

Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux

Yves Chevallard

UMR ADEF, Université de Provence

Le texte ci-après a été voulu proche de l'exposé fait le 23 mars 2007 dans le cadre du séminaire national de didactique des mathématiques : en même temps qu'il tente d'en restituer la logique et l'essentiel de la matière, il en conserve volontairement le dépouillement et la concision. YC.

1. Médias et milieux

1.1. La notion de média

Le mot de *média* désignera ici tout système de mise en représentation d'une partie du monde naturel ou social à l'adresse d'un certain public : le « cours » du professeur de mathématiques, un traité de chimie, le journal d'un présentateur de télévision, un quotidien régional ou national, un site Internet, etc., relèvent en ce sens du système des médias.

1.2. La notion de milieu

Un *milieu* est entendu ici dans un sens voisin de celui de milieu *adidactique* en théorie des situations didactiques. On désignera en effet comme étant un milieu tout système qu'on peut regarder comme *dénué d'intention* dans la réponse qu'il peut apporter, de manière explicite ou implicite, à telle question déterminée. Le système considéré se comporte alors à cet égard comme un *fragment de « nature »*. Par contraste, à propos de nombre de questions qu'on entend leur poser, les médias sont en général mus par une certaine intention, par exemple l'intention « d'informer ». Bien entendu, un média peut, à propos de telle question particulière, être regardé comme un milieu, et être utilisé comme tel.

1.3. La dialectique médias/milieux

L'existence d'une dialectique vigoureuse (et rigoureuse) entre médias et milieux est une condition cruciale pour qu'un processus d'étude et de recherche ne se réduise pas au

recopiage acritique d'éléments de réponse épars dans les institutions de la société. Une telle exigence est en vérité consubstantielle à l'*esprit galiléen* caractéristique des sciences modernes de la nature et de la société, dans lequel la soumission à l'autorité cède la place à une culture partagée du questionnement, de la mise à l'épreuve par la construction de milieux idoines, déterministes ou statistiques, combinant dispositifs matériels et immatériels (enquête, expérimentation, raisonnement, déduction). En conséquence, l'un des grands problèmes éducatifs (et « citoyens ») de notre temps est celui de la généralisation de

Civilisation	la capacité (de l'élève, du professeur, du formateur, du chercheur, du citoyen, etc.) à situer sa pensée et son action dans une dialectique des
↓↑	médias et des milieux adéquate à l'évaluation de ses assertions et de
Société	ses décisions. Deux grandes questions doivent être gardées à l'esprit à
↓↑	cet égard. La première est d'ordre <i>économique</i> et peut s'énoncer ainsi :
École	<i>Quel est l'état actuel de développement de la dialectique</i>
↓↑	<i>médias/milieux dans nos sociétés et en particulier à l'École ?</i> La
Pédagogie	seconde est de nature <i>écologique</i> et peut se formuler comme suit :
↓↑	<i>Quelles sont les conditions et les contraintes qui commandent l'état de</i>
Disciplines	<i>développement de la dialectique médias/milieux dans nos sociétés et en</i>
↓↑	<i>particulier à l'École ?</i> La question écologique suppose une brève
Domaines	explicitation : « les conditions et les contraintes » qu'on y évoque sont
↓↑	celles que permettent de repérer les différents <i>niveaux</i> de l' <i>échelle de</i>
Secteurs	<i>co-détermination du didactique</i> , que l'on reproduit ci-après : chaque
↓↑	niveau est le siège de conditions et de contraintes qui exercent leurs
Thèmes	effets tant sur les niveaux inférieurs que sur les niveaux supérieurs –
↓↑	d'où les flèches de sens opposé figurant dans le schéma ci-contre.
Sujets	

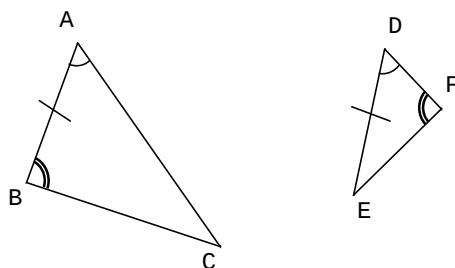
1.4. Deux exemples simples

Dans la classe de mathématiques même, et pas seulement dans la société en général, s'entend le bruissement d'un média ubiquitaire, celui des « légendes urbaines », que l'on peut appeler ici *légendes scolaires*. En voici deux exemples (sur lesquels on va revenir), sous la forme de deux assertions, θ_1 et θ_2 , qu'il conviendrait de soumettre à la juridiction de milieux appropriés.

θ_1 . « La calculatrice donne le même affichage quand on lui demande ce que valent, d’une part $3\sqrt{5}$, d’autre part $\sqrt{45}$. Cela signifie simplement que les premières décimales de ces deux nombres réels sont bien identiques, mais l’on ne sait pas s’il en sera de même par exemple avec la 30^e ou la 40^e décimale. On ne peut donc pas en conclure que $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$. »

θ_2 . « Dans l’un des trois cas d’isométrie, on parle de deux angles et un côté *compris entre les deux angles*. On retrouve la précision “compris entre les deux angles” dans l’ensemble des manuels. Mais cette précision est inutile, car si on connaît deux angles quelconques, on peut calculer la mesure du troisième angle du triangle. »

Arrêtons-nous d’abord sur le cas de l’assertion θ_1 ci-dessus. Soit $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités suivantes : $|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| = |a^2b - c| = \frac{|a^2b - c|}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}$. Il en résulte que, si $a\sqrt{b} \neq \sqrt{c}$, alors on $|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| \geq \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}$. En d’autres termes, ou bien les nombres $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ sont égaux, ou bien la valeur absolue de leur différence est minorée par un nombre non nul, $\frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}$. Il se trouve que, pour les valeurs de a, b, c usuellement retenues en classe de troisième (où l’on étudie « l’algèbre des radicaux ») font que ce minorant est suffisamment « grand » pour paraître non nul – et même « assez grand » – aux calculatrices actuelles. Lorsque $a = 3, b = 5, c = 45$, ainsi, on a $\frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} > \frac{1}{3 \times 3 + 7} = \frac{1}{16} > 0,6$; par suite, si l’on avait $3\sqrt{5} \neq \sqrt{45}$, cela se verrait sur les affichages de la calculatrice *avant la 3^e décimale*. On en conclut que, inversement, si ces affichages sont *identiques jusqu’à la 2^e décimale incluse*, alors $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$. D’une façon plus générale, l’assertion θ_1 doit être rejetée. S’agissant de l’assertion θ_2 , les figures ci-après, qui satisfont aux réquisits énoncés, mais qui ne sont visiblement pas isométriques, règlent son sort : θ_2 doit être tenue pour erronée.



1.5. Le simple et le complexe : les affres de la preuve

Bien entendu, les choses ne sont pas toujours aussi simples que dans les exemples précédents. À la page 1 du numéro 353 de mars 2007 du magazine *Pour la science*, Françoise Pétry, directrice de la rédaction et rédactrice en chef, propose ainsi sous le titre « Les affres de la démonstration » une réflexion sur les difficultés spécifiques de la preuve en divers champs scientifiques. « Les médecins, note-t-elle ainsi, ont l'intime conviction que les mesures qu'ils préconisent, fondées sur des études épidémiologiques, sont les meilleures. Encore faudrait-il préciser que les recommandations sont les meilleures au moment où elles sont faites, mais les données évoluent. » Alors que, en physique ou en chimie, les expériences sont réalisées « toutes conditions égales par ailleurs », « les paramètres sont étudiés les uns après les autres », la chose est « impossible en médecine où de nombreux facteurs influent sur la santé ». Il en va ainsi, notamment, en matière de nutrition. « Le rôle de l'alimentation sur la santé humaine, écrit Françoise Pétry, est difficile à évaluer, car les éventuelles conséquences d'une décision peuvent se manifester des années plus tard. » C'est ainsi que, « en retardant la diversification de l'alimentation des tout-petits, les médecins n'ont pas obtenu les résultats escomptés, c'est-à-dire que, loin de régresser, le nombre des cas d'allergies alimentaires ne cesse d'augmenter ». À cela il faudrait ajouter les difficultés intrinsèques auxquelles se heurtent les neuroscientifiques, les cosmologistes ou les paléontologues – lesquels par exemple « doivent se contenter de vestiges parsemés dans le temps et dans l'espace ». En particulier, la théorie de l'évolution, « étayée par un faisceau de preuves incontestables, subit pourtant régulièrement les coups de boutoir de ses détracteurs ». La dialectique des médias et des milieux est un combat. C'est à cette culture de « l'acharnement à prouver » que les élèves et les citoyens doivent être gagnés : le problème est immense.

2. Une histoire glorieuse mais difficile

2.1. Le schéma « herbartien »

Dans un cours donné à la VIII^e école d'été de didactique des mathématiques (Saint-Sauves, 22-31 août 1995), intitulé *La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique*, j'avais glissé cette citation de Johann Friedrich Herbart (1776-1841) : « Le professeur

d'Université n'est plus un enseignant (*Lehrender*), l'étudiant n'est plus un enseigné (*Lernender*) ; mais ce dernier poursuit des recherches personnelles, le professeur ayant pour tâche de le guider et de le conseiller dans ces recherches. » La configuration didactique évoquée ici peut être mise en forme comme suit, selon un schéma qu'on appellera le schéma *herbartien* :

$$(S(X, Y ; Q) \Rightarrow R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m) \Rightarrow R^\heartsuit.$$

Une équipe d'étudiants, X , qui peut être réduite à une personne, étudie, avec l'aide et/ou sous la direction de divers « aides à l'étude » ou « directeurs d'étude » composant l'équipe Y , une certaine question Q . Le système didactique ainsi constitué, $S(X, Y ; Q)$, se rend disponibles (la chose est marquée par la flèche $\Rightarrow$) diverses réponses $R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond$ institutionnellement « estampillées » (le signe $\diamond$, lu ici « poinçon », rappelle cet estampillage) ainsi que des *œuvres* d'autres natures (théories, corpus de données, etc.), notées ici $O_{n+1}, \dots, O_m$. Dans la dynamique didactique – dont le schéma herbartien ne donne à voir qu'un *bilan* –, cette « production » d'un système de ressources va de pair avec la production d'éléments qui s'agenceront, à la fin du *parcours d'étude et de recherche* (PER), pour constituer la réponse $R^\heartsuit$ (à Q) propre au système didactique $S(X, Y ; Q)$, ce que note la flèche $\Rightarrow$ du schéma $(S(X, Y ; Q) \Rightarrow \dots) \Rightarrow R^\heartsuit$.

2.2. Les vicissitudes du schéma herbartien

Valable en grande partie dans le monde savant (d'où il procède), le schéma herbartien peut être observée sous des formes diversement dégénérées dans les autres institutions de la société. C'est ainsi que, dans le monde scolaire (mais pas seulement là), s'observe la pratique systématique ou erratique du *recopiage culturel*, que l'on peut schématiser ainsi :

$$(S(X, Y ; Q) \Rightarrow R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond) \Rightarrow \oplus_i R_i^\diamond.$$

La réponse $R^\heartsuit = \oplus_i R_i^\diamond$ n'est plus ici que le fruit de l'amalgamation, au reste variable dans son contenu comme dans ses formes, de réponses « toutes faites » trouvées ça et là dans la culture, sans que nulle dialectique médias/milieus n'ait fait entendre ses exigences propres.

À côté de ce recopiage pur et simple, une autre voie – royale – a été dès longtemps ouverte : au lieu d'emprunter à la culture, c'est-à-dire à autrui, on produit par soi-même, au moyen du *raisonnement*, ressource consubstantielle à l'humain, média qui serait à lui-même son propre milieu rendant inutile tout autre milieu.

2.3. « *Raisonner* » ou *l'obsession déductive*

Il n'est guère besoin de rappeler la puissance de l'empire du raisonnement, notamment en mathématiques. En voici un exemple entre mille, dû à Thomas Jan Stieltjes (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 4, 1890, 14) : si, pour un certain entier n , les entiers premiers étaient $p_1, p_2, \dots, p_n$, alors, si $A \times B$ est une factorisation non triviale de l'entier $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$, l'entier $A + B$ n'est divisible par aucun des entiers premiers, etc. L'infinitude des nombres premiers est ainsi prouvée « par le raisonnement ». La découverte de la puissance du raisonnement est fort ancienne : elle devient évidente chez les Grecs, où raisonner apparaît à certains égards comme une obsession de la sphère savante. Dans son livre *Origines et développement de la science grecque* (Flammarion, Paris, 1990), Geoffrey E. R. Lloyd le souligne en un passage que nous reproduisons ci-après un peu longuement : on y retrouvera un habitus propre à la culture mathématique jusqu'à nos jours.

On vise souvent à l'incontestable, à la rigueur et à l'exactitude, mais parfois on n'y atteint qu'au prix d'un certain arbitraire, d'un certain dogmatisme et, dans plusieurs domaines, d'un appauvrissement du contenu empirique de la recherche. Il y a chez les savants grecs une tendance récurrente à transformer leur discipline en une branche des mathématiques pures... Il en est ainsi par exemple [au III^e s. av. J.-C.] de l'ouvrage d'Aristarque, *Des grandeurs et des distances du soleil et de la lune* : pour le diamètre angulaire de la lune, Aristarque choisit comme hypothèse une valeur notoirement inexacte ; or, selon toute probabilité, cette erreur s'explique, non par une incapacité à effectuer les observations sommaires que nécessitait une approximation grossièrement exacte, mais simplement par le fait qu'il s'intéressait moins aux résultats concrets, aux dimensions et aux distances (qu'il exprime d'ailleurs en proportions, non en valeurs) qu'aux aspects purement géométriques du problème.

La découverte de la force créatrice de la raison se paie sur d'autres chapitres. Dans l'article « Mythe et savoir » qu'il écrit dans l'ouvrage monumental dirigé par Geoffrey Lloyd et

Jacques Brunschwig, *Le savoir grec* (Flammarion, Paris, 1996), Luc Brisson écrit par exemple ceci (p. 86).

La recherche de la certitude à l'intérieur d'un système axiomatique utilisant un langage mathématique entraîna parfois comme contrepartie une absence de contenu empirique. De plus, on invoquait des "témoignages" et des "expériences" plus souvent pour corroborer une théorie que pour la mettre à l'épreuve. Bref, il semble bien que ce soit le débat compétitif, l'*agon*, qui finalement a fourni un cadre dans lequel se développèrent les sciences de la nature en Grèce ancienne.

La dialectique des médias et des milieux tend ainsi à voir se réduire le système des milieux sollicités : le véritable laboratoire du savant grec, c'est l'*agon*. L'expérience semble écartée, comme le note encore, dans le même ouvrage, Geoffrey Lloyd lui-même dans l'article qu'il consacre à « Observation et recherche » (p. 254).

Dans l'ensemble, les philosophes présocratiques ne cherchèrent guère à *accroître* les données que leur fournissait la recherche empirique ; et en règle générale, ils n'essayèrent pas de recourir à l'expérience pour *trancher entre* les interprétations concurrentes de ces mêmes données, connues ou supposées.

Une conséquence un peu inattendue – et en tout cas « décalée » (pour nous) – de la domination de la voie axiomatique sur la voie expérimentale est alors soulignée par Luc Brisson dans l'article déjà cité (p. 88).

La raison est un merveilleux instrument qui permet de déduire un grand nombre de propositions d'un nombre restreint d'axiomes. Mais comme ces axiomes sont arbitraires et ne peuvent être fondés en raison, la raison reste toujours dépendante de prémisses et de valeurs qui lui sont étrangères. D'où cette tendance constante, dans le monde grec, à rapporter aux dieux l'origine de tous les savoirs humains, aussi bien théoriques que pratiques.

2.4. Idéauté ou expérience ?

Malgré ses limitations, la science grecque met en place de façon apparemment définitive le *paradigme déductif*, qui fera longtemps figure de parangon dans la culture occidentale.

C'est là un fait majeur, que Jean-Pierre Vernant s'applique à souligner dans une contribution intitulée « Écriture et religion civique en Grèce » à l'ouvrage dirigé par Jean Bottéro, Clarisse Herrenschmidt et lui-même, *L'Orient ancien et nous* (Hachette, 1998, p. 206).

On voit alors apparaître, dès le VI^e siècle, et se développer, au V^e siècle, cette grande idée philosophique de l'opposition entre les apparences et l'Être, un et absolu. [...] La vérité d'un discours va tenir uniquement à sa cohérence interne : ce qui fait qu'un discours est vrai, ce n'est pas le fait que ce qu'on voit semble le confirmer, mais que le discours, tel qu'il s'articule à l'intérieur de lui-même, est irréfutable. [...] Combiné à d'autres facteurs, cela va conduire à définir une science mathématique qui a entièrement marqué la civilisation occidentale, parce que c'est une science qui enchaîne une série de démonstrations à partir de principes et de définitions qu'elle pose, de telle sorte que la vérité de la proposition finale est totalement indépendante de toute confirmation extérieure dans le monde.

Il faudra du temps pour que l'expérience – au sens galiléen, c'est-à-dire au sens moderne du terme – vienne prendre sa place dans la panoplie du « philosophe naturel ». Longtemps, le recours à l'expérience marque d'abord simplement la défiance méthodique à l'endroit des « autorités », et non l'articulation du modèle déductif et du modèle expérimental. C'est ce qu'explicite Steven Shapin dans son livre *La révolution scientifique* (Flammarion, Paris, 1998, p. 104 et suiv.).

... les préceptes étaient clairs : constituez vous-même votre expérience, ne vous fiez ni aux mots ni à l'autorité traditionnelle mais aux choses. L'expérience devait être intégrée aux fondations de la véritable connaissance scientifique [...]. Mais quel *type* d'expérience convenait-il de rechercher ? Comment la constituer de manière fiable ? Et comment en *inférer* des généralités concernant l'ordre naturel, quelle que soit l'échelle ? Sur ces questions, les pratiques modernes de philosophie naturelle présentaient des différences importantes. [...] L'un des courants de la pratique philosophique, qui reprenait manifestement l'héritage d'Aristote, attirait au XVII^e siècle à la fois des modernes et des anciens. On y cherchait à produire une *démonstration* typiquement scientifique, l'exercice consistant à montrer que les conclusions obtenues découlaient nécessairement d'une connaissance indubitable et rationnellement établie des causes des phénomènes naturels étudiés.

En mathématiques, l'idée que « tout peut se déduire » demeurera longtemps vivace (elle l'est encore aujourd'hui au collège, même quand on y pratique peu la déduction *stricto sensu*). La géométrie est ainsi une « rationalité à vide », comme le note Bertrand Russell dans son livre *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897).

Geometry, throughout the 17th and 18th centuries, remained, in the war against empiricism, an impregnable fortress of the idealists. Those who held – as was generally held on the continent – that certain knowledge, independent of experience, was possible about the real world, had only to point to Geometry : none but a madman, they said, would throw doubt on its validity, and none but a fool would deny its objective reference.

Sur la longue durée, on observe donc un immense retard de développement de la dialectique des médias et des milieux. La remarque suivante, due à Richard Feynman (dans *The Meaning of It All*, Penguin, 1999), dont on peut penser qu'elle *devrait* aller de soi, gagne pourtant encore à être explicitée, et cela par l'un des plus grands esprits « galiléens » du XX^e siècle.

Now, another example of a test of truth, so to speak, that works in the sciences that would probably work in other fields to some extent is that if something is true, really so, if you continue observations and improve the effectiveness of the observations, the effects stand out more obviously. Not less obviously. That is, if there is something really there, and you can't see good because the glass is foggy, and you polish the glass and look clearer, then it's more obvious that it's there, not less.

3. Interdits et autorisations

3.1. Auctores et lectores

On trouve, sur une page du Web¹, cet extrait d'une lettre de Patrick Champagne, sociologue proche de Pierre Bourdieu, qui y précise la distinction du *lector* (« lecteur ») et de l'*auctor* (« auteur »).

¹ Voir <http://khayyami.free.fr/francais/messages.htm>.

« Lectores » s'oppose à « auctores ». C'est une distinction qui date du Moyen Âge ; elle oppose « ceux qui lisent les œuvres produites par les auteurs » (notamment les professeurs, les commentateurs) et « ceux qui les produisent » (notamment les chercheurs, les écrivains, les savants). Bourdieu insiste sur cette opposition pour montrer les biais de la lecture des purs lecteurs par comparaison aux lecteurs qui savent ce que c'est que produire. Cet accent mis sur la disposition du pur lecteur est au principe des développements chez Bourdieu du biais scolastique. Cette distinction est du même ordre que celle qui renvoie à la distinction entre « opus operatum » et « modus operandi » qui oppose le résultat d'une action singulière à son mode de production.

La culture intellectuelle du pur *lector* demeure aujourd'hui encore largement dominante en nombre d'institutions académiques, où l'on prétend répéter avec un ascétisme intrépide, rigoureux, mais fréquemment dénaturant, les œuvres d'*auctores* qui n'en peuvent mais. Contre cette domination, le développement de la dialectique des médias et des milieux devrait aboutir à faire reconnaître, à côté de la figure immémoriale de l'*auctor* génie solitaire (Eudoxe, Aristote...), la figure aujourd'hui encore fort improbable de l'*auctor collectif*, notée *X* dans le schéma herbartien. Une première condition pour que cela advienne est que le long interdit *politique* de se « mêler » de la plupart des questions *Q* qui importent à *X* soit enfin rejeté. Une « anecdote » en rappellera la prégnance dans les sociétés d'Ancien Régime (dont certains aspects sont encore très actuels). Elle est due à l'Abbé Morellet (1727-1819), qui la rapporte dans ses *Mémoires sur le dix-huitième siècle et sur la Révolution* (1822).

En 1764, M. de Laverdy, alors contrôleur général ², ayant fait rendre un arrêt du conseil qui défendait d'imprimer sur les matières d'administration, sous peine d'être poursuivi extraordinairement, ceux qu'on appelait alors philosophes furent indignés ; et j'étais de ce nombre. Je combattis pour la liberté de la presse, et j'intitulai mon ouvrage *De la liberté d'écrire et d'imprimer sur les matières de l'administration*. C'était le développement d'une partie du *Traité de la liberté de la presse* que j'avais commencé à la Bastille [...]. Je gardais ici une extrême modération, afin de ne pas rencontrer d'obstacles ; mais cette réserve ne me servit de rien, et je ne pus obtenir pour moi-même la liberté que je demandais pour tous. Cependant mon travail n'avait pas déplu à M. Trudaine ³ ; son fils l'avait communiqué à

² Clément de Laverdy (1723-1793) fut contrôleur général des finances de décembre 1763 à octobre 1768.

³ Daniel-Charles Trudaine (1703-1769) fut jusqu'à sa mort directeur de l'Assemblée des inspecteurs généraux des ponts et chaussées, fonction dans laquelle son fils Jean-Charles-Philibert Trudaine de Montigny lui succéda.

M. Chauvelin, intendant des finances, et celui-ci au contrôleur général : mais le ministre y fit une réponse à mi-marge, tout entière de maximes despotiques, ou de la théorie des premiers commis : « pour parler d'administration, il faut tenir la queue de la poêle, être dans la bouteille à l'encre ; et ce n'est pas à un écrivain obscur, qui, souvent, n'a pas cent écus vaillants, à endoctriner les gens en place. »

Pouvoir se soucier de tout, partout, en toutes circonstances est une conquête récente et encore fragmentaire. Cette exigence d'une épistémologie démocratique est consubstantiellement corrélée avec l'avènement d'une dialectique des médias et des milieux ubiquitaire. Or l'école, qui devrait en être l'opérateur, est là-dessus très en retard.

3.2. Lectores *contraints* et *faux* lecteurs

Le professeur se vit souvent, en effet, comme un *lector* qui connaît les *auctores* et, pour cela, *devrait* avoir réponse à tout. « Que ne sais-je pas ? » semble être sa première maxime constitutionnelle. Cela le conduit parfois à des réponses étonnantes, comme dans l'épisode suivant : dans une classe de troisième, le professeur de technologie teste par écrit la culture informatique des élèves ; à la consigne de citer un navigateur Web, un élève, qui a, semble-t-il, une « vie en ligne » déjà assez riche, répond en mentionnant *Firefox* (alors que le navigateur utilisé en classe est autre) ; le professeur rejette cette réponse avec assurance, au motif que « Firefox » serait, non pas un navigateur, mais une... secte. Plus souvent encore, la tyrannie du « Que ne sais-je pas ? » amène nombre d'à-peu-près, erreurs vénielles qui mitent les discours professoraux. Le développement de la dialectique médias/milieux impose que l'on s'émancipe de cette tyrannie d'un principe intenable et que l'on s'efforce constamment de surprendre, en autrui certes, mais *d'abord en soi*, le faux *lector* toujours sur le qui-vive. Richard Feynman avait une technique pour déjouer ce malhonnête personnage ; il la rapporte dans ce passage de l'opuscule déjà cité (pp. 65-66).

The first one has to do with whether a man knows what he is talking about, whether what he says has some basis or not. And my trick that I use is very easy. If you ask him intelligent questions—that is, penetrating, interested, honest, frank, direct questions on the subject, and no trick questions—then he quickly gets stuck. It is like a child asking naive questions. If you ask naive but relevant questions, then almost immediately the person doesn't know the answer, if he is an honest man.

3.3. Le schéma herbartien malmené

Dans *La crise de l'éducation* (1956), réfléchissant à la « disparition des préjugés », Hannah Arendt rappelle le processus de naturalisation auquel sont soumises les réponses qui, un jour, ont été apportées à des questions elles-mêmes depuis longtemps oubliées. Elle souligne à ce propos la vertu des *crises*, si du moins nous savons en avoir une juste appréciation.

La disparition des préjugés signifie tout simplement que nous avons perdu les réponses sur lesquelles nous nous appuyons généralement, sans même nous rendre compte qu'elles étaient à l'origine réponses à des questions. Une crise nous force à revenir aux questions elles-mêmes et requiert de nous des réponses, nouvelles ou anciennes, mais en tout cas de jugements directs. Une crise ne devient catastrophique que si nous y répondons par des idées toutes faites, c'est-à-dire par des préjugés. Non seulement une telle attitude rend la crise plus aiguë mais encore elle nous fait passer à côté de cette expérience de la réalité et de cette occasion qu'elle fournit.

Dans un tel contexte critique, certains X , avec l'aide de certains Y , peuvent étudier certaines questions Q depuis longtemps délaissées – au détriment peut-être du projet de vie d'une société. Mais, comparée à cette situation d'étude et de recherche renouvelée, la situation scolaire classique semble se faire l'écho presque exact de la description arendtienne de la fabrication des « préjugés ». Dans une classe scolaire ordinaire, en effet, le professeur, y , le *lector* donc, consulte les œuvres, en rapporte une réponse R , qu'il présente aux élèves $x \in X$, pour lesquels ce sera la réponse $R^\heartsuit$, cette réponse orthodoxe dont ils devront montrer ensuite qu'ils « la connaissent ». (Dans cette configuration, l'élève x n'est pas « autorisé », sinon à accéder aux œuvres O_k à *titre privé*, du moins à s'en prévaloir légitimement dans le cadre de la classe.) Le *lector*, y , apportera alors devant les élèves, à qui il les « enseignera », c'est-à-dire à qui il les montrera, des œuvres $O = R^\heartsuit$ qui, d'ailleurs, cesseront bientôt d'apparaître comme répondant à quelque question que ce soit. C'est là une dynamique que peint le schéma suivant :

$$(S(X, y ; Q) \curvearrowright R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m) \twoheadrightarrow R^\heartsuit.$$

3.4. Les TPE comme analyseur

Les *travaux personnels encadrés* (TPE) introduits dans les classes de première de l'enseignement général à la rentrée 2000 s'éloignent *sur le papier* du schéma scolaire traditionnel, dont l'emprise ne s'abolit pas pour autant. C'est ainsi que, si l'on se réfère à ces catégories de pensée traditionnelles de la profession que sont « le cours » et « les exercices », les TPE vont être spontanément situés plutôt *du côté des exercices*, c'est-à-dire parmi les travaux d'élèves dont, solidairement, les « résultats » 1) n'ont pas à être connus de la classe, et 2) *ne peuvent pas* être utilisés dans le travail courant de la classe. À l'instar des « exercices », les TPE sont donc des travaux « semi-perméables » aux connaissances à enseigner : si des connaissances validées en classe y entrent presque nécessairement, rien, en revanche, n'en sortira que par effraction. En outre, si la réponse R attendue n'est plus, ici, apportée toute faite *par le professeur* (lequel devient officiellement un « encadreur », position institutionnelle jusqu'alors à peu près inconnue dans l'institution scolaire), elle est néanmoins trouvée toute faite *dans la « culture »*, les élèves $x \in X_i$ (où X_i est l'équipe de TPE, formée par exemple de trois élèves de la classe $X = \bigcup_i X_i$) se contentant dans le meilleur des cas de *combiner* diverses réponses $R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond$. (Les TPE ont été à cet égard un révélateur d'une vérité profonde du système scolaire : sa propension à fabriquer – chez les élèves, et *donc* chez les professeurs – de dociles « recopieurs de la culture établie ».) Enfin, comme dans l'enseignement scolaire ordinaire, les *questions* génératrices du travail demandé sont souvent *oblitérées*. Les élèves apportent alors dans leur TPE ce qui n'est pas une *réponse à une question* dans la mesure où cette question *n'a pas été posée*. La production qui est la leur peut à cet égard se représenter par la formule $\oplus_i (Q_{ij} \rightarrow R_{ij}^\diamond)$, où le symbole $\oplus$ désigne une opération de « combinaison » forcément non univoque. Dans le passage de la classe « traditionnelle » aux TPE « novateurs », on passerait ainsi d'un enseignement *dogmatique* à... un *auto-enseignement* dogmatique.

3.5. Internet : le désarroi des lecteurs

Le principe scolaire de l'accès libre aux œuvres refusé à l'élève en tant qu'élève est aujourd'hui mis en grand péril par l'enrichissement de la masse des œuvres accessible à

tous par le biais de l'Internet. Voici de cela un exemple à la fois banal et typique. Dans un article intitulé *The Internet: Problem Solving Friend or Foe?*, paru dans le numéro de février 2007 du magazine *The Mathematics Teacher*, l'auteur, Jeffrey J. Wanko, écrit ceci (p. 402).

A few years ago, students could turn to advanced mathematical software like Mathematica, Maple, or Derive to simplify complicated expressions, factor polynomials, extrapolate missing data from a given set, and plot a variety of different graphs simultaneously. Today, many of these tasks are also readily performed for free on a number of Web sites that anyone can access easily. When they are used to increase understanding through exploration and discovery, these Web sites hold a great deal of potential and promise in our mathematics classrooms. But these Web sites can also be used to find direct or indirect solutions to some problem-solving tasks. This disconnect between the problems and the available technology exposes a common misconception held by novice problem solvers—that their goal is simply to get an answer to the problem. Understanding the difference between “locating a solution” (obtaining an answer without actually solving the problem) and “finding a solution” (using mathematical problem-solving strategies to arrive at an answer) lies at the crux of the matter.

La distinction entre “*locating a solution*” et “*finding a solution*” devient cruciale, alors qu'elle était traditionnellement sans objet – “locating a solution”, c'était tricher, tout simplement ! L'auteur cité observe des élèves qui ont à étudier le problème suivant : “The number $2^{48} - 1$ has two factors between 60 and 70. What are they?” En l'espèce, certains de ces élèves vont recourir au logiciel de calcul en ligne Factoris, que l'on trouve sur le site de l'Université de... Nice⁴. Ce qu'ils en obtiennent (on aurait $2^{48} - 1 = 281474976710655 = 32 \times 5 \times 7 \times 13 \times 17 \times 97 \times 241 \times 257 \times 673$) leur permet aisément de conclure que $2^{48} - 1$ est divisible par $5 \times 13 = 65$ et par $9 \times 7 = 63$ (et par ces nombres-là seulement entre 60 et 70). Bien entendu, ce qu'attendait le professeur n'appelait aucunement l'usage de « Factoris ». On a en effet (par exemple) :

$$\begin{aligned} 2^{48} - 1 &= (2^{24} - 1)(2^{24} + 1) = (2^{12} - 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1) = (2^6 - 1)(2^6 + 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1) \\ &= (64 - 1)(64 + 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1). \end{aligned}$$

⁴ Voir <http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi>.

La preuve est ainsi faite à l'aide d'un outil de calcul dont l'élève est censé disposer de façon permanente, *sans dépendre de quiconque ou de quoi que ce soit*, à savoir l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. C'est *cela* la tâche de résolution de problème que le professeur aurait souhaité voir ses élèves accomplir. Et c'est cela qu'il se désole de voir Internet, le cas échéant, rendre désormais d'apparition plus improbable.

4. Vers un changement de paradigme disciplinaire ?

4.1. Multiplier les voies de recherche et de contrôle

En vérité, le problème est beaucoup plus large : Internet ne fait, là encore, que le poser plus nettement. Si je recherche les diviseurs éventuels de $2^{48} - 1$ compris entre 60 et 70, je peux aussi, tout simplement, utiliser une calculatrice adéquate, par exemple celle que fournit Microsoft avec Windows. On a ainsi les résultats suivants.

$$\begin{aligned} & \blacksquare \frac{2^{48}-1}{60} =_{\text{calc}} 4691249611844,25 \quad \blacksquare \frac{2^{48}-1}{61} =_{\text{calc}} 4614343880502,54\dots \quad \blacksquare \frac{2^{48}-1}{62} =_{\text{calc}} \\ & 4539918979204,11\dots \quad \blacksquare \frac{2^{48}-1}{63} =_{\text{calc}} \mathbf{4467856773185} \quad \blacksquare \frac{2^{48}-1}{64} =_{\text{calc}} 4398046511103,98\dots \quad \blacksquare \\ & \frac{2^{48}-1}{65} =_{\text{calc}} \mathbf{4330384257087} \quad \blacksquare \frac{2^{48}-1}{66} =_{\text{calc}} 4264772374403,86\dots \quad \blacksquare \frac{2^{48}-1}{67} =_{\text{calc}} \\ & 4201119055382,91\dots \quad \blacksquare \frac{2^{48}-1}{68} =_{\text{calc}} 4139337892803,75 \quad \blacksquare \frac{2^{48}-1}{69} =_{\text{calc}} 4079347488560,21\dots \\ & \blacksquare \frac{2^{48}-1}{70} =_{\text{calc}} 4021071095866,5. \end{aligned}$$

Ces résultats confirment ce que donne le logiciel Factoris. Ils confirment aussi le résultat du « travail » de l'expression $2^{48} - 1$ à l'aide de l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Mais bien d'autres « contrôles » peuvent encore être effectués ! Par exemple, le même logiciel en ligne Factoris donne ceci :

$$a^{48} - 1 = \pm (a - 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)(a^2 + 1)(a^2 + a + 1)(a^4 - a^2 + 1)(a^4 + 1)(a^8 - a^4 + 1)(a^8 + 1)(a^{16} - a^8 + 1).$$

On aperçoit les facteurs $a^2 + 1$ et $a^4 - a^2 + 1$ qui, pour $a = 2$, valent respectivement 5 et 13 ; et de même encore le facteur $a^2 + a + 1$ et le produit de facteurs $(a + 1)(a^2 - a + 1)$, qui

valent respectivement 7 et 3×3 . Nouvelle confirmation donc ! On peut encore contrôler le résultat donné par Factoris en recherchant d'autres logiciels de factorisation en ligne. Le dispositif *Factorization using the Elliptic Curve Method* ⁵ fournit par exemple le résultat suivant, qui s'accorde avec ce que donnait Factoris.

```
Type number or numerical expression to factor here and press Return:
2^48-1
281 474976 710655 = 3 ^ 2 x 5 x 7 x 13 x 17 x 97 x 241 x 257 x 673
```

On peut aussi s'appuyer sur d'autres connaissances élémentaires que celles envisagées plus haut. Sachant que $2^{48} = (2^6)^8 = 64^8$ et que $a^n - 1$ est divisible par $a - 1$, on obtient que $2^{48} - 1 = 64^8 - 1$ est divisible par $64 - 1 = 63$. Sachant en outre que $a^n = (-a)^n$ lorsque n est pair, on a $2^{48} - 1 = 64^8 - 1 = (-64)^8 - 1$, d'où l'on déduit que $2^{48} - 1$ est divisible par $-64 - 1 = -65$, et donc par 65. (On notera que cette manière de faire permet d'établir que tout entier de la forme $2^{12k} - 1$ est divisible par 63 et 65 ; par exemple, pour $k = 2$, on a $2^{24} - 1 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 13 \times 17 \times 241 = (9 \times 7)(5 \times 13)(17 \times 241)$; ou encore : $2^{60} - 1 = 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 31 \times 41 \times 61 \times 151 \times 331 \times 1321$; etc.) La dialectique des médias et des milieux ne saurait s'arrêter à la preuve décisive : elle est indéfiniment ouverte, en son principe, à des relances mettant en jeu les milieux les plus divers.

4.2. Deux principes de méthode

Le nouveau paradigme épistémologique qui entre ainsi par effraction dans la vieille institution scolaire – laquelle en est toute surprise, et en reste étonnée –, doit être développé, mis à l'épreuve, théorisé. Deux principes peuvent d'ores et déjà être explicités. Le premier est le *principe d'ignorance méthodique*, que l'on peut formuler ainsi : quant aux questions sur lesquelles porte une recherche, on ne mêle pas ses connaissances éventuelles relatives à des réponses allogènes supposées aux éléments de réponse explicites ou implicites rencontrés. En d'autres termes, *on laisse parler les médias*, sans mêler sa propre voix à ce qu'ils font entendre. Le second principe, qui complète le précédent, est le *principe du doute méthodique* : en règle générale, toute affirmation à propos des questions sur

⁵ Voir <http://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM>.

lesquelles porte la recherche doit être regardée d'abord comme conjecturale (et non pas accréditée ou rejetée *a priori*) en vue d'être *travaillée* quant à sa vérité. C'est ainsi que doit se manier la dialectique des médias et des milieux : dans le silence de l'opérateur en tant que média potentiel, et dans la polyphonie des « œuvres ». Sur la voie ainsi balisée, la dynamique épistémologique de l'institution scolaire rencontre pourtant un immense obstacle.

4.3. L'épistémologie autoritaire et son dépérissement

Le changement évoqué jusqu'ici suppose en effet la dissolution de l'emprise des logiques autoritaires. Alors que les sciences modernes se sont affranchies, à partir de la seconde moitié du XVI^e siècle, du système antique des « autorités » pour ne plus se référer, en principe, qu'aux verdicts bien combinés de la raison et de l'expérimentation, tout une tradition scolaire a partiellement dévitalisé ces acquis de l'histoire des sciences en en faisant des *attributs de la fonction professorale*, à laquelle elles confèrent son autorité propre. Si, par exemple, la démonstration est censée garantir la vérité de l'assertion mathématique qu'elle « démontre », c'est en droit et en fait le professeur (ou le manuel) qui garantit la validité de la démonstration et donc, en dernier ressort, de l'assertion elle-même – laquelle pourrait alors aussi bien *se passer de démonstration* ! Cette structure archaïque du rapport à la vérité et à la vérification fait que la culture de la mise à l'épreuve objectivante, émancipatrice par rapport au schéma autoritaire ancien, est demeurée largement étrangère à l'École. En mathématiques, en particulier, la mise à l'épreuve de toute conjecture étudiée a pris durant deux siècles la forme rituelle exclusive du « Démontrer que... », manière subtile d'indiquer – on l'a suggéré – que l'institution scolaire se porte, en droit comme en fait, garante de la vérité de l'assertion à « démontrer », et que cette démonstration n'est donc demandée aux élèves que pour mimer la culture émancipée propre aux savants – qui, eux, démontrent sans garantie d'aucune tutelle surplombante. La culture « galiléenne » de la preuve, sans doute invoquée, voire vénérée, dans l'enseignement des sciences dans le registre des *objets* d'étude, remplacera-t-elle la culture autoritaire traditionnelle en matière d'*outils* d'étude ? Il faudrait pour cela que change l'épistémologie scolaire aujourd'hui encore dominante.

4.4. Reconsidérer le sort de l'expérience en mathématiques

La formule classique « On le voit, mais pour en être sûrs on va le démontrer », que tant d'élèves ont tant de fois entendue, mérite d'être fortement interrogée. Est-il vrai, se demande-t-on par exemple, que l'entier $n^4 + 4$ est divisible par 5 dès lors que n est un entier strictement positif ? Ça l'est pour $n = 1$ (on a $n^4 + 4 = 5$), pour $n = 2$ (on a $n^4 + 4 = 20$, pour $n = 3$ (on a $n^4 + 4 = 85$), pour $n = 4$ encore (on a $n^4 + 4 = 260$) ; mais ça ne l'est pas pour $n = 5$: $n^4 + 4$ vaut alors 629. Pour quelles valeurs de n l'entier $n^4 + 4$ est-il alors divisible par 5 ? Un tableur fournit aujourd'hui, en quelques clics, des résultats dont le tableau suivant précise le type.

n	$n^4 + 4$	n	$n^4 + 4$	n	$n^4 + 4$
1	5	21	194485	41	2825765
2	20	22	234260	42	3111700
3	85	23	279845	43	3418805
4	260	24	331780	44	3748100
5	629	25	390629	45	4100629
6	1300	26	456980	46	4477460
7	2405	27	531445	47	4879685
8	4100	28	614660	48	5308420
9	6565	29	707285	49	5764805
10	10004	30	810004	50	6250004
11	14645	31	923525	51	6765205
12	20740	32	1048580	52	7311620
13	28565	33	1185925	53	7890485
14	38420	34	1336340	54	8503060
15	50629	35	1500629	55	9150629
16	65540	36	1679620	56	9834500
17	83525	37	1874165	57	10556005
18	104980	38	2085140	58	11316500
19	130325	39	2313445	59	12117365
20	160004	40	2560004	60	12960004

Ce que révèle cette « expérience numérique » est assez clair : $n^4 + 4$ est divisible par 5 *sauf* lorsque n est un multiple de 5. (Plus précisément, si n est divisible par 10, l'écriture

décimale de $n^4 + 4$ se termine par un 4 ; si n est divisible par 5 mais non par 10, alors l'écriture décimale de $n^4 + 4$ se termine par un 9.) Le milieu interrogé a-t-il parlé clairement, définitivement ? On connaît le verdict de la profession : que nenni ! Car, dit certaine *doxa* professorale, *il se pourrait* que l'on rencontre des valeurs de n au-delà de celles que l'on aura examinées et qui mettront en défaut cette conclusion, qu'il faut donc appeler prudemment une *conjecture*. Refrain connu ! Or, on va le voir, ce refus n'est pas plus – mais pas moins, il est vrai – justifié que l'adhésion absolue à la démonstration (entendue au sens mathématique, comme déduction au sein d'un système hypothético-déductif).

4.5. Pour des outils intellectuels adéquats

Le précepte à mettre en œuvre dans une rénovation « galiléenne » (ou « feynmanienne ») du curriculum mathématique est à cet égard, et plus généralement, le suivant : il faut développer les technologies *mathématiques* qui d'un même coup, lui épargneront d'avoir à se renier (« Je le vois mais je *ne dois pas* le croire ! ») et lui permettront d'exploiter au mieux les nouveaux *milieux* rendus disponibles dans la classe de mathématiques par le progrès des technologies numériques. Dans le cas de $n^4 + 4$, ainsi, se pourrait-il qu'apparaisse, plus loin dans la suite des entiers, un entier qui mette à mal ce qu'on a observé plus haut ? Nullement. Considérons plus généralement un polynôme à coefficients entiers, $P \in \mathbb{Z}[X]$, et un entier $d \in \mathbb{N}^*$; le comportement de l'entier $P(n)$ vis-à-vis de la divisibilité par d n'est pas si compliqué qu'il puisse donner lieu à des extravagances du type de celles *évoquées* contre la conclusion tirée des résultats apportées par le tableur : d'une façon générale, si $n = dq + r$, où q est le quotient et r le reste de la division euclidienne de n par d , pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ on a $n^k \equiv r^k \pmod{d}$, en sorte que $P(n) \equiv P(r) \pmod{d}$. Le fait que $P(n)$ soit divisible par d dépend ainsi uniquement de $r = 0, 1, \dots, d-1$. En examinant d valeurs consécutives de n , on peut donc conclure d'une façon tout à fait générale. C'est pourquoi il n'est pas possible que, pour n « plus grand », la propriété observée soit mise en défaut. Dans le cas où $P(n) = n^4 + 4$ et $d = 5$, il suffit d'examiner les valeurs de $n^4 + 4$ pour 5 valeurs consécutives de n , par exemple pour... 1, 2, 3, 4, 5. Bien entendu, les technologies mathématiques utiles à la valorisation des ressources exploitables doivent être diffusées en priorité à ceux qui devront les diffuser auprès des élèves : les professeurs. Ce travail suppose de faire bouger certaines contraintes qui, au niveau de la discipline,

traduisent l'emprise, sur l'enseignement des mathématiques, de contraintes de niveau supérieur.

4.6. Contre une certaine paresse théorique

La révolution attendue se heurte non pas seulement aux *habitus* mathématiques scolaires, mais encore à l'insuffisance du travail *technologique* (on l'a vu) et *théorique* (au sens que la théorie anthropologique du didactique donne à ces mots). Pour illustrer *a contrario* une certaine paresse théorique régnante, voici un extrait des notes d'une séance d'un séminaire adressé, à l'IUFM d'Aix-Marseille, aux professeurs stagiaires de mathématiques.

➔ Soit un système S , qu'on ne précisera pas davantage pour le moment : S peut être de nature biologique, physique ou même... mathématique. Et soit une assertion θ à propos de S . Le fait que θ soit vraie dans S sera notée

$$|=_S \theta.$$

➔ Comment savoir si l'on a $|=_S \theta$? La réponse poussée en avant par les mathématiques depuis des millénaires est la suivante : on construit une théorie déductive T de S , c'est-à-dire une théorie telle que, **au moins**,

$$\text{si } \vdash_T \theta \text{ alors } |=_S \theta$$

soit encore

$$|=_S \theta \text{ si } \vdash_T \theta$$

où $\vdash_T \theta$ signifie que θ est **déductible** dans T , c'est-à-dire est un **théorème** de T (au sens large, en comptant les axiomes de T comme des théorèmes). Bien entendu, l'idéal serait que l'on ait $|=_S \theta$ si, **et seulement si**, $\vdash_T \theta$.

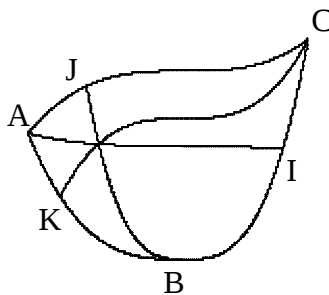
➔ Lorsqu'on se trouve dans la situation précédente, on peut, pour établir que θ est **vraie** dans S , chercher à établir que θ est **déductible** dans T . Telle est la solution « magique » qu'apporte les mathématiques. À une condition : que l'on ait pu construire une théorie déductive T adéquate !

➔ La construction de T suppose essentiellement qu'on y mette des assertions vraies relatives à S qui auront le statut d'axiomes. Mais comment sait-on alors que telle assertion est vraie dans S sinon en « interrogeant » S , c'est-à-dire en procédant à une expérimentation sur S ? Si, par exemple, S est l'espace physique autour de nous, E , comment sait-on que, disons, « par deux points distincts il passe une droite et une seule » ? En interrogeant E . Mais c'est là que le bât blesse : personne ne peut se targuer d'avoir vérifié cette assertion **pour tous les couples**

de points distincts de l'espace ! En d'autres termes, la théorie déductive $T(E)$ sera elle-même fondée sur un mécanisme d'**induction à partir de résultats de l'expérience**.

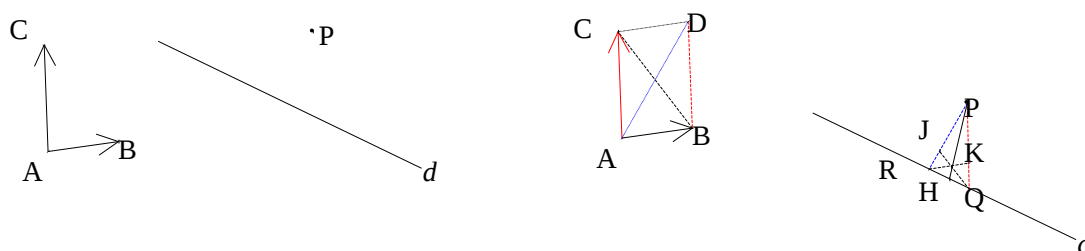
➔ En pratique, on devra construire $T(S)$ dans des allers et retours incessants entre déduction théorique et expérimentation : on met dans $T(S)$ des assertions que l'expérimentation a prouvé raisonnablement être vrais dans S , et, en sens inverse, on vérifiera expérimentalement les théorèmes θ établis déductivement dans $T(S)$, pour s'assurer que $T(S)$ est « fiable » dans ce qu'elle nous révèle sur S .

Un tel développement témoigne d'une exigence qui devrait devenir commune : celle de *combattre les préjugés empiristes* en mathématiques. Une théorie mathématique, en effet, ne « théorise » pas toujours que ce que d'aucuns pensent. J'en donnerai ici, pour terminer, deux exemples solidaires à propos de ce qui est noté ci-dessus $T(E)$. La notion *physique* de droite est évidemment « modélisée » par $T(E)$. Mais, si l'on peut dire, $T(E)$ ignore – au double sens du terme – cette notion extramathématique. Et ce n'est que par une convention intéressée que nous interprétons les droites dont parle $T(E)$ avec les droites physiques – rectilignes – de E . Il est facile de montrer qu'on pourrait tout aussi bien les interpréter comme une tout autre famille de courbes du plan physique : on le verra sur la figure ci-après (représentant un triangle ABC avec ses trois hauteurs, qui se coupent), où la notion de droite de $T(E)$ est interprétée par les courbes qui, dans un repère orthonormé physique d'un plan P de E ont pour équation soit $x = p$ ou $y = b$ (ce sont alors des droites physiques, « verticales » ou « horizontales »), soit $y = ax^3 + b$, avec $a \neq 0$, c'est-à-dire par des cubiques du plan P .



La même remarque peut être faite à propos de la relation de *perpendicularité* entre deux droites. Si l'on suppose maintenant que la notion de droite théorique est interprétée par la notion de droite physique, la notion théorique de perpendicularité – celle qu'on la définit dans $T(E)$ et telle que cette théorie la « gouverne » – peut fort bien être interprétée par une « perpendicularité » physique que l'on définit – de façon non univoque – en se donnant trois points A, B, C non alignés et en *décidant* que le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est orthonormal :

cela définit *ipso facto* une métrique du plan P qui ne coïncide plus avec la métrique usuelle de l'espace physique, mais pour laquelle toutes les propriétés déductibles dans $T(E)$, et donc vraies pour la métrique usuelle, *restent vraies*. À titre d'illustration, le lecteur pourra examiner le problème suivant : étant donné le repère « orthonormal » $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (ci-dessous à gauche), comment construire la perpendiculaire à la droite d passant par le point P à l'aide d'une règle et d'un compas « usuels » ? Une réponse est suggérée par les figures ci-dessous à droite.



5. L'avenir n'est pas écrit

Éclaircissements théoriques et mises en adéquation technologiques sont ainsi des instruments indispensables au progrès – tout à la fois dans la civilisation, dans la société, à l'école, dans la classe de mathématiques – de la dialectique des médias et des milieux. Bien loin de consister en un simple changement de « style » pédagogique, ce progrès apparaît ainsi indéfectiblement lié à une évolution épistémologique qui touchera profondément les disciplines à enseigner. C'est désigner là ce qui est solidairement un point douloureux et une pierre de touche de changements ébauchés, possibles mais encore nimbés d'incertitude.