Université de Provence

Département des sciences de l'éducation

Année 2007-2008 – Master 1

UE SCER22 :

« Didactique des disciplines scientifiques »

Yves Chevallard
y.chevallard@aix-mrs.iufm.fr

Trois leçons sur la didactique des PER

➔ Leçon 1

Sommaire. – 0. La didactique : une définition / 1. Un exemple : user et abuser des pourcentages / 2. La dialectique des médias et des milieux / 3. La dialectique des boîtes noires et des boîtes grises

0. La didactique : une définition

a) Dans ce qui suit, on se réfèrera au cours de didactique fondamentale donné en 2007-2008 en licence de sciences de l'éducation : sous l'intitulé « Leçons de didactique 2007-2008 », on trouvera le texte des huit leçons qui constituent ce cours sur le site de l'auteur, à l'adresse suivante : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=11.

b) Dans la leçon 5 du cours susmentionné, la ***didactique*** – tout court – a été définie comme ***la science des conditions et des contraintes de la diffusion sociale des praxéologies***. Si nécessaire, c'est-à-dire pour celles ou ceux qui n'auraient pas suivi l'UE SCEQ1 (intitulée ***Apprentissage et Didactique***), entendons pour le moment par ***praxéologie*** tout ensemble organisé, plus ou moins intégré, de connaissances, de « savoirs » et autres « savoir-faire ».

c) Une question fondamentale que l'on se pose en didactique est la suivante : étant donné un certain ensemble de ***contraintes*** (réputées provisoirement non modifiables), sous quels ensembles de ***conditions*** une certaine ***personne*** x ou une certaine ***institution*** I, soumises aux contraintes et bénéficiant des conditions qu'on vient d'évoquer, peut-elle rencontrer et « faire sienne » telle organisation praxéologique déterminée ?

d) Pour donner immédiatement un peu de concret aux définitions précédentes, la meilleure tactique sans doute est d'éprouver en soi le ***manque praxéologique***, c'est-à-dire le sentiment d'une ***ignorance***, expérience qui est (ou pourrait être) ***pour chacun de nous*** pluri-quotidienne. Pour cela, on s'arrête maintenant sur un exemple.

1. Un exemple : user et abuser des pourcentages

a) Chacun connaît la notion de ***pourcentage***, qui entre – comme on va le (re)voir – dans un nombre important de praxéologies touchant à ***l'information chiffrée***. Pourtant, dans les textes suivants, empruntés au site de l'association « Pénombre », laquelle « propose un espace public de réflexion et d'échange sur l'usage du nombre dans les débats de société » (http://www.penombre.org/), on voit plusieurs auteurs mettre en œuvre ***à l'évidence*** certaines praxéologies intégrant la notion de pourcentage, praxéologies 1) que semblent ignorer ceux dont ils nous parlent, et 2) qui ne manqueront pas d'apparaître comme présentes *in absentia* à certains lecteurs de ces notes. Voici ces textes.

De l'usage des pourcentages par cents

Un pourcentage, c'est simple : un salaire qui augmente de 1,5 %, le nombre de chômeurs qui baisse de 3 %, tout le monde comprend. Et pourtant des journalistes chevronnés, et les correcteurs qui les relisent, peuvent facilement s'y prendre les pieds. Deux exemples de l'année passée.

Quintuplés

Dans la Croix du mardi 6 juillet 1999, Bruno Chenu, dans un article intitulé « Les millions du foot » écrit : « Ce qui se passe depuis un mois dans la rubrique des transferts donne le vertige. En quatre ans en France, le montant des transactions a quadruplé : 400 % d'inflation, ce n'est pas mal ! »

Le vertige, et… la berlue, pour prendre plus 400 %, qui est un quintuplement, pour seulement un quadruplement. En effet, plus 100 % est un doublement, donc plus 200 % un triplement…

De toutes les façons, ces grandeurs ont de quoi effrayer, et comme le dit l'auteur de l'article : « Comment sortir de cette spirale inflationniste qui devrait quand même finir par choquer le spectateur moyen et le supporter raisonnable ? »

Au niveau de la vie

Plus récemment, dans Télérama du 29 décembre 1999, Gérard Chaliand, expert en géostratégie, à la suite d'une question sur les résultats des élections législatives de Russie de décembre 1999, interprète celles-ci comme « le symptôme d'une population désorientée », et ajoute : « Comment réagirions-nous si nous avions perdu entre 300 et 400 % de notre niveau de vie en moins de cinq ans ? »

On sait qu'en Russie les températures descendent souvent en dessous de zéro, on ne savait pas qu'il pouvait en être de même du niveau de vie !

On éviterait ce genre de bourde en utilisant les pourcentages à bon escient, c'est-à-dire quand les variations qu'ils sont censés mesurer sont faibles. Un pourcentage de 100 % ou plus est difficilement compréhensible. Il vaudrait mieux parler, à partir de là, de doublement, de triplement etc. De même, quand la baisse est importante, de parler d'une division par 2, plutôt que d'une baisse de 50 %, d'une division par 3, plutôt que d'une baisse de 66,6666666… %.

Vite dit, cependant, car une croissance des prix, qui s'exprime normalement en pourcentage, les prix étant supposés évoluer lentement, peut toujours devenir inflationniste, par exemple atteindre 8 000 %.

Ce qui fait une multiplication par combien, cher lecteur?

Alfred Dittgen

Abus de pourcentage

Je viens d'entendre affirmer que la proportion de fils d'ouvriers accédant au niveau bac +3 n'a pas progressé depuis des années (3 % je crois). S'agit-il de la proportion des fils d'ouvriers qui accèdent à bac+3 ou de la proportion de fils d'ouvriers dans une promotion de bac+3 ? La différence peut être considérable si la proportion d'ouvriers dans la population a considérablement varié dans l'intervalle.

Dans un article du Figaro au sujet d'un nouveau revêtement routier anti-dérapant : « Le résultat est encore plus significatif à 50 km/h : il faut à peine 10 mètres pour s'arrêter en freinage d'urgence sur ce substrat ultra-râpeux, contre plus de 14 mètres sur une chaussée classique, ce qui représente une diminution de plus de 40 % de la distance d'arrêt. »

Jean-Claude Maroselli

Pioché dans un article de « Courrier international » citant Le Matin d'Alger :

« Un nouveau programme de privatisation a été élaboré pour 1 270 entreprises publiques, a annoncé le gouvernement algérien. Sont concernés, dans un premier temps, les secteurs du textile, de l'agroalimentaire, de la chimie et du bâtiment. L'Algérie s'est engagée depuis trois ans dans une politique de privatisation, ainsi que dans un programme de relance et de libéralisation économique radical, qui aurait eu pour effet la suppression de 400 000 emplois et une érosion du pouvoir d'achat de 1 000 %. »

Quand y en a plus, y en a encore.

Jean-Yves Marhic

Pourcentages en dedans, en dehors et au delà

Il fut un temps en France où la TVA sur les voitures était de 33 %, ce qui faisait dire à de nombreux acheteurs qu'un tiers de leur facture allait à l'État. En fait, ils ne versaient qu'un quart à l'État. En effet, une voiture dont le prix hors taxes était de 100, était vendue 133 et ce prix de vente comportait donc 25 % de taxes (33/133). À l'heure actuelle ce taux, le taux normal, est de 19,6 %, soit environ un cinquième du prix hors taxes, ce qui conduit à un sixième du prix de vente (19,6/119,6).

Je viens de voir une émission de télé sur les commissaires priseurs. J'y apprends que quand ceux-ci vendent un objet, ils touchent 10 % du prix adjugé et en versent donc 90 % à celui qui le cède. Mais l'acquéreur verse une commission de 20 % sur ce prix, qui va également au commissaire. Celui-ci touche donc, non pas 10 % du prix adjugé, mais 30 % (30/100). Ce n'est pas mal. Le commissaire peut cependant répondre qu'il ne touche que 25 % … du prix de vente (30/120). Ce à quoi on peut lui répliquer qu'il touche 33 %… du prix d'achat (30/90).

Jean Célestin

b) La lecture de ces articulets soulèvent plusieurs questions. Tout d'abord, quelles sont au juste les praxéologies dont leurs auteurs se prévalent dans leurs observations critiques ? Ensuite, pourquoi les personnes (journalistes, etc.) que critiquent ces auteurs semblent-elles ignorer ces praxéologies ? Enfin, comment les auteurs ont-ils, eux, eu connaissance de ces praxéologies et comment les ont-ils intégrées à leur « équipement praxéologique » personnel propre pour s'en servir comme ils le font ?

c) La réponse à la première question commande la possibilité de répondre aux suivantes. Pour former – conjecturalement – une telle réponse, il faut « s'instruire sur les pourcentages », afin de reconstituer – conjecturalement – les praxéologies mises en jeu. Il faut donc s'engager dans un ***processus d'étude***, un ***processus didactique***, dont le moyen sera un certain ***système didactique***

$$S(X\,;\,y\,;\,\heartsuit).$$

Dans cette « formule », X désigne – en l'espèce – le groupe des personnes suivants cette UE, y désigne l'enseignant – le rédacteur de ces lignes –, et le symbole ♥ représente l'***enjeu didactique***, soit un ensemble ***pour le moment inconnu*** de praxéologies mettant en jeu la notion de pourcentage.

d) On peut présenter les choses autrement : au lieu d'évoquer un enjeu didactique ***qui ne peut être précisé à ce stade***, on peut se donner pour enjeu didactique de répondre à une ***question***, que nous noterons Q_0 et que nous pouvons formuler ainsi :

Q_0. Que sont les praxéologies dont les auteurs cités plus haut se prévalent dans leurs observations critiques ?

L'étude de cette question se réalisera par la mise en fonctionnement d'un système didactique que l'on notera alors ainsi :

$$S(X\,;\,y\,;\,Q_0).$$

Le fonctionnement de ce système didactique devrait conduire à la production d'une réponse R_0, ce que nous noterons ainsi :

$$S(X\,;\,y\,;\,Q_0) \rightarrowtail R_0.$$

La « réponse » R_0 prendra la forme d'une certaine ***organisation praxéologique*** permettant d'engendrer les observations critiques contenus dans les textes reproduits plus haut.

e) Pour tenter de répondre, on analyse d'abord les éléments praxéologiques qui paraissent affleurer dans les textes cités, que nous parcourons ici dans l'ordre où ils ont été présentés plus haut.

➔ Les textes évoquent d'abord « un salaire qui augmente de 1,5 % » et « le nombre de chômeurs qui baisse de 3 % ». Si le salaire est, avant augmentation, de S_0 euros, que vaut-il après augmentation de 3 % ? Si le salaire est, après augmentation, de S_1 euros, quelle relation y a-t-il entre S_0 et S_1 (hormis la relation $S_0 < S_1$ ou $S_1 > S_0$) ? De même, si le nombre de chômeurs était de C_0, et si ce nombre a subi une baisse de 3 %, quel est le nombre C_1 de chômeurs après cette baisse ? Quelle relation existe-t-il entre C_0 et C_1 (hormis le fait que $C_0 > C_1$, c'est-à-dire que $C_1 < C_0$) ?

➔ Lorsque une quantité – en l'espèce, le montant des transactions au football – a quadruplé, de quel *pourcentage* cette quantité a-t-elle augmenté ? Il semble que ce ne soit pas de 400 % ! Plus précisément, en particulier, il semble qu'une augmentation de 100 % d'une quantité corresponde au *doublement* de cette quantité, qu'une augmentation de 200 % corresponde à un *triplement*. Et que plus généralement des augmentations de 300 %, de 400 %, de 500 % correspondent, respectivement à une multiplication par 4, par 5 et par 6 de la quantité : qui gagnait 1000 € et, après augmentation, gagne maintenant 3000 € aura vu son salaire augmenter de 200 % ; etc. De la même façon, il semblerait qu'une division par 2 d'une quantité corresponde à une baisse de 50 % ; qu'une division par 3 corresponde à une baisse de 66,6666666… %.

➔ L'auteur dont on examine le texte ici pose *in fine* à son lecteur une question dans le prolongement des assertions précédentes : si un prix augmente de 8000 %, il est multiplié par combien ?

➔ S'il se peut qu'un prix augmente de 8000 %, se peut-il aussi que nous perdions « entre 300 et 400 % de notre niveau de vie » en quelques années ? Il semblerait que cela soit impossible ! Pourquoi donc ?

➔ Le texte suivant attire l'attention sur une apparente difficulté de l'utilisation des pourcentages : il ne faut pas confondre, nous dit l'auteur, la proportion de fils d'ouvriers dans une certaine population d'étudiants et la proportion des étudiants fils d'ouvriers parmi la population totale des fils d'ouvriers. Notons O la population des fils d'ouvriers (dans la société considérée) et E la population des étudiants que l'on envisage ; notons alors $O \cap E$ la population des fils d'ouvriers membres de E. On ne doit pas confondre, nous dit-on, ce que nous noterons provisoirement Prop($O \cap E$, E) avec Prop($O \cap E$, O). D'après l'auteur du texte, on aurait : Prop($O \cap E$, E) ≠ Prop($O \cap E$, O). Plus précisément encore, « la différence peut être considérable si la proportion d'ouvriers dans la population a considérablement varié dans l'intervalle ».

➔ Le commentaire de la comparaison entre revêtements routiers semble indiquer que, lorsqu'on passe d'une distance de freinage de 14 m à une distance de 10 m, il n'y aurait pas une « diminution de plus de 40 % ». Qu'en est-il au juste ?

➔ On rencontre à nouveau une quantité – le pouvoir d'achat – qui subirait une diminution de 1000 %, affirmation que l'auteur raille.

➔ On laissera de côté, provisoirement, les observations sur la TVA et sur les rémunérations des commissaires priseurs. Pour aller plus loin, faisons maintenant un inventaire des types de tâches rencontrés.

T_1. Déterminer la valeur g_1 d'une grandeur G qui, partant de la valeur g_0, subit une augmentation de r %.

T_2. Déterminer la valeur g_1 d'une grandeur G qui, partant de la valeur g_0, subit une diminution de r %.

T_3. Déterminer le pourcentage d'augmentation r % d'une grandeur G qui, partant de la valeur g_0, prend la valeur $g_1 > g_0$.

T_4. Déterminer le pourcentage de diminution r % d'une grandeur G qui, partant de la valeur g_0, prend la valeur $g_1 < g_0$.

T_5. Déterminer le pourcentage d'augmentation r % d'une grandeur G qui, partant de la valeur g_0, prend la valeur $g_1 = kg_0$, où k est un nombre entier > 1.

T_6. Déterminer le pourcentage de diminution r % d'une grandeur G qui, partant de la valeur g_0, prend la valeur $g_1 = g_0/k$, où k est un nombre entier > 1.

T_7. Déterminer le nombre entier k tel que $g_1 = kg_0$ lorsque qu'une grandeur G, partant de la valeur g_0, prend la valeur g_1 après une augmentation de 100 r %.

e) La création de praxéologies autour des types de tâches précédents T_i ($1 \leq i \leq 7$) devrait permettre de répondre à d'autres interrogations soulevées par les auteurs cités ci-dessus.

➔ Imaginons ainsi que nous disposions d'une technique τ_4 relative au type de tâches T_4 : « Déterminer le pourcentage de diminution r % d'une grandeur G qui, partant de la valeur g_0, prend la valeur $g_1 < g_0$. » Si G est la distance de freinage, τ_4 doit permettre d'accomplir la tâche $t \in T_4$ consistant à « déterminer le pourcentage de diminution d'une distance de freinage qui, ayant d'abord la valeur $g_0 = 14$, prend la valeur $g_1 = 10$ » et, en conséquence, de vérifier s'il y a ou non « diminution de plus de 40 % ».

➔ Une technique τ_2 relative au type de tâches T_2 (« Déterminer la valeur g_1 d'une grandeur G qui, partant de la valeur g_0, subit une diminution de r % ») devrait de même nous permettre de voir ce qu'il advient à une grandeur qui diminue de 300 % par exemple, pour décider si un tel changement peut ou non affecter un prix (ou le niveau de vie, etc.).

f) Une autre difficulté est signalée, cette fois à propos, non de pourcentages exprimant des taux de changement, mais de pourcentages exprimant des ***proportions***. De ce point de vue, on peut énoncer comme central le type de tâches suivant.

T_8. Exprimer [en pourcentage] la proportion, dans un ensemble donné U, des éléments appartenant à une partie V de U.

Une technique appropriée τ_8 devrait permettre d'exprimer la proportion des fils d'ouvriers dans une population étudiante et la proportion des étudiants parmi les fils d'ouvriers, et donc de les comparer.

g) Rappelons ici la question Q_0 étudiée.

Q_0. Que sont les praxéologies dont les auteurs cités plus haut se prévalent dans leurs observations critiques ?

➔ Étant donné le travail accompli jusqu'ici, pour avancer dans l'étude de cette question, nous rechercherons « dans la culture » des réponses à la question Q_0' ci-après.

Q_0'. Quelles praxéologies trouve-t-on « dans la culture » autour des types de tâches T_i ($1 \leq i \leq 8$) ?

➔ Plus précisément, pour étudier Q_0', et donc pour impulser le fonctionnement du système didactique $S(X\ ;\ y\ ;\ Q_0')$, y invite X à examiner les deux documents reproduits dans les annexes 1 et 2 (en fin de leçon). Le premier est l'article *Pourcentage* de la version en français de l'encyclopédie en ligne Wikipédia : il s'agit là d'une « œuvre », que nous noterons $O^{\%}_{\mathrm{Wf}}$ (l'indice Wf abrège l'expression « Wikipédia en français »). La seconde œuvre « mobilisée », $O^{\%}_{\mathrm{We}}$, n'est autre que l'article *Percentage* de l'édition en anglais de la « même » encyclopédie.

➔ Le fait d'amener $O^{\%}_{\mathrm{Wf}}$ et $O^{\%}_{\mathrm{We}}$ dans l'***espace de travail*** de $S(X\ ;\ y\ ;\ Q_0)$ est noté provisoirement comme suit :

$$S(X\ ;\ y\ ;\ Q_0) \Rightarrow \{\ O^{\%}_{\mathrm{Wf}}, O^{\%}_{\mathrm{We}}\ \}.$$

De fait, y invite X à étudier, ***pour la prochaine séance***, la question Q_0" suivante.

Q_0". Quelles praxéologies trouve-t-on « dans les œuvres $O^{\%}_{\mathrm{Wf}}$ et $O^{\%}_{\mathrm{We}}$ » autour des types de tâches T_i ($1 \leq i \leq 8$) ?

2. La dialectique des médias et des milieux

a) Le schéma à l'œuvre dans ce qui précède peut être décrit ainsi : une communauté d'étude X cherche à apporter réponse à une certaine question Q ; pour cela, elle se met en route, avec l'aide ou sous la direction des membres d'un collectif d'encadrement Y, pour rechercher « dans la culture » des réponses toutes faites, éventuellement fragmentaires, que l'on notera ci-après $R^{\lozenge}_1, R^{\lozenge}_2, \ldots, R^{\lozenge}_n$, et cela en vue de créer une réponse propre, notée $R^{\heartsuit}$.

b) Pour expliciter les réponses $R^{\lozenge}_1, R^{\lozenge}_2, \ldots, R^{\lozenge}_n$ et les exploiter judicieusement afin d'élaborer $R^{\heartsuit}$, le système $S(X\ ;\ Y\ ;\ Q)$ mobilisera éventuellement d'autres œuvres $O_{n+1}, \ldots, O_m$. À la fin d'un certain ***parcours d'étude et de recherche*** (PER), le bilan du travail accompli pourra s'exprimer par une formule du type suivant.

$$[S(X\ ;\ y\ ;\ Q) \Rightarrow \{\ R^{\lozenge}_1, R^{\lozenge}_2, \ldots, R^{\lozenge}_n, O_{n+1}, \ldots, O_m\ \}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}.$$

c) Le travail d'étude et de recherche qu'il convient de mener à bien requiert de nombreuses ***praxéologies didactiques***, et en particulier de nombreux ***savoir-faire*** didactiques. Au nombre de ceux-ci on doit compter ce qu'on nommera des ***dialectiques***, qui permettront de dépasser certains ***obstacles didactiques***. On ne mentionnera ici, pour le moment, que l'une de ces dialectiques (même si d'autres seront de fait mobilisées) : la dialectique ***des médias et des milieux*** (ou dialectique ***de la conjecture et de la preuve***).

➔ On appelle ***média*** tout système de mise en représentation d'une partie du monde naturel ou social à l'adresse d'un certain public : le « cours » du professeur de mathématiques, un traité de chimie, le journal d'un présentateur de télévision, un quotidien régional ou national, un site Internet, etc., relèvent en ce sens du système des médias.

➔ Par ***milieu***, on désigne tout système qu'on croit pouvoir regarder, à propos de telle question, comme ***dénué d'intention*** dans la réponse qu'il peut apporter, de manière explicite ou implicite, à cette question : le système considéré se comporte alors ***à cet égard*** comme un ***fragment de « nature »***. Par contraste, à propos de nombre de questions qu'on entend leur poser, les médias sont en général mus par une certaine intention.

➔ Bien entendu, un média peut fort bien, à propos de telle question particulière, être regardé comme un milieu, et être utilisé comme tel. La dialectique des médias et des milieux vise à dépasser d'un même mouvement et la foi infantile dans le verdict des « autorités », et la croyance simplificatrice en l'existence de preuves (prétendument) « décisives ». C'est cette dialectique que l'on aura particulièrement en tête dans ce qui suit.

d) À titre d'illustration, on présente ici un bref PER réalisé par le rédacteur de ces notes – désigné ci-après par y – dans un autre contexte d'activité, ***la formation de formateurs d'enseignants***.

➔ Un formateur de l'IUFM envisage d'utiliser la décomposition d'une fraction en une somme de ***quantièmes*** – c'est-à-dire de fractions de la forme $\frac{1}{n}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) – dans la formation des élèves professeurs des écoles comme système d'écriture ne permettant que fort difficilement de ***comparer*** les valeurs numériques ainsi représentées (on verra la chose plus loin). Ce formateur, peu au fait des propriétés des fractions unitaires, soulève la question suivante.

> Q_1. Toute fraction $\frac{a}{b} \in\ ]0\ ;1[$ peut-elle s'écrire comme somme de fractions de la forme $\frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$?

➔ Ici, la question Q ainsi formulée a une origine claire, liée à un souci didactique – la volonté de disposer d'une représentation des rationnels qui ***complique*** les comparaisons (et les calculs). Le travail de construction d'une réponse $R^{\heartsuit}$ appropriée est donc un travail essentiellement ***mathématique*** visant à nourrir un travail d'***ingénierie didactique***.

e) Pour amorcer son enquête, y revient à une œuvre qu'il a autrefois beaucoup pratiquée, le livre de D. E. Smith, *History of Mathematics*, volume II (Dover, New York, 1925/1958). Pour l'utiliser aisément, il faut connaître la dénomination employée en anglais pour désigner les fractions de la forme $\frac{1}{n}$ (que, on l'a vu, on nomme souvent, en français « mathématique », des ***quantièmes***). Par extraordinaire, il a cela en mémoire : en anglais, on parle d'ordinaire de ***unit***

fractions, de fractions unitaires. L'index de l'ouvrage indique alors que cette expression y est mentionnée aux pages 210 et 212.

➔ Voici un premier extrait (p. 210-211) qui semble pertinent pour l'étude de la question Q_1.

The essential feature of the early Egyptian treatment is the unit fraction. The arithmeticians had long been able to conceive of $\frac{1}{10}$ […] but they had no plural for it either verbally or mentally. By the time of Ahmes, however, an idea akin to that of ratio had developed. The number 2 was divided, say into 43 equal parts, and what is essentially the ratio of 2 to 43, or twice $\frac{1}{43}$, was expressed, using modern symbols, as

$$2 : 43 = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}.$$

Indeed, most of the ancient theory of fractions centered about the concept of ratio, and in such theoretical works as that of Boethius it lasted until the 16th century.

……………………………………………………………..……………………………………………

How these unit fractions were derived we do not know. It is evident that more than one solution is possible, but it is not always evident why any given one should be preferred to any other. For example,

$$\begin{aligned} 2 : 43 &= \frac{1}{24} + \frac{1}{258} + \frac{1}{1032} \\ &= \frac{1}{30} + \frac{1}{86} + \frac{1}{645} \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{86} + \frac{1}{645} + \frac{1}{172} + \frac{1}{774} \\ &= \frac{1}{40} + \frac{1}{860} + \frac{1}{1720} \\ &= \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}, \text{ […]} \end{aligned}$$

and so on, to which, of course, may be added $\frac{1}{43} + \frac{1}{43}$. Of all these possibilities Ahmes and his predecessors took the form

$$2 : 43 = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}.$$

although $\frac{1}{24} + \frac{1}{258} + \frac{1}{1032}$ has the advantage that the first fraction is nearer the value of $\frac{2}{43}$ than it is in the others. Although there are numerous rules for forming the unit fractions, no one of them applies to all the cases. This shows that the treatise combined the results of earlier computers, each working by a secret rule of his own, or else that each solution was worked out laboriously by repeated trials. [1]

➔ Une note de bas de page précise en ce point ce qui suit.

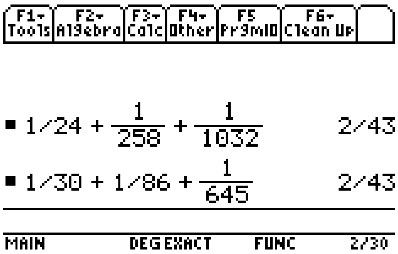
[1] *E. g.*, when b + c = ka, we have

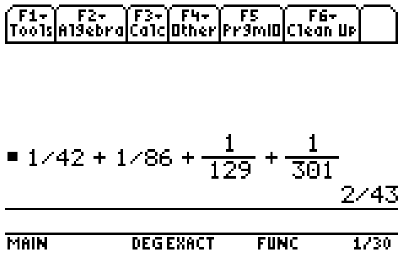
$$\frac{a}{bc} = \frac{1}{b \cdot \dfrac{b+c}{a}} + \frac{1}{c \cdot \dfrac{b+c}{a}}.$$

and this gives the Ahmes result in certain cases but not in others. Thus, $\frac{2}{15} = \frac{2}{3 \cdot 5}$, and $3 + 5 = 4 \cdot 2$. This fraction, therefore, is equal to $\frac{1}{12} + \frac{1}{20}$, but Ahmes gives $\frac{1}{10} + \frac{1}{30}$. See Eisenlohr, *Ahmes Papyrus*, p. 28; G. Loria, *Bibl. Math.*, VI (2), 97; VII (2), 84; Peet, *Rhind Papyrus*, p. 34.

f) Bien que daté, l'ouvrage consulté est en principe très sûr (c'est du moins ce que *y* croit) : il le regarde donc *a priori* comme un ***milieu***, et tient ce qu'il « répond » pour assuré. De son « message », on peut tirer en particulier ceci : l'écriture d'une fraction comme somme de quantièmes ***n'est pas unique***. Mais il serait léger de s'en tenir là et de ne pas chercher à ***vérifier les assertions avancées***.

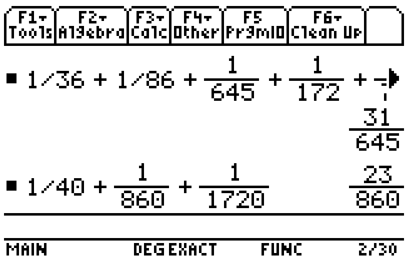
➔ Pour cela, *y* consulte maintenant un ***deuxième milieu*** : une calculatrice d'aujourd'hui. Pour les trois premières égalités énoncées par l'auteur, ce milieu répond ce qui s'affiche sur les copies d'écran que voici.





La calculatrice confirme donc le message du livre de Smith.

➔ Pourtant, de façon inattendue, les choses changent avec les deux égalités suivantes : la calculatrice, cette fois, ne délivre pas la réponse espérée sur la foi du média écouté.



Dans le premier cas, en effet, on attendait $\frac{30}{645}$, fraction égale à $\frac{2}{43}$; or on obtient $\frac{31}{645}$. Le second cas est beaucoup plus loin du but : on a en effet, ici, $\frac{23}{860} \approx \frac{2}{75}$, ce qui est fort différent de $\frac{2}{43}$.

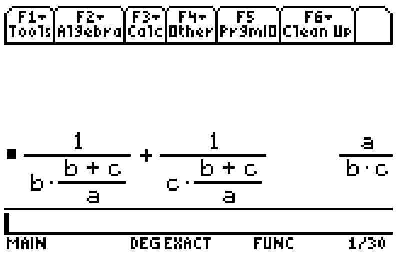
➔ La conclusion tirée plus haut – la ***non-unicité*** de la décomposition d'une fraction en quantièmes – est toutefois confortée. Dans cette perspective, notons que, pour qui connaît le calcul algébrique sur les fractions – ***autre milieu essentiel*** –, l'égalité

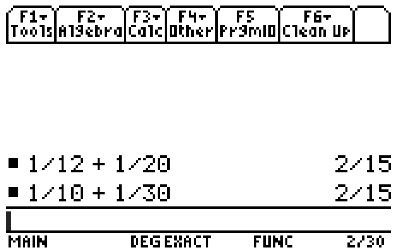
$$\frac{a}{bc} = \frac{1}{b \cdot \frac{b+c}{a}} + \frac{1}{c \cdot \frac{b+c}{a}}$$

est de vérification immédiate ; on a en effet ceci :

$$\frac{1}{b\cdot\frac{b+c}{a}}+\frac{1}{c\cdot\frac{b+c}{a}}=\frac{a}{b(b+c)}+\frac{a}{c(b+c)}=\frac{ac}{bc(b+c)}+\frac{ab}{bc(b+c)}=\frac{a(c+b)}{bc(b+c)}=\frac{a}{bc}.$$

➔ La calculatrice déjà utilisée confirme le résultat algébrique précédent (voir ci-dessous, à gauche). Et on a bien, également, les deux autres décompositions numériques avancées (ci-dessous, à droite).





g) Arrêtons-nous un instant pour souligner deux points solidaires : tout d'abord, ce média vénérable qu'est le livre de D. E. Smith contient des ***erreurs mathématiques élémentaires*** ; ensuite, notre éducation scolaire (et universitaire) nous conduit à écourter abusivement la dialectique des médias et des milieux, dans laquelle, au vrai, nous avons tendance à éviter de nous engager.

➔ L'enquêteur, lui, se tourne maintenant vers des médias « modernes ». Il est en effet facile de trouver sur le Web une foule de documents contribuant à fabriquer une réponse à la question Q_1 examinée. Ainsi, dans l'article de l'encyclopédie Wikipedia intitulé *Unit fraction*, on peut lire par exemple ceci (http://en.wikipedia.org/wiki/Unit_fraction).

Any positive rational number can be written as the sum of unit fractions, in multiple ways.

➔ L'article *Egyptian Fraction* du site Wolfram MathWorld livre de nombreuses informations. On en a reproduit – ci-après – les deux premiers paragraphes (http://mathworld.wolfram.com/EgyptianFraction.html).

An Egyptian fraction is a sum of positive (usually) distinct unit fractions. The famous Rhind papyrus, dated to around 1650 BC contains a table of representations of $2/n$ as Egyptian fractions for odd n between 5 and 101. The reason the Egyptians chose this method for representing fractions is not clear, although André Weil characterized the decision as "a wrong turn" (Hoffman 1998, pp. 153-154). The unique fraction that the Egyptians did not represent using unit fractions was 2/3 (Wells 1986, p. 29).

Egyptian fractions are almost always required to exclude repeated terms, since representations such as 1/5+1/5+1/5 are trivial. Any rational number has representations as an Egyptian fraction with arbitrarily many terms and with arbitrarily large denominators, although for a given fixed number of terms, there are only finitely many. Fibonacci proved that any fraction can be represented as a sum of distinct unit fractions (Hoffman 1998, p. 154).

……………………………………………………………..…….……………………………………

No algorithm is known for producing unit fraction representations having either a minimum number of terms or smallest possible denominator (Hoffman 1998, p. 155). However, there are a number of algorithms (including the binary remainder method, continued fraction unit fraction algorithm, generalized remainder method, greedy algorithm, reverse greedy algorithm, small multiple method, and splitting algorithm) for decomposing an arbitrary fraction into unit fractions. In 1202, Fibonacci published an algorithm for constructing unit fraction representations, and this algorithm was subsequently rediscovered by Sylvester (Hoffman 1998, p. 154; Martin 1999).

➔ Il n'est pas difficile de trouver encore une démonstration du résultat de Fibonacci (voir le site PlanetMath : http://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&id=3127). Le principe est simple. Soit une fraction $\frac{a}{b} \in\ ]0\ ;\ 1[$. (Le cas $\frac{a}{b} = 1$ est trivial : on a $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.) On cherche le plus grand quantième $\frac{1}{n}$ (c'est-à-dire le plus petit entier n) tel que

$$\frac{1}{n} \leq \frac{a}{b}.$$

Comme $\frac{a}{b} - \frac{1}{n} = \frac{na - b}{nb}$, il s'agit de choisir le premier entier n tel que na dépasse (au sens large) l'entier b. Par exemple, pour $a = 2$ et $b = 43$, on a $n = 22$. D'une façon générale, cela revient à choisir n comme le plus petit entier tel que

$$\frac{a}{b} \geq \frac{1}{n} \text{ ou } \frac{b}{a} \leq n.$$

L'entier n est donc le quotient de b par a si celui-ci est entier, le quotient augmenté de 1 sinon ; soit le « plafond » (*ceiling*), qu'on note

$$n = \left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil.$$

On a alors : $\frac{a}{b} = \frac{1}{n} + \frac{a'}{b'}$ où $\frac{a'}{b'} = \frac{na - b}{nb}$. Il resterait maintenant à démontrer 1° que, en répétant sur $\frac{a'}{b'}$ l'opération réalisée sur $\frac{a}{b}$, on obtient un entier $n' > n$, et 2) que l'algorithme se termine. Examinons le cas de $\frac{a}{b} = \frac{2}{43}$. On a vu que $n = 22$; on a $\frac{a'}{b'} = \frac{na - b}{nb} = \frac{1}{946}$: l'algorithme se termine là, et il vient donc

$$\frac{2}{43} = \frac{1}{22} + \frac{1}{946}$$

ce que la calculatrice, interrogée, confirme.

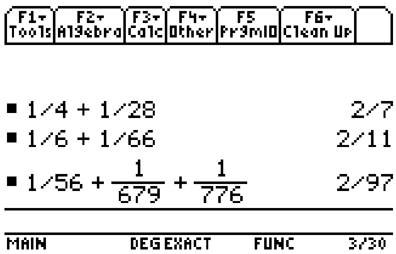
h) Le petit PER amorcé ici ***peut et doit se poursuivre***, ne serait-ce par exemple que pour ***contrôler la démonstration*** proposée par le site mentionné plus haut.

➔ D'une manière générale, en effet, la disponibilité ou l'établissement d'une « démonstration » (au sens mathématique du terme) ne clôt pas davantage la dialectique médias/milieux où elle prend place que ne le fait le recours à telle ou telle « autorité ». Car qu'est-ce qui prouve que cette démonstration, qui n'est d'abord qu'un message proposé par un média, ne comporterait pas d'erreur ? On pourra par exemple rechercher ***d'autres démonstrations***, prenant place dans des organisations déductives apparemment indépendantes de celles déjà sollicitées.

➔ D'une façon plus générale, on cherchera à corroborer les conclusions établies en les confrontant encore à de multiples milieux, ou, indirectement, en s'informant sur les conclusions tirées par qui a eu accès à des milieux qui semblent appropriés. Ouvrons par exemple le *Dictionnaire Penguin des nombres curieux* de David Wells (2[e] édition française, Eyrolles, Paris, 1998). Cet ouvrage consacre au nombre 2/3 le développement suivant.

> Seule fraction « égyptienne » non représentative, puisque les Égyptiens n'utilisaient que des fractions unitaires, à l'exception de celle-ci. Toutes les autres grandeurs fractionnelles *(sic)* étaient exprimées par des sommes de fractions unitaires.
>
> Extrait du papyrus Rhind : diviser 7 pains à *(sic)* 10 hommes. – Réponse :
>
> 2/3 + 1/30.
>
> Comme ils multipliaient par doublements répétés et additions, ils utilisaient des tables donnant les doubles fractions unitaires. Le papyrus Rhind fournit ainsi une table qui va jusqu'au double de 1/101.
>
> 2/7 = 1/4 + 1/28
>
> 2/11 = 1/6 + 1/66
>
> 2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776
>
> Les fractions égyptiennes sont fertiles en problèmes. Erdös et Sierpinski ont par exemple conjecturé, respectivement, que 4/*n* et 5/*n* sont chacune décomposable, pour tout *n*, en somme de 3 fractions unitaires.

➔ On a bien $\frac{2}{3} + \frac{1}{30} = \frac{20}{30} + \frac{1}{30} = \frac{21}{30} = 7$. Quand aux autres décompositions, elles ne sont pas contestées par la calculatrice (ci-après).



i) En ce point, l'enquêteur commence à devenir « savant » sur le sujet étudié – ce qui lui permettra peut-être de pérorer inutilement devant autrui. Les connaissances ainsi acquises pourront, en revanche, être réellement utiles lors de l'étude ***d'autres questions sur le même thème***. Souvent aussi, il est vrai, elles demeureront durablement ***sans emploi***, au point de s'effacer un jour de sa mémoire. Pourtant, produites dans le cadre d'une dialectique médias/milieux, elles enrichiront le « trésor » potentiel (et volatil) des ressources exploitables pour nourrir de futures dialectiques médias/milieux.

4. La dialectique des boîtes noires et des boîtes grises

a) Dans l'appel à des œuvres O_k au cours d'un PER, certains aspects de ces œuvres – qu'elle qu'en soit la nature – ne seront pas approfondis : ils demeureront des ***boîtes noires***, alors que l'étude aurait pu en faire des boîtes ***claires*** ou, du moins, des boîtes ***grises***, à des niveaux de gris variables. La ***dialectique des boîtes noires et des boîtes claires*** (ou des boîtes grises) est un autre savoir-faire didactique clé dans la conduite d'un PER, qui doit permettre d'éviter un double écueil : d'un côté, celui de croire qu'on ne peut rien faire parce qu'on ne possèderait pas « à fond » les outils à mobiliser (lesquels ne seraient donc pas regardés comme des boîtes claires), ce qui est un obstacle didactique ***d'origine scolaire*** ; d'un autre côté, l'illusion – engendrée du même mouvement par l'éducation scolaire – que l'on saurait « tout » de tel outil dont on se propose de faire usage dans le PER. On illustrera le problème et le principe de son traitement sur un nouvel exemple.

b) Considérons le problèmes des événements ***rares*** : nous sommes accoutumés à raisonner sur des événements ***fréquents*** et sommes souvent déconcertés par la survenue d'événements plus ou moins exceptionnels. Voici un exemple emprunté à un ouvrage sur lequel nous allons revenir.

> Le 2 août 2005, un avion d'Air France sort de piste lors de son atterrissage à Toronto et s'enflamme : les 309 passagers en sortent indemnes. Le 6 août, un avion de Tuninter s'abîme en mer à proximité de Palerme : 14 victimes parmi les 39 personnes à bord. Le 14 août, un avion d'Helios Airways percute une montagne près d'Athènes : les 121 passagers sont tués. Le 16 août, un avion de West-Caribbean s'écrase au Venezuela : 160 morts. Le 23 août, un avion de Tans s'écrase en Amazonie : 40 victimes parmi les 98 voyageurs.

➔ Les auteurs cités ajoutent : « Face à cette terrible succession de crashs aériens (cinq en vingt-deux jours !), c'est bien sûr la loi des séries qui est invoquée. »

➔ La ***loi des séries*** (l'expression a été forgée en allemand : *Das Gesetz der Serie*), la mystérieuse loi des séries si chères à certains commentateurs, est-elle nécessaire pour « expliquer » qu'une telle recrudescence d'accidents aériens ait pu avoir lieu ? Ou bien peut-on dire que ***le hasard « ordinaire » suffit à expliquer*** les faits observés ?

➔ Cette question, Q_2, est posée aux pages 6 et 7 d'un opuscule qui en comporte 61 : *La loi des séries, hasard ou fatalité ?*, d'Élise Janvresse et Thierry de la Rue (Le Pommier, 2007). À la page 39, le ***compte rendu d'enquête*** des auteurs est pratiquement terminé : un certain parcours d'étude et de recherche les a conduit à la conclusion ci-après.

> … la probabilité pour que se produise une succession d'au moins cinq accidents [aériens] en vingt-deux jours sur une année est d'environ 0,11. En d'autres termes, il y a chaque année plus de 1 chance sur 10 d'en observer une.

➔ Entre-temps, tout un outillage praxéologique (de nature en général mathématique) aura été parfois juste entraperçu (ainsi en va-t-il de la notion de « statistique de balayage », en anglais *scan statistics*), mais parfois aussi franchement sollicité, étudié et partiellement clarifié, à moins qu'il n'ait été traité comme une « boîte noire », de façon provisoire ou définitive.

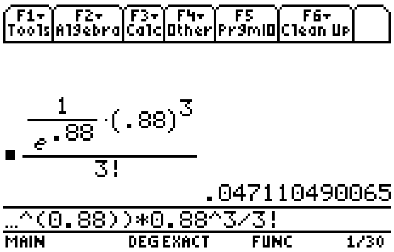
c) Dans un PER donné, le maniement de la dialectique des boîtes claires et des boîtes noires résulte en partie de ***choix*** personnels ou institutionnels.

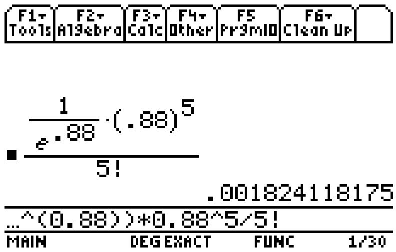
➔ Étudiant le compte rendu d'enquête des auteurs, et mis face à la formule donnant la loi de Poisson (*op. cit.*, p. 35), à savoir

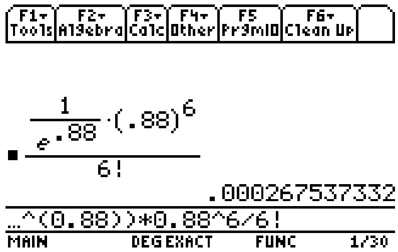
$$\mathrm{P}(n) = (1/\mathrm{e}^{\lambda}) \times \lambda^n/n!,$$

le « lecteur » pourra décider de s'en tenir en un premier temps au « déchiffrage » de cette écriture strictement nécessaire pour en confier la mise en œuvre à une calculatrice appropriée.

➔ La chose n'est déjà pas entièrement triviale : sur la calculatrice que l'on utilise ici, ainsi, il faut identifier la fonction exponentielle, la fonction puissance, la fonction factorielle afin déjà de « recopier » la formule, que l'on pourra alors tester grâce à un tableau de quelques valeurs données par les auteurs.







➔ Le fait de « travailler » un peu l'expression proposée afin de pouvoir disposer par exemple de l'une ou de l'autre des égalités

$$(1/e^{\lambda}) \times \lambda^{n}/n! = \frac{\lambda^{n}}{e^{\lambda} \times n!} \text{ et } (1/e^{\lambda}) \times \lambda^{n}/n! = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{n}}{n!}$$

pourra, en revanche, ne pas être immédiatement possible : la formule lue dans le petit livre étudié est d'abord « inerte ». Il faudra mettre en relation le coût d'apprendre à la faire « bouger » correctement et le gain qu'on espère retirer d'un tel apprentissage avant de prendre la décision d'étudier plus avant l'algèbre des fonctions utilisées – sans parler encore de les « construire » !

➔ Ainsi s'initie-t-on à parcourir à pied, par des chemins que l'on ouvre au fur et à mesure, un paysage praxéologique (ici, mathématique) vers lequel on reviendra encore et encore, au lieu de le traverser à vive allure, sans pause ni répit, une fois pour toutes, comme en un voyage trop bien organisé.

Annexe 1

(d'après http://fr.wikipedia.org/wiki/Pourcentage#_ref-1)

POURCENTAGE

Un **pourcentage** est une façon d'exprimer une proportion ou une fraction d'un ensemble.

On compare une valeur particulière (ou une population partielle, population étant entendu au sens statistique) à une valeur de référence (ou une population totale) et on cherche à déterminer ce que vaudrait cette valeur particulière (ou cette population partielle) si la valeur de référence (ou la population totale) était ramenée à 100 sachant que les proportions sont respectées.

Ainsi, si, dans une population de 400 personnes, 56 d'entre elles ont une particularité P, on rencontrerait, si les proportions étaient respectées, dans une population de 100 personnes, 14 personnes ayant la particularité P. On écrit alors que, parmi les 400 personnes (population de référence) 14 % (lu 14 pour cent) d'entre elles vérifient la particularité P.

Le calcul de ce pourcentage revient à trouver le numérateur d'une fraction dont le dénominateur serait 100 et qui serait égale à $\frac{56}{400}$. C'est ainsi que l'on confond souvent la fraction de dénominateur 100 avec le pourcentage et donc le pourcentage avec le nombre décimal 0,14. Cette confusion, très pratique en mathématique, induit parfois des incompréhensions dans le domaine technique puisque l'on rencontre souvent l'indication de calcul suivante : pourcentage de personne ayant la particularité P : $\frac{56}{400} \times 100 =$ 14.

D'usage très fréquent dans le monde actuel puisqu'on le rencontre en statistique comme en économie, le pourcentage est une notion qui peut induire de nombreuses erreurs de raisonnement.

Notation [modifier]

La notation des pourcentages semble tirer son origine de l'italien. Dans les textes du moyen âge, on peut voir des notations comme « per cento » ou « per c. » ou « p. cento ». Selon D. E. Smith [1], la première trace d'un symbole voisin de celui utilisé actuellement, se trouve dans un manuscrit italien anonyme écrit vers 1425 sous la forme $p.\frac{o}{o}$. Le p s'est ensuite perdu et la barre est devenue oblique. Les deux « o » ont ensuite été assimilés aux deux zéros de 100 ce qui a conduit à noter ‰ le symbole « pour mille ».

Le signe « % » en typographie française doit être précédé et suivi d'une espace forte [2].

Dans d'autres langues, et notamment en anglais, le signe est collé au chiffre.

Calculs élémentaires **[modifier]**

Calculer un pourcentage **[modifier]**

Dans une assemblée de 50 personnes, il y a 31 femmes ; celles-ci représentent 62 % de l'assemblée car :

$$\frac{31}{50} = 0{,}62 = \frac{62}{100}$$

On peut aussi voir le problème comme la recherche d'une quatrième proportionnelle : il s'agit de trouver t tel que :

$$\frac{31}{50} = \frac{t}{100} \text{ soit } t = \frac{31 \times 100}{50}.$$

Quand on compare une valeur particulière à une valeur de référence, il est possible d'obtenir des pourcentages dépassant 100 %. Si le coût d'un produit passe de 30 euros à 48 euros et si on considère que le premier prix est une valeur de référence, le second prix représente 160 % du premier prix car :

$\frac{48}{30} = 1,6 = \frac{160}{100}$.

Cet aspect du pourcentage est particulièrement utilisé en économie dans la notion d'indice.

Appliquer un pourcentage [modifier]

Appliquer un pourcentage, c'est retrouver la valeur étudiée (ou la population partielle) connaissant le pourcentage et la valeur (ou la population) de référence. Cette valeur étudiée se détermine en multipliant la valeur de référence par le décimal associé au pourcentage.

Si une assemblée de 120 personnes compte 15 % de femme, alors il y a 18 femmes dans cette assemblée car :

$120 \times 0,15 = 18$.

On peut aussi voir le problème comme la recherche d'une quatrième proportionnelle : il faut trouver n tel que :

$\frac{n}{120} = \frac{15}{100}$ ce qui conduit à $n = 120 \times \frac{15}{100}$.

Le prix hors taxes d'un objet est 120 €. Le taux de TVA est de 5 %. Celle-ci s'élève donc à 6 € car :

$120 \times 5\ \% = 120 \times \frac{5}{100} = 120 \times 0,05 = 6$.

Retrouver la valeur de référence [modifier]

Cette valeur de référence se trouve en divisant la valeur étudiée ou la population partielle par le décimal associé au pourcentage.

Dans une assemblée il y a 36 femmes, elles représentent 30 % de l'assemblée donc l'assemblée est formée de 120 individus car :

$\frac{36}{0,3} = 120$.

On peut aussi voir le problème comme la recherche d'une quatrième proportionnelle : il faut trouver N tel que :

$\frac{36}{N} = \frac{30}{100}$ soit $36 \times 100 = 30 \times N$ soit $N = \frac{36 \times 100}{30}$

Le prix TTC d'un objet est de 198 €. Ce prix représente 119,6 % du prix HT. Le prix HT (hors taxe) est donc de 165,55 € car

$\frac{198}{1,196} \approx 165,55$.

Pourcentage d'augmentation et de réduction [modifier]

En économie et dans les taux d'intérêts, l'étude porte sur des variations en pourcentage, des augmentations ou des réductions. On peut tout à fait décomposer le calcul en deux temps : calcul de l'augmentation ou de la réduction, puis calcul de la valeur finale en effectuant une addition ou une soustraction. Mais il est préférable de voir ces augmentations ou ses réductions comme issues de l'application d'un coefficient multiplicateur. Seul cet aspect des choses permet de retrouver efficacement une valeur de référence ou d'appliquer des augmentations successives.

Calculer la valeur finale [modifier]

Une **augmentation** de t % se traduit par une multiplication par $1 + \frac{t}{100}$, et une **diminution** de t % par une multiplication par $1 - \frac{t}{100}$.

Des variations successives à taux fixe conduisent à des progressions géométriques. Ainsi, augmenter 35 fois de 2 % revient à multiplier par $1{,}02^{35}$, c'est-à-dire 1,99989, soit quasiment par 2. Et diminuer 35 fois de 2 % revient à multiplier par 0,9835, c'est-à-dire à diviser par 2,028, soit un peu plus de 2.

Retrouver la valeur de référence [modifier]

Pour retrouver la valeur de référence, il suffit alors de diviser la valeur finale par le coefficient multiplicateur.

Après une solde de 15 % le prix d'un objet n'est plus que de 34 €, le prix initial de l'objet était donc de 40 € car :

la réduction correspond à une multiplication par 1 – 0,15 = 0,85

$\frac{34}{0{,}85} = 40.$

Pourcentage de pourcentage [modifier]

On peut être amené à multiplier entre eux des pourcentages. C'est le cas par exemple des pourcentages de pourcentage. Dans cette assemblée, il y a 36 % de femmes et 25 % de ces femmes sont âgées de plus de 50 ans. Il y a donc 9 % de femmes âgées de plus de 50 ans dans l'assemblée car :

$\frac{25}{100} \times \frac{36}{100} = \frac{9}{100}.$

On peut voir le problème en se ramenant à une assemblée de 100 personnes. Parmi celles-ci 36 seraient des femmes et 25 % de ces 36 femmes seraient âgées de plus de 50 ans. Or 25 % de 36 correspond à 9 donc dans une assemblée de 100 personnes, il y aurait 9 femmes de plus de cinquante ans.

Usage des pourcentages [modifier]

Statistique [modifier]

En statistique, quand on étudie une variable statistique, les effectifs associés aux différentes valeurs du caractère sont parfois difficiles à bien évaluer. Se ramener alors a une population de 100, revient à présenter des répartitions sous formes de pourcentage. On parle alors de fréquence.

On rencontre les pourcentages dans les sondages d'opinion alors que la population interrogée est rarement de 100 personnes. On les rencontre aussi dans les résultats d'élections.

Domaine économique ou financier [modifier]

Dans les finances, on rencontre les pourcentages dans les calculs de TVA : une TVA de 19,6 % consiste à ajouter à un prix hors taxes (prix HT) une taxe correspondant à 19,6 % du prix HT. On obtient alors un prix toutes taxes comprises (prix TTC) qui correspond au prix HT multiplié par 1,196.

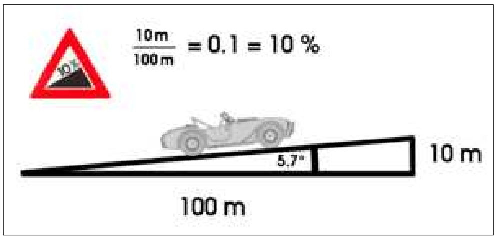
On les rencontre aussi dans les taux d'intérêts : un somme placée ou empruntée pendant un an à un taux d'intérêt de *t* % a été multipliée en fin d'année par $1 + \frac{t}{100}$.

Les taux d'imposition qui représentent une fraction du revenu d'un ménage sont aussi exprimés sous forme de pourcentage.

En économie, un indice est la valeur d'une grandeur économique par rapport à une valeur de référence. Par exemple, si, en 2004, le prix moyen des appartements au mètre carré dans une ville a augmenté de 22 % par rapport à l'année 2000, servant de référence (indice 100), on dira que l'indice du prix moyen des appartements est de 122 en 2004. L'indice est donc une présentation particulière d'un pourcentage.

Topographie [modifier]

Les panneaux routiers indiquent les pentes des routes en pourcentage. Une pente de 10 % signifie qu'à un déplacement horizontal de 100 m, correspond un déplacement vertical de 10 m. La pente correspond alors à la tangente de l'angle d'inclinaison de la route.



Panneau routier indiquant une pente de 10 % ou un angle de 5,71°

Métrologie [modifier]

En métrologie, les mesures ne peuvent pas être connues avec une précision absolue. Les calculs d'erreur ou les calculs d'incertitude sont souvent présentés en pourcentage. Quand on dit que le poids d'une conserve est connu à 5 % près, cela signifie que, si le poids de la conserve est supposé valoir 500 grammes, il peut se glisser une erreur 25 grammes en excès ou en défaut.

Œnologie [modifier]

En œnologie, le degré alcoolique d'une boisson alcoolisée est le pourcentage en volume d'alcool pur contenu dans une boisson. Ainsi, si on prend un verre de 100 ml de vin titré à 12 % vol, on absorbe 12 ml d'alcool pur soit environ $12 \times 0{,}8 = 9{,}6$ grammes d'alcool pur.

Le terme de degré pris à la place de pourcentage provient de l'ancienne unité utilisée : le degré Gay-Lussac (GL). Un degré GL correspondant à un pourcentage d'alcool pur de 1 %.

Dangers et pièges [modifier]

L'importance des pourcentages dans l'analyse des données statistiques, leur présence dans les résultats de sondages et dans les indicateurs économiques leur confèrent un statut officiel de science. Cependant, le pourcentage est une vision réductrice d'une réalité et son usage abusif pour conduire à des erreurs de raisonnement que Sylviane Gasquet souligne dans son livre *Plus vite que son nombre*.

Le pourcentage n'est pas un nombre [modifier]

La représentation du pourcentage sous forme d'une fraction, sa transformation en décimal, lui confère un statut apparent de nombre mais il n'a pas les qualités normalement attribuées à un nombre : il n'est pas possible d'effectuer des sommes de pourcentage dans l'absolu. On ne peut pas faire de sommes de pourcentage et leur donner un sens, sauf si ces pourcentages correspondent à deux populations partielles disjointes associées à la même population de référence. En particulier deux augmentations successives de 10 % ne donnent pas une augmentation de 20 % mais de 21 %. Quant au produit de pourcentage, il obéit à des règles très restrictives. De même, comparer des pourcentages peut se révéler mener à des contresens si la population de référence change dans les deux comparaisons.

L'importance de l'univers de référence [modifier]

Le fait de ramener l'effectif à 100 tend à donner moins d'importance à la population de référence qui parfois même disparaît du discours final. Cela peut induire un certain nombre de contresens.

Deux phénomènes peuvent contribuer à l'augmentation d'un pourcentage : l'augmentation de la population partielle, la diminution de la population totale.

Un mauvais choix de l'univers de référence induit le lecteur à une mauvaise interprétation du pourcentage. Sylviane Gasquet cite l'exemple du redoublement en seconde : dans l'expression, il y a 50 % de redoublement en seconde, l'univers de référence a disparu. Il faudrait dire, dans une classe de seconde, 50 % des élèves sont amenés à redoubler. Comme la moitié de la classe est déjà formée de redoublants qui, on l'espère ne vont pas tripler, c'est que 100 % des non-redoublants sont condamnés à redoubler.

Un taux de TVA s'applique au prix hors taxe et non au prix TTC.

Pourcentage et point [modifier]

Quand une population partielle est passée de 10 % à 12 %, il est délicat de parler de l'augmentation. Une erreur fréquente est de dire que la population a augmenté de 2 %. En effet, en supposant que la population de référence soit de 100 individus et ne change pas entre la première et la seconde mesure (ce qui est rarement le cas), la population partielle passerait de 10 individus à 12 individus, soit une multiplication par 1,2 c'est-à-dire une augmentation de 20 %. Or pourtant, il est utile de chiffrer cette variation : premier pourcentage 10 % , second 12 %. On parle alors d'une augmentation de 2 points.

Pourcentage composé [modifier]

Lors de hausses et de baisses successives, la tentation est grande d'ajouter et soustraire les pourcentages d'augmentation.

Il est tentant de penser qu'une augmentation de 10 % suivie d'une baisse de 10 % ramène à la valeur initiale. Mais ces pourcentages ne correspondent pas à la même population de référence. En reprenant la technique du coefficient multiplicatif et l'appliquant à une quantité Q on s'aperçoit que les 10 % d'augmentation reviennent à multiplier la quantité Q par 1,1 et que la réduction, s'appliquant à $1{,}1 \times Q$, revient à multiplier cette quantité par 0,9. Or $0{,}9 \times 1{,}1 \times Q = 0{,}99 \times Q$ ce qui correspond à une baisse de 1 %.

Voir aussi [modifier]

Articles connexes [modifier]

* Pourmille
http://fr.wikipedia.org/wiki/Pourmille

* Partie par million
http://fr.wikipedia.org/wiki/Partie_par_million

* Per unit
http://fr.wikipedia.org/wiki/Per_unit

* TCAM
http://fr.wikipedia.org/wiki/TCAM

Bibliographie [modifier]

* Sylviane Gasquet-More, *Plus vite que son nombre*, éditions du seuil (ISBN 2-02-034563-3)

Liens externes [modifier]

* Pour apprendre sans peine
http://www.virtuel.bdeb.qc.ca/intermath/mathgen/menupri3.htm

* Représenter facilement des pourcentages
http://www.math-en-main.com/

Notes et références [modifier]

[1] Voir en anglais ce site :

http://members.aol.com/jeff570/fractions.html

[2] *Typographie : les règles de la ponctuation française* sur le site Rêve-En-Joie Poesie :

http://www.reveenjoie-poesie.com/outils-linguistiques/Typographie_francaise.html

Annexe 2

(d'après http://en.wikipedia.org/wiki/Percent#_note-0)

Percentage

In mathematics, a percentage is a way of expressing a number as a fraction of 100 (per cent meaning "per hundred"). It is often denoted using the percent sign, "%". For example, 45% (read as "forty-five percent") is equal to 45/100, or 0.45.

Percentages are used to express how large one quantity is relative to another quantity. The first quantity usually represents a part of, or a change in, the second quantity. For example, an increase of $ 0.15 on a price of $ 2.50 is an increase by a fraction of 0.15/2.50 = 0.06. Expressed as a percentage, this is therefore a 6% increase.

Although percentages are usually used to express numbers between zero and one, any dimensionless proportionality can be expressed as a percentage. For instance, 111% is 1.11 and −0.35% is −0.0035.

Proportions

Percentages are correctly used to express fractions of the total. For example, 25% means 25/100 or "one quarter".

Percentages larger than 100%, such as 101% and 110%, may be used as a literary paradox to express motivation and exceeding of expectations. For example, "We expect you to give 110% [of your ability]", however there are cases when percentages over 100 can be meant literally (such as "a family must earn at least 125% over the poverty line to sponsor a spouse visa").

Calculations

The fundamental concept to remember when performing calculations with percentages is that the percent symbol can be treated as being equivalent to the pure number constant 1/100 = 0.01. For example, 35% of 300 can be written as 35(0.01)(300) = 105.

To find the percentage of a single unit in the whole, divide 100 by the whole. For instance, if you have 1250 apples, and you want to find out what percentage of the 1250 apples a single apple represents, 100/1250 would provide the answer of 0.08%.

To calculate a percentage of a percentage, convert both percentages to fractions of 100, or to decimals, and multiply them. For example, 50% of 40% is:

(50/100)(40/100) = (0.50)(0.40) = 0.20 = 20%.

It is not correct to divide by 100 and use the percent sign at the same time. (E.g. 25% = 25/100 = 0.25, not 25%/100, which is actually (25/100)/100 = 0.0025.)

An example problem

Whenever we talk about a percentage, it is important to specify what it is relative to, i.e. what the total is that corresponds to 100%. The following problem illustrates this point.

In a certain college 60% of all students are female, and 10% of all students are computer science majors. If 5% of females are computer science majors, what percentage of computer science majors are female?

We are asked to compute the ratio of female computer science majors to all computer science majors. We know that 60% of all students are female, and among these 5% are computer science majors, so we conclude that $.6 \times .05 = .03$ or 3% of all students are female computer science majors. Dividing this by the 10% of all students that are computer science majors, we arrive at the answer: 3% / 10% = .3 or 30% of all computer science majors are female.

This example is closely related to the concept of conditional probability.

Here are other examples:

1. What is 200% of 30?

Answer: X = 200% × 30, therefore X = (30 × 200 × 0.01) = 60

2. What is 13% of 98?

Answer: X = 13% × 98, therefore X = (98 × 13 × 0.01) = 12.74

3. 60% of all university students are male. There are 2400 male students. How many students are in the university?

Answer: 2400 = 60% × X, therefore X = (2400/(60 × 0.01)) = 4000

4. There are 300 cats in the village, and 75 of them are black. What is the percentage of black cats in that village?

Answer: 75 = X% × 300, therefore X = (75 / 300) / 0.01 = 25%

Percent increase and decrease

Due to inconsistent usage, it is not always clear from the context what a percentage is relative to. When speaking of a "10% rise" or a "10% fall" in a quantity, the usual interpretation is that this is relative to the initial value of that quantity. For example, if an item is initially priced at $200 and the price rises 10% (an increase of $20), the new price will be $220. Note that this final price is 110% of the initial price (100% + 10% = 110%).

Some other examples of percent change:

* An increase of 100% in a quantity means that the final amount is 200% of the initial amount (100% of initial + 100% of initial = 200% of initial); in other words, the quantity has doubled.

* An increase of 800% means the final amount is 9 times the original (100% + 800% = 900% = 9 times as large).

* A decrease of 60% means the final amount is 40% of the original (100% − 60% = 40%).

* A decrease of 100% means the final amount is zero (100% − 100% = 0%).

In general, a change of x percent in a quantity results in a final amount that is $100 + x$ percent of the original amount (equivalently, $1 + 0.01x$ times the original amount).

It is important to understand that percent changes, as they have been discussed here, do not add in the usual way. For example, if the 10% increase in price considered earlier (on the $200 item, raising its price to $220) is followed by a 10% decrease in the price (a decrease of $22), the final price will be $198, not the original price of $200.

The reason for the apparent discrepancy is that the two percent changes (+10% and −10%) are measured relative to different quantities ($200 and $220, respectively), and thus do not "cancel out".

In general, if an increase of x percent is followed by a decrease of x percent, the final amount is $(1 + 0.01x)(1 - 0.01x) = 1 - (0.01x)^2$ times the initial amount — thus the net change is an overall decrease by x percent of x percent (the square of the original percent change when expressed as a decimal number).

Thus, in the above example, after an increase and decrease of $x = 10$ percent, the final amount, $198, was 10% of 10%, or 1%, less than the initial amount of $200.

In the case of interest rates, it is a common practice to state the percent change differently. If an interest rate rises from 10% to 15%, for example, it is typical to say, "The interest rate increased by 5%" — rather than by 50%, which would be correct when measured as a percentage of the initial rate (i.e., from 0.10 to 0.15 is an increase of 50%). Such ambiguity can be avoided by using the term "percentage points". In the previous example, the interest rate "increased by 5 percentage points" from 10% to 15%. If the rate then drops by 5 percentage points, it will return to the initial rate of 10%, as expected.

Word and symbol

Main article: Percent sign
http://en.wikipedia.org/wiki/Percent_sign

In British English, *percent* is usually written as two words (per cent, although *percentage* and *percentile* are written as one word). In American English, percent is the most common variant (but cf. *per mille* written as two words). In EU context the word is always spelled out in one word *percent*, despite the fact that they usually prefer British spelling, which may be an indication that the form is becoming prevalent in British spelling as well. In the early part of the twentieth century, there was a dotted abbreviation form "*per cent.*", as opposed to "*per cent*". The form "*per cent.*" is still in use as a part of the highly formal language found in certain documents like commercial loan agreements (particularly those subject to, or inspired by, common law), as well as in the Hansard transcripts of British Parliamentary proceedings. While the term has been attributed to Latin *per centum*, this is a pseudo-Latin construction and the term was likely originally adopted from Italian per cento or French pour cent. The concept of considering values as parts of a hundred is originally Greek. The symbol for percent (%) evolved from a symbol abbreviating the Italian *per cento*.

Grammar and style guides often differ as to how percentages are to be written. For instance, it is commonly suggested that the word percent (or per cent) be spelled out in all texts, as in "1 percent" and not "1%." Other guides prefer the word to be written out in humanistic texts, but the symbol to be used in scientific texts. Most guides agree that they always be written with a numeral, as in "5 percent" and not "five percent," the only exception being at the beginning of a sentence: "Ninety percent of all writers hate style guides." Decimals are also to be used instead of fractions, as in "3.5 percent of the gain" and not "3 ½ percent of the gain." It is also widely accepted to use the percent symbol (%) in tabular and graphic material. Variations of practically all of these rules may be encountered, including in this article; the only really fast rule is to be consistent. It is important to know what method of solving the problem you would use.

In the USA, fractions of 1% are described in a verbose manner, e.g. "0.5%" is usually referred to as "one half of one percent". In other countries, they are usually referred to in mathematical notation (in this case "zero point five percent"). This is due to differences in educational backgrounds.

There is no consensus as to whether a space should be included between the number and percent sign in English. Style guides – such as the Chicago Manual of Style – commonly prescribe to write the number and percent sign without any space in between. [1] The International System of Units and the ISO 31-0 standard, on the other hand, require a space.[2] [3]

Related units

* Percentage point
http://en.wikipedia.org/wiki/Percentage_point

* Per mille (‰) 1 part in 1,000
http://en.wikipedia.org/wiki/Permille

* Basis point ($^{0}/_{000}$) 1 part in 10,000
http://en.wikipedia.org/wiki/Basis_point

* Per cent mille (pcm) 1 part in 100,000
http://en.wikipedia.org/wiki/Per_cent_mille

* Parts per million (ppm)
http://en.wikipedia.org/wiki/Parts_per_million

* Parts per billion (ppb)
http://en.wikipedia.org/wiki/Parts_per_billion

* Parts per trillion (ppt)
http://en.wikipedia.org/wiki/Parts_per_trillion

* Baker percentage
http://en.wikipedia.org/wiki/Baker_percentage

* Concentration
http://en.wikipedia.org/wiki/Concentration

* Grade (slope)
http://en.wikipedia.org/wiki/Grade_%28slope%29

External links

* percent-change.com percent change calculator
http://www.percent-change.com/

* Things You Should Know About Percentage Traps
http://www.thetaoofmakingmoney.com/2007/10/31/536.html

References

[1] The Chicago Manual of Style. University of Chicago Press (2003). Retrieved on 2007-01-05.
http://en.wikipedia.org/wiki/The_Chicago_Manual_of_Style

[2] The International System of Units. International Bureau of Weights and Measures (2006). Retrieved on 2007-08-06.
http://en.wikipedia.org/wiki/The_International_System_of_Units

[3] Quantities and units – Part 0: General principles. International Organization for Standardization (1999-12-22). Retrieved on 2007-01-05.
http://en.wikipedia.org/wiki/ISO_31-0