choses nouvelles « à savoir », les maîtres des anciens savoirs peuvent être tentés de minimiser le rôle de ces « choses », et cela pas seulement en parole, mais *en pratique*. Le champ de la recherche d'information sur Internet est ainsi parcouru par une tension – dont je simplifie la description – entre partisans des *moteurs de recherche* (les « modernes », les « informaticiens ») et partisans des *annuaires* de recherche (les « anciens », les « documentalistes » ou *librarians*). Pour ne faire état ici que de ce que tous ou presque nous connaissons, un professeur d'une discipline donnée pensera aisément que, pour trouver rapidement sur Internet des éléments d'information pertinents à propos d'une question relevant de « sa » discipline, ce qu'il faut savoir à propos du Web et des moteurs de recherche importe bien moins que ce qu'il faut savoir (y compris à propos des sites Web existants) concernant sa propre discipline.

e) La position des « anciens », quand elle est avérée, tend à refermer le problème de recherche évoqué plus haut : ce qu'il y aurait à savoir à propos d'Internet, du Web, des moteurs de recherche, ce serait si peu que rien ! Lorsque, à l'inverse, on s'efforce de *poser* le problème, on ne peut guère le faire, à vrai dire, qu'hypothétiquement : qu'y aurait-il *possiblement* à savoir ? Je m'arrêterai ici sur deux éléments que je soumets abruptement à votre méditation : nous y reviendrons. Je tire l'un et l'autre d'un ouvrage déjà classique dans son domaine, dû à deux mathématiciens américains, Amy N. Langville et Carl D. Meyer : *Google's PageRank and Beyond. The Science of Search Engine Rankings* (Princeton University Press, 2006).

• J'extrais d'abord ce long passage du chapitre 1, *Introduction to Web Search Engines*, p. 11-13 [12].

1.3.2 Elements of the Web Search Process

This last section of the introductory chapter describes the basic elements of the web information retrieval process. Their relationship to one another is shown in Figure 1.2. Our purpose in describing the many elements of the search process is twofold: first, it helps emphasize the focus of this book, which is the ranking part of the search process, and second, it shows how the ranking process fits into the grand scheme of search. Chapters 3-12 are devoted to the shaded parts of Figure 1.2, while all other parts are discussed briefly in Chapter 2.

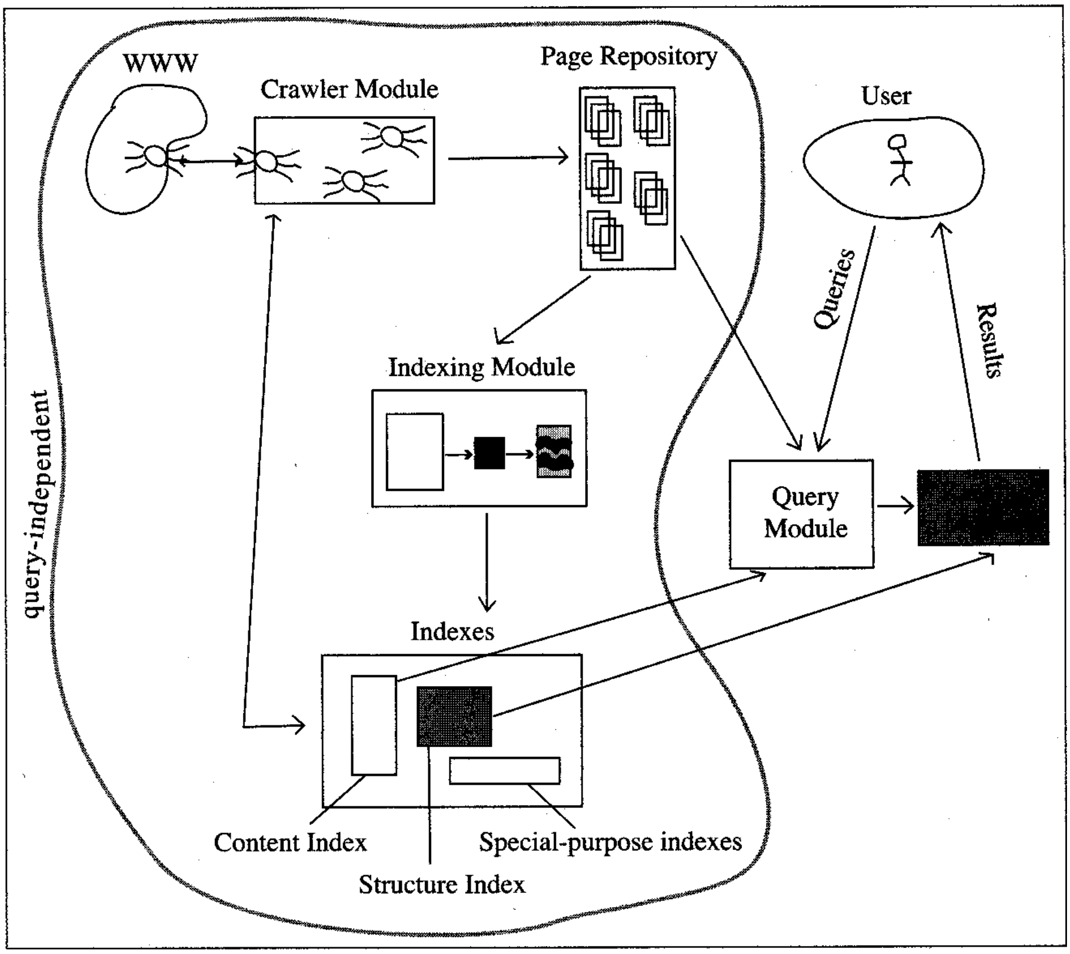


Figure 1.2 Elements of a search engine

• **Crawler Module.** The Web's self-organization means that, in contrast to traditional document collections, there is no central collection and categorization organization. Traditional document collections live in physical warehouses, such as the college's library or the local art museum, where they are categorized and filed. On the other hand, the web document collection lives in a cyber warehouse, a virtual entity that is not limited by geographical constraints and can grow without limit. However, this geographic freedom brings one unfortunate side effect. Search engines must do the

[12] Sur l'expression de *"Cliff notes" version* employée ci-après par les auteurs cités, voir http://en.wikipedia.org/wiki/CliffsNotes.

data collection and categorization tasks on their own. As a result, all web search engines have a crawler module. This module contains the software that collects and categorizes the web's documents. The crawling software creates virtual robots, called **spiders,** that constantly scour the Web gathering new information and webpages and returning to store them in a central repository.

• **Page Repository.** The spiders return with new webpages, which are temporarily stored as full, complete webpages in the page repository. The new pages remain in the repository until they are sent to the indexing module, where their vital information is stripped to create a compressed version of the page. Popular pages that are repeatedly used to serve queries are stored here longer, perhaps indefinitely.

• **Indexing Module.** The indexing module takes each new uncompressed page and extracts only the vital descriptors, creating a compressed description of the page that is stored in various indexes. The indexing module is like a black box function that takes the uncompressed page as input and outputs a "Cliff notes" version of the page. The uncompressed page is then tossed out or, if deemed popular, returned to the page repository.

• **Indexes.** The indexes hold the valuable compressed information for each webpage. This book describes three types of indexes. The first is called the **content index.** Here the content, such as keyword, title, and anchor text for each webpage, is stored in a compressed form using an **inverted file** structure. Chapter 2 describes the inverted file in detail. Further valuable information regarding the hyperlink structure of pages in the search engine's index is gleaned during the indexing phase. This link information is stored in compressed form in the **structure index.** The crawler module sometimes accesses the structure index to find uncrawled pages. **Special-purpose indexes** are the final type of index. For example, indexes such as the image index and pdf index hold information that is useful for particular query tasks.

The four modules above (crawler, page repository, indexers, indexes) and their corresponding data files exist and operate independent of users and their queries. Spiders are constantly crawling the Web, bringing back new and updated pages to be indexed and stored. In Figure 1.2 these modules are circled and labeled as **query-independent.** Unlike the preceding modules, the query module is **query-dependent** and is initiated when a user enters a query, to which the search engine must respond in **real-time**.

• **Query Module.** The query module converts a user's natural language query into a language that the search system can understand (usually numbers), and consults the various indexes in order to answer the query. For example, the query module consults the content index and its inverted file to find which pages use the query terms. These pages are called the relevant pages. Then the query module passes the set of relevant pages to the ranking module.

• **Ranking Module.** The ranking module takes the set of relevant pages and ranks them according to some criterion. The outcome is an ordered list of webpages such that the pages near the top of the list are most likely to be what the user desires. The ranking module is perhaps the most important component of the search process because the output of the query module often results in too many (thousands of) relevant pages that the user must sort through. The ordered list filters the less relevant pages to the bottom, making the list of pages more manageable for the user. (In contrast, the similarity measures of traditional information retrieval often do not filter out enough irrelevant pages.) Actually, this ranking which carries valuable, discriminatory power is arrived at by combining two scores, the content score and the popularity score. Many rules are used to give each relevant page a relevancy or content score. For example, many web engines give pages using the query word in the title or description a higher content score than pages using the query word in the body of the page [39]. The popularity score, which is the focus of this book, is determined from an analysis of the Web's hyperlink structure. The content score is combined with the popularity score to determine an overall score for each relevant page [30]. The set of relevant pages resulting from the query module is then presented to the user in order of their overall scores.

Chapter 2 gives an introduction to all components of the web search process, except the ranking component. The ranking component, specifically the popularity score, is the subject of this book. Chapters 3 through 12 provide a comprehensive treatment of the ranking problem and its suggested solutions. Each chapter progresses in depth and mathematical content.

• Voici maintenant un second extrait (*op. cit.*, p. 31), qui ouvre le chapitre 4 intitulé *The Mathematics of Google's PageRank*. J'espère qu'il vous donnera un appétit d'ogre (mathématicien). En ce cas, il vous laissera aussi sur votre faim – peut-être jusqu'à notre prochaine séance.

Chapter Four

The Mathematics of Google's PageRank

The famous and colorful mathematician Paul Erdos (1913-96) talked about The Great Book, a make-believe book in which he imagined God kept the world's most elegant and beautiful proofs. In 2002, Graham Farmelo of London's Science Museum edited and con- tributed to a similar book, a book of beautiful equations. *It Must Be Beautiful: Great Equations of Modern Science* [73] is a collection of 11 essays about the greatest scientific equations, equations like $E = hf$ and $E = mc2$. The contributing authors were invited to give their answers to the tough question of what makes an equation great. One author, Frank Wilczek, included a quote by Heinrich Hertz regarding Maxwell's equation:

One cannot escape the feeling that these mathematical formulae have an independent existence and an intelligence of their own, that they are wiser than we are, wiser even than their discoverers, that we get more out of them than was originally put into them.

While we are not suggesting that the PageRank equation presented in this chapter,

$$\pi^T = \pi^T(\alpha\mathbf{S} + (1 - \alpha)\boldsymbol{E}),$$

deserves a place in Farmelo's book alongside Einstein's theory of relativity, we do find Hertz's statement apropos. One can get a lot of mileage from the simple PageRank formula above—Google certainly has. Since beauty is in the eye of the beholder, we'll let you decide whether or not the PageRank formula deserves the adjective *beautiful*. We hope the next few chapters will convince you that it just might.

That's all, folks!