IUFM d’Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 1: mardi 5 septembre 2006

Programme de la séance. 1. Problématique et fonctionnement du Séminaire // 2. Forum des questions // 3. Observation & analyse

1. Problématique et fonctionnement du Séminaire

1.1. Le document de présentation de la formation et de sa validation comporte les précisions suivantes.

> 3.1. La rubrique ***Problématique et fonctionnement***, comporte trois sous-rubriques, intitulées respectivement ***Le programme d’études***, ***Questions de la semaine*** et ***Faisons le point***.
>
> – La sous-rubrique ***Le programme d’études*** a pour objet de préciser les questions à étudier (elle prend place éventuellement dans le cadre des séances d’explicitation). Le programme du Séminaire inclut notamment quatre questions qui traversent tous les dispositifs de formation : ***évaluation***, ***gestion de la diversité***, ***éducation à la citoyenneté*** et ***travail en équipe***.
>
> – La sous-rubrique ***Questions de la semaine*** requiert de chaque participant au Séminaire, chaque semaine ouvrable, qu’il consigne par écrit – au démarrage de la séance du mardi matin – une difficulté rencontrée dans le cadre de sa formation au métier de professeur de mathématiques, y compris bien sûr dans les stages de terrain, c’est-à-dire à l’occasion des enseignements qu’il assure ou auxquels il est associé. Les questions ainsi formulées sont regardées, sauf exception, comme des questions ***qui se posent à la profession*** à travers l’un de ses nouveaux membres, et non comme l’affaire personnelle de tel ou tel. Leur étude éventuelle dans le cadre de la formation concerne donc ***tout professionnel de l’enseignement des mathématiques***, et pas seulement celui qui, ayant porté témoignage de la difficulté rencontrée, aura ainsi contribué au ***développement de la profession*** que cette année de formation doit promouvoir.
>
> – La sous-rubrique ***Faisons le point*** permet de faire un bilan de tout ou partie du travail réalisé au cours des séances précédentes ainsi que des difficultés sur lesquelles un travail complémentaire apparaît utile ou nécessaire.

1.2. Le ***programme d’étude*** se dessinera peu à peu, en relation étroite avec la rubrique des ***Questions de la semaine*** : *a priori*, il inclut en effet ***toute question professionnelle*** (en un sens très large de l’expression) qui peut se poser à un professeur de mathématiques, débutant ou non.

1.3. Pour commencer de repérer ce qui fait le « territoire » du professeur de mathématiques, territoire où vont se poser les questions que nous étudierons, on peut se référer à un texte toujours en vigueur (il date de 1997) présentant la ***Mission du professeur exerçant en collège, en lycée d’enseignement général et technologique ou en lycée professionnel*** : on en trouvera le texte intégral sur la partie ***Mathématiques*** du site de l’IUFM, sous la rubrique ***Documents / 2nd degré*** (http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2006-

2007/documents_07.html). Ce texte indique que « la mission du professeur et la responsabilité qu'elle implique se situent dans le triple cadre du ***système éducatif***, des ***classes*** qui lui sont confiées et de son ***établissement*** d'exercice ». Il propose donc une description en ***trois volets*** des exigences qui s'imposent au professeur.

a) Le premier volet est intitulé ***Exercer sa responsabilité au sein du système éducatif***. On y rappelle que le professeur n'est pas seul au monde avec la classe dont la responsabilité lui est pour partie confiée, et qu'il doit constamment situer son intervention dans un cadre large.

En fin de formation initiale le professeur connaît ses droits et obligations. Il est capable de :

Situer son action dans le cadre de la mission que la loi confère au service public d'éducation

Le service public d'éducation est « conçu et organisé en fonction des élèves et des étudiants. Il contribue à l'égalité des chances » (article 1^er^ de la loi d'orientation du 10 juillet 1989). Cela nécessite que le professeur sache, pour des élèves très divers, donner sens aux apprentissages qu'il propose. Il permet ainsi l'acquisition de savoirs et de compétences et contribue également à former de futurs adultes à même d'assumer les responsabilités inhérentes à toute vie personnelle, sociale et professionnelle et capables « d'adaptation, de créativité et de solidarité » (rapport annexé à la loi du 10 juillet 1989).

Contribuer au fonctionnement et à l'évolution du système éducatif

Le professeur doit être à même de mesurer les enjeux sociaux de l'éducation et de son action au sein du système. Il doit également connaître les textes essentiels concernant l'organisation du service public de l'éducation, ses évolutions et son fonctionnement. Il pourra ainsi se comporter en acteur du système éducatif et favoriser son adaptation en participant à la conception et la mise en œuvre d'innovations, de nouveaux dispositifs, de nouveaux programmes et diplômes.

Conscient des enjeux que représente, pour ses élèves, la continuité de l'action éducative, il participe aux actions conduites pour faciliter les transitions entre les différents cycles d'enseignement.

Capable d'aider ses élèves à atteindre les objectifs du cycle dans lequel ils sont scolarisés, il doit aussi participer à la délivrance des diplômes de l'éducation nationale.

Il est également formé à collaborer à la réalisation d'actions de partenariat engagées entre l'établissement et son environnement économique, social et culturel.

b) Le deuxième volet est intitulé ***Exercer sa responsabilité dans la classe***. Il est lui-même subdivisé en trois grands ensembles d'exigences professionnelles que l'on examine successivement : le professeur doit ***connaître sa discipline***, ***savoir construire des situations d'enseignement et d'apprentissage***, et ***savoir conduire sa classe***.

En fin de formation initiale, le professeur doit, pour être capable d'enseigner, conformément à son statut, une ou plusieurs disciplines ou spécialités :

Connaître sa discipline

Si, en fin de formation initiale, il ne peut être en mesure de mobiliser toute l'étendue des connaissances de sa (ou ses) discipline(s) d'enseignement, il doit en maîtriser les notions fondamentales et pouvoir en mettre en œuvre les démarches spécifiques.

Ceci implique qu'il sache situer l'état actuel de sa discipline, à travers son histoire, ses enjeux épistémologiques, ses problèmes didactiques et les débats qui la traversent. Il a réfléchi à la fonction sociale et professionnelle de sa discipline, à sa dimension culturelle et à la manière dont elle contribue à la formation des jeunes. La culture qu'il a acquise, disciplinaire et générale, lui permet de situer son domaine d'enseignement par rapport aux autres champs de la connaissance. Il sait choisir et organiser les connaissances essentielles et les concepts fondamentaux nécessaires à la structuration du savoir mais aussi choisir et mettre en œuvre les démarches pédagogiques liées à ces connaissances, en fonction des élèves qu'il a en charge.

Conscient du caractère global et de la cohérence que doit avoir la formation de l'élève, il a une connaissance précise des différents niveaux auxquels sa discipline est enseignée et de leur articulation. Il a repéré des convergences et des complémentarités avec d'autres disciplines ainsi que des différences de langage et de démarche. Il a le souci d'établir des collaborations avec ses collègues de la même discipline et d'autres disciplines ainsi qu'avec le professeur documentaliste. Il évite ainsi que ne se développe chez les élèves le sentiment d'un éclatement des savoirs et d'une juxtaposition des méthodes. Quelle que soit la discipline qu'il enseigne, il a une responsabilité dans l'acquisition de la maîtrise orale et écrite de la langue française et dans le développement des capacités d'expression et de communication des élèves.

Enfin, conscient de la nécessité de poursuivre sa propre formation tout au long de sa carrière pour compléter et actualiser ses connaissances, améliorer ses démarches et développer ses compétences, il est informé des différents supports de ressources documentaires, des modalités pour y accéder ainsi que des ressources de formation auxquelles il peut faire appel.

Savoir construire des situations d'enseignement et d'apprentissage

En fin de formation initiale, le professeur est capable de concevoir, préparer, mettre en œuvre et évaluer des séquences d'enseignement qui s'inscrivent de manière cohérente dans un projet pédagogique annuel ou pluriannuel.

L'élaboration de ce projet implique qu'il sache, dans le cadre des programmes et à partir des acquis et des besoins des élèves, fixer les objectifs à atteindre et déterminer les étapes nécessaires à l'acquisition progressive des méthodes ainsi que des savoirs et savoir-faire prescrits. Elle suppose également qu'il s'informe des choix arrêtés par les autres professeurs de la classe et de sa discipline et en tienne compte.

Pour chaque séquence, il définit, dans le cadre de sa progression, le (ou les) objectif(s) à atteindre, sélectionne les contenus d'enseignement, prévoit des démarches et situations variées favorables à l'apprentissage, adaptées aux objectifs qu'il s'est fixés et à la diversité de ses élèves.

Il prévoit la succession des différents moments d'une séquence et en particulier l'alternance des temps de recherche, de tri et de synthèse d'informations en utilisant, de manière appropriée, les différents supports, outils et techniques qu'il a choisis.

Il est préparé à tirer parti des possibilités offertes par les technologies d'information et de communication. Il sait prévoir l'utilisation du centre de documentation et d'information, se servir des équipements nécessaires à l'enseignement de sa discipline ainsi que des salles spécialisées. Il sait, en un langage clair et précis, présenter aux élèves l'objectif et les contenus d'une séquence, les modalités du travail attendu d'eux et la manière dont les résultats seront évalués. Il sait également être à l'écoute et répondre aux besoins de chacun.

Il conçoit et met en œuvre les modalités d'évaluation adaptées aux objectifs de la séquence. Il est attentif aux effets de l'évaluation sur les élèves et utilise outils et méthodes leur permettant d'identifier tout autant leurs acquis que les savoirs et savoir-faire mal maîtrisés.

Il sait l'importance à accorder à l'évaluation d'une séquence d'enseignement dans le souci d'accroître la pertinence et l'efficacité de sa pratique. Il s'attache à analyser les obstacles rencontrés dans le déroulement de la séquence ainsi que les écarts éventuels entre les résultats attendus et obtenus. Il en tient compte pour préparer la suite et modifier éventuellement le projet initial et le calendrier prévus.

Conscient de l'importance, pour les élèves, d'une cohérence éducative résultant de pratiques convergentes au sein de l'équipe enseignante, il confronte ses pratiques à celles de ses collègues dans le cadre de concertations, notamment lors des conseils d'enseignement, et avec l'aide de l'équipe de direction et des corps d'inspection.

Dans les voies de formation qui incluent des stages ou des périodes de formation en entreprise, il sait analyser les référentiels des diplômes, veiller à l'articulation de la formation donnée dans l'établissement et en milieu professionnel, participer à la mise en place, au suivi et à l'évaluation en relation avec les autres partenaires de la formation.

Savoir conduire sa classe

Les compétences acquises par le professeur en fin de formation initiale doivent lui permettre, dans des contextes variés, de conduire la classe en liaison avec l'équipe pédagogique.

Le professeur a la responsabilité de créer dans la classe les conditions favorables à la réussite de tous.

Maître d'œuvre de l'organisation et du suivi de l'apprentissage des élèves qui lui sont confiés, il s'attache en permanence à leur en faire comprendre le sens et la finalité.

Dynamisme, force de conviction, rigueur et capacité à décider sont nécessaires pour que le professeur assume pleinement sa fonction : communiquer l'envie d'apprendre, favoriser la participation active des élèves, obtenir leur adhésion aux règles collectives, être garant du bon ordre et d'un climat propice à un travail efficace. Il est attentif aux tensions qui peuvent apparaître. Il exerce son autorité avec équité.

Il sait susciter et prendre en compte les observations et les initiatives des élèves sans perdre de vue les objectifs de travail. Il favorise les situations interactives et sait mettre en place des formes collectives de travail et d'apprentissage. Il s'attache à donner aux élèves le sens de leur responsabilité, à respecter et à tirer parti de leur diversité, à valoriser leur créativité et leurs talents, à développer leur autonomie dans le travail et leur capacité à conduire un travail personnel dans la classe ou en dehors de la classe. Il fait preuve d'ouverture, il peut modifier la démarche choisie initialement. Il est préparé à s'adapter à des situations inattendues sur le plan didactique, pédagogique ou éducatif.

Il est capable d'identifier et d'analyser les difficultés d'apprentissage des élèves, de tirer le meilleur parti de leurs réussites, et de leur apporter conseils et soutien personnalisés avec le souci de les rendre acteurs de leurs progression. Il veille à la gestion du temps en fonction des activités prévues, des interventions et difficultés des élèves ainsi que des incidents éventuels de la classe.

Il sait utiliser l'espace et le geste et placer sa voix. Il sait choisir le registre de langue approprié ; ses modalités d'intervention et de communication sont ajustées en fonction des activités proposées et de la réceptivité des élèves.

Il a conscience que ses attitudes, son comportement constituent un exemple et une référence pour l'élève et qu'il doit en tenir compte dans sa manière de se comporter en classe.

c) Le troisième volet, enfin, s'intitule ***Exercer sa responsabilité dans l'établissement***.

Le professeur exerce le plus souvent dans un établissement public local d'enseignement, ou bien dans un établissement privé sous contrat d'association. Il est placé sous l'autorité du chef d'établissement.

Le professeur a le souci de prendre en compte les caractéristiques de son établissement et des publics d'élèves qu'il accueille, ses structures, ses ressources et ses contraintes, ses règles de fonctionnement. Il est sensibilisé à la portée et aux limites des indicateurs de fonctionnement et d'évaluation des établissements.

Il est partie prenante du projet d'établissement qu'il contribue à élaborer et qu'il met en œuvre, tel qu'il a été arrêté par le conseil d'administration, avec l'ensemble des personnels et des membres de la communauté éducative.

Un professeur n'est pas seul ; au sein de la communauté scolaire, il est membre d'une ou plusieurs équipes pédagogiques et éducatives. Il est préparé à travailler en équipe et à conduire avec d'autres des actions et des projets. Il a le souci de confronter ses démarches, dans une perspective d'harmonisation et de cohérence, avec celles de ses collègues. Il peut solliciter leur aide, ainsi que le conseil et l'appui des équipes de direction et des corps d'inspection.

Il sait quel rôle jouent dans l'établissement tous ceux qui, quel que soit leur emploi, participent à son fonctionnement.

Il connaît les différentes instances de concertation et de décision, il est conscient des responsabilités qu'il y exerce ou peut être appelé à y exercer. Il sait qu'il a à participer à l'élaboration de la politique de l'établissement.

Le professeur est attentif à la dimension éducative du projet d'établissement, notamment à l'éducation à la citoyenneté, et ce, d'autant plus que l'établissement est parfois le seul lieu où l'élève trouve repères et valeurs de référence.

Il connaît l'importance du règlement intérieur de l'établissement et sait en faire comprendre le sens à ses élèves. Il est capable de s'y référer à bon escient. De même, il connaît et sait faire respecter les règles générales de sécurité dans l'établissement.

Le professeur doit pouvoir établir un dialogue constructif avec les familles et les informer sur les objectifs de son enseignement, examiner avec elles les résultats, les aptitudes de leurs enfants, les difficultés constatées et les possibilités de remédiation, conseiller, aider l'élève et sa famille dans l'élaboration du projet d'orientation. Il participe au suivi, à l'orientation et à l'insertion des élèves en collaboration avec les autres personnels, d'enseignement, d'éducation et d'orientation. Au sein des conseils de classe, il prend une part active dans le processus d'orientation de l'élève.

Il connaît les responsabilités dévolues aux professeurs principaux.

Il est préparé à établir des relations avec les partenaires extérieurs auprès desquels il peut trouver ressources et appui pour son enseignement comme pour réaliser certains aspects du projet d'établissement. Dans un cadre défini par l'établissement, et sous la responsabilité du chef d'établissement, il peut être appelé à participer à des actions en partenariat avec d'autres services de l'État (culture, jeunesse et sports, santé, justice, gendarmerie, police...), des collectivités territoriales et des pays étrangers, des entreprises, des associations et des organismes culturels, artistiques et scientifiques divers. Il est capable d'identifier les spécificités des apports de ces partenaires.

1.4. Pour être en accord avec les prescriptions précédentes, le professeur doit notamment se tenir informé des ***orientations*** et des ***enjeux*** de la politique scolaire que le ministère de l'Éducation nationale a conçue et qu'il s'efforce de mettre en œuvre.

a) Dans ce contexte, les professionnels de l'enseignement doivent par exemple prendre connaissance de la ***circulaire de rentrée*** qui, chaque année, prépare la rentrée scolaire.

• On trouvera sur le site Internet de l'IUFM, sous la rubrique déjà indiquée plus haut et sous le titre ***Rentrée 2006***, la circulaire concernant la présente rentrée.

• On reproduit ci-après, simplement, et pour une première information, les titres et sous-titres de cette longue circulaire.

• Chaque participant indique sur la feuille où il rédigera dans quelques instants sa ***question de la semaine*** un ou deux thèmes ou sujets à propos desquels il souhaiterait idéalement disposer d'une information plus approfondie. Pour rendre la chose plus facile, on a numéroté les items figurant ci-après.

II – Au collège, maîtriser les connaissances et les compétences du socle commun

II.1. Les programmes personnalisés de réussite éducative (PPRE)

II.2. Les dispositifs en alternance en quatrième

II.3. L'option facultative de découverte professionnelle de 3 heures

II.4. Le module de découverte professionnelle de 6 heures

II.5. Les dispositifs dérogatoires en 3^{e}

II.6. Les enseignements adaptés

II.7. De nouveaux contenus pour les enseignements suivants entrent en vigueur à la prochaine rentrée…

II.8. Une note de vie scolaire sera instaurée à la rentrée 2006

II.9. Le socle commun de connaissances et de compétences

II.10. Maîtriser les technologies de l'information et de la communication (TIC) et les mettre au service de tous les enseignements

III – Concevoir l'orientation comme une partie intégrante de la démarche éducative

IV – Refonder l’éducation prioritaire

V – Réussir la scolarisation des élèves présentant un handicap

Réussir la mise en œuvre des maisons départementales des personnes handicapées (MDPH), en application de la loi n° 2005-102 du 11 février 2005

VI – Mieux s’insérer grâce à la voie professionnelle

VI.1. L’aide aux élèves pour l’accès aux stages

VI.2. La délivrance du label « lycée des métiers »

VI.3. Le développement de l’apprentissage en EPLE

VI.4. La prévention des sorties sans qualification

VI.5. La formation continue des adultes

VI.6. La validation des acquis de l’expérience

VII – Rénover l’enseignement des langues vivantes étrangères

VII.1. La mise en place de nouveaux programmes de langues étrangères au collège

VII.2. La poursuite de l’allègement des effectifs en langue vivante au lycée

VII.3. L’évaluation des compétences orales des élèves au baccalauréat « Sciences et technologies de la gestion (STG) »

VII.4. La simplification des modalités de correction des épreuves spécifiques conduisant à la double délivrance du baccalauréat français et de l’Abitur

VIII – Au lycée général et technologique, accompagner la rénovation des enseignements

VIII.1. Enseignements scientifiques : une meilleure orientation vers les études scientifiques de l’enseignement supérieur et un rééquilibrage filles-garçons

VIII.2. Rénovation de la série « Sciences et technologie de la gestion (STG) »

VIII.3. Travaux personnels encadrés

VIII.4. De nouveaux contenus pour les enseignements suivants**…**

IX – Conforter le pilotage pédagogique de l’EPLE : installer le conseil pédagogique, élaborer le projet d’établissement, expérimenter et contractualiser

IX.1. Le conseil pédagogique

a) Composition du conseil pédagogique

b) Attributions du conseil pédagogique

IX.2. Projet d’établissement

a) L’éducation artistique et culturelle

b) Droit à l’expérimentation

IX.3. Contrat d’objectifs

X – Prévenir la violence et développer l’éducation à la responsabilité

X.1. La prévention de la violence

X.2. L’éducation à la responsabilité

a) Une éducation qui s’inscrit dans la vie même des établissements

b) Une éducation qui participe à la formation des élèves dans quatre domaines principaux

- Les questions de développement durable font désormais partie intégrante de la formation des élèves
- Les principes de mixité et d’égalité entre les sexes ont été réaffirmés dans la loi pour l’avenir de l’école.
- La mise en œuvre du programme quinquennal de prévention et d’éducation relatif à la santé des élèves doit être poursuivie…
- L’éducation à la prévention des comportements à risques

1.5. Passons à la rubrique des ***Questions de la semaine*** (qui, à partir de la séance prochaine du Séminaire, ouvrira chaque séance).

a) On a vu que le programme de travail du séminaire découlera pour une part essentielle de ces questions.

• Les questions de la semaine permettent à chacun, chaque semaine, de s'exprimer en s'interrogeant et en interrogeant.

• Toute question posée est consultable par chacun des participants sur le site Internet de l'IUFM : cette consultation suppose un mot de passe qui ne doit pas être diffusé à l'extérieur de la promotion.

• Mise ainsi par écrit – et rendue publique ***à l'intérieur du Séminaire*** –, une « question de la semaine » devient *ipso facto* un ***problème*** posé devant le Séminaire, même si les dynamiques en cours conduisent à différer le travail collectif sur tel ou tel de ces problèmes.

• C'est par les questions de la semaine que passe une part fondamentale de l'apport des participants au travail du Séminaire, notamment sous la forme de « remontées du terrain », qu'il s'agisse du stage en responsabilité ou des autres stages : les prendre au sérieux est une dimension du respect que chacun doit porter à la formation, aux formateurs et aux formés.

b) Chacun prend donc un temps de réflexion pour procéder à un examen des difficultés principales qu'il a pu rencontrer jusqu'ici, puis en sélectionne une ou deux qu'il rédige soigneusement, de façon concise, mais clairement explicite. On pourra pour cela retenir le modèle de présentation ci-après.

Journée 1 (5 septembre 2006)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4^e (et soutien en 5^e)

Comment faut-il remplir le cahier de textes de la classe ?

1.6. La rubrique ***Faisons le point*** n'a pas lieu d'être aujourd'hui : elle n'existera d'ailleurs que de temps en temps, lorsqu'il y aura matière à… faire le point !

a) En référence au travail de la journée de rentrée (qui s'est déroulée en deux demi-journées, le mercredi 30 août de 10 h à 12 h 30 et le jeudi 31 août de 9 h à 12 h 15), on peut rappeler ici la diffusion de la notice intitulée ***Première rentrée des classes***. Notons que cette notice a été mise en ligne dans une version d'ores et déjà retouchée (par rapport à la version imprimée diffusée jeudi 31 août) : dans la sous-section 3.3, au lieu de

« Les programmes scindant le corpus mathématique à étudier en trois ou quatre grands ***domaines*** (en gros : Calcul, Géométrie, Statistique, auxquels s'ajoutent au collège le domaine des Grandeurs)… »

il fallait lire en effet

« Les programmes scindant le corpus mathématique à étudier en trois ou quatre grands ***domaines*** (en gros : Calcul, Géométrie, Statistique, auxquels s'ajoutent au collège, en 6^e et 5^e, le domaine des Grandeurs et mesures)… »

b) Comme tous les documents qui seront diffusés et étudiés, cette notice appelait – ***et appelle !*** – un examen attentif, scrupuleux de la part de chacun : les difficultés qu'on peut y trouver peuvent bien entendu faire l'objet de « questions de la semaine », ce qui conduira alors le Séminaire à revenir sur l'étude de la notice.

c) Un point mérite d'être d'emblée souligné : celui des ***révisions***.

• Anticipant sur le Forum des questions qui suivra, mentionnons d'abord, ici, les questions posées à ce propos lors de la séance de rentrée du mercredi 30 août.

1. Est-il judicieux de commencer par quelques heures de révisions ? (Si les élèves proviennent de différents établissements, par exemple, il peut y avoir de grosses différences de niveau.) Ainsi, peut-on envisager une « interrogation » dès le début qui servirait d'évaluation ? (NG, MJ, 3e, 0)

2. En 2de, doit-on commencer chaque chapitre en présentant quelques exercices de rappel de 3e ou prendre plus de temps pour les définitions et les propriétés du nouveau chapitre ? (SG, OS, 2de, 0)

3. Faut-il prévoir des révisions en début d'année scolaire ? (SM2, MJ, 4e, 0)

4. Premier cours : que faire ? Révisions ? Interrogations ? (ALP, CR, 2de, 0)

• Rappelons maintenant ce que la notice *Première rentrée des classes* indique à ce sujet.

3.5. Le ***démarrage du travail*** doit éviter deux grands écueils. En premier lieu, ce serait faire fausse route que de se lancer hâtivement dans des ***révisions formelles et systématiques*** au risque de s'y enliser. Tout à l'opposé, le professeur engagera d'emblée la classe dans l'étude d'un ***thème mathématique neuf***, inscrit au programme de l'année qui commence, relevant cependant d'un domaine et d'un secteur mathématiques ***déjà quelque peu familiers*** (on doit proscrire ici le « totalement nouveau » autant que le « totalement ancien »), mais comportant des éléments mathématiques ***inédits et significatifs***. L'étude de ce thème, comme celle des thèmes qui lui succèderont, constituera alors le cadre où intégrer, le cas échéant, les ***rappels fonctionnellement utiles***, dont une partie non négligeable pourra au reste faire l'objet d'un travail hors classe des élèves, avec, bien entendu, mise en forme dans la synthèse relative au thème étudié.

• La proscription de révisions « formelles et systématiques » est ancienne et a été confirmée par les textes récents gouvernant l'enseignement des mathématiques au collège, comme le montre cet extrait de l'*Introduction générale pour le collège* qui précède le programme de 6e entré en vigueur en septembre 2005.

3. Organisation des apprentissages et de l'enseignement

…

3.2. Une prise en compte des connaissances antérieures des élèves

L'enseignement prend en compte les connaissances antérieures des élèves : mise en valeur des points forts et repérage des difficultés de chaque élève à partir d'évaluations diagnostiques. Ainsi l'enseignement peut-il être organisé au plus près des besoins des élèves, en tenant compte du fait que tout apprentissage s'inscrit nécessairement dans la durée et s'appuie sur les échanges qui peuvent s'instaurer dans la classe.

Il convient de faire fonctionner les notions et « outils » mathématiques étudiés au cours des années précédentes dans de nouvelles situations, autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision. En sixième, particulièrement, les élèves doivent avoir conscience que leurs connaissances évoluent par rapport à celles acquises à l'école primaire.

• La remarque sur la classe de 6e s'applique à plein, pour des raisons analogues, à la classe de 2de. On ne procèdera pas, par exemple, à une révision *in vacuo* des identités remarquables ; en revanche, on n'hésitera pas à s'arrêter sur ce thème dès lors que l'une ou l'autre des identités remarquables apparaîtra utile (voire indispensable) dans le cadre d'un travail mathématique portant sur un thème neuf, propre au programme de 2^de^. Si par exemple on cherche à identifier les nombres entiers n qui peuvent s'écrire sous la forme d'une différence de deux carrés ($n = a^2 - c^2$), on peut être amené à considérer différents cas : a pair et b impair, a pair et b pair, a impair et b pair, a impair et b impair. Dans ce dernier cas, ainsi, on se confrontera à une expression de la forme $(2m + 1)^2 - (2p + 1)^2$, ce qui pourra entraîner la mise en œuvre de l'une ou l'autre des stratégies de calcul ci-après :

♣ $(2m + 1)^2 - (2p + 1)^2 = (4m^2 + 4m + 1) - (4p^2 + 4p + 1)$

$$= 4(m^2 - p^2) + 4(m - p) = 4(m - p)(m + p + 1).$$

♥ $(2m + 1)^2 - (2p + 1)^2 = [(2m + 1) - (2p + 1)][(2m + 1) + (2p + 1)]$

$$= [2(m - p)][2(m + p + 1)] = 4(m - p)(m + p + 1).$$

C'est à l'occasion de ce travail que la classe reviendra ***brièvement*** aux identités remarquables, et cela ***dans un seul but*** : ***en faire un usage approprié*** dans le travail mathématique indiqué. Notons que le résultat obtenu ci-dessus conduit à se poser cette question : tout entier multiple de 4 s'écrirait-il comme une différence de carrés ? Pour y répondre, on pourra « noter » que l'on a $4k = (k + 1)^2 - (k - 1)^2$: cette fois, on fera donc fonctionner les identités remarquables « à l'envers ». Etc.

d) On clora cette rubrique en se penchant sur cette autre question.

> Pendant le stage en responsabilité, est-ce qu'on est responsable de la classe dès le premier jour et à 100 %, c'est-à-dire contrôles et examens ? (IIP, CR, 4^e^ & demi-5^e^, 0)

La réponse, ici, est des plus simples : c'est « oui » ! Mais on notera que certaines décisions se prennent ***en concertation*** : ainsi en va-t-il, s'il en existe, des ***contrôles communs*** aux classes d'un même niveau scolaire par exemple.

2. Forum des questions

2.1. Programmer l'étude

a) Plusieurs des questions de la rentrée porte sur la programmation de l'étude. On les reproduit ci-après.

> 1. Doit-on dès le début prévoir un planning prévisionnel annuel concernant le programme de la classe ? Si oui, comment fait-on ? (OB, OS, 5^e^, 0)
>
> 2. J'ai du mal à me faire une idée du temps que va prendre une séquence de cours. Est-ce que le PCP nous aide pour ça ? (WB, MJ, 4^e^, 0)
>
> 3. Comment répartir l'ensemble du programme de 4^e^ ? C'est-à-dire combien de temps doit-on passer pour le cours, les exercices suivant les chapitres, etc. ? (KE, MJ, 4^e^, 0)
>
> 4. J'ai pour l'instant du mal à évaluer le temps à accorder à chaque chapitre du programme. Comment évaluer ce temps ? (JN, CR, 4^e^, 0)
>
> 5. Établir une progression et faire une planification des cours de l'année en fonction du programme. (ALP, CR, 2^de^, 0)

6. Comment mettre en place une progression pour savoir dans quel ordre je vais prendre le programme ? (SH, CR, 4^e, 0)

7. Est-ce que je dois me baser pour la progression sur un manuel ? Comment lier les différentes parties du programme ? (ML, MJ, 2^{de}, 0)

8. Quelle doit être la progression des cours en 2^{de} ? Est-ce nous qui devons la construire ? Je n'ai rien trouvé dans le document d'accompagnement. (FL, MJ, 2^{de}, 0)

9. Quelle progression adopter pour une classe de 2^{de} ? Faut-il commencer par les « chapitres de révision » ? (PP, MJ, 2^{de}, 0)

b) Comme il en ira quasiment toujours, on apporte ci-après quelques ***matériaux pour bâtir une réponse*** – cette « réponse », elle, étant à construire concrètement dans l'organisation du travail de la classe considérée.

• Il faut en effet s'efforcer d'établir dès le début de l'année ***une programmation sur l'année de la matière à étudier***. Cette programmation doit être regardée – notamment lorsqu'on débute avec un type de classe donné – comme indicative et révisable : des bilans – et des ***mises à jour*** subséquentes – devront intervenir régulièrement.

• Il arrive qu'une telle programmation soit imposée, au moins partiellement, du fait de l'existence dans l'établissement d'une ***« progression commune »*** pour les classes du même niveau que celle considérée. Cette programmation n'impose véritablement, en général, que de respecter certains ***points de rendez-vous*** correspondant aux ***épreuves communes*** aux classes concernées ; mais elle constitue alors un cadre temporel dans lequel il convient de se glisser.

• S'il n'existe pas de tel cadre, il revient au professeur de le créer – éventuellement en concertation avec d'autres professeurs intervenant dans des classes de même niveau. Il va de soi que, pour cette tâche comme pour toute autre, un professeur stagiaire peut rechercher l'aide de son PCP. En revanche, il est vrai que le programme et le document d'accompagnement sont peu ou prou muets sur l'organisation d'une programmation : la raison en est, apparemment, que cela relève de la « liberté pédagogique » du professeur…

• Comment créer un tel cadre ? Que l'on débute dans l'enseignement ou que l'on débute avec tel type de classes – à l'instar d'un professeur qui, ayant enseigné au collège pendant des années, enseigne pour la première fois en 2^{de} par exemple –, on manque d'un certain nombre d'éléments d'analyse « clinique » qui permettraient de tenter d'élaborer *ab ovo* une programmation « personnelle ». Aussi on gagnera à se référer à des élaborations qui, implicitement ou explicitement, tirent profit d'un savoir d'observation accumulé au fil de plusieurs années d'enseignement.

• On peut aujourd'hui trouver sur l'Internet diverses propositions, telle la suivante, qui figure sur le site *Mathadora* (dû, semble-t-il, à Pierre Amigo, ancien élève de l'IUFM d'Aix-Marseille), à l'adresse http://mathadora.free.fr/lycee/seconde.html#prog.

Chapitre 1 : Outil de calcul pour la seconde (1 sem)

- Organiser un calcul à la main ou à la machine.
- Reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de deux carrés).
- Modifier une expression, la développer, la réduire selon l'objectif poursuivi.
- Résoudre algébriquement une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré.

Chapitre 2 : Outil de géométrie (2 sem)

- Utiliser pour résoudre des problèmes, les configurations et les transformations étudiées en collège, en argumentant à l'aide de propriétés identifiées.

Chapitre 3 : Les nombres (2,5 sem)

- Décomposer un entier en produit de facteurs premiers.
- Connaître la nature et les écritures d'un nombre.
- Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées.
- Savoir donner un ordre de grandeur.
- Savoir donner la valeur absolue d'un nombre.
- Calculer la distance entre deux nombres.
- Choisir un critère adapté pour comparer des nombres.
- Caractériser des éléments d'un intervalle et le représenter.
- Organiser un calcul à la main ou à la machine.
- Limites de la calculatrice.

Chapitre 4 : Géométrie dans l'espace (2,5 sem)

Manipuler, construire et représenter des solides (patrons, perspective cavalière)
Effectuer des calculs simples de longueur, aire ou volume.
Connaître les positions relatives de droites et plans de l'espace.
Connaître et utiliser les règles d'incidences.

Chapitre 5 : Notion de fonction (2,5 sem)

Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie soit par une courbe, soit par un tableau de données, soit par une formule.
Déterminer l'image d'un nombre.
Décrire avec un vocabulaire adapté (fonction croissante, fonction décroissante, maximum, minimum) ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe.
Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation.
Résoudre graphiquement des équations ou des inéquations du type : $f(x) = k$; $f(x) < k$; $f(x) = g(x)$; $f(x) < g(x)$.

Chapitre 6 : Statistiques (1) (2 sem)

Réfléchir sur la nature des données traitées, et s'appuyer sur des représentations graphiques pour justifier un choix de résumé.

- Savoir ce qu'est la moyenne, la médiane, la classe modale, la moyenne élaguée et l'étendue d'une série statistique quantitative.

Savoir calculer de plusieurs manières la moyenne d'une série de nombres.
Utiliser les propriétés de linéarités de la moyenne d'une série statistique.

Chapitre 7 : Fonctions affines (2,5 sem)

Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est une fonction affine.
Caractériser les fonctions affines par le fait de l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable.
Connaître une représentation graphique d'une fonction affine.
Etude du sens de variation d'une fonction affine.
Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré.
Mise en équation d'un problème.
Utiliser un tableau de signe pour résoudre un inéquation ou déterminer le signe d'une fonction

Chapitre 8 : Triangles semblables (2 sem)

Reconnaître des triangles isométriques.
Reconnaître des triangles de même forme.
Construction de tels triangles.
Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires.

Chapitre 9 : Fonction carré (1 sem)

- Etablir le sens de variation et représenter graphiquement la fonction : $x \mapsto x^2$
- Comparer a, a^2 et a^3 lorsque a est positif.

- Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé.
- Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule.

Chapitre 10 : Statistique (2) (2 sem)

Simulation et fluctuation d'échantillonnage.
Concevoir et mettre en œuvre des simulations simples à partir d'échantillons de chiffres au hasard.

Chapitre 11 : Vecteurs et repérage (2,5 sem)

- Multiplication d'un vecteur par un réel.
- Repérer les points d'un plan, des cases d'un réseau carré ou rectangulaire, interpréter les cartes et les plans.
- Un repère étant fixé, exprimer la colinéarité de deux vecteurs ou l'alignement de trois points.

Chapitre 12 : Fonction inverse et autres fonctions (2,5 sem)

Etablir le sens de variation et représenter la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Connaître la représentation graphique de $x \mapsto \cos x$ et de $x \mapsto \sin x$.
Identifier l'enchaînement des fonctions de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule.
Equation et inéquations de premier degré.

Chapitre 13 : Equation de droites et systèmes (1,5 sem)

Caractériser analytiquement une droite.
Reconnaître que deux droites sont parallèles.
Déterminer le nombre de solution d'un système de deux équation à deux inconnues.
Résoudre des problèmes conduisant à de tels problèmes.

• Mais attention : même si un professeur reprend *ne varietur* une proposition de programmation trouvée ici ou là (y compris sur un site Internet « officiel », comme il en va à l'adresse http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/peda/lyc/progressions/2/prog_sec.htm), ***il reste entièrement responsable du choix qu'il fait***. En particulier, il ne saurait en rien « s'autoriser » de l'auteur, souvent anonyme, de la progression qu'il aurait ainsi reprise à son compte.

• On trouve bien sûr des propositions de progression relatives aux autres classes. Ce qui suit figure ainsi sur le site d'un collège de Villeneuve d'Asq (http://collegetriolo.free.fr/). Mais cette proposition appelle un regard critique sévère – on notera par exemple qu'on y réduit les trois domaines composant le programme de mathématiques à deux seulement, « Algèbre » et « Géométrie » !

Algèbre	**Géométrie**
Statistiques Nombres relatifs Nombres relatifs Fractions Puissance * Puissance de 10 * Ecriture scientifique Proportionnalité * Tableaux et graphique	Triangle rectangle * Propriétés * Cercle circonscrit * Médiatrices Pythagore * Théorème et réciproque Distance et tangente Droite des milieux Thalès

	Droites remarquables * Hauteur Rappels sur les aires Géométrie dans l'espace * Pyramide
Premier devoir commun de 4^e **Fin janvier**	
Calcul littéral * Simplification * Valeur d'une expression Equation et inégalité	Trigonométrie * Cosinus Droites remarquables * Médianes et bissectrices
Deuxième devoir commun de 4^e **Fin mars**	
Puissance Proportionnalité * Pourcentages et indice * Vitesse moyenne	Translation Géométrie dans l'espace * Cône

• Pour bâtir « sa » propre programmation, on peut aussi se référer au manuel de la classe, ou, mieux peut-être, à un ouvrage d'exercices (d'où sont éliminées les surcharges cosmétiques qui prolifèrent dans certains manuels). Supposons ici un ouvrage de ce type qui, pour la classe de 2de, propose un découpage en 10 « chapitres ». Si l'on compte prudemment 30 semaines (la progression de 2de reproduite plus haut ne compte que sur… 27,5 semaines), on aboutit, pour chacun des « chapitres », à une durée ouvrable de 3 semaines, c'est-à-dire en l'espèce à 9 heures en classe entière et 3 heures en module : c'est à l'intérieur de ce « budget temps » que l'on situera d'abord chacun des « chapitres » considéré.

• La programmation interne à un « chapitre », c'est-à-dire à un thème (voire un secteur) composant le programme, est plus délicate : c'est là un problème sur lequel on reviendra dans la suite même de cette séance.

2.2. Devoirs à la maison

a) La question suivante a été soulevée.

Est-ce que les devoirs à la maison sont réellement formateurs ? (MB, CR, 2de, 0)

b) La question semble traduire une opinion dubitative. Les textes gouvernant l'enseignement des mathématiques ne laissent toutefois guère de place au doute.

c) Pour la classe de 2de, par exemple, le document d'accompagnement comporte des développements dénués d'ambiguïté sur ce thème : on les reproduit ci-après.

3. L'organisation et le suivi du travail personnel des élèves en dehors de la classe

L'organisation et le suivi du travail personnel des élèves constituent une composante fondamentale de l'activité du professeur, **puisque ce travail personnel est essentiel dans la formation**. C'est aussi, pour le professeur, la première étape de l'individualisation, et un outil précieux pour la gestion de l'hétérogénéité.

Le travail personnel des élèves en mathématiques en dehors de la classe se répartit grossièrement entre les travaux donnés d'un cours à l'autre, écrits ou non, et les travaux de rédaction en temps libre à remettre dans des délais plus longs, qui sont commentés ci-après.

L'organisation

Le professeur choisit des travaux de nature variée, allant de la rédaction de solutions de problèmes ébauchées en classe jusqu'à la rédaction après recherche collective ou non d'un problème construit en vue d'un résultat significatif (au niveau considéré), en passant par la résolution d'exercices d'applications, la construction de figures, le compte rendu et l'analyse d'un texte mathématique (adapté au niveau), l'analyse de documents de la vie courante, la production d'un document construit avec un logiciel… L'imagination et la liberté du professeur peuvent ici s'exprimer pleinement dès l'instant qu'il poursuit les objectifs de formation qui lui ont été soumis. C'est à cette occasion qu'il pourra adapter la nature, le niveau de ces travaux, et l'exigence qui y est attachée à la progression générale, mais aussi aux besoins qu'il aura relevés chez chaque élève.

La fréquence de ces travaux doit être élevée. C'est leur longueur et leur niveau d'exigence qui doivent être modulés.

Le suivi

Le professeur peut suivre, au fil du temps imparti, les progrès des travaux qu'il a proposés, et apporter si nécessaire une aide, afin d'éviter les blocages stériles. Des annotations, modulées selon les élèves et les copies, détaillées pour certains et plus globales pour d'autres, dispensent d'une correction complète en classe entière ; elles contribuent à l'individualisation de l'enseignement et, par leur valeur d'encouragement, confortent les liens de confiance entre le professeur et ses élèves.

d) Ces considérations valent aussi pour le collège : dans l'*Introduction générale pour le collège* déjà citée, on lit par exemple ce qui suit.

3.7. Le travail personnel des élèves

En étude ou à la maison, ce type de travail est nécessaire non seulement pour affermir les connaissances de base et les réinvestir dans des exemples simples mais aussi pour en élargir le champ de fonctionnement et susciter ainsi de l'intérêt pour l'activité mathématique. Il contribue aussi à habituer l'élève à l'indispensable régularité d'un travail autonome, complémentaire de celui réalisé avec le professeur. Il peut prendre diverses formes :

– résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude de la leçon pour asseoir les connaissances ;

– travaux individuels de rédaction pour développer les capacités d'expression écrite et la maîtrise de la langue ;

– résolution de problèmes variés (exercices de synthèse, énigmes, jeux mathématiques…) pour mettre en œuvre des démarches heuristiques en temps non limité ;

– construction d'objets géométriques divers (frises, pavages, solides, …) en utilisant ou non l'informatique ;

– lectures ou recherches documentaires, en particulier sur l'histoire de la discipline ou plus généralement des sciences pour enrichir les connaissances ;

– constitution de dossiers sur un thème donné.

La correction individuelle du travail d'un élève est une façon d'en apprécier la qualité et de permettre à son auteur de l'améliorer, donc de progresser.

Le travail personnel proposé **en classe** aux élèves peut prendre chacune des formes décrites ci-dessus, en tenant compte, chaque fois, de la durée impartie. Il faut veiller à un bon équilibre entre ces diverses activités.

Ces travaux peuvent être différenciés en fonction du profil et des besoins des élèves.

e) D’une façon générale, on se reportera au document du groupe mathématique de l’Inspection générale sur ***Les travaux écrits des élèves en mathématiques au collège et au lycée*** (on le trouvera sur le site de l’IUFM sous le titre « Travaux écrits en mathématiques »).

2.3. Autorité & discipline

a) Plusieurs questions soulèvent le problème de l’autorité du professeur : on les reproduit ci-dessous.

1. Lors du premier contact avec la classe (présentation ou cours), comment faut-il faire pour s’imposer, avoir une autorité sur les élèves ? (TB, CR, 4e, 0)

2. Comment réussir l’équilibre entre discipline et souplesse pour que les conditions dans la classe soient optimales ? (AB, OS, 3e, 0)

3. J’ai déjà eu ce genre d’expérience et de questionnement en tant qu’assistant d’éducation : savoir placer la limite entre professeur et élèves afin 1) de savoir rester assez proche de leurs préoccupations et être à leur écoute ; 2) de pouvoir garder son autorité à tout moment. (CL, OS, 4e, 0)

b) Le problème soulevé est immense : on le travaillera donc au long cours. Pour amorcer cette réflexion, on méditera d’abord sur les lignes qui ouvrent le chapitre consacré à l’autorité dans un ouvrage récent, auquel on pourra plus généralement se référer, *Les nouveaux ados. Comment vivre avec ?* (sous la direction de Brigitte Canuel, Bayard, Paris, 2006). L’auteur de ces lignes est Serge Héfez, psychiatre, psychanalyste, responsable de l’unité de thérapie familiale du service de psychiatrie de l’enfant et de l’adolescent à l’hôpital de la Pitié-Salpêtrière, à Paris : le chapitre qui lui est dû s’intitule sans ambiguïté « L’Autorité. Ce n’est pas l’ado qui décide » ; le propos est cependant plus général.

> L’autorité est avant tout un processus de séparation qui permet une hiérarchie. Deux personnes peuvent se repérer à l’aide de cette frontière qui les sépare. En cela, l’autorité diffère totalement de la sévérité, de la contrainte ou encore de la violence. Elle repose sur l’acceptation intérieure, chez les deux parties, de cette hiérarchie et donc de cette séparation. Elle signifie : nous ne sommes pas au même niveau, nous ne sommes pas semblables, pas les mêmes.

c) Le point de vue précédent appelle immédiatement un commentaire : l’autorité porte sur un certain domaine d’activité ; elle ne couvre pas tous les aspects des relations entre deux personnes. La personne disposant de l’autorité a reçu cette autorité d’une puissance d’investiture, elle a été « autorisée » ; elle ne saurait légitimement en user hors de propos. Sur quoi porte l’autorité du professeur de mathématiques ? À propos de quels « gestes » peut-il assumer une autorité sur l’élève ? Ce sont des questions essentielles, sur lesquelles on reviendra.

3. Observation & analyse

3.1. Questions d’enseignement

a) Même si ***toutes*** les questions professionnelles sont importantes, si les réponses qu’on leur donne peuvent se révéler cruciales, le ***cœur du métier*** de professeur de mathématiques est fait de questions du type suivant : « Comment concevoir et réaliser une séance de travaux dirigés, dans une classe de terminale ES, sur la notion d’événements indépendants ? » Cette dernière question pourra par exemple surgir à l’occasion du ***stage de pratique accompagnée***, dès lors que celui-ci se déroule au lycée et que le ***professeur d'accueil*** a en responsabilité une terminale ES. Pour le moment, nous nous en tiendrons à de semblables questions, mais à propos des classes de la 5^{e} à la 2de.

b) Nous nous arrêterons ici sur la question *Q* suivante : « Comment concevoir et réaliser une séance (ou une partie de séance), en classe entière, dans une 5^{e}, sur les propriétés des diagonales d'un parallélogramme ? »

• L'examen du programme de la classe de 5^{e} fait apparaître, dans le ***domaine*** de la géométrie, un ***secteur*** d'études intitulé ***Figures planes***. (Ce domaine comporte deux autres secteurs d'études : ***Prismes droits, cylindres de révolution*** et ***Symétrie centrale***.) Ce secteur comporte un certain nombre de ***thèmes d'études***, dont le thème du ***parallélogramme***. (Les autres thèmes d'étude du secteur sont les suivants : figures simples ayant un centre de symétrie ou des axes de symétrie ; caractérisation angulaire du parallélisme ; triangle : somme des angles d'un triangle ; construction de triangles et inégalité triangulaire ; cercle circonscrit à un triangle ; médianes et hauteurs d'un triangle.)

• Ce que le programme *stricto sensu* dit du thème du parallélogramme tient en quelques lignes – qui permettent de vérifier que les « propriétés des diagonales » – leur ***connaissance*** et leur ***utilisation*** – sont bien « au programme » de 5^{e}.

Contenus
Parallélogramme.

Compétences
Connaître et utiliser une définition et les propriétés (relatives aux côtés, aux diagonales et aux angles) du parallélogramme.

Exemples d'activités, commentaires
Le travail entrepris sur la symétrie centrale permet de justifier des propriétés caractéristiques du parallélogramme que les élèves doivent connaître.

• En revanche, le programme est fort peu disert sur ***l'utilisation*** de ces propriétés que les élèves doivent apprendre à maîtriser… Une question surgit donc, essentielle : « À quoi sert la connaissance des propriétés des diagonales d'un parallélogramme ? Quels en sont, du moins, les usages possibles, pertinents en classe de 5^{e} ? »

• On voit que, ici, la rubrique intitulée « Exemples d'activités, commentaires » n'apporte pas… d'exemples d'activités ! La présentation du domaine de la géométrie précise que, en cette matière, « le programme s'organise autour du parallélogramme et du triangle ». Mais les rédacteurs ne vont guère plus loin et laissent donc les professeurs affronter seuls un problème clé : déterminer les ***raisons d'être*** de la propriété des diagonales d'un parallélogramme de se couper en leur milieu. L'enseignement doit en effet se bâtir sur une réponse à la question $Q^{\#}$ suivante : Pourquoi la propriété des diagonales a-t-elle attiré l'attention des mathématiciens, et pourquoi demande-t-on aujourd'hui encore aux élèves de la connaître – en vue de quels usages, de quelles utilisations ?

c) La réponse qui sera apportée à la question $Q^{\#}$ précédente commandera la réponse apportée à la question *Q* : la rencontre effective des élèves avec la propriété des diagonales d'un parallélogramme devra se faire dans une situation où cette propriété apparaîtra ***utile***, voire ***indispensable***, pour résoudre un ***problème*** (de géométrie) d'un certain ***type*** qui, lui-même, puisse être regardé comme l'une des raisons d'être, l'une des utilisations significatives de la propriété.

d) Mais quel type de problèmes ? Pour répondre, on peut examiner les réponses $R^{\lozenge}$ observables « autour de soi » – dans les ***archives du métier*** (au sens large) – à la question Q. C'est ce que l'on fera dans ce qui suit, en allant voir, non un manuel par exemple, mais une observation effective dans une classe de 5^e^.

3.2. Une observation dans une classe de 5^e^

a) La séance observée s'est déroulée le jeudi 9 février 2006, de 11 h 10 à 12 h 05. On dispose à propos de cette observation *in situ*

– d'un compte rendu d'observation écrit intitulé ***Propriétés du parallélogramme. Une séance en classe de 5^e^*** (ce compte rendu sera diffusé lors de la prochaine séance du Séminaire) ;

– d'une vidéo de la séance.

b) On visionne le premier quart d'heure de la vidéo de la séance. L'activité de la classe qu'on y observe a trait à la ***correction d'un travail donné à faire « à la maison »***. En ce début de formation, plusieurs commentaires méritent d'être faits. On notera donc…

– … que le travail donné à faire hors classe ne consistait pas, ici, à « résoudre un exercice », mais ***à rédiger la solution d'un petit problème de géométrie étudié (et résolu) en classe*** (sans doute lors de la séance précédente) ;

– … que le travail réalisé dans l'extrait visionné commence par un rappel (par un ou des élèves) de ***l'énoncé*** du problème d'abord, des ***conclusions*** auxquelles la classe avait abouti ensuite ;

– … que cet amorçage, formateur et intégrateur de la ***mémoire de la classe***, est un travail collectif impulsé et régulé par la professeure, ***avec une participation effective des élèves*** ;

– … que la participation des élèves sous l'impulsion de la professeure est davantage marquée encore dans la phase qui vient ensuite, celle ***de la présentation et de la mise en débat des rédactions des élèves*** de la classe ;

– … que la professeure ne passe à la phase ***d'élaboration d'une rédaction « commune »*** et (en principe) définitive qu'après avoir donné à la phase précédente un temps assez long ;

– … que l'élaboration de la rédaction définitive se réalise ***en interaction forte avec les élèves***, lesquels peuvent intervenir jusqu'après la mise au point de cette rédaction, comme le montre l'exemple de l'élève qui « propose » sa formulation (« D'après nos recherches… ») comme une alternative possible à celle adoptée (« D'après l'énoncé… ») ;

– … que, par le travail collectif et individuel qu'il donne la possibilité d'accomplir, le dispositif de travail mis en jeu, qui permet de multiplier les « essais » de formulation et de justification des formulations ainsi essayées, est de nature ***à favoriser grandement les apprentissages***.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 2 : mardi 12 septembre 2006

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Problématique et fonctionnement du Séminaire // 2. Forum des questions // 3. Observation & analyse // 4. Les Archives du Séminaire

0. Questions de la semaine

Journée 2 (12 septembre 2006)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4e (et soutien en 5e)

Comment prépare-t-on une interrogation ? Comment met-on en place le barème ?

1. Problématique et fonctionnement du Séminaire

1.1. Les « Questions de la semaine »

Elles sont mises en ligne chaque semaine. Y accéder suppose un mot de passe communiqué oralement à la promotion, mais qu'il convient de ne pas diffuser.

1.2. Le programme d'étude

a) Une consultation a été réalisée lors de la première séance du Séminaire, à propos des thèmes et sujets apparaissant dans la circulaire de rentrée 2006.

b) Les réponses obtenues aboutissent aux nombres de citations indiqués ci-après. On examinera plus loin les items mis en bleu.

II – Au collège, maîtriser les connaissances et les compétences du socle commun

II.1. Les programmes personnalisés de réussite éducative (PPRE)
/////////////// (15)
II.2. Les dispositifs en alternance en quatrième
///////// (9)
II.3. L'option facultative de découverte professionnelle de 3 heures
II.4. Le module de découverte professionnelle de 6 heures
II.5. Les dispositifs dérogatoires en 3e

///

II.6. Les enseignements adaptés

/////

II.7. De nouveaux contenus pour les enseignements suivants entrent en vigueur à la prochaine rentrée…

////

II.8. Une note de vie scolaire sera instaurée à la rentrée 2006

/////////// (11)

II.9. Le socle commun de connaissances et de compétences

//////////// (12)

II.10. Maîtriser les technologies de l'information et de la communication (TIC) et les mettre au service de tous les enseignements

////////// (10)

III – Concevoir l'orientation comme une partie intégrante de la démarche éducative

///////

IV – Refonder l'éducation prioritaire

///

V – Réussir la scolarisation des élèves présentant un handicap

//////

VI – Mieux s'insérer grâce à la voie professionnelle

/

VI.1. L'aide aux élèves pour l'accès aux stages

//

VI.2. La délivrance du label « lycée des métiers »

VI.3. Le développement de l'apprentissage en EPLE

VI.4. La prévention des sorties sans qualification

/

VI.5. La formation continue des adultes

VI.6. La validation des acquis de l'expérience

VII – Rénover l'enseignement des langues vivantes étrangères

VII.1. La mise en place de nouveaux programmes de langues étrangères au collège

/

VII.2. La poursuite de l'allègement des effectifs en langue vivante au lycée

VII.3. L'évaluation des compétences orales des élèves au baccalauréat « Sciences et technologies de la gestion (STG) »

VII.4. La simplification des modalités de correction des épreuves spécifiques conduisant à la double délivrance du baccalauréat français et de l'Abitur

VIII – Au lycée général et technologique, accompagner la rénovation des enseignements

/

VIII.1. Enseignements scientifiques : une meilleure orientation vers les études scientifiques de l'enseignement supérieur et un rééquilibrage filles-garçons

///

VIII.2. Rénovation de la série « Sciences et technologie de la gestion (STG) »

//

VIII.3. Travaux personnels encadrés

///

VIII.4. De nouveaux contenus pour les enseignements suivants**…**

/

IX – Conforter le pilotage pédagogique de l'EPLE : installer le conseil pédagogique, élaborer le projet d'établissement, expérimenter et contractualiser

IX.1. Le conseil pédagogique

a) Composition du conseil pédagogique

b) Attributions du conseil pédagogique

IX.2. Projet d'établissement

a) L'éducation artistique et culturelle

b) Droit à l'expérimentation

IX.3. Contrat d'objectifs

X – Prévenir la violence et développer l'éducation à la responsabilité

///

X.1. La prévention de la violence

///

X.2. L'éducation à la responsabilité

/////

a) Une éducation qui s'inscrit dans la vie même des établissements

b) Une éducation qui participe à la formation des élèves dans quatre domaines principaux

• Les questions de développement durable font désormais partie intégrante de la formation des élèves

• Les principes de mixité et d'égalité entre les sexes ont été réaffirmés dans la loi pour l'avenir de l'école.

/

• La mise en œuvre du programme quinquennal de prévention et d'éducation relatif à la santé des élèves doit être poursuivie…

• L'éducation à la prévention des comportements à risques

c) Pour les quatre items retenus pour le moment, on examine les passages correspondants de la circulaire de rentrée 2006.

• Les programmes personnalisés de réussite éducative (PPRE)

Les programmes personnalisés de réussite éducative (PPRE)

Mesure essentielle de la loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'école, ils sont destinés aux élèves qui éprouvent des difficultés dans l'acquisition du socle commun de connaissances et de compétences. Ils peuvent intervenir à tout moment de la scolarité, pour une durée variable et selon les besoins des élèves concernés.

À cet égard, deux éléments importants doivent plus que jamais être renforcés, afin d'entreprendre une prise en charge des élèves qui en ont besoin le plus rapidement possible : la liaison école-collège et l'exploitation des résultats aux évaluations diagnostiques de sixième.

Les PPRE s'adressent en priorité aux élèves dont les évaluations diagnostiques en début de sixième révèlent des retards significatifs dans les apprentissages fondamentaux. Les deux heures non affectées par classe de sixième seront mobilisées pour organiser les PPRE.

Le programme personnalisé de réussite éducative constitue tout autant une modalité de prévention de la grande difficulté scolaire, visant à empêcher le redoublement, qu'un accompagnement de celui-ci dès lors qu'il n'aura pu être évité.
Au cycle central, dans le cadre de la mise en œuvre du plan pour l'éducation prioritaire dans les collèges « ambition réussite » une demi-heure est prélevée sur l'heure non affectée de chaque division de cinquième et de quatrième. Chaque demi-heure restante en cinquième et en quatrième peut être utilisée en fonction des besoins de chaque collège, voire utilement globalisée dans le cadre du cycle central notamment pour déployer les PPRE.

- La note de vie scolaire

Une note de vie scolaire sera instaurée à la rentrée 2006

Elle sera attribuée tous les trimestres aux élèves, de la sixième à la troisième. À cet effet, des textes réglementaires sont en préparation pour préciser ses éléments constitutifs et ses modalités d'attribution. Cette note de vie scolaire, calculée sur la base des notes trimestrielles obtenues en classe de troisième, sera prise en compte dans l'obtention du diplôme national du brevet dès la session 2007.

- Le socle commun de connaissances et de compétences

Le socle commun de connaissances et de compétences

Conformément à l'article 9 de la loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'école du 23 avril 2005, le décret définissant le socle commun précisera, après avis du Haut Conseil de l'éducation, les connaissances et les compétences à prendre en compte dans chacun de ses cinq volets :
– la maîtrise de la langue française ;
– la maîtrise des principaux éléments de mathématiques ;
– une culture humaniste et scientifique permettant le libre exercice de la citoyenneté ;
– la pratique d'au moins une langue étrangère ;
– la maîtrise des techniques usuelles de l'information et de la communication.

Ce décret ne se substituera pas aux programmes de l'école primaire et du collège. Il définira ce qu'aucun élève ne doit ignorer à la fin de la scolarité obligatoire et qui est indispensable, selon la loi, « pour accomplir avec succès sa scolarité, poursuivre sa formation, construire son avenir personnel et professionnel et réussir sa vie en société ».

Les éléments constitutifs du socle seront déclinés pour chaque cycle et pour chaque année de la scolarité dans le cadre d'une adaptation des programmes. À l'intérieur de chaque cycle, ceux-ci seront complétés par des repères annuels afin que le conseil des maîtres et le conseil de classe puissent évaluer dans quelle mesure l'élève maîtrise les connaissances et compétences, et proposer une aide spécifique aux élèves qui éprouvent des difficultés dans leur acquisition.

Les objectifs du socle commun de connaissances et de compétences seront aussi déclinés pour la voie professionnelle, notamment pour les élèves encore soumis à la scolarité obligatoire et inscrits en classes préparatoires au CAP ou au BEP. Enfin, la maîtrise des connaissances et des compétences qui constituent le socle commun figure parmi les éléments évalués en vue de l'obtention du diplôme national du brevet.

Par ailleurs, dans le cadre du programme LOLF enseignement du second degré public, un indicateur doit apprécier la proportion d'élèves qui maîtrisent en fin de collège les compétences de base en français et en mathématiques en référence au socle commun. À cet effet, des tests seront réalisés auprès d'un échantillon d'élèves de 3e à la fin du deuxième trimestre de l'année scolaire dès 2006-2007.

- Les technologies de l'information et de la communication (TIC)

Maîtriser les technologies de l'information et de la communication (TIC) et les mettre au service de tous les enseignements.

La circulaire n° 2005-135 du 9 septembre 2005 (B.O. n° 34 du 22 septembre 2005) réaffirme l'importance de la maîtrise des TIC conformément au cinquième volet du socle commun.
Afin d'atteindre cet objectif, les référentiels du brevet informatique et internet (B2i) niveau école et niveau collège sont en cours d'actualisation. Un référentiel pour le B2i niveau lycée est en cours d'élaboration. Des textes réglementaires à paraître présenteront prochainement les référentiels et préciseront leurs modalités de mise en œuvre. Ils prendront effet dès la rentrée scolaire 2006. La généralisation du B2i prépare sa prise en compte dans le cadre du DNB.

1.3. Faisons le point !

a) Il est utile de dégager une règle laissée plus ou moins implicite jusqu'ici, mais qui devra désormais être mise en œuvre rigoureusement.

Règles de vie et de travail

• Chaque semaine, avant le mardi matin, chacun a lu et étudié, seul ou dans un cartel de travail,

– … les *Questions de la semaine* précédente ;

– … les notes du *Séminaire* du mardi précédent ;

– … les parties des notices de l'*Encyclopédie du professeur de mathématiques* ayant fait l'objet d'une étude dirigée le mardi précédent ;

– … les documents, officiels ou non, proposés à la lecture, soit sous forme imprimée, soit sous forme électronique ;

– ses notes personnelles.

• Chacun reprend régulièrement l'ensemble des documents précédents, en fonction des questions qui se posent à lui ou elle.

b) À titre d'exemple, considérons la question suivante.

En quoi consiste concrètement notre travail intitulé *Vie et travail de la classe* ? S'agit-il d'un travail à faire régulièrement avec les élèves ? Doivent-ils en garder une trace écrite ? (JL, CR, 4^{e}, 1)

• La notice *Première rentrée des classes* comporte ce premier passage.

À cela s'ajouteront deux rubriques ***communes aux trois domaines mathématiques*** : […] ; la seconde, que l'on peut intituler ***Vie et travail de la classe en mathématiques***, permettra de consigner par écrit un certain nombre de directives et d'explications relatives aux conditions, modalités et moyens du travail de la classe et des élèves.

• La référence à la rubrique ***Vie et travail de la classe en mathématiques*** se retrouve dans trois autres passages encore, que l'on reproduit ci-après. On tirera profit de toutes ces indications pour construire ce dispositif dans sa classe, apportant ainsi une réponse aux interrogations formulées dans la question de la semaine reproduite plus haut.

➔ … dans le cas même où les élèves ne disposeraient que d'un unique cahier de mathématiques à la fois (…), on pourra par exemple consacrer les pages paires aux AER et les pages impaires (hormis la première !) aux synthèses, en consignant exercices et problèmes (quand ils ne font pas l'objet d'une « copie ») dans le cahier pris à rebours. Les dispositions adoptées à cet égard seront consignées sous la rubrique ***Vie et travail…***, laquelle pourra en ce cas trouver sa place dans le cahier de textes individuel par exemple.

➔ Le professeur procèdera ensuite avec les élèves à certaines vérifications. Avons-nous tous les mêmes informations quant aux heures et aux salles allouées ou à propos des dispositifs didactiques prévus (classe entière, demi-classe, soutien, aide aux devoirs, etc.) ? Le matériel requis, général (cahier de textes de classe ou individuel, carnet de correspondance, etc.) ou plus spécifique (manuel, cahiers et/ou classeur, instruments de géométrie et calculatrice, etc.) est-il effectivement disponible ? Les règles d'emploi des moyens ***à mettre en œuvre dès la première séance*** seront d'abord présentées et, pour certaines, mises par écrit sous la rubrique ***Vie et travail…***

➔ Après distribution aux élèves d'au moins un ***tableau synoptique*** du programme (si ce dernier ne figure pas dans le manuel), le démarrage du travail se fera par la présentation et l'examen du ***programme de mathématiques de la classe***, dont on mettra notamment en évidence les « parties » déjà rencontrées dans les classes antérieures et les parties apparemment nouvelles. Le choix du premier thème mathématique à étudier ayant été expliqué (et un commentaire succinct consigné éventuellement dans la partie ***Vie et travail…***), la classe se mettra au travail aussitôt.

c) On prendra l'habitude d'examiner la rubrique ***Documents / 2nd degré*** sur le site de l'IUFM ; le vendredi 8 septembre à 18 h, on y trouvait les documents dont l'intitulé – parfois un peu sibyllin – suit.

➔ Brevet B2i 2000
➔ Brevet B2i 2006
➔ C2i2e
➔ C2i2e - BO no 1 du 5 janvier 2006
➔ Changer le conseil de classe
➔ Charte des programmes du 13 novembre 1991
➔ CNIL - Collège & Lycée
➔ CNP & GEPS
➔ DDM - EU 1995
➔ Discipline - Circulaire Fillon
➔ Droits & obligations des élèves
➔ Dyslexie : le retour
➔ Elèves de 7 ans 1973-1992
➔ Filles et garçons face à l'orientation
➔ GTD - A propos de la géométrie plane
➔ GTD - Onze fiches de statistique
➔ Guide de légistique
➔ Horaires 2002-2003 au collège
➔ Horaires 2002-2003 au lycée
➔ IG de maths - Le point sur les TICE
➔ La professionnalisation de l'enseignement
➔ Les années collège
➔ Les personnels enseignants - Guide juridique (fiche 12)
➔ Lettre sur l'école
➔ L'idée républicaine
➔ Loi du 10 juillet 1989
➔ Mesures alternatives au conseil de discipline
➔ Mission du professeur
➔ Moi, jeune citoyen
➔ Mon journal de 6e
➔ Note de vie scolaire
➔ Nouveau programme de 6e
➔ Nouveaux programmes de 5e et de 4e
➔ Plan de rénovation des IUFM (avril 2002)

➔ Politiques d'éducation à l'orientation
➔ Programme de Seconde
➔ Programme du CAPES
➔ Programmes du collège
➔ Punitions scolaires & sanctions disciplinaires
➔ Qu’apprend-on au collège
➔ Rentrée 2006
➔ Salamanque 1994
➔ Scolarisation des EIP
➔ Signes religieux
➔ Socle commun
➔ Systèmes didactiques auxiliaires 2004
➔ Systèmes didactiques auxiliaires - Textes
➔ Travailler ensemble
➔ Travaux écrits en mathématiques
➔ Typographie 1
➔ Typographie 2
➔ Vive Mai 68 !

2. Forum des questions

2.1. À propos des PPRE

a) Une culture professionnelle solide suppose de se tenir informé, à travers les différents médias. La presse quotidienne nationale (PQN) est ainsi une source importante d’informations qu’il reste alors au professionnel à vérifier et à approfondir de façon appropriée.

b) À propos des PPRE, ainsi, on pouvait lire récemment la présentation suivante.

Les programmes de soutien scolaire critiqués dans un rapport

Le Monde, 7 septembre 2006, p. 12

Le soutien aux élèves en difficulté est affiché comme la priorité de l’année scolaire 2006-2007. Inscrit dans la loi Fillon du 23 avril 2005, il doit être mis en œuvre au travers de programmes personnalisés de réussite éducative (PPRE). Ceux-ci s’adressent, en cette rentrée, en priorité aux élèves de CP et de CE1 ainsi que de sixième.

L’an dernier, ces programmes ont fait l’objet d’une expérimentation dans 8 500 classes d’école primaire et dans 149 collèges. L’inspection générale de l’éducation nationale vient de dresser un premier bilan critique de cette expérience dans un rapport mis en ligne lundi 4 septembre sur le site du ministère de l’éducation nationale (www.education.gouv.fr).

« Le pilotage de l’expérimentation des PPRE témoigne d’une grande diversité et de faiblesses évidentes », considèrent les rapporteurs. Dans les écoles, une grande autonomie a été laissée aux inspecteurs de l’éducation nationale qui ont tenté de guider les équipes des écoles. Mais, faute de repères suffisants, ce pilotage local a entraîné *« des pratiques diverses et parfois divergentes »*. De même, les collèges ont été plutôt livrés à eux-mêmes.

Les pratiques sont très variées dans le choix des élèves bénéficiant d’un programme de soutien. Dans les écoles, la proportion d’élèves concernés est *« très variable »*, souligne le rapport, passant de 3 % d’élèves dans une école à 68 % dans une autre. L’écart est moindre dans les collèges allant de 4,8 % des élèves de 6e dans un établissement à près du tiers des effectifs dans un autre.

Les enseignants manquent de critères objectifs, autres que les évaluations nationales de CE2 et de 6e, pour sélectionner les élèves. Ainsi, explique le rapport, dans telle circonscription, toutes les écoles mettent en place des programmes de soutien pour les élèves ne maîtrisant pas 40 % des compétences attendues en CE2, suivant ainsi les recommandations de l'inspecteur de l'éducation nationale. Dans d'autres écoles, le soutien concerne tous ceux qui ne maîtrisent pas 75 % de ces compétences. *« Il s'agit là de décisions plus liées à des appréciations locales qu'à une analyse réfléchie des besoins des élèves »*, analysent les rapporteurs. De leur côté, la plupart des collèges ciblent les élèves en très grande difficulté tandis qu'une petite partie des établissements s'intéresse plutôt aux élèves ayant des difficultés moyennes.

TÂTONNEMENTS

Les contenus pédagogiques des programmes de soutien traduisent également les tâtonnements des équipes. Ils se concrétisent dans les écoles par *« une extrême disparité des pratiques »*. Dans les collèges, les programmes de soutien ont été, souvent, la reprise à l'identique d'actions déjà engagées par le passé. *« Force est de constater que, dans ce cas, il n'y a pas eu d'avancée significative dans l'aide aux élèves en difficulté »*, soulignent les rapporteurs. Et les programmes de soutien n'ont pas fait apparaître *« de nouvelles réponses pédagogiques aux difficultés rencontrées dans les disciplines par les élèves, notamment sur le plan de la personnalisation des approches »*.

Dans ce contexte, le rapport de l'inspection générale préconise un meilleur encadrement du dispositif avec, entre autres, la publication de documents d'accompagnement de la circulaire sur les programmes personnalisés de réussite éducative en date du 25 août. Ces documents devraient notamment permettre une *« identification rigoureuse des publics concernés »* et *« insister sur la nécessité d'une approche stratégique globale »*. Fort de ce constat, le ministère de l'éducation nationale prévoit de publier en ligne deux guides pratiques le 15 septembre.

Martine Laronche

c) Bien entendu, il convient aussi de s'informer des textes officiels pertinents.

• S'agissant des PPRE, on se reportera ainsi à la circulaire d'août 2006, dont, à titre exceptionnel, on a reproduit le texte ci-après (en y intégrant une modification parue au *BO* n° 32 du 7 septembre 2006).

Bulletin officiel n° 31 du 31 août 2006 [modifié par le *BO* n° 32 du 7 septembre 2006]
Enseignements élémentaire et secondaire
PROGRAMMES PERSONNALISÉS DE RÉUSSITE ÉDUCATIVE
Mise en œuvre des PPRE à l'école et au collège
NOR : MENE0601969C
RLR : 514-2 ; 520-0
CIRCULAIRE N° 2006-138 DU 25-8-2006
MEN
DGESCO
A1-A2

Texte adressé aux rectrices et recteurs d'académie ; aux inspectrices et inspecteurs d'académie, directrices et directeurs des services départementaux de l'éducation nationale ; aux inspectrices et inspecteurs d'académie, inspectrices et inspecteurs pédagogiques régionaux ; aux inspectrices et inspecteurs responsables des circonscriptions du premier degré ; aux principales et principaux de collège ; aux directrices et directeurs d'école ; aux enseignantes et enseignants

La loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'école du 23 avril 2005 prévoit dans son article 16, intégré au code de l'éducation par l'article L. 311-3-1, qu'« à tout moment de la scolarité obligatoire, lorsqu'il apparaît qu'un élève risque de ne pas maîtriser les connaissances et les compétences indispensables à la fin d'un cycle, le directeur d'école ou le chef d'établissement propose aux parents ou au responsable légal de l'élève de mettre en place un programme personnalisé de réussite éducative. »

Ce dispositif définit un projet personnalisé fondé sur les compétences acquises et les besoins repérés, qui doit permettre la progression de l'élève en associant les parents à son suivi. Il prend place dans un ensemble de moyens que l'école met en œuvre pour aider les élèves à surmonter les obstacles propres aux apprentissages. Il vient renforcer les efforts des enseignants en matière de différenciation pédagogique au sein de la classe au profit des élèves pour lesquels la maîtrise des compétences et connaissances du socle commun n'est pas assurée.

Les programmes personnalisés de réussite éducative (PPRE) ont fait l'objet, durant l'année scolaire 2005-2006, d'une expérimentation à l'école et au collège dont la synthèse a largement contribué à l'élaboration de ce texte qui sera complété par deux « Guides pratiques » pour la mise en œuvre des PPRE respectivement à l'école et au collège. Ces guides, ainsi qu'un ensemble de ressources, sont disponibles en ligne sur le site Éduscol.

1 – Le programme personnalisé de réussite éducative

Le programme personnalisé de réussite éducative (PPRE) insiste dans sa dénomination même sur la dimension de programme : il est constitué d'une action spécifique d'aide et, le cas échéant, d'un ensemble d'autres aides coordonnées. Pour en garantir l'efficacité, cette action spécifique est intensive et de courte durée.

La vocation du PPRE est tout autant de prévenir la difficulté que de la pallier. Sa mise en œuvre est assortie d'un système d'évaluation permettant de dresser un état précis des compétences acquises par l'élève au regard des objectifs à atteindre à la fin du cycle et de les situer au regard des exigences du socle commun.

2 – Les élèves concernés

Les élèves qui risquent de ne pas maîtriser les connaissances et compétences identifiées comme indispensables par les repères du socle commun à la fin d'un cycle relèvent d'un PPRE.

Il s'agit d'élèves rencontrant des difficultés importantes ou moyennes dont la nature laisse présager qu'elles sont susceptibles de compromettre, à court ou à moyen terme, leurs apprentissages. Les difficultés prises en compte sont prioritairement d'ordre scolaire, en français, mathématiques ou langue vivante ; elles peuvent aussi concerner les autres compétences du socle commun.

Les élèves rencontrant des difficultés graves et durables bénéficient au collège d'une prise en charge spécifique. De même, à l'école, des dispositifs de type « regroupements d'adaptation » peuvent répondre aux besoins de ces élèves (circulaire n° 2002-113 du 30 avril 2002, *BO* n° 19 du 9 mai 2002).

Les protocoles nationaux d'évaluation diagnostique, notamment au CE1 et en 6e, associés aux ressources de la « banqoutils » en ligne à l'adresse suivante http://www.banqoutils.education.gouv.fr/, permettent aux enseignants de repérer les connaissances, les capacités et les attitudes à acquérir constituant des étapes incontournables dans la construction des apprentissages et d'identifier les élèves devant bénéficier d'un PPRE.

Ces protocoles favorisent des analyses approfondies des compétences visées. Les données ainsi recueillies sont à compléter par des informations faisant converger des regards différents sur l'élève : observations, indications sur le parcours scolaire et les aides déjà mises en œuvre, entretien avec l'élève et avec sa famille...

3 – Un travail d'équipe associant l'élève et sa famille

Le PPRE est constitué d'actions qui ciblent des connaissances et des compétences précises. C'est un programme adapté aux besoins de chaque élève, qui s'appuie sur les compétences acquises. Il est en outre modulable : son contenu et son intensité évoluent en fonction de l'élève concerné. Il est enfin temporaire : sa durée est fonction de la difficulté rencontrée par l'élève, ainsi que de ses progrès.

Le PPRE est fondé sur une aide pédagogique d'équipe qui implique l'élève et associe sa famille. L'adhésion et la participation de l'enfant et de sa famille sont déterminantes pour la réussite du programme.

Á l'école, les aides sont mises en œuvre par une équipe pédagogique dont le premier acteur est le maître de la classe. Le directeur d'école, garant de la pertinence du dispositif, prend en charge, avec l'enseignant de la classe, les relations avec la famille. Les enseignants spécialisés du réseau d'aides spécialisées aux élèves en difficulté (RASED) de la circonscription, les maîtres des classes d'initiation (CLIN), ainsi que, le cas échéant, les maîtres supplémentaires sont également appelés à apporter leur concours à la mise en œuvre des PPRE. L’appui des assistants d’éducation et des emplois vie scolaire peut également être sollicité.

Au collège, la mise en œuvre des PPRE concerne l’équipe pédagogique dans laquelle le professeur principal joue un rôle essentiel. Dans les collèges « ambition réussite », les professeurs principaux et les enseignants supplémentaires des premier et second degrés, affectés au titre du réseau, travaillent en collaboration pour coordonner et mettre en œuvre les PPRE. Si les assistants d’éducation interviennent, c’est de façon ponctuelle à la demande des professeurs responsables de la mise en œuvre. Le chef d’établissement assure la coordination de l’ensemble. Les modalités organisationnelles relèvent de la politique de l’établissement et de ses contraintes, le PPRE s’inscrivant au cœur du projet d’établissement.

Enfin, il est essentiel que les corps d’inspection soient fortement mobilisés pour soutenir l’action des équipes enseignantes et de circonscription afin notamment de dispenser les formations nécessaires.

4 – Un programme formalisé

Pour chaque élève concerné, un document clairement organisé présente le plan coordonné d’actions que constitue le PPRE. Les « Guides pratiques » aideront à sa conception.

Un document, rédigé par les enseignants, précise la situation de l’élève, les objectifs de fin de cycle sur lesquels seront basés les bilans individuels, les objectifs à court terme liés à l’action d’aide identifiée, le descriptif de cette action ainsi que les indicateurs d’évaluation qui y sont associés, l’échéancier des aides et des bilans intermédiaires et, enfin, les points de vue de l’enfant et de sa famille.

Ce document devra présenter l’ensemble des informations mentionnées ci-dessus. Il est conçu pour être lisible par tous. À l’école élémentaire, il est signé par les parents ou le représentant légal ; au collège, il est signé par l’élève et les parents ou le représentant légal. L’équipe pédagogique y adjoint tout support de travail complémentaire qu’elle estime nécessaire.

5 – Calendrier de mise en œuvre

Année scolaire 2006-2007
À l’école, le développement des programmes personnalisés de réussite éducative concerne les classes de CP et de CE1 ainsi que les élèves maintenus une année supplémentaire quel que soit leur niveau de classe.

Au collège, la classe de 6^{e} est privilégiée. Sont concernés les élèves identifiés grâce à la liaison CM2-6^{e} et manifestant des signes de fragilité et ceux qui ont été admis dans le niveau supérieur à la condition de bénéficier d’un accompagnement renforcé. En cours d’année scolaire, les conseils de professeurs ou les conseils de classe permettent de déterminer les élèves auxquels un PPRE doit être proposé.

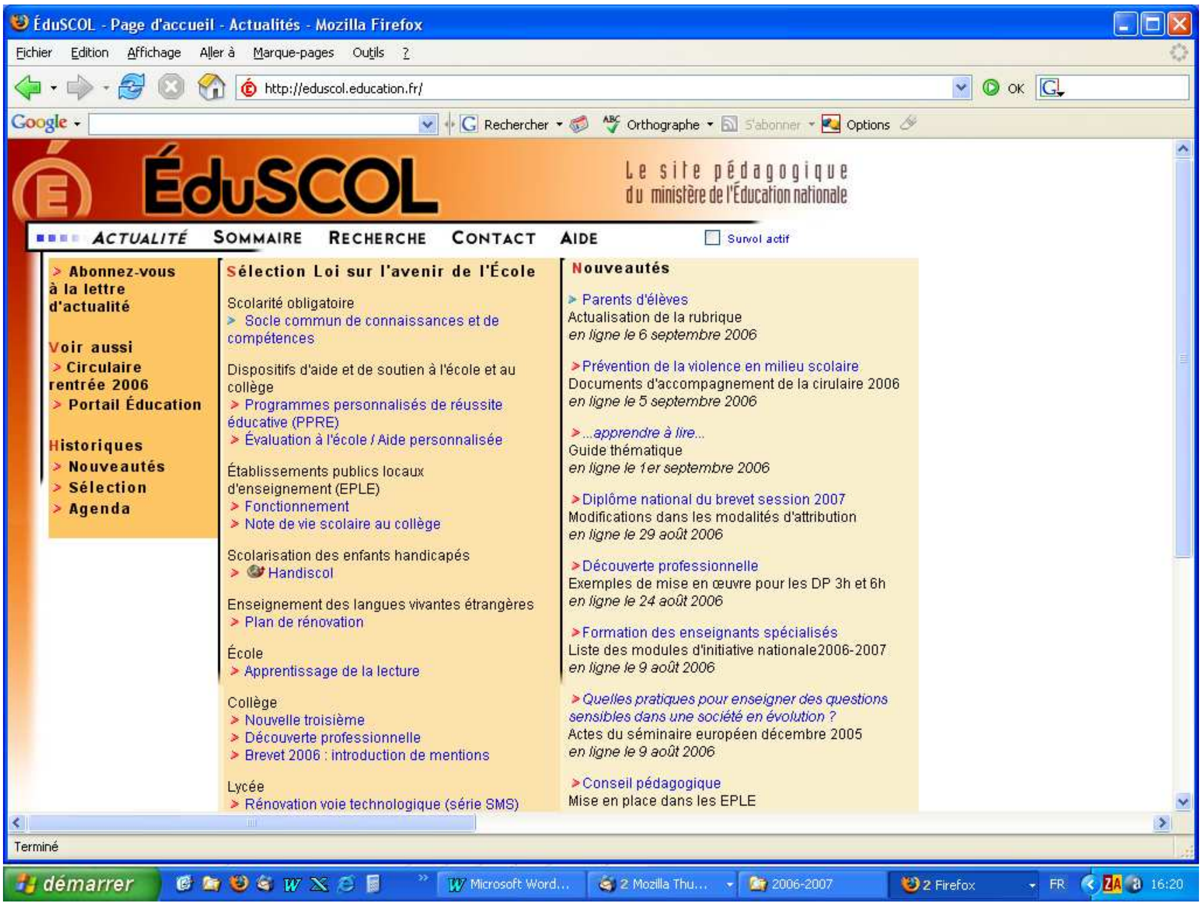
Année scolaire 2007-2008
À l’école, le PPRE sera étendu aux trois années du cycle des approfondissements (CE2-CM1-CM2).

Au collège, il sera progressivement étendu au cycle central (5^{e}-4^{e}) et concernera ainsi les trois premières années du collège. Il convient, en effet, de rappeler que dès la classe de 4^{e}, des dispositifs spécifiques alternant formation en établissement et formation en entreprise peuvent constituer une réponse plus adaptée aux besoins de certains élèves.

Au cours de cette phase de généralisation, les programmes personnalisés de réussite éducative remplaceront progressivement les programmes personnalisés d’aide et de progrès et rempliront ainsi pleinement leur fonction de coordination des différentes aides mises en place.

Pour le ministre de l’éducation nationale, de l’enseignement supérieur et de la recherche
et par délégation,
Le directeur général de l’enseignement scolaire
Roland DEBBASCH

• Sur le même thème, on pourra parcourir également le rapport de l’IGEN cité dans l’article du *Monde* reproduit plus haut : on le trouvera sur le site de l’IUFM, sous la rubrique *Documents* / *2nd degré*, et sous le titre ***PPRE - Rapport de l'IGEN (juin 2006)***. Surtout, on prendra l’habitude de se reporter au site ***Eduscol***, où l’on trouvera un grand nombre de « dossiers » adressés aux enseignants, comme l’illustre la copie d’écran ci-après.



2.2. À propos de la note de vie scolaire

a) Des remarques analogues aux précédentes pourraient être faites à propos de la ***note de vie scolaire***. La consultation du site Eduscol fournit ainsi les textes officiels de référence : on en trouvera l'essentiel reproduit dans le fichier intitulé ***Note de vie scolaire*** sous la rubrique *Documents* / 2nd *degré* du site de l'IUFM. Pour une première information, on a reproduit ci-après une partie de ce fichier, extraite de la ***circulaire du 23 juin 2006***.

L'apprentissage de la civilité et l'adoption de comportements civiques et responsables constituent des enjeux majeurs pour le système éducatif. La note de vie scolaire s'inscrit dans cette démarche éducative qui concerne toute la scolarité au collège. Elle devient une composante à part entière de l'évaluation des élèves, y compris pour l'obtention du diplôme national du brevet. Elle contribue, en donnant des repères aux élèves, à faire le lien entre la scolarité, la vie scolaire et la vie sociale. Elle est destinée à valoriser les attitudes positives vis-à-vis de l'école et vis-à-vis d'autrui. Comme toutes les notations qui sanctionnent un apprentissage, elle évalue aussi les progrès réalisés par l'élève tout au long de l'année scolaire.

1 – Le champ d'application

La note de vie scolaire est attribuée aux élèves de la classe de sixième à la classe de troisième, y compris aux élèves des classes de troisième implantées en lycée professionnel. Elle s'applique aux élèves des établissements publics locaux d'enseignement ainsi qu'aux élèves des établissements d'enseignement privés sous contrat d'association.

2 – Le contenu

L'élaboration de la note de vie scolaire est fondée sur quatre domaines.

2.1. L’assiduité de l’élève

Il s’agit de la participation de l’élève à tous les enseignements prévus à son emploi du temps, sous réserve des absences dûment justifiées par les personnes responsables conformément aux articles L. 131-8 et R. 131-5 du code de l’éducation. Un élève assidu obtient le nombre maximum de points attachés à ce domaine. Il s’agit en effet de valoriser le respect du devoir d’assiduité. La ponctualité de l’élève pourra également être prise en compte.

2.2. Le respect des autres dispositions du règlement intérieur

Outre l’assiduité, l’observation des dispositions qui figurent dans le règlement intérieur constitue le deuxième élément de la note de vie scolaire. Un élève qui respecte le règlement intérieur de l’établissement obtient la note maximum prévue pour ce domaine.

2.3. La participation de l’élève à la vie de l’établissement ou aux activités organisées ou reconnues par l’établissement

Il s’agit, par une démarche de valorisation de l’engagement des élèves, d’encourager leur esprit de solidarité, leur civisme et de développer leur autonomie. Cependant, une absence d’engagement ne doit pas pénaliser un élève. C’est pourquoi cette évaluation ne peut être que positive.

Pour que cette démarche soit effective, il importe que la communauté éducative accompagne et soutienne les élèves dans leurs actions. Ainsi, il est particulièrement souhaitable que les établissements proposent, valorisent et accompagnent les projets qui permettent aux élèves de s’engager.

On distingue deux grands types d’engagement : la participation à la vie de l’établissement et la participation aux activités organisées ou reconnues par l’établissement. Ces activités peuvent concerner des projets à l’initiative des élèves ou de l’établissement.

La liste indicative ci-après peut servir à l’élaboration de la note :

• Au titre de la participation à la vie de l’établissement :

– exercice de fonctions de délégué, en qualité de titulaire ou de suppléant, dans une ou plusieurs instances de l’établissement ;

• Au titre des activités organisées par l’établissement :

– participation active aux activités du foyer socio-éducatif, de l’association sportive ou de toute autre association ayant son siège dans l’établissement ;

– implication dans des actions « santé, prévention » ;

– participation active à des actions éducatives à la sécurité routière ;

– tutorat envers de plus jeunes élèves ;

• Au titre des activités reconnues par l’établissement :

– action envers les personnes âgées ou handicapées ;

– action contre les discriminations ;

– participation à une action de solidarité internationale ;

– action en faveur du développement durable...

2.4. L’obtention de l’attestation scolaire de sécurité routière et de l’attestation de formation aux premiers secours

L’obtention de l’attestation scolaire de sécurité routière de premier niveau ou de second niveau peut être prise en compte. Il est en de même de l’obtention de l’attestation de formation aux premiers secours. À cet égard, les établissements sont appelés à mettre en œuvre les formations destinées à l’acquisition de cette attestation conformément aux dispositions du décret n^{o} 2006-41 du 11 janvier 2006.

3 – L’élaboration de la note

La note de vie scolaire est élaborée pour chaque trimestre, à partir de critères objectifs, par le chef d’établissement dans le cadre réglementaire rappelé ci-dessous.

3.1. L’assiduité de l’élève et son respect du règlement intérieur

Un barème définit les critères objectifs en fonction desquels les points sont attribués. Conformément à l'arrêté du 10 mai 2006, il doit prendre en compte l'assiduité de l'élève et son respect des dispositions du règlement intérieur dans des proportions égales : par exemple, pour une note comprise entre 0 et 20, l'assiduité est notée sur 10 et le respect du règlement intérieur également sur 10.

Dans chacun de ces deux domaines, l'évolution de l'élève doit être prise en considération. Ainsi, en cas d'amélioration en cours de trimestre, la note peut être relevée par rapport à l'application stricte du barème.

3.2. La participation de l'élève à la vie de l'établissement ou aux activités organisées ou reconnues par l'établissement et l'obtention des attestations

L'engagement de l'élève, tel qu'il est défini au 2.3 ci-dessus, peut être valorisé par l'attribution de points supplémentaires. Il en est de même, le cas échéant, de l'obtention des attestations scolaires de sécurité routière et de l'attestation de formation aux premiers secours.
L'attribution de points supplémentaires ne saurait cependant avoir de caractère automatique. Elle demeure soumise à l'appréciation du notateur qui peut vérifier la qualité de l'engagement de l'élève.

4 – L'attribution de la note

Le chef d'établissement recueille, d'une part, les propositions du professeur principal qui doit consulter au préalable les membres de l'équipe pédagogique de la classe et, d'autre part, l'avis du conseiller principal d'éducation. Il fixe ensuite la note qui sera communiquée au conseil de classe.

Cette note est portée au bulletin trimestriel de l'élève qui sera adapté dans sa forme en conséquence. Elle est prise en compte comme les autres notes.

5 – La note de vie scolaire au brevet

La note de vie scolaire est prise en compte pour l'obtention du diplôme national du brevet, dans les mêmes conditions que les résultats aux disciplines évaluées en contrôle en cours de formation. Elle est la moyenne affectée d'un coefficient 1 des notes de vie scolaire obtenues par l'élève chaque trimestre en classe de troisième.

Vous voudrez bien me saisir, sous le présent timbre, des difficultés éventuelles d'application de la présente circulaire.

Pour le ministre de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche
et par délégation,
Le directeur général de l'enseignement scolaire
Roland DEBBASCH

b) Là comme sur les autres points, on aura avantage à s'informer de ce que propose la presse – dans sa diversité – en la matière. À titre d'illustration, voici deux extraits d'un article de Lucía Iglesias Kuntz paru dans le *Courrier de l'UNESCO* en janvier 2000 et intitulé *Manque de respect, insultes, vandalisme, insolences : les professeurs doivent aussi être formés pour affronter l'indiscipline et l'incivilité croissante des élèves*.
(http://www.unesco.org/courier/2000_01/fr/somm/intro.htm).

➔ Bernard Charlot, professeur de sciences de l'éducation à l'Université de Saint-Denis, en banlieue parisienne, distingue quatre phénomènes. D'abord, la violence proprement dite : « Elle se manifeste par des coups ou des injures graves, et relève souvent du pénal. » L'indiscipline, elle, « est une violation du règlement intérieur », alors que ce qu'on appelle les incivilités « sont de simples entorses aux bonnes manières, comme par exemple claquer la porte au nez du professeur ou d'un autre élève ». Le dernier phénomène – et non le moindre à ses yeux – est « cette sorte d'indifférence, parfois ostentatoire, vis-à-vis de l'enseignement à l'école, qui provoque une angoisse croissante chez les professeurs ». À titre d'exemples, Bernard Charlot cite ces élèves qui commencent à contester le droit qu'on s'occupe de leur absentéisme récurrent parce que « justement, en n'étant pas là, ils ne font de mal à personne », ou encore ceux qui « vivent leur vie » au fond de la classe et qui, lorsque le professeur les invite à participer, répondent : « Mais M'sieur, on ne vous embête pas ! »

➔ L'école n'est plus le havre de paix d'antan, isolé de la société ; elle reproduit au contraire ses problèmes à une échelle réduite : le manque de communication, la pauvreté, la marginalisation, l'intolérance, la perte des valeurs. Pour Antonio García Correa, professeur de psychologie éducative à l'Université de Murcie (Sud-Est de l'Espagne), cet ensemble de facteurs débouche sur ce qu'il appelle un « analphabétisme émotionnel ». À ses yeux, « les systèmes éducatifs se sont surtout occupés de former des têtes bien pleines plutôt que des têtes bien faites. On a beaucoup étudié le rendement scolaire de l'élève et tenté de l'améliorer mais on s'est peu préoccupé de son développement social et émotionnel. Résultat : les enfants en savent plus mais se portent moins bien ». D'un autre côté, la transformation des systèmes éducatifs doit beaucoup à la conduite des élèves. « On est passé brusquement d'un régime fondé sur l'interdiction et la sanction à un régime contractuel entre tous les acteurs du système que nous n'avons pas encore appris à appliquer, estime Nora Rais, professeur de littérature en Patagonie (Argentine). Revenir à l'autoritarisme, poursuit-elle, ne résoudra rien. Seuls le dialogue, le compromis et l'assimilation de certaines valeurs sont des voies d'avenir. Nous, professeurs, devons agir comme médiateur mais on doit nous y préparer. »

2.3. ATP ?

a) Les questions suivantes ont été formulées.

1. À quoi correspond le dispositif d'ATP ? Est-ce différent du soutien ? (SM2, MJ, 4e, 1)

2. Je suis chargée de deux classes d'ATP en 6e. Au début de l'année, je n'arrive pas à savoir sur quoi les faire travailler (méthodologie ?). (WB, MJ, 4e, 1)

3. J'ai deux heures d'ATP, une heure avec des élèves de 3e, une heure avec des élèves de 6e. En quoi consiste exactement les ATP ? (AEO, OS, 4e, 1)

b) Le dispositif de l'aide au travail personnel (de l'élève), ATP (ou ATPE), s'est introduit officiellement il y a plusieurs années. Dans un texte sur les *Nouvelles orientations* au collège pour l'année 2001-2002, on lisait ceci.

L'aide au travail personnel des élèves

Il sera assuré tout au long de l'année, avec l'objectif de prévenir les risques de décrochage et de découragement.

Difficultés de compréhension, rythmes d'acquisition particuliers, modes d'apprentissages atypiques, problèmes de méthode ou d'organisation… Seul un suivi régulier du travail personnel de l'élève permettra de repérer ces difficultés et de les prendre en compte.

La difficulté que les jeunes collégiens éprouvent pour organiser **leur travail personnel** a conduit beaucoup d'établissements à **réfléchir à des solutions d'aide à l'apprentissage des leçons et à la réalisation des devoirs.**

Dans certains établissements, on a choisi de permettre aux élèves, des premiers jours de la rentrée jusqu'aux vacances de Toussaint, de faire leurs devoirs en classe sous la conduite d'un professeur et d'apprendre leurs leçons dans les mêmes conditions.

Durant cette période, les emplois du temps peuvent être soumis à des modifications dans le seul objectif d'assurer le bon fonctionnement du dispositif.

Pendant l'année scolaire, l'expérience **« devoirs et leçons en classe »** peut être reconduite si le besoin s'en fait sentir.

Ailleurs, on a proposé, aux élèves et à leurs parents, des **fiches pédagogiques** qui définissent clairement un emploi du temps du travail personnel, le temps à y consacrer, le lexique des consignes, les méthodes de mémorisation etc.

Des **ateliers de méthodologie** sont aussi très souvent organisés, dans la continuité de ce qui se faisait pour les heures d'études obligatoires.

Le site académique de Créteil propose un dossier « accompagnement » à l'adresse suivante : …

c) On trouve aujourd'hui sur le site Eduscol des informations qui reprennent le texte précédent (http://eduscol.education.fr/D0072/sixieme.htm#aide_travail) : on les reproduit ici.

L'aide au travail personnel des élèves

Elle est assurée tout au long de l'année, avec l'objectif de prévenir les risques de décrochage et de découragement. Seul un suivi régulier du travail personnel de l'élève permet de repérer les difficultés et de les prendre en compte : difficultés de compréhension, rythmes d'acquisition particuliers, modes d'apprentissages atypiques, problèmes de méthode ou d'organisation…

La difficulté que les jeunes collégiens éprouvent pour organiser leur travail personnel a conduit beaucoup d'établissements à réfléchir à des solutions d'aide à l'apprentissage des leçons et à la réalisation des devoirs. Dans certains établissements, on a choisi de permettre aux élèves, des premiers jours de la rentrée jusqu'aux vacances de Toussaint, de faire leurs devoirs en classe sous la conduite d'un professeur et d'apprendre leurs leçons dans les mêmes conditions. Pendant l'année scolaire, l'expérience « devoirs et leçons en classe » peut être reconduite si le besoin s'en fait sentir.

Ailleurs, on a proposé, aux élèves et à leurs parents, des fiches pédagogiques qui définissent clairement un emploi du temps du travail personnel, le temps à y consacrer, le lexique des consignes, les méthodes de mémorisation etc. Des ateliers de méthodologie sont aussi très souvent organisés, dans la continuité de ce qui se faisait pour les heures d'études obligatoires.

Le site académique de Créteil propose un dossier *L'accompagnement des élèves de sixième* (http://www.ac-creteil.fr/mission-college/cycle_adaptation/accueil6.htm#4).

d) Les dispositifs d'ATP ont été généralisés à la rentrée 2002, comme l'indique l'extrait suivant de la circulaire de rentrée (http://www.education.gouv.fr/bo/2002/16/default.htm).

Renforcer l'accueil et l'accompagnement du travail personnel de l'élève

Les dispositions originales et nombreuses qui ont été prises en matière d'accueil dans les établissements, à la rentrée 2001, doivent être évaluées, reconduites et éventuellement améliorées de façon à poursuivre l'action en faveur d'une intégration réussie de tous les nouveaux élèves de sixième.

……………………………………………………………………………………………………

Un premier bilan de ces dispositions fait apparaître la nécessité de consacrer un volet important de l'accueil aux questions d'ordre pédagogique et, tout particulièrement, de travailler avec les élèves sur les objectifs, méthodes et exigences propres aux disciplines et enseignements dispensés.

Il en va de même des actions d'accompagnement du travail personnel qu'il convient d'articuler étroitement avec les apprentissages scolaires. Ces actions peuvent se traduire, dans de nombreux cas, par une prise en charge systématique les premiers mois et par un suivi très attentif tout au long de l'année scolaire.

Elles peuvent s'appuyer, selon la période de l'année, sur tout ou partie des deux heures réservées à cet effet dans la grille horaire. Si l'organisation de ces heures est laissée à l'initiative de l'établissement, elles nécessitent d'être centrées sur des objectifs précis, susceptibles d'être modifiés régulièrement, au fur et à mesure des acquisitions des élèves.

Vous veillerez donc à ce que tous les établissements intègrent dans leur projet un dispositif d'accompagnement du travail personnel.

Ce dispositif sera porté à la connaissance des familles afin de favoriser l'accès progressif des élèves à l'autonomie dans leur travail personnel.

d) On notera que, dans une ***Introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques*** qui précède les programmes des classes du cycle central du collège, on trouve ce passage, qui met à nouveau l'accent sur le ***travail personnel*** de l'élève, en classe et hors classe, et insiste à cette occasion sur la pratique du travail personnel ***aidé***.

Le travail personnel des élèves

Le travail personnel demandé aux élèves, qui peut être différencié en fonction de leur profil et de leurs besoins, contribue à la structuration et à la mémorisation des connaissances. Son importance est telle dans le processus de maîtrise des connaissances et des savoir-faire qu'il convient de diversifier les pratiques pédagogiques et de développer le travail en équipes pédagogiques afin d'assurer une véritable aide au travail personnel des élèves, pendant les cours et hors la classe (au collège ou à la maison).

3. Observation & analyse

3.1. Une observation dans une classe de 5^e^

a) La question *Q* suivante était au point de départ de l'analyse d'une séance observée dans une classe de 5^e^ : « Comment concevoir et réaliser une séance (ou une partie de séance), en classe entière, dans une 5^e^, sur les propriétés des diagonales d'un parallélogramme ? »

b) On a noté que le programme était muet à propos de ***l'utilité*** de la propriété des diagonales d'un parallélogramme de se couper en leur milieu. La question *Q* engendre pourtant la question $Q^{\#}$ suivante : « Pourquoi la propriété des diagonales a-t-elle attiré l'attention des mathématiciens, et pourquoi demande-t-on aujourd'hui encore aux élèves de la connaître – en vue de quels usages, de quelles utilisations ? »

c) Répondre à $Q^{\#}$, c'est indiquer au moins un type de problèmes *T* tel que la résolution d'au moins certains problèmes de ce type suppose l'emploi de la propriété des diagonales ; et c'est conduire à répondre à *Q* par la conception (puis la réalisation en classe) d'une situation où les élèves aient à résoudre l'un des problèmes du type *T*.

d) En fait, au lieu de chercher à répondre à $Q^{\#}$ « directement », on a choisi d'observer une situation de classe contenant une réponse *R* à *Q* – celle présente dans la séance en 5^e^ observée le jeudi 9 février 2006, de 11 h 10 à 12 h 05, pour laquelle on dispose de deux prises d'information :

– un compte rendu d'observation écrit intitulé ***Propriétés du parallélogramme. Une séance en classe de 5^e^*** ;

– une vidéo de la séance.

3.2. La propriété des diagonales *in vivo*

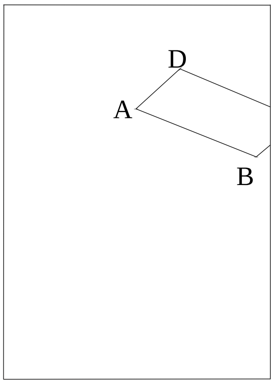
a) Lors de la séance 1 de ce Séminaire, on avait visionné le premier quart d'heure de la vidéo, durant lequel la classe procédait à la ***mise au point de la solution***, donnée à rédiger à la maison, d'un exercice fait préalablement en classe. On reprend rapidement cet épisode, mais cette fois à partir du compte rendu d'observation écrit, diffusé à chaque participant, en même temps que l'on considère la question suivante.

Pour les phases de correction d'exercices, est-il plus pertinent de faire passer systématiquement et en alternance au tableau les élèves au risque de perdre du temps, ou s'occuper nous-même d'une correction plus rigoureuse, plus rapide, mais moins participative ? (SF, CR, 5^e^, 1)

b) On examine ensuite, en lecture personnelle silencieuse, l'intégralité du compte rendu d'observation. Seuls ou par deux, les participants au Séminaire précisent par écrit ***un*** aspect qui leur paraît notable dans la séance observée telle que la fait connaître le compte rendu disponible.

d) On amorce enfin un examen commenté linéaire du texte du compte rendu, à partir de « Bon, on passe à l'activité n° 2… ». On note ci-après un petit nombre de faits que l'on approfondira et que l'on complètera ultérieurement.

• La feuille de travail distribuée aux élèves ne comporte que ***l'énoncé du problème à résoudre***, dont les « données » prennent ici une forme ***graphique*** : le parallélogramme dont le sommet C est hors des limites de la feuille. Elle ne porte ***nullement*** un texte lacunaire (voire « à trous »), plus ou moins semblable à un énoncé traditionnel de « problème scolaire », dont les élèves auraient à combler les lacunes l'une après l'autre. Le problème, ici, est clairement et nettement posé, même si l'on n'est jamais sûr que ***chacun*** des élèves le perçoive immédiatement de façon claire et nette. (De fait, tout un travail va être nécessaire pour qu'il en soit ainsi : la perception du problème se précisera en même temps que la classe avancera dans sa résolution.)



• Le problème posé serait trivial si le sommet C était sur la feuille ; le fait qu'il n'en soit rien semble créer une situation inhabituelle pour la classe, qui rencontrerait alors pour la première fois ce genre de ***problème de tracé graphique*** qui, de trivial qu'il était, devient plus ou moins redoutable parce qu'une des « données » graphiques est devenue hors de portée ou, comme il était autrefois d'usage de le dire, ***inaccessible***.

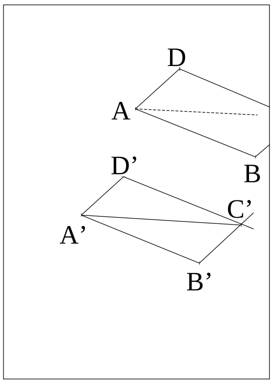
• La résolution du problème va en appeler à la propriété qui est en vérité l'enjeu didactique officiel du travail proposé aux élèves : la propriété des diagonales d'un parallélogramme ***de se couper en leur milieu***. Notons qu'en fait il ***suffit*** de savoir que la diagonale [AC] coupe la diagonale [BD] au milieu de [BD] ; le fait que ce point soit aussi le milieu de [AC] importe peu. Il n'en irait pas ainsi si le problème était, non de tracer la diagonale, mais de déterminer la distance AC en ne mesurant que des distances entre points de la feuille de travail.

• Au moment où la classe se lance à l'assaut du problème, la propriété des diagonales ***n'est pas connue d'elle*** : il ne s'agit nullement, ici, de « l'appliquer » alors qu'on la connaîtrait déjà (ce qui pourrait, certes, être le cas), mais bien ***de la conjecturer*** comme la « pièce manquante » permettant d'achever le « puzzle » proposé – et c'est ce qui va se passer en effet. (On reviendra sur les raisons qui permettaient d'imaginer que cela se produirait.)

• On notera que le cheminement de la recherche entreprise fait l'objet de ***bilans écrits précis*** (au tableau, et dans les « cahiers d'AER » des élèves), ces bilans constituant en quelque sorte le ***« journal de la recherche »***.

• Le progrès de la recherche s'appuie sur des ***questions cruciales***, et des réponses également cruciales, en ce sens que les unes et les autres vont déterminer le cheminement de la classe vers une solution hypothétique.

• ***La*** question cruciale essentielle, formulée par la professeure, est ici : « Qu'est-ce qu'il faut pour tracer une droite ? » La réponse « Deux points (distincts) de la droite » est ***une*** réponse – celle que la professeure, qui dirige la recherche, va pousser en avant. Une autre réponse possible eût été : « ***Un*** point de la droite, et la ***direction*** de la droite. » Cette réponse aurait pu conduire à la solution illustrée par la figure ci-après, où l'on a construit un translaté A'B'C'D' du parallélogramme ABCD de façon à ce que les quatre sommets soient sur la feuille de travail, ce qui permet d'obtenir trivialement la direction cherchée, qui est celle de (A'C').



• Cette réponse avait d'autant moins de raisons d'apparaître que l'outil de sa mise en œuvre – la translation – n'a pas encore été rencontré (il ne le sera qu'en 4e, l'année d'après). En revanche, l'idée de ramener la figure dans la feuille de travail par une transformation adéquate apparaît bien au cours de la recherche, la proposition étant d'opérer une « symétrie » axiale sur le parallélogramme (incomplet) donné. Cette direction de recherche, laissée de côté au cours de la séance observée, n'est nullement écartée : elle sera proposée en fin de séance à titre de travail hors classe.

4. Les Archives du Séminaire et leur bon usage

4.1. Utiliser les *Archives* : un exemple

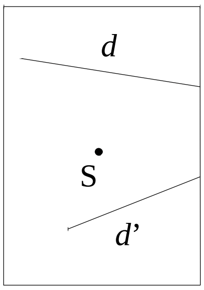
a) Considérons la question suivante.

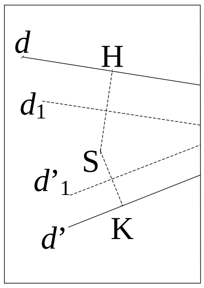
> Quelle synthèse pour la partie « Configurations du plan » ? Il n'y a pas de propriétés nouvelles (*a priori*) pour les élèves, l'enseignant devant « utiliser les configurations et les transformations étudiées en collège ». (AC, OS, 2de, 1)

b) On peut examiner les réponses apportées dans les Séminaires des années précédentes, en commençant par le plus récent, le Séminaire 2005-2006. Une recherche dans le fichier Word à propos du mot *configuration* (par exemple) fait apparaître seulement 10 occurrences de ce mot. L'une de ces occurrences correspond à ce que l'on cherche : on en a reproduit ci-après le contexte utile.

> e) On s'arrête maintenant sur la question suivante.
>
> Que faire figurer dans la synthèse relative aux configurations et transformations du plan en 2de sachant que les seules notions nouvelles sont les triangles isométriques et semblables et que ce chapitre doit permettre de revoir tous les acquis du collège ? (NFG, MJ, 2de, 6)
>
> La réponse est toujours la même : la synthèse doit fournir un inventaire raisonné de l'organisation mathématique mise en place, et donc recenser et illustrer les types de tâches étudiés, les techniques élaborées ainsi que leurs environnements technologico-théoriques. Comme dans l'ensemble des AER menées à bien (éventuellement au sein d'un ou plusieurs PER), le travail de synthèse doit partir des types de tâches, non des technologies (Thalès, Pythagore, symétries centrales, etc.) considérées *ex abrupto*. Supposons ainsi que l'on ait étudié le type de problèmes suivant :

Un point P extérieur à la feuille sur laquelle on travaille est défini comme l'intersection de deux droites *d* et *d*'. Comment déterminer la droite passant par S et P ? (Voir la figure ci-dessous à gauche.)





Si la technique mise en place est celle illustrée par la figure ci-dessus à droite (H et K étant les projetés orthogonaux de S sur *d* et *d*' respectivement, on trace les médiatrices de [SH] et [SK], qui se coupent en P_1 : on a (SP) = (SP_1) ; si P_1 est extérieur à la feuille, on recommence), c'est cette technique qu'il conviendra de faire figurer dans la synthèse, suivie, bien entendu, de sa technologie – qu'on abandonne, en l'espèce, à la sagacité des participants au Séminaire.

c) D'une manière générale, devant ***toute*** question que l'on se posera, on se tournera vers les *Archives* (du Séminaire).

• Le fait que les éléments de réponse précédents aient été trouvés n'est pas tout à fait le fruit du hasard ! La question posée en ce début d'année universitaire est en quelque sorte « normale » : elle avait donc déjà été formulée et avait même – ce qui n'est, hélas ! pas toujours le cas – fait l'objet d'un petit travail dans le cadre du Séminaire 2005-2006.

• Bien entendu, le fait de trouver dans les *Archives* des éléments de réponse à une question que l'on se pose n'empêche *nullement* de formuler la difficulté rencontrée dans le cadre des ***Questions de la semaine*** – pour demander une confirmation de ce qu'on aura cru comprendre ou des décisions que l'on aura cru pouvoir tirer de ce qu'on aura trouvé dans les *Archives*, ou pour suggérer que, cette année, on aille plus loin dans la construction collective d'une réponse, etc.

4.2. Utiliser les *Archives* collectivement

a) On reproduit ci-après le passage du document de présentation de la formation et de sa validation correspondant au dispositif qu'évoque le titre de cette sous-section.

4.1. La rubrique ***Les Archives du Séminaire*** a pour objet la recherche et la présentation d'éléments de réponse $R^◊$ à certaines questions *Q* dans les archives des séminaires des années 2000-2001 à 2005-2006. (Chaque année de séminaire fait l'objet d'un fichier unique, qu'on trouvera à l'adresse http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2005-2006/ombilic.html et qu'on aura avantage à sauvegarder sur une clé USB pour s'en faciliter la consultation.) Cette rubrique se réalise à travers le dispositif décrit ci-après.

– Une question choisie par le responsable du Séminaire après consultation des tuteurs est communiquée à un trinôme, qui procède à une recherche dans les ***Archives du Séminaire*** afin de dégager les éléments de réponse que ces archives recèlent.

– Le trinôme désigné prépare, ***pour la séance d'explicitation suivante***, une présentation orale, d'une durée de ***10 minutes environ***, en s'en tenant strictement aux éléments de réponses $R^◊$ qu'il aura extraits des ***Archives du Séminaire***.

– Chaque présentation fait l'objet d'un débat n'excédant pas 10 minutes et peut en outre appeler, de la part des formateurs, des commentaires, correctifs et additifs, immédiatement ou dans les semaines qui suivent.

– Chaque trinôme fournit au responsable du Séminaire, dans un délai de quinze jours, une version écrite de ***trois pages maximum*** de sa présentation orale. Augmenté le cas échéant de commentaires des formateurs, ce texte est mis en ligne, à la disposition de l'ensemble des participants. Il sera par ailleurs pris en considération par le jury d'évaluation des enseignements, en fin d'année.

b) Les premiers exposés concernant la recherche dans les *Archives* seront présentés lors de la prochaine séance d'explicitation, qui aura lieu, non le mardi 26 septembre (comme il était initialement prévu), mais le mardi suivant, le 3 octobre (de 17 h 15 à 18 h 45).

4.3. Premières recherches dans les *Archives*

a) Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant au dispositif de ***l'enseignement modulaire*** en classe de Seconde ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les résumant adéquatement) les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après qui seraient éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Pendant les modules/TD ou au cours d'exercices posés en classe, faut-il ménager de « longs » temps de réflexion individuelle, ou vaut-il mieux interroger un élève au tableau et l'aider en faisant participer les autres ? (ALPhilippot, CR, 2^{de}, 1)

2. Que doit-on faire en modules ? Des exercices ? Utiliser la calculatrice, l'ordinateur ? (CS2, OS, 2^{de}, 1)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de ***AC, JS et MBP***.

b) La deuxième recherche dans les *Archives* aura trait à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant au dispositif de ***l'aide individualisée*** (AI) en classe de Seconde ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les résumant adéquatement) les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Pour constituer le groupe d'AI en 2^{de}, faut-il faire une mini-épreuve le premier jour et se baser dessus ou prendre la classe entière pour la première fois ? (BR, MJ, 2^{de}, 0)

2. Comment choisir les élèves qui participeront à l'AI ? (AG, CR, 2^{de}, 1)

3. Pour l'AI en 2^{de}, faut-il « sélectionner » les élèves sur la base du volontariat ou de l'obligation ? (ML, MJ, 2^{de}, 1)

4. En début de 2^{de}, ne connaissant pas le niveau des élèves, comment organiser les premières séances d'AI ? (MG2, OS, 2^{de}, 1)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de ***ML, BR, WT***.

c) La troisième recherche dont le compte rendu devra être présenté le mardi 3 octobre porte sur la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant aux ***outils logiques*** du travail mathématique, au collège et en classe de Seconde ?

• Ce compte rendu s'efforcera de présenter les éléments de réponse à la question de la semaine ci-après éventuellement déposés dans les *Archives*.

Le chapitre « Configurations du plan » au programme de 2^{de} peut-il être l'occasion de marquer une différence entre collège et lycée en matière de raisonnements et de démonstrations (que l'on veut plus « élaborés » au lycée) ? Cela peut-il être l'occasion de faire de la logique ? (AC, OS, 2^{de}, 0)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de ***MB, AMJ, SR***.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 3 : mardi 19 septembre 2006

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Observation & analyse // 2. Forum des questions

0. Questions de la semaine

Journée 3 (19 septembre 2006)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4e (et soutien en 5e)

Comment vérifier que les élèves ont fait leurs devoirs sans perdre trop de temps ?

1 Observation & analyse

1.1. Un schéma général d'analyse et sa mise en œuvre

a) Toute séance – et toute séquence – en classe sera analysée sous quatre rubriques successives, dont on découvrira peu à peu le contenu pertinent possible. Ces quatre rubriques sont repérées par les libellés suivants :

1. *Structure et contenu*
2. *Organisation mathématique*
3. *Organisation didactique*
4. *Gestion de la séance*

b) La première rubrique, *Structure et contenu*, renvoie à une description quasi immédiate de la séance à analyser. Pour ce qui est de la séance observée en 5e, par exemple, sa « structure » (au sens de cette rubrique) sera adéquatement décrite en disant qu'elle comporte cinq temps dont les durées respectives sont très inégales mais qu'il convient de noter comme des épisodes distincts :

– la correction d'un travail à faire hors classe ;
– une activité d'étude et de recherche (comportant elle-même plusieurs étapes) ;
– la distribution d'une feuille d'exercices ;
– l'indication d'un travail à faire hors classe ;
– le rappel de l'annonce d'une « interrogation écrite ».

Ces quatre temps correspondent approximativement aux quatre parties annoncées par P en début de séance et que le compte rendu examiné restitue ainsi.

> Il est 11 h 06. P donne au tableau le programme de la séance :
>
> Correction de l'exercice
> Activité 2
> Exercice
> Travail hors classe

La troisième partie, « Exercice », s'est en effet trouvée réduite, semble-t-il, à la distribution à la classe d'une feuille d'exercices, sans que celle-ci ait donné lieu dans l'instant à un travail précis. Quant à l'annonce de l'interrogation écrite du lendemain, il semble que P la subsume sous la partie « Travail hors classe », sans doute parce que cette annonce a pour objet essentiel de rappeler aux élèves la *préparation* – hors classe – de ce travail à venir en classe, et, plus généralement, de les rappeler à leur *responsabilité didactique*.

c) Pour illustrer sommairement les trois autres rubriques, à savoir *Organisation mathématique*, *Organisation didactique*, *Gestion de la séance*, on va d'abord introduire la notion d'***organisation praxéologique***, à laquelle on se réfèrera constamment dans la suite de ce Séminaire.

1.2. Introduction à l'analyse praxéologique

a) On mettra en œuvre dans toute la suite les quelques principes suivants, tous élémentaires, mais dont on découvrira peu à peu la signification et l'efficacité dans l'analyse et le développement des activités d'enseignement et d'apprentissage.

1) Toute activité humaine peut s'analyser comme l'accomplissement de diverses ***tâches*** enchaînées, *t*, *t'*, *t"*, etc., appartenant à divers ***types*** de tâches, *T*, *T'*, *T"*, etc.

2) Tout type de tâches *T* appelle, pour être accompli de façon routinière, une ***technique*** τ : accomplir une tâche *t* du type *T*, ce sera alors mettre en œuvre la technique τ à propos de *t*. Ainsi toute activité humaine consiste-t-elle en la mise en jeu de certaines techniques τ.

• Le système, noté $[T / \tau]$, formé par un type de tâches et la technique qui lui est associée dans un certain milieu de vie peut être regardé comme un *savoir-faire* (au sens usuel du terme).

• Pour éviter des difficultés inutiles, on parlera aussi, plus abstraitement, de *praxis* (mot grec qui signifie « action », de *prassein*, agir).

3) Un « bloc praxique » $[T / \tau]$ ne va pas sans une ***technologie*** θ et une ***théorie*** Θ.

• La ***technologie*** θ d'une technique τ relative à un type de tâches *T* est un ensemble de notions et d'arguments qui permettent de ***justifier*** la technique τ, de la rendre ***intelligible***, voire de la ***produire*** (de l'engendrer).

• La ***théorie*** Θ d'une technologie θ est elle-même un ensemble de concepts et d'arguments qui permettent de ***justifier*** θ, de la rendre ***intelligible***, voire de la ***produire*** (de l'engendrer).

• La technologie θ et la théorie Θ forment un second bloc, noté [θ / Θ], qu'on peut regarder, lui, comme *un savoir* (au sens courant du terme). Mais, là encore, on évitera des débats oiseux en parlant plus abstraitement de ***logos*** – mot grec qui signifie « parole » et « raison », « discours raisonné ».

4) Autour d'un type de tâches *T* se constitue ainsi une combinaison de savoir-faire et de savoir, de *praxis* et de *logos*, qu'on note [*T* / τ / θ / Θ] et qu'on nommera ***une praxéologie***.

• D'après ce qui précède, toute activité humaine découle de la mise en jeu de certaines praxéologies [*T* / τ / θ / Θ] ayant entre elles des liens précis, et formant ainsi une ***organisation praxéologique*** $[T_i / \tau_i / \theta_i / \Theta_i]_{i\in I}$. Cette dernière notation ne précise pas la *structure* de l'organisation en question, qui peut être fort complexe.

• Une organisation praxéologique peut aussi être appelée ***organisation de savoir*** (en « oubliant » le « savoir-faire »), voire ***savoir***, tout court, ou, à l'inverse, organisation de savoir-faire ou savoir-faire, tout court (en « oubliant » cette fois le « savoir »).

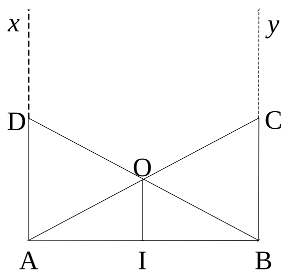
• On parlera aussi de praxéologie, tout court, pour désigner une organisation praxéologique même lorsqu'elle est constituée d'un grand nombre de praxéologies « ponctuelles » (c'est-à-dire de praxéologies de la forme [*T* / τ / θ / Θ], constituées autour de ce « point » qu'est *un* type de tâches déterminé *T*).

1.3. Un exemple simple d'analyse praxéologique

a) Considérons le ***type de tâches*** T_μ suivant :

T. Étant donné des points distincts A et B, construire le milieu I de [AB] à l'aide d'une équerre et d'une règle marquée. » (Une règle marquée est une règle portant deux marques.)

b) Une ***technique*** τ_μ possible n'est ici rien d'autre qu'un ***programme de construction***, qui peut être par exemple le suivant :



1) d'un même côté de (AB), on élève en A et B des demi-droites [A*x*) et [B*y*) perpendiculaires à (AB) ;
2) on marque sur ces demi-droites des points D et C tels que AD = BC ;
3) on trace [AC] et [BD], qui se coupent en O ;
4) on marque le projeté orthogonal I de O sur (AB].

c) La ***technologie*** θ_μ de la technique précédente peut inclure les deux propriétés suivantes :

$\theta_{\mu 1}$. Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu.

$\theta_{\mu 2}$. Le projeté orthogonal du milieu d'un segment est le milieu du segment projeté.

• Bien entendu, on pourrait substituer à $\theta_{\mu 1}$ et $\theta_{\mu 2}$ les propriétés suivantes :

$\theta_{\mu 1}^{\#}$. Les diagonales d'un *parallélogramme* se coupent en leur milieu.

$\theta_{\mu 2}^{\#}$. Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, elle coupe le troisième en son milieu.

(Notons – on va y revenir – que la technique τ_μ utilise la construction de perpendiculaires, non la construction de parallèles.)

• La technologie de τ_μ ne se réduit pas au jeu de propriétés précédent ; elle est un « discours » qui peut prendre ***par exemple*** la forme suivante (c'est un tel discours que la classe de 5^e observée apprend à élaborer dans la première partie de la séance) :

Les droites (AD) et (BC) étant perpendiculaires à (AB), le quadrilatère ABCD a ses côtés (AD) et (BC) parallèles ; comme en outre AD = BC, le quadrilatère ABCD a deux côtés opposés parallèles et de même longueur : c'est donc un parallélogramme. Il en résulte que ses diagonales se coupent en leur milieu. Le point O est donc le milieu de [AC]. La droite (OI) étant perpendiculaire à (AB) est parallèle à (BC) ; dans le triangle ABC, la droite (OI), qui passe par le milieu O de [AC] et est parallèle à (BC), passe en conséquence par le milieu de [AB]. Le point I est donc le milieu de [AB].

d) On laissera ici implicite la ***théorie***, soit les constituants du discours – et ce discours lui-même – permettant de justifier, en dernière instance, les arguments constitutifs du petit discours technologique ci-dessus.

e) On voit que, pour accomplir ***par la technique*** τ_μ ci-dessus une tâche du type T_μ – construire le milieu de tel ou tel segment [AB] –, on est notamment amené à accomplir des tâches des types suivants :

T_1. Élever une demi-droite d'un côté donné d'une droite (AB) ;
T_2. Marquer sur une demi-droite [A*x*) donnée le point M tel que AM soit égal à la distance entre deux points donnés ;
T_3. Construire le projeté orthogonal, sur une droite [AB] donnée, d'un point O donné.

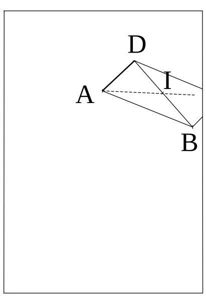
• On dira par exemple que T_μ (ou plutôt la technique τ_μ, ou ***plus exactement*** la praxéologie $[T_\mu / \tau_\mu / \theta_\mu / \Theta_\mu]$), ***motive*** le type de tâches T_3 ; ce qu'on peut écrire : $[T_\mu / \tau_\mu / \theta_\mu / \Theta_\mu] \Rightarrow T_3$.

• Pratiquement, telle ***personne*** pourra avoir appris à construire le projeté orthogonal à l'aide d'une équerre ***uniquement*** parce qu'elle avait besoin de savoir accomplir ce type de tâches afin de construire le milieu de segments par la technique ci-dessus. Dans l'***univers praxéologique*** de cette personne, le type de tâches *T*, et plus exactement la praxéologie $[T_\mu / \tau_\mu / \theta_\mu / \Theta_\mu]$, apparaît alors comme la ***raison d'être*** du type de tâches T_3 ou, plus exactement, de la praxéologie correspondante $[T_3 / \tau_3 / \theta_3 / \Theta_3]$.

• Bien entendu, on pourra semblablement se demander ce que sont les raisons d'être du type de tâches *T* – pourquoi veut-on construire le milieu de segments ? – ou, plus exactement, de la praxéologie $[T_\mu / \tau_\mu / \theta_\mu / \Theta_\mu]$. On laisse provisoirement la question ouverte.

1.4. Un second exemple mathématique

a) La séance en 5^e dont l'analyse a été amorcée voit la mise en place d'une certaine praxéologie mathématique simple – on dit *ponctuelle* –, formée autour du type de tâches T_δ suivant :



T_δ. Sur une feuille où on a voulu tracer un parallélogramme ABCD, le sommet C tombe hors de la feuille ; en restant dans les limites de la feuille, tracer la partie de la diagonale [AC] qui se trouve sur la feuille.

b) La technique τ_δ qui émerge au cours de la séance est la suivante :

1) on construit et on marque le point I milieu du segment [BD] ;
2) on trace la partie de la demi-droite [AI) qui figure sur la feuille de travail.

(Voir la figure ci-contre.)

c) On notera que le type de tâches T_δ, ou plutôt la technique τ_δ, ***motive*** le type de tâches T_μ. En vérité, de très nombreux types de tâches géométriques motivent T_μ, c'est-à-dire le fait de construire le milieu d'un segment : on a là un type de tâches « hypermotivé ».

d) La ***technologie*** de τ_δ contient comme ingrédient essentiel la propriété suivante :

> θ_δ. Dans un parallélogramme, chaque diagonale passe par le milieu de l'autre.

En fait, la formulation adoptée – à l'instigation de la professeure – lors de la séance observée est une variante inessentielle de la formulation traditionnelle suivante :

> $\theta_\delta^{\#}$. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

(Bien entendu, les propriétés θ_δ et $\theta_\delta^{\#}$ sont équivalentes ; on notera en outre que $\theta_\delta^{\#} = \theta_{\mu 1}^{\#}$.)

e) La technologie « complète » de τ_δ doit comporter, bien entendu, une justification de la propriété clé, θ_δ.

• Ici, cette justification ne saurait être simplement invoquée, ainsi qu'on le fait quand on suppose la propriété utilisée « bien connue » et, en particulier, ***antérieurement justifiée*** – ce qui, en fin de 4^e, devrait par exemple être le cas des deux propriétés $\theta_{\mu 1}^{\#}$ (les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu) et $\theta_{\mu 2}^{\#}$ (dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, elle coupe le troisième en son milieu), la première ayant été justifiée en 5^e et la seconde en 4^e.

• La justification donnée dans la séance observée est de type ***expérimental*** (et non de type ***déductif***, ainsi qu'il en allait dans le cas de la technologie de la technique τ_μ). Bien que l'expérience graphique exigée soit, dans la séance observée, simplement ***simulée*** sur un ordinateur, le discours technologique qui en découle peut être restitué ainsi :

> L'expérience montre que, lorsqu'on trace un parallélogramme ABCD ainsi que ses diagonales [AC] et [BD], celles-ci se coupent en un point I tel que l'on ait AI = IC et BI = ID ; en d'autres termes, les diagonales se coupent en leur milieu.

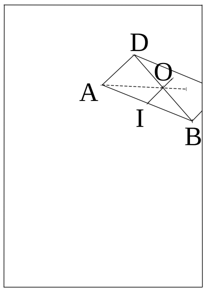
• Il transparaît en ce cas un élément ***théorique*** notable, sur lequel on reviendra au fil du temps : une expérience simulée sur ordinateur (à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique) qui met en évidence une certaine propriété géométrique « élémentaire » permet de conclure 1) que cette propriété est ***vraie*** dans l'espace sensible, et 2) que cette propriété est ***déductible*** dans la « théorie géométrique disponible », même si l'on ne dispose pas d'une déduction explicite.

1.5. Variations technico-technologiques

a) Il existe bien des manières d'accomplir les tâches du type T_δ ; en d'autres termes, il existe plusieurs techniques τ relatives à T_δ, dotées de propriétés différentes.

• La technique τ_δ qui émerge au cours de la séance observée, ainsi, est certainement une technique relativement ***économique***.

• Par contraste, la technique τ_δ' ci-après, qui fait appel à la construction d'un milieu (comme τ_δ) et au tracé d'une parallèle, requiert davantage d'opérations graphiques :



1) on construit et on marque le milieu I de [AB] ;
2) on trace la parallèle *d* à (AD) passant par I ;
3) on marque le point d'intersection O de *d* avec [BD] ;
4) on trace la partie de la demi-droite [AO) qui figure sur la feuille de travail.

• Cette technique τ_δ' peut émerger dans une classe, et on va voir ce que cela entraînera alors en matière technologique. Mais, bien entendu, un travail idoine de cette technique (et de la technologie correspondante) permettra ensuite de la « ramener », dans le cas général, à la technique τ_δ (que cette dernière ait ou non d'ores et déjà émergé) : dans la mesure en effet où τ_δ' conduit à construire le milieu d'un segment, autant choisir de construire le milieu de [BD] plutôt que de [AB].

b) La ***technologie*** de τ_δ', en outre, requiert une propriété ***plus forte*** que la propriété des diagonales, à savoir quelque chose comme ceci :

$\theta_\delta^{\#\#}$. Dans un parallélogramme, les diagonales *et les médianes* se coupent [en leur milieu].

• On nomme ici *médiane* chacun des deux segments joignant les milieux de deux côtés opposés.

• On notera que le fait de savoir que les segments mentionnés se coupent *en leur milieu* n'est pas indispensable pour justifier la technique τ_δ'.

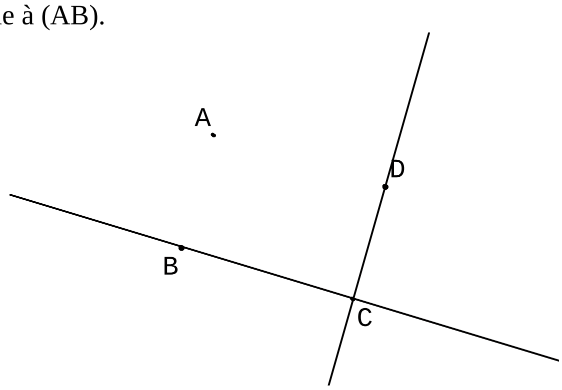
• On soulignera surtout que la propriété $\theta_\delta^{\#\#}$ n'a pas à être « connue à l'avance » : c'est parce que cette propriété, ***si elle était vraie***, arrangerait bien les choses que l'on est amené à l'évoquer – à titre d'agréable ***conjecture***. Il reste alors à s'assurer de la vérité de $\theta_\delta^{\#\#}$.

c) Pour justifier $\theta_\delta^{\#\#}$, c'est-à-dire pour établir la vérité dans l'espace sensible $\mathcal{E}$ de la propriété $\theta_\delta^{\#\#}$, deux possibilités génériques s'offrent. La première – celle que, dans la séance observée, la professeure met en jeu, mais à propos de $\theta_\delta^{\#}$ –, consiste à s'assurer ***par l'expérimentation*** que $\theta_\delta^{\#\#}$ est ***vraie*** dans l'espace ambiant $\mathcal{E}$, ce qu'on notera dans ce Séminaire (en notant simplement θ la propriété $\theta_\delta^{\#\#}$)

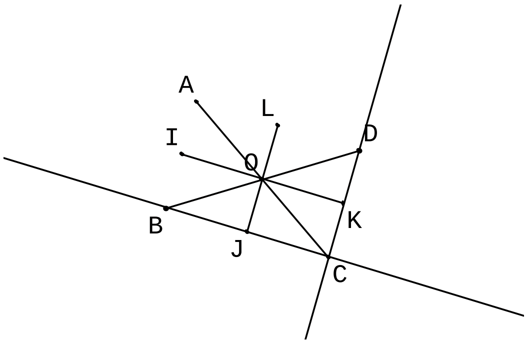
$$\models_{\mathcal{E}} \theta.$$

• La première partie de l'***expérience graphique*** à réaliser peut se décrire ainsi :

1) sur une feuille, on marque trois points A, B, D non alignés ;
2) on marque alors le point C intersection de la droite *d* passant par B et parallèle à (AD) et de la droite *d'* passant par D et parallèle à (AB).

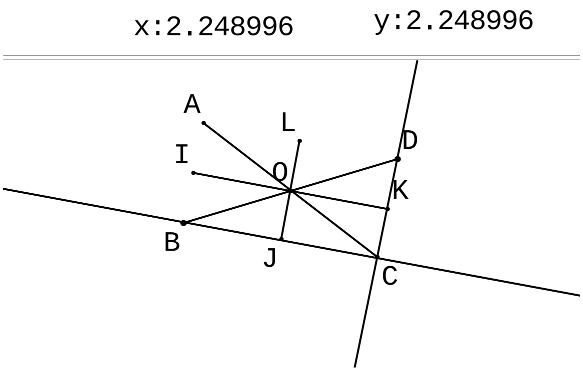


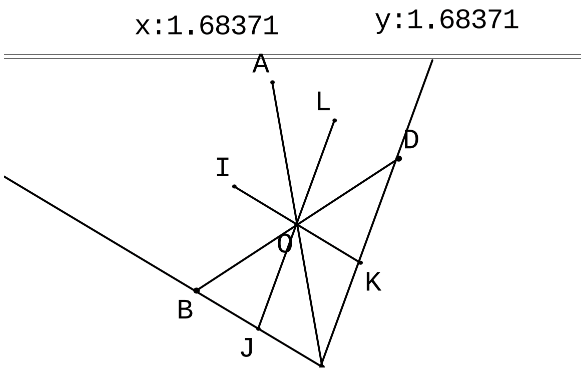
3) on trace les diagonales [BD] et [AC] et on marque leur point d'intersection O ;
4) on construit et on marque les milieux I, J, K, L des côtés [AB], [BC], [CD], [DA] ;
5) on trace les médianes [IK] et [JL].

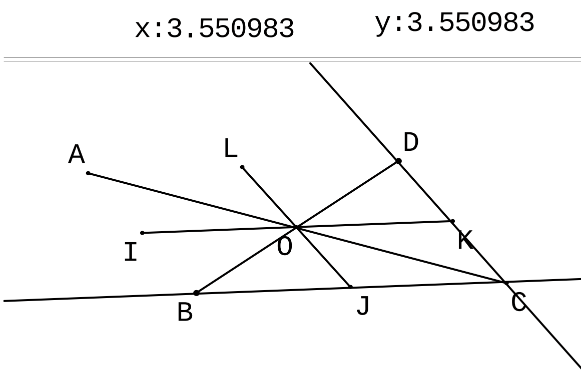


• Cette première expérience, répétée un certain nombre de fois (autant de fois qu'il y a d'élèves dans une classe d'effectif usuel par exemple), montre que les quatre droites envisagées sont bien concourantes en O. Une seconde partie de l'expérience va consister alors à s'assurer que l'on a OA ≈ OC, OB ≈ OD, OI ≈ OK, OJ ≈ OL. (On notera que, dans une expérience graphique, on ne doit pas s'attendre à une précision absolue !)

• On peut évidemment réaliser une ***simulation de l'expérience sur ordinateur***. On le fait ici avec le logiciel Geoplan, en demandant l'affichage avec 6 décimales des distances x = OI et de y = OK : la conclusion est claire.







d) La justification ***par la déduction*** du fait que θ est vraie dans l'espace sensible $\mathcal{E}$ suppose une ***théorie déductive de l'espace*** $\mathcal{E}$. On appellera ***« théorie géométrique disponible »*** et on notera TGD l'état de cette théorie au moment où se pose le problème de déduire θ, ce qu'on notera ainsi (dans ce Séminaire) :

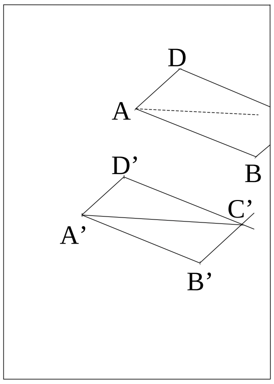
$\vdash_{TGD} \theta$.

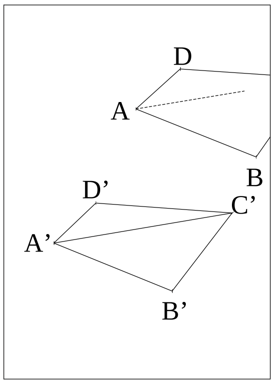
• On aura noté que, lors de la séance observée en 5^e^, la professeure renonce à cette déduction.

• Les participants au Séminaire se pencheront sur le problème d'établir une déduction de $\theta = \theta_\delta^{\#\#}$ en précisant la (partie utile de la) TGD correspondant à une classe de 5^e^ dont on suppose qu'elle dispose de la ***technologie de la symétrie centrale***.

e) D'une façon très générale, il y a ***une dialectique des techniques et des technologies***. Si, par exemple, on souhaite disposer de la technique τ_δ', il faudra développer la « technologie du parallélogramme », en y incluant la propriété $\theta_\delta^{\#\#}$. Plus on dispose de technologies puissantes, plus on peut produire (en les justifiant) des techniques « intéressantes ».

• On a vu ainsi, lors de la séance 2 de ce Séminaire, que si l'on dispose de la ***technologie de la translation***, on peut envisager une autre technique, τ_δ'', que résume le schéma ci-après à gauche.





• La technique τ_δ'' a, en vérité, une ***portée*** plus grande que la technique τ_δ', du simple fait que la technologie de la translation est plus ***puissante*** que la technologie du parallélogramme : elle permet par exemple de résoudre le problème étudié même lorsqu'on ne suppose pas que ABCD est un parallélogramme (voir la figure ci-dessus à droite).

• Le progrès des mathématiques au cours de leur histoire, comme le progrès dans l'étude des mathématiques dans la formation des élèves et étudiants, est marqué par la création de technologies mathématiques (et des théories qui les justifient) de plus en plus puissantes, et en particulier ayant une capacité d'engendrer des techniques à grande portée répondant à des spécifications diversifiées.

1.6. Praxéologies didactiques

a) Sans mettre en forme à proprement parler ce qui pourrait venir s'inscrire sous la rubrique *Organisation mathématique* dans une analyse de la séance observée en 5^e^, on dispose, avec certaines des notations précédentes, d'éléments importants concernant l'organisation mathématique relative à cette séance, c'est-à-dire au complexe de praxéologies mathématiques qui y sont soit mobilisées, soit – surtout – ***en cours de création et de mise en place***.

b) À travers quelques premières notations, on évoquera maintenant le problème de l'***organisation didactique*** de la séance observée, problème qui occupera longuement le

Séminaire. Du point de vue du professeur, l'organisation didactique est une organisation praxéologique constituée autour d'un grand type de tâches, T_π, qu'on peut énoncer de façon simple dans les termes suivants :

T_π. Enseigner un thème mathématique figurant au programme de la classe.

La technique τ_π à construire (et à justifier…) est ce qui permettra au professeur d'accomplir tel ou tel spécimen du type T_π, par exemple la tâche consistant à « enseigner la propriété des diagonales d'un parallélogramme » (en 5[e]), ou encore à « enseigner le théorème de Pythagore » (en 4[e]), ou à « enseigner les fonctions de référence » (en 2[de]), etc.

c) La construction de τ_π (ou plus exactement de $[T_\pi / \tau_\pi / \theta_\pi / \Theta_\pi]$) est une affaire ***terriblement complexe***, notamment parce que toute technique τ_π acceptable fait nécessairement appel à un ***très grand nombre de types de tâches*** – qui transparaissent dans les « questions de la semaine » déjà formulées comme dans celles qui seront formulées dans les mois à venir. Cette complexité a au moins deux sources.

• « Verticalement », le professeur doit gérer tout un ensemble ***de conditions et de contraintes*** liées à la ***société***, à l'***école***, à la ***pédagogie*** « générale », à la ***discipline enseignée***, à son découpage en ***secteurs***, ***thèmes*** et ***sujets*** d'études.

• « Horizontalement », il doit intégrer les élèves (et aussi leurs parents, etc.), dans un grand nombre de types de tâches didactiques qu'il ne peut accomplir que de façon ***coopérative***.

2. Forum des questions

2.1. Faisons le point

a) On recense ici les grandes questions auxquelles le Séminaire a d'ores et déjà accordé une certaine attention :

Comment programmer l'étude (dont les contrôles, etc.) ?
Quelle forme donner aux révisions ?
Quels travaux hors classe proposer aux élèves et pourquoi ?
Comment faire reconnaître son autorité et obtenir le respect de la discipline ?
Comment penser et réaliser les programmes personnalisés de réussite éducative (PPRE) ?
Pourquoi assigner une note de vie scolaire et comment le faire ?
Comment intégrer dans son enseignement le contenu du socle commun de connaissances et de compétences ?
Quelle place donner et quels usages faire des technologies de l'information et de la communication (TIC) ?
Comment penser et réaliser l'aide au travail personnel de l'élève (ATPE) ?

b) On aura noté que chaque question renvoie à un type de tâches T – et, pour certaines d'entre elles, en outre, aux ***raisons d'être*** de ce type de tâches.

• On notera que, en conséquence, la réponse $R^\heartsuit$ à une telle question Q n'est pas un simple discours mais une ***praxéologie*** (ou une partie de praxéologie).

• La praxéologie répondant à Q, soit $R^\heartsuit$, doit être construite par chacun à partir des éléments de réponse élaborés dans la formation (et en particulier dans le Séminaire). Cette construction personnelle adossée à une élaboration collective ***ne saurait être immédiate*** : elle se fera peu à peu, au fil du temps, en même temps que, corrélativement, on s'emploiera à ***déconstruire*** certaines des « praxéologies spontanées » dont chacun peut être porteur de façon plus ou moins consciente.

• La difficulté clé de ce travail tient au fait qu'on doit déconstruire et (re)construire des ***praxéologies***, et non de simples « pratiques » : ce que l'on fait, ce qu'on ***peut faire*** (*praxis*) est en effet toujours conditionné, contraint par ce qu'on ***pense*** (*logos*). La *praxis* est soumise au *logos* : les humains – élèves, parents, professeurs, etc. – ne sont pas des robots programmables, à qui il suffirait d'indiquer ce qu'il serait bon qu'ils fissent ! Le ***changement praxéologique*** suppose de travailler de façon solidaire sur sa pratique ***et*** sur sa pensée des choses, sur sa *praxis* et en même temps sur son *logos*. C'est là une exigence dont on ne peut faire l'économie que de manière illusoire, en se faisant la dupe de soi-même. On illustrera ce point sur l'un des sujets déjà un peu travaillés : le respect des règles.

2.2. Respecter les règles ?

a) On se souvient de la distinction due à Bernard Charlot entre quatre phénomènes :

> 1) la ***violence*** proprement dite, qui « se manifeste par des coups ou des injures graves, et relève souvent du pénal » ;
>
> 2) l'***indiscipline***, qui « est une violation du règlement intérieur » ;
>
> 3) les ***incivilités***, qui « sont de simples entorses aux bonnes manières, comme par exemple claquer la porte au nez du professeur ou d'un autre élève » ;
>
> 4) une « sorte d'indifférence, parfois ostentatoire, vis-à-vis de l'enseignement à l'école ».

Les comportements visés dans le dernier point étaient explicités en ces termes :

> À titre d'exemples, Bernard Charlot cite ces élèves qui commencent à contester le droit qu'on s'occupe de leur absentéisme récurrent parce que « justement, en n'étant pas là, ils ne font de mal à personne », ou encore ceux qui « vivent leur vie » au fond de la classe et qui, lorsque le professeur les invite à participer, répondent : « Mais M'sieur, on ne vous embête pas ! »

On pourrait appeler de tels comportements des ***auto-dérogations à la règle commune*** – et ceux qui s'y adonnent, des ***auto-dérogeants***.

b) De tels comportements, lorsqu'une personne s'exempte d'elle-même d'une obligation commune, et le justifie en avançant sa propre « loi », en alléguant son motif personnel de déroger à la règle commune, sont un mal qui semble croître partout – et qui ébranle la « vie ensemble », où que ce soit. Une étude récente publiée par le ministère sous le titre ***Les attitudes à l'égard de la vie en société des élèves de fin d'école et de fin de collège*** (on le trouvera en ligne, à la rubrique « Documents / 2nd degré ») met ce phénomène en évidence. Pour une première approche, on reproduit ci-après un compte rendu de cette étude paru dans le quotidien *Le Monde* le 15 septembre 2006.

Les collégiens et les écoliers sont moins respectueux des règles

Des jeunes plus tolérants, plus solidaires qu'il y a dix ans, mais moins respectueux de la loi. Tel est le constat d'une enquête réalisée par le ministère de l'éducation nationale auprès de 30 000 élèves de CM2 (11 ans en moyenne) et de troisième (15 ans), qui rend compte de l'évolution des attitudes des jeunes à l'égard de *« la vie en société »* et de ses règles entre 1994 et 2005. L'étude dresse le portrait d'une génération 2005 très sensible à la lutte contre les discriminations, à l'écologie ou à la liberté d'expression, mais qui n'hésite pas à *« prendre plus de libertés »* avec la loi et la règle que ses prédécesseurs de 1994.

De manière globale, les premiers éléments de l'enquête très ambitieuse conduite par la direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP) démentent l'idée d'une jeunesse sans valeurs et montrent des élèves *« beaucoup plus raisonnables et rationnels qu'on ne veut bien le dire »*, selon le commentaire des responsables de l'étude.

QUESTIONS « POLITIQUEMENT INCORRECTES »

Pour parvenir à ces résultats, les statisticiens de l'éducation nationale ne se sont pas appuyés sur des déclarations générales sur le racisme ou le sexisme, par exemple, mais ont interrogé les élèves de manière très concrète (au total, 89 questions pour les CM2, 131 pour les 3es). Ils ont comparé les réponses, anonymes, avec une enquête équivalente conduite en 1994.

Les élèves devaient donner leur avis (*« normal »*, *« pas très normal mais pas grave »* ou *« inacceptable »*, par exemple) sur des affirmations, dont une partie pouvaient paraître provocantes : *« Certains pensent que les femmes doivent obéir aux hommes »* ; *« Certains disent qu'il n'y a que les Blancs qui peuvent être français »* ; *« Est-ce grave de télécharger de la musique ou des films illégalement sur Internet ? »* ; *« Il arrive que certains se marient avec quelqu'un qui n'a pas la même couleur de peau ou la même religion »*, etc.

Au moment de la réalisation de l'enquête, le Syndicat des enseignants (SE-UNSA, minoritaire) avait d'ailleurs protesté, estimant que la méthode était *« problématique »*. Le ministère de l'éducation avait défendu son approche en soulignant qu'il ne fallait pas craindre de poser des questions *« politiquement incorrectes »* pour connaître les préjugés des jeunes (*Le Monde* du 9 juin 2005).

En dehors de quelques exemples, l'éducation nationale ne publie pas les résultats détaillés, question par question, mais une analyse globale des réponses effectuées, selon qu'elles sont apparues plus ou moins *« socialement acceptables »* dans la société actuelle.

Sur la plupart des thématiques, les jeunes de 2005 répondent de la même façon quelle que soit leur origine : *« On ne constate pas de différences notables entre les élèves de zones d'éducation prioritaire et ceux des autres établissements »*, souligne notamment la DEPP, réfutant ainsi l'idée d'une césure entre jeunes des quartiers populaires et jeunes plus privilégiés. En ce qui concerne le rapport à la loi, les collégiens de ZEP apparaissent même légèrement plus respectueux que leurs camarades.

SCEPTIQUES VIS-À-VIS DES CHÔMEURS

Les attitudes des élèves de 2005 ne diffèrent pas sensiblement de celles de leurs prédécesseurs de 1994, avec une très forte adhésion aux valeurs d'écologie, de tolérance, de solidarité. Sauf sur un point, plutôt étonnant : *« Quel que soit leur niveau scolaire* (CM2 ou troisième), *ils sont assez sceptiques vis-à-vis de la bonne volonté des chômeurs à trouver du travail »*, indique l'étude, qui pointe une nette augmentation de la proportion d'écoliers et de collégiens considérant que les chômeurs sont au chômage parce qu'ils ne veulent pas travailler.

L'évolution la plus notable concerne le rapport aux règles avec des élèves qui *« semblent user d'un libre arbitre assez prononcé »*. Ainsi, à l'affirmation *« Il faut obéir aux lois seulement si on est d'accord avec elles »*, les écoliers étaient 58,1 % à considérer l'idée *« inacceptable »* en 1995 ; ils ne sont plus que 38,6 % en 2005. L'évolution est similaire pour les collégiens.

Les auteurs de l'étude soulignent également une *« importante régression des attitudes dans le domaine vie scolaire »*, en particulier des plus jeunes, moins critiques à l'idée de mentir aux professeurs ou de copier lors des contrôles.

La publication de l'étude intervient alors que le gouvernement a introduit au collège, depuis la rentrée, une *« note de vie scolaire »* destinée à mesurer l'assiduité, le respect du règlement intérieur et la participation à la vie de l'établissement.

Le ministère de l'éducation nationale y voit un moyen de favoriser l'apprentissage de la *« civilité »* par les élèves. Les syndicats d'enseignants jugent la mesure *« rétrograde »* et estiment qu'elle constitue une *« double peine »* pour les élèves déjà sanctionnés dans les classes.

Luc Bronner

Méthodologie : 15 346 écoliers de CM2 et 14 918 collégiens de 3e (public et privé sous contrat) ont rempli des questionnaires adaptés à leur âge en mai et juin 2005 dans le cadre de leur établissement. Les résultats complets de l'étude devraient être publiés d'ici deux mois.

Source : note d'évaluation nº06-02, « Les attitudes à l'égard de la vie en société des élèves de fin d'école et de fin de collège. » www.education.gouv.fr/stateval

c) On voit ainsi que l'effort des professeurs pour essayer d'obtenir des élèves de « simples » comportements – qui relèvent de leur *praxis* – peut venir buter, chez certains élèves du moins, sur un *logos* qui conduit ces élèves à s'exempter *motu proprio* de certaines obligations communes, à s'exonérer du fardeau de la règle partagée, à se dispenser des impératifs de la vie de la classe et de l'établissement. C'est donc tout à la fois au niveau de la pratique ***et de la pensée*** – soit au niveau des ***praxéologies***, et pas des seuls « comportements » – qu'il faut travailler ce que la note ministérielle mentionnée plus haut nomme les ***compétences sociales et civiques***.

d) Pour nourrir la réflexion sur les comportements auto-dérogeants, on introduit ici une série de notions associées au terme grec ***nomos***, qui signifie « loi », au sens de la loi de la Cité (et non de loi de la nature).

• L'***anomie*** est, en principe, l'absence de loi. Pourtant, quand on observe une situation réputée anomique, on découvre souvent que ce n'est pas l'absence de loi qui y prévaut, mais que cette impression est liée au contraire au fait que chacun « a sa loi », c'est-à-dire ***« édicte » sa propre loi et prétend l'appliquer***. On dira en ce cas qu'il y a ***idionomie*** – le mot *idios* signifiant « particulier », « propre » (à quelqu'un).

• En nombre d'institutions, la tentation de l'idionomie est forte : elle ne concerne pas que les élèves. À l'instar d'autres acteurs de la vie publique, un professeur peut être porté à vouloir « faire sa loi » et à chercher à l'imposer, c'est-à-dire à se laisser aller à un penchant idionome. (Bien entendu, on ne saurait taxer d'idionomie le simple fait de décider de tel ou tel arrangement organisationnel qu'il échoit à la personne de faire.)

• Le premier besoin qui préside à la constitution et à l'activité d'un ***groupe humain*** est pourtant qu'y soient créées des ***règles partagées***. Pour exister, tout groupe humain a d'abord besoin de ***nomos***, afin que les membres du groupe se vivent comme tels, parce qu'ils partagent ***une même loi***, parce qu'ils sont ***« synnomes »*** (et non pas autonomes), parce que la loi du groupe commande à la loi de chacun.

• La première exigence que le professeur doit faire prévaloir dans la classe dont il a la responsabilité est ainsi une exigence de ***synnomie*** qui prenne en compte « la hiérarchie des normes » (au plan de la classe, de l'équipe pédagogique, de l'établissement, etc.). Cette exigence première n'exclut nullement la volonté d'***eunomie***, c'est-à-dire la volonté d'instaurer une « législation » la plus harmonieuse possible (le grec *eu* signifie « bien ») : l'eunomie est en fait, à bien des égards, la condition d'une véritable synnomie.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 4 : mardi 26 septembre 2006

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Observation & analyse (1re partie) // 2. Forum des questions (1re partie) // 3. Observation & analyse (2e partie)

0. Questions de la semaine

Journée 4 (26 septembre 2006)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4e (et soutien en 5e)

Comment équilibrer un DS pour qu'il ne soit pas trop long ou trop court ?

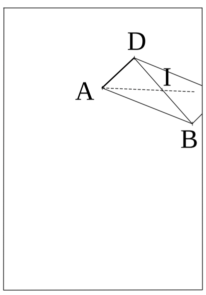
1 Observation & analyse (1re partie)

1.1. Analyse d'une séance observée : rappels

a) On a vu que l'analyse d'une séance observée comporte les quatre rubriques suivantes :

1. *Structure et contenu*
2. *Organisation mathématique*
3. *Organisation didactique*
4. *Gestion de la séance*

b) S'agissant de la séance observée en 5e, on a dit que la rubrique *Organisation mathématique* devait en particulier mentionner la mise en place d'une praxéologie mathématique en cours de constitution autour du type de tâches T_δ suivant :



T_δ. Sur une feuille où on a voulu tracer un parallélogramme ABCD, le sommet C tombe hors de la feuille ; en restant dans les limites de la feuille, tracer la partie de la diagonale [AC] qui se trouve sur la feuille.

• La ***technique*** τ_δ qui se met en place au cours de la séance observée se laisse décrire ainsi :

1) on construit et on marque le point I milieu du segment [BD] ;
2) on trace la partie de la demi-droite [AI) qui figure sur la feuille de travail.

• La ***technologie*** θ_δ de τ_δ contient comme ingrédient principal la propriété suivante :

θ_δ. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

c) On s'arrête dans ce qui suit sur l'***organisation didactique*** de la séance observée.

• On a dit que, du point de vue du professeur, l'organisation didactique est une organisation praxéologique constituée autour d'un grand type de tâches, T_π :

T_π. Enseigner un thème mathématique figurant au programme de la classe.

• On considère donc le problème d'accomplir la tâche particulière suivante du type T_π :

$t_{\pi\delta}$. Enseigner la propriété des diagonales d'un parallélogramme.

Plus précisément, on étudie la question que voici :

Q_δ. Comment accomplir la tâche $t_{\pi\delta}$, c'est-à-dire comment enseigner la propriété des diagonales d'un parallélogramme ?

Pour cela, on observe et on analyse ***une*** réponse $R^\lozenge$: celle mise en œuvre dans la séance observée en 5e.

1.2. Analyser une organisation didactique

a) Analyser l'organisation didactique mise en jeu gagne à prendre appui sur quelques questions simples, auxquelles on s'efforce alors d'apporter réponse : ces questions et les réponses correspondantes ont trait à ce qu'on nomme les ***moments de l'étude*** ou ***moments didactiques***.

b) Avant de préciser ce que sont ces « moments », on introduit la notion de praxéologie ***locale***.

• Une praxéologie « simple » – on parle d'organisation praxéologique ***ponctuelle*** – est formée autour d'un ***unique type de tâches***, comme il en va dans la séance observée en 5e s'agissant de l'organisation mathématique en construction, qu'on a notée $[T_\delta / \tau_\delta / \theta_\delta / \Theta_\delta]$. D'une manière générale, une organisation mathématique ***ponctuelle*** se note $O = [T / \tau / \theta / \Theta]$.

• Une praxéologie ***locale*** s'écrit par contraste $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]_{i\in I}$: il s'agit, comme on le voit, d'une praxéologie où, ***autour d'une technologie déterminée*** θ, on a réuni un ***certain nombre*** de types de tâches (notés ici T_i, $i \in I$).

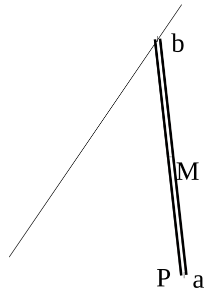
• Dans le cas de la classe de 5e observée, de quoi sera faite l'organisation ***mathématique*** O dont nous observons la mise en place ? On ne peut évidemment le dire à partir de la seule séance observée ! Notons T_0 le type de tâches « inaugural », désigné jusqu'ici par T_δ ; il est ***possible*** que la poursuite du travail dans la classe ajoute à ce type de tâches T_0 le type de tâches T_1 suivant – seul exemple que nous évoquerons ici :

T_1. Étant donné une droite d et un point P non situé sur d, tracer à l'aide d'une règle graduée la parallèle d' à d qui passe par P.

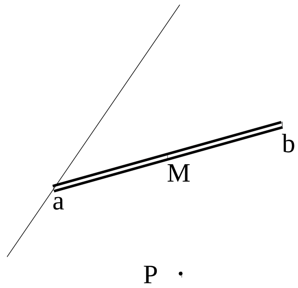
➔ Ce qui justifierait que T_1 soit incluse dans l'organisation locale formée autour de la technologie θ, c'est le fait que la technique τ_1 mise en place dans cette classe soit ***produite*** à l'aide de θ, c'est-à-dire à partir de la propriété des diagonales d'un parallélogramme.

➔ En l'espèce, on pourra par exemple voir émerger la technique τ_1 suivante, qui suppose seulement, en fait, une règle portant trois marques a, b, m telles que m soit le milieu de [ab] :

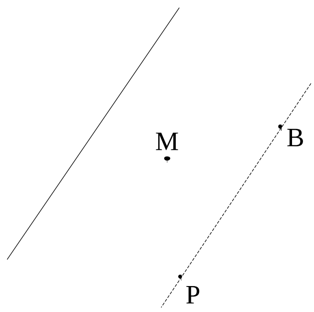
1) placer le point a de la règle en P et placer la règle de façon que b soit sur *d* ; marquer alors le point M de la feuille coïncidant avec le point m de la règle ;



2) le point m de la règle coïncidant avec le point M marqué sur la feuille, placer alors la règle de façon que a soit sur *d*, ailleurs qu'au point coïncidant avec b dans la situation décrite en 1 ; marquer alors le point B de la feuille correspondant au point b de la règle ;



3. Tracer la droite *d'* = (PB).



➔ On notera qu'on obtient en fait, ici, un ***rectangle***, dont l'un des sommets est P, et dont *d* et *d'* sont (ou plutôt portent) deux côtés opposés. Avec une règle graduée, on peut changer de triplet (a, b, m) en cours de construction : on obtient alors en général un ***parallélogramme***.

c) Pour disposer d'une information de base sur la notion de « moment de l'étude », on examine maintenant un extrait des notes du Séminaire 2004-2005. On y désigne par ∂O l'organisation de l'étude relative à une organisation mathématique $O = [T_i / \tau_i / \theta / \Theta]_{i \in I}$. Les sigles OMP et OML désignent respectivement une organisation mathématique ***ponctuelle*** et une organisation mathématique ***locale***.

❷ En dépit de sa complexité, on peut aborder la description et l'analyse d'une OD ∂O donnée, où $O = [T_i / \tau_i / \theta / \Theta]_{i \in I}$, en examinant la manière dont elle prend en charge certaines ***fonctions didactiques clés*** appelées ***moments de l'étude*** (ou moments ***didactiques***). Le mot de « moment » par lequel on désigne ces fonctions se justifie par le fait que, quelle que soit la manière d'opérer du professeur, ***il***

arrive forcément un moment où… – où, par exemple, la classe, sous la direction du professeur, ***rencontre*** pour la première fois le type de tâches T_i.

❸ De manière précise, étant donné une organisation mathématique ***ponctuelle*** $O_i = [T_i / \tau_i / \theta_i / \Theta_i] \subset O$, où θ_i et Θ_i sont les parties de θ et Θ permettant de justifier le bloc $[T_i / \tau_i]$, on distingue 6 moments :

➔ le moment ***de la première rencontre*** avec T_i ;

➔ le moment ***exploratoire***, qui voit ***l'exploration*** du type de tâches T_i et ***l'émergence de la technique*** τ_i ;

➔ le moment ***technologico-théorique***, qui voit ***la création du bloc*** $[\theta_i / \Theta_i]$;

➔ le moment ***du travail*** de l'organisation mathématique créée, et en particulier ***du travail de la technique***, où ***l'on fait travailler*** les éléments de l'OMP élaborée pour s'assurer qu'ils « résistent » (et, le cas échéant, pour les améliorer), et où, en même temps, on ***travaille sa maîtrise*** de l'OMP considérée, et en particulier de la technique τ_i ;

➔ le moment ***de l'institutionnalisation***, où l'on ***met en forme*** l'organisation mathématique construite $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$, en précisant chacun de ses composants, et en l'amalgamant à l'organisation mathématique déjà institutionnalisée – que l'on peut noter, pour plus de clarté,

$\oplus_{j<i}[T_j / \tau_j / \theta_j / \Theta_j]_{j\in \mathrm{I}, j<i} = [T_j / \tau_j / \oplus_{j<i}\theta_j / \oplus_{j<i}\Theta_j]_{j<i}$;

➔ le moment ***de l'évaluation***, où l'on évalue sa ***maîtrise*** de l'organisation mathématique créée, mais aussi où l'on évalue ***cette organisation mathématique elle-même***.

d) Dans ce qui suit, on s'efforce de repérer les moments de l'étude réalisés (au moins partiellement) pendant la séance observée et la manière dont ils sont réalisés – quelles techniques didactiques sont mises en œuvre pour organiser et gérer la première rencontre avec $T_0 = T_\delta$, etc.

• On peut voir ainsi que, durant la séance, l'activité de la classe relève successivement ou simultanément des ***trois premiers moments didactiques*** : moment ***de la première rencontre*** avec T_δ ; moment de ***l'émergence de la technique*** τ_δ (à propos d'un unique spécimen $t \in T_\delta$) ; moment ***technologique***, de ***création de*** θ_δ.

• En revanche, le moment ***du travail*** de l'organisation mathématique créée (amorcé avec l'inscription sur l'agenda de travail de la classe de l'examen d'une possible technique alternative reposant sur la symétrie) ***est renvoyé à plus tard***. Il en va de même du moment ***de l'institutionnalisation*** et du moment ***de l'évaluation***.

• La rencontre avec T_δ se fait à travers l'unique spécimen t_δ spécifié par la figure tracée sur la feuille de travail distribué. On notera le dispositif mis en fonctionnement pour encadrer et favoriser la rencontre avec t_δ : une élève lit l'énoncé ; la professeure note au tableau la tâche demandée (« *Question* : tracer (AC) ? »). L'attaque du problème suit, structuré par les ***questions cruciales*** formulées par P.

• Le passage suivant du compte rendu montre s'il en était besoin que la rencontre avec T_δ ne se fait pas « en un coup » :

> P : « Tout le monde voit ? » Puis : « Qu'est-ce qu'il faut pour tracer une droite ? » Une élève : « Une droite ? Un compas, un crayon, une gomme. » P : « Laissez de côté les instruments de géométrie. »

Les deux moments de la ***première rencontre*** et de l'***émergence de la technique*** se développent simultanément, jusqu'à ce qui peut être regardé comme l'ultime manifestation – dans la séance observée – de la difficulté à « faire sien le problème », telle que le compte rendu disponible la restitue dans ces lignes :

Il est 11 h 55. P : « Quelqu’un peut résumer ce qu’était le problème et ce qu’on a fait pour le résoudre ? » Un élève : « C’était trouver le point C » Non ! Un élève qui avait fait cette erreur rectifie : « C’est tracer (AC). » Une élève précise la technique pour ce faire. P reprend sa formulation puis ajoute : « Je vous laisse tracer la partie visible de la droite (AC). »

• Le moment de la première rencontre est l’un des plus difficiles à réaliser, en particulier parce qu’il peut donner lieu à l’***illusion ostensive*** – l’illusion qu’il suffirait au professeur de ***« montrer »*** le problème à étudier (à l’aide de l’énoncé, d’une figure, etc.) pour que le ***type*** de tâches problématique correspondant se mette à exister clairement dans la classe. Ici, le moment de l’émergence de la technique que vit la classe sous la direction de la professeure est, on l’a évoqué, encadré et dynamisé par un enchaînement de ***questions cruciales***. Ces questions sont en l’espèce proposées par la professeure. Un objectif de formation souhaitable serait alors d’aboutir à ce que la culture didactico-mathématique de la classe permette aux élèves de ***proposer eux-mêmes de telles questions cruciales***, le professeur se limitant en ce cas à relancer le travail mathématique par la question réitérée « Quelle question se poser alors ? » – et, bien entendu, en mettant en débat avant de les valider éventuellement les propositions de question avancées par les élèves.

• On reviendra ultérieurement sur le moment ***technologique***, qui voit l’apparition, d’abord ***conjecturale*** et presque implicite, d’un énoncé clé (θ_δ), puis sa ***mise à l’épreuve expérimentale*** (par le moyen d’une simulation à l’ordinateur), qui permet bientôt de le regarder comme ***vrai dans l’espace sensible*** : $\models_{\mathcal{E}} \theta$.

2. Forum des questions

2.1. Concevoir une AER : motivations

a) De nombreuses questions ont été posées à propos des AER. On partira des deux questions ci-après, en se restreignant toutefois à la sous-question suivante : comment arriver à trouver le ***« motif mathématique »*** d’une AER ?

1. Comment crée-t-on une activité et comment peut-on la mettre en place dans une classe ? (KE, MJ, 4^e^, 1)

2. Comment préparer une AER ? (CS2, OS, 2^de^, 2)

b) Le problème évoqué est l’un des grands problèmes du métier ! À une telle question, une réponse ne peut se mettre en place – par essais et erreurs, construction, déconstruction, reconstruction – que ***peu à peu***.

• On commence par examiner une réponse formulée lors du Séminaire 2005-2006 à la question suivante :

Quel travail faut-il entreprendre pour trouver la motivation de certains savoirs étudiés ? (5^e^, 14, 2005-2006)

• On reproduit ci-après les « matériaux » proposés et mis par écrit. Le mot de ***topos*** employé dans ce qui suit désigne le « lieu » où une personne occupant une position donnée – celle d’élève ou de professeur par exemple – doit assumer ***sa responsabilité et son autonomie d’initiative***, et où, en conséquence, autrui n’a pas (ou n’a que peu) de part.

D'une façon générale, le problème posé est typiquement un *problème de la profession*, qui doit être pris en charge collectivement – dans ce Séminaire, comme partout ailleurs dans l'espace professionnel.

a) Étant donné une entité mathématique (de quelque nature qu'elle soit : type de tâches, technique, composant technologique, principe théorique), l'interrogation évoquée doit d'abord être clarifiée : les raisons de sa création *historique* ne s'identifient pas forcément à ses raisons d'être *actuelles*, et, parmi ces dernières, les motifs de mobiliser cette entité – c'est-à-dire de la « recréer » – pourront différer selon l'institution à laquelle on se réfère – selon par exemple que la question est posée au collège ou à l'université, etc. Cela souligné, le travail à entreprendre appelle le concours de chacun des membres de la profession. Ce travail suppose que l'on se situe dans une culture mathématique qui excède *a priori* largement le monde déjà vaste et divers des « mathématiques à enseigner ».

b) Le démarrage de l'enquête doit s'appuyer sur un réexamen personnel de son expérience vécue des mathématiques, par un effort d'*anamnèse* mathématique, c'est-à-dire de levée de l'amnésie sur les motifs effectivement rencontrés d'employer telle ou telle entité – en mathématiques ou en d'autres disciplines. Notons en passant que cette amnésie a partie liée avec la pratique scolaire-universitaire de proposer à l'élève-étudiant des travaux mathématiques consistant à combler les lacunes d'une étude mathématique toute faire (aux lacunes près !), sans avoir à connaître l'*objet*, ni à plus forte raison l'*organisation* – la logique et la dynamique – de cette étude, toutes choses qui restent dans le *topos* du proposant (professeur, auteur de manuel, auteur de l'épreuve d'examen, etc.) ; inversement, le travail de recherche par *questions cruciales* (dont le professeur doit s'efforcer d'impulser la pratique dans la classe) constitue une ascèse efficace susceptible d'aider à lever l'amnésie qui frappe les raisons d'être des entités mathématiques à enseigner. Ce travail d'anamnèse trouve une aide dans l'étude des programmes et doit porter aussi sur les manuels et autres ouvrages traitant des contenus mathématiques à enseigner. L'enquête gagne en outre à s'appuyer sur l'examen de textes mathématiques – tels des manuels anciens – qui aient moins subi que les manuels d'aujourd'hui le refoulement des raisons d'être, parce qu'ils déploient explicitement une logique davantage fonctionnelle et s'éloignent donc, en cela, de la tentation de l'exhibition mathématique formelle.

c) L'obstacle fondamental à vaincre est celui de la *naturalisation* des entités mathématiques, c'est-à-dire de l'illusion de naturalité, qui pousse à penser que si, par exemple, existent en mathématiques les notions de droite, de demi-droite, de segment, ou d'angle aigu, d'angle obtus, d'angle saillant, d'angle rentrant, c'est tout simplement *parce qu'il y aurait* – en quelque sorte *dans la « nature »* – des droites, des demi-droites, des segments, des angles aigus, des angles obtus, des angles saillants, des angles rentrants, etc. C'est oublier que ces entités sont des constructions humaines, et sont donc le fruit d'une intention, où ils trouvent leur motivation. Il y avait autrefois la notion d'angle *corniculaire*. Pourquoi ? Et pourquoi cette notion n'a-t-elle pas été conservée dans la culture mathématique scolaire ? Plus simplement, tout cruciverbiste connaît la notion de triangle *scalène*, que, à côté des dictionnaires généraux de la langue française, certains textes mathématiques mentionnent encore : ainsi lit-on dans l'« encyclopédie libre » Wikipédia (http://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle) qu'un triangle scalène est un triangle « ne présentant pas de symétrie particulière », tandis que le site Mathworld, qui se présente comme *« the web's most complete mathematical resource »* indique que *« a scalene triangle is a triangle that has three unequal sides »* (http://mathworld.wolfram.com/ScaleneTriangle.html). Mais pourquoi cette notion n'est-elle pas aujourd'hui présente dans la culture mathématique scolaire ? Et pourquoi parle-t-on moins qu'on ne le faisait autrefois, dans les manuels, de triangle *acutangle*, *obtusangle*, alors qu'on parle toujours de triangles *rectangles* ? Il s'agit là de types de questions qu'il convient de constamment ruminer…

c) À la lumière des considérations précédentes, on s'arrête sur la question que voici.

Concernant l'activité d'étude et de recherche présentée en séance 1 du Séminaire et permettant la révision des identités remarquables (recherche des nombres entiers pouvant s'écrire sous la forme d'une différence de deux carrés) : ce type de problèmes, simple en apparence, paraît néanmoins relativement complexe à concevoir comme situations d'apprentissage, en tout cas *ex nihilo* et pour des stagiaires, parce qu'il semble exiger un recul certain et profond sur les programmes et ses compétences exigibles, ainsi qu'une élaboration savamment distillée. Le stagiaire doit-il par conséquent se résigner à « plagier » les seules AER éprouvées auxquelles il peut avoir accès (archives du séminaire, IREM, recherches de didactique des mathématiques, etc.) ? Quelles sont les techniques possibles pour élaborer de véritables AER ? Quelle est la part de chance dans la rencontre avec une situation mathématique pouvant donner lieu à l'élaboration d'une AER ? D'où proviennent les AER des archives du Séminaire ? (JB, CR, 2^{de}, 2)

• Étant donné un élément technologique θ (notion, résultat, etc.), concevoir une AER qui fasse apparaître cet élément mathématique comme l'outil d'action ou de compréhension clé de la situation problématique affrontée n'est pas une affaire « individuelle » : ***c'est une affaire de la profession***, au traitement de laquelle chaque professionnel doit apporter son concours.

• Dans cette perspective, parler de « plagiat » n'a guère de sens : un médecin qui doit prescrire un traitement à un patient doit-il chercher à ne pas plagier ses confrères ? C'est évidemment dans la direction opposée qu'il faut se situer : heureux encore si, pour telle pathologie, la médecine – et non tel médecin – connaît ***un*** traitement efficace, dont ce médecin peut disposer ! Quant à un éventuel refus de tel médecin du « plagiat » thérapeutique, il est officiellement proscrit : le médecin a, non une « obligation de résultat », mais une ***obligation de moyens***, c'est-à-dire qu'il a l'obligation d'user des moyens thérapeutiques que la profession, grâce notamment aux progrès de la science médicale, a su se rendre collectivement disponibles.

• Heureux donc si, pour tout thème mathématique qu'elle a à enseigner, notre profession dispose d'au moins ***un*** ensemble d'AER relatives à ce thème et de bonne efficacité didactique ! Bien entendu, à partir de tels « produits génériques », chaque professeur peut – et, souvent, doit – fabriquer ses propres « préparations ». Mais on ne connaît pas en général trente-six situations efficaces ! Celles-ci sont donc un ***trésor*** de la profession, trésor qui s'enrichit, est mis à jour, etc. L'auteur de la question commentée ici ne l'ignore d'ailleurs pas, puisqu'il soulève aussi cette autre question (à laquelle la réponse ne saurait être que positive) :

Serait-il judicieux cette année, pour la profession, de diffuser *activement* le mot de passe du séminaire de didactique des mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille auprès des enseignants de mathématiques que l'on est amené à rencontrer (conseils d'enseignement, etc.) ? (JB, CR, 2^{de}, 2)

d) Au-delà de ce qui précède, la question examinée comporte un certain nombre de sous-questions – explicites ou implicites – que l'on considère ici brièvement.

• Volontairement, l'exemple donné lors de la séance 1 ne fournissait en vérité qu'un ***motif mathématique*** d'AER, et cela pour faire entendre ***aux participants au Séminaire*** cette idée essentielle que les praxéologies mathématiques vues ***dans les classes précédentes*** ne doivent pas être retravaillées *in abstracto*, mais ***fonctionnellement***, et dans la mesure seulement où les travaux mathématiques spécifiques engagés (ici, en classe de 2^{de}) mobilisent à un moment ou à un autre ces praxéologies comme outils. Pour arriver à partir de là à une véritable AER (ou à une suite d'AER), beaucoup de travail serait encore requis – même si chacun est libre d'extraire de l'exemple proposé des matériaux à utiliser dans ses propres préparations didactiques.

• L'origine des AER – ou des germes d'AER – que l'on trouvera dans le Séminaire (et dans ses Archives) suppose souvent, ainsi qu'on l'a vu plus haut, une prise de recul considérable, pour ensuite revenir ***au chevet de la classe*** avec des préparations didactiques qu'on peut espérer bien calibrées et efficaces. Une telle prise de recul suppose un ***travail collectif continué***, pendant des années, sur ce qui est en vérité un ***chantier permanent***.

• C'est un tel travail qui, notamment, est mené chaque année dans le Séminaire, travail dont les résultats sont capitalisés année après année dans les *Archives du Séminaire* : le travail qui sera accompli ***cette année*** viendra s'ajouter ainsi, à la rentrée 2007, pour les stagiaires de l'an prochain, mais aussi ***pour la profession***, aux trois mille pages déjà en ligne.

e) On s'arrête maintenant, à titre d'illustration, sur la question suivante.

> Cette semaine, j'ai abordé avec les élèves la notion d'inverse et l'un d'entre eux m'a demandé à quoi sert la notion d'inverse dans la vie quotidienne. Je n'ai pas pu lui répondre précisément. Toutefois, j'ai essayé de leur parler de l'utilité des mathématiques dans le domaine des constructions. Comment réagir dans de telles situations ? (AEO, OS, 4e, 3)

• La réponse à la dernière interrogation – « comment réagir dans de telles situations ? » – est simple : on doit réagir en concourant autant qu'on le peut à doter la profession d'une « culture des raisons d'être » qui, aujourd'hui, ***est en lambeaux***. À quoi sert-il de savoir que les médianes (ou les hauteurs, etc.) d'un triangle concourent ? Ou que $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$? À quoi sert-il de connaître la notion de cosinus d'un angle aigu ? Ou la notion de droites parallèles ? Etc. ***C'est ainsi toutes les mathématiques à enseigner qui doivent être réexaminées sous l'angle de leurs raisons d'être, de leurs motivations mathématiques***.

• Pour continuer d'illustrer l'utilité d'interroger les ***Archives du Séminaire*** – à ce propos comme à d'autres propos –, on a reproduit ci-après ***une partie*** du travail consacré à la question de ***l'inverse d'un nombre*** dans le cadre du Séminaire 2002-2003.

> ⇨ ***Raisons d'être d'une notion : le cas de 1/x***
>
> • On partira de la question suivante.
>
> **Pourquoi l'inverse ?**
>
> Quelle activité proposer pour introduire la notion d'inverse d'un nombre positif (en 4e) ? Je me suis posé la question suivante : « Pourquoi et comment a-t-on construit la notion d'inverse ? » La seule réponse que j'ai pu apporter est : « La notion d'inverse apparaît avec les groupes en algèbre. » Or ceci n'est pas très exploitable en 4e. (4e, 1, 2002-2003)
>
> • Le premier geste qu'il convient d'accomplir en vue d'enseigner un thème ou un sujet mathématique donné, c'est bien sûr d'examiner le texte du ***programme*** ainsi que les commentaires qu'apporte, éventuellement, le ***document d'accompagnement***.
>
> → En l'espèce, un premier examen permet de situer la question évoquée dans le ***domaine*** des ***travaux numériques***, et, à l'intérieur de ce domaine, dans le ***secteur*** intitulé ***« Nombres et calcul numérique »***.
>
> → À l'intérieur de ce secteur, l'examen du programme fait apparaître un ***thème d'études*** important (parmi d'autres) : celui du calcul avec des ***quotients de nombres décimaux*** (relatifs), c'est-à-dire, en termes « savants », le thème du calcul dans ***le corps des quotients (ou : des fractions) de l'anneau*** $\mathbb{D}$, ce qui n'est pas autre chose que le corps $\mathbb{Q}$ des ***rationnels***.
>
> → Au cœur de ce thème se trouve le ***sujet d'études*** examiné, celui de ***l'inverse d'un nombre décimal*** non nul, et, par extension, ***d'un quotient de décimaux***, sujet à propos duquel un commentaire explicite est proposé :
>
> **Compétences exigibles**
> Savoir que $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

Déterminer une valeur approchée du quotient de deux nombres décimaux (positifs ou négatifs).

Commentaires

Un travail sera conduit sur la notion d'inverse d'un nombre non nul, les notations x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ et l'usage de calculatrices avec la touche correspondante. À cette occasion, on remarquera que diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse.

→ Le document d'accompagnement ne mentionne nulle part la question de l'inverse. On en retiendra cependant le passage ci-après, qui situe le thème des quotients dans le secteur dont il relève :

La maîtrise des quatre opérations sur les décimaux relatifs est exigible en classe de 4^{e}. En ce qui concerne les nombres en écriture fractionnaire, en classe de 5^{e}, on opère sur ces nombres qui ont été définis en classe de 6^{e} (on pourra se limiter aux nombres positifs, afin de faciliter l'apprentissage des règles opératoires) et on vise la maîtrise des quatre opérations en classe de 4^{e}. La forme irréductible de ces nombres n'est ni à rechercher systématiquement ni exigible : d'une part, 5/100 ou 2/10 sont porteurs de sens et peut-être, dans certains cas, à préférer à 1/20 ou 1/5 ; d'autre part, les moyens pour la déterminer systématiquement ne sont pas encore disponibles.

• Que tirer de ce qui précède ? Une première conclusion, c'est que la considération de l'inverse $\frac{1}{x}$ d'un nombre x non nul permet d'écrire un quotient $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ sous la forme d'un produit $\mathrm{a} \times \frac{1}{\mathrm{b}}$: $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \mathrm{a} \times \frac{1}{\mathrm{b}}$. Mais pourquoi cela a-t-il un intérêt ? Ou, pour le dire autrement : « Pourquoi introduire la notion d'inverse ? Et, plus précisément, pourquoi le programme en impose-t-il la connaissance aux élèves de 4^{e} ? » Ou encore : « Quelles sont les ***raisons d'être*** de la notion d'inverse ? »

⇨ ***Observer des réponses : manuels anciens***

• Pour répondre à la question des raisons d'être – qui conditionne tout l'enseignement à construire –, une ***enquête*** s'impose. Pour des raisons qui apparaîtront plus tard, on a choisi ici d'***observer*** d'abord des réponses en acte proposées par quelques manuels ***anciens***.

→ Un livre d'***Arithmétique & Géométrie*** signé par C. Lebossé et C. Hémery (Fernand Nathan, Paris, 1958), conforme au programme du 12 août 1957 pour les classes de 5^{e}, présente les développements ci-après.

105. Quotient exact de deux nombres entiers ou fractionnaires

Pour calculer le quotient exact de deux nombres entiers ou fractionnaires *a* et *b*, on peut écrire *a* et *b* sous forme de fractions et se ramener ainsi au produit de *a* par l'inverse de *b*.

EXEMPLES : $7 : 9 = \frac{7}{1} : \frac{9}{1} = 7 \times \frac{1}{9}$; $12 : \frac{3}{5} = \frac{12}{1} : \frac{3}{5} = \frac{12}{1} \times \frac{5}{3}$

$\frac{3}{5} : 4 = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4}$; $3\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{11}{3} \times \frac{5}{4} = 3\frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$

Pour diviser un nombre a par un nombre b, il suffit de multiplier a par l'inverse de b.

On remplace ainsi une division par une multiplication. Aux différentes propriétés des produits correspondent des propriétés analogues des quotients exacts. Signalons :

Pour diviser une somme par un nombre on peut diviser chaque terme de la somme par le nombre et additionner les résultats.

Ainsi : $\left(7 + \frac{5}{3}\right) : 4 = \left(7 + \frac{5}{3}\right) \times \frac{1}{4} = \left(7 \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{5}{3} \times \frac{1}{4}\right) = (7 : 4) + \left(\frac{5}{3} : 4\right)$.

De même : $\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{7}\right) : \frac{2}{3} = \left(\frac{5}{2} \times \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{7} \times \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} : \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{7} : \frac{2}{3}\right)$

Pour diviser un produit par un nombre il suffit de diviser un des facteurs du produit par ce nombre.

$$(3 \times 5 \times 7) : 4 = 3 \times 5 \times 7 \times \frac{1}{4} = 3 \times \left(5 \times \frac{1}{4}\right) \times 7 = 3 \times \frac{5}{4} \times 7.$$

Pour diviser un nombre par un produit de facteurs on peut le diviser successivement par chacun des facteurs.

$$26 : (3 \times 5) = 26 \times \frac{1}{3 \times 5} = \left(26 \times \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{5} = (26 : 3) : 5.$$

On peut donc diviser 26 par 3 puis diviser le résultat par 5.

L'inverse d'un nombre est le quotient de l'unité par ce nombre.

Ainsi : $1 : \frac{3}{7} = 1 \times \frac{7}{3} = \frac{7}{3}$ et $\frac{7}{3}$ est l'inverse de $\frac{3}{7}$.

→ Traditionnellement, les ouvrages d'arithmétique faisaient une place de choix à l'emploi des inverses dans le ***calcul rapide*** et le ***calcul mental***. Ainsi en va-t-il dans l'***Arithmétique*** de Maurice Royer & Planel Court (Armand Colin, Paris, 1938) destinée au « cours supérieur » de l'école primaire (classe qui correspondait à peu près à la classe de 6^{e} actuelle).

Calcul mental

Multiplication par 0,50 ; 0,25 ; 0,75 ; 0,05.

On remarque que $0{,}50 = \frac{1}{2}$, $0{,}25 = \frac{1}{4}$, $0{,}75 = \frac{3}{4}$, $0{,}05 = \frac{1}{20}$, et on applique la règle de la multiplication d'un nombre par une fraction (§ 355).

Pour multiplier un nombre :

1^{o} *par* 0,50, *on en prend la moitié ;*

2^{o} *par* 0,25, *on en prend le quart ;*

3^{o} *par* 0,75, *on en prend les trois quarts ;*

4^{o} *par* 0,05, *on le divise par 20.*

EXERCICES

1070. – Effectuer mentalement les multiplications suivantes et imaginer des problèmes y conduisant.

$$37 \times 0{,}50 \ ; \ 0{,}25 \times 64 \ ; \ 3{,}50 \times 0{,}50 \ ; \ 26 \times 0{,}75 \ ; \ 0{,}05 \times 35 \ ;$$

$$18 \times 0{,}25 \ ; \ 0{,}50 \times 75 \ ; \ 5{,}6 \times 0{,}25 \ ; \ 0{,}75 \times 3{,}60 \ ; \ 140 \times 0{,}05.$$

1071. – Quel est le prix de 3 douzaines et $\frac{1}{2}$ d'oranges, si une orange coûte 0^{f},25 ?

1072. – Combien devra-t-on à une femme de ménage pour 26^{h} de travail, si une heure de travail lui est payée 0^{f},25 ?

1073. – Une mutualité scolaire alloue, pour indemnité de maladie, 0^{f},50 par jour le premier mois et 0^{f},25 le mois suivant. Combien doit recevoir un père de famille dont l'enfant a été malade pendant 42 jours ? 56 jours ?

1074. – Un maraîcher vend des poireaux au prix de 0^{f},05 l'un. Combien recevra-t-il pour 84 poireaux ? 120 poireaux ? 260 poireaux ?

→ D'autres ouvrages étendent les observations précédentes, en considérant encore la division par 125, par 1250, par 0,125, etc. L'ouvrage suivant, une ***Algèbre*** pour les concours administratifs due à R. Cluzel et H. Court (Delagrave, Paris, 1951), aborde la question des ***valeurs approchées d'un quotient***.

6. – Quotient de deux nombres relatifs

1. Définition. – …

2. Nombres inverses. – L'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$; celui de $-\frac{3}{7}$ est $-\frac{7}{3}$.

Deux nombres sont dits inverses s'ils ont pour produit 1.

L'inverse de b est b' tel que $b' = \frac{1}{b}$.

Diviser par b revient à multiplier par son inverse $\frac{1}{b}$.

$$\boxed{\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.}$$

Cette propriété est souvent utilisée dans les calculs. On remplace ainsi une division par une multiplication.

Exemple : $\frac{38}{\pi} = 38 \times \frac{1}{\pi} \approx 38 \times 0{,}318 \approx 12{,}084$. (≈ signifie : égal *approximativement* à).

→ Le même ouvrage propose des exercices où la notion d'inverse est sollicitée (ou sollicitable) :

10. $\dfrac{2 - \frac{6}{5}}{3 - \frac{6}{5}}$; $\dfrac{\frac{1}{7} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{7} + \frac{1}{3}}$; $\dfrac{\frac{7}{-5} + \frac{-5}{7}}{\frac{1}{49} - \frac{1}{25}}$

11. $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$; $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$; $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{2} - \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}}}$

12. Calculer les inverses des nombres suivants : 0,375 ; $\frac{2}{3}$; 0,625 ; π ; $\frac{2}{\pi}$.

Application. Effectuer : 243 : 0,375 ; 48,34 : $\frac{2}{3}$; 168,32 : 0,625 ; 3 : π.

→ On notera une ultime observation, celle d'un exercice proposé par une ***Arithmétique*** signée M. Faucheux (Delagrave, Paris, 1929), conforme aux programmes officiels du 18 août 1920 pour les classes correspondant *grosso modo* à celles du collège actuel :

617. En effectuant une division, on a, par erreur, échangé le dividende et le diviseur et on a trouvé comme résultat 0,625. Rectifier le résultat sans recommencer l'opération.

• On se contentera de souligner deux points.

➔ Les raisons d'être de la présence, dans le curriculum mathématique du collège, de l'étude de l'inverse d'un nombre étaient autrefois explicitées nettement : pour l'essentiel, la notion d'inverse d'un nombre permet ***de remplacer une division par une multiplication***, opération regardée comme plus avenante que la division. Cette motivation de la place donnée ***autrefois*** à la notion d'inverse peut certes apparaître décevante (la notion et sa technologie servent un « simple » geste technique de calcul…), mais c'est bien là ***sa raison d'être essentielle***. Il existait autrefois, et cela depuis dans l'ancienne Mésopotamie (voir par exemple http://www.dma.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/calcul%20sexagesimal/calcul%20sexagesimal.htm), des ***tables des inverses*** comme ci-après.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$
1	1	1	1,000 0	1,000 0	1,000 00
2	4	8	1,414 2	1,259 9	0,500 00
3	9	27	1,732 1	1,442 2	0,333 33

5	25	125	2,236 1	1,710 0	0,200 00
6	36	216	2,449 5	1,817 1	0,166 67
7	49	343	2,645 8	1,912 9	0,142 86

➔ On peut toutefois sérieusement se demander si ce type d'emplois est aujourd'hui véritablement utile, alors qu'une simple calculatrice (celle d'un téléphone portable par exemple) donne immédiatement le résultat cherché. En conséquence, on peut s'interroger sur la place encore allouée à la notion d'inverse d'un nombre en 4e, qui témoigne d'un temps aujourd'hui passé. Le débat est ouvert ; mais le programme est là.

2.2. Concevoir une AER : détermination d'OM

a) On s'arrête sur la question que voici.

Quand on prépare le thème « Configurations du plan » en 2de, quelle organisation mathématique peut-on prévoir après avoir étudié les textes officiels (programme et document d'accompagnement) ? (AC, OS, 2de, 3)

Les notes du Séminaire 2000-2001, soit la première année où le thème évoqué était à enseigner, comporte des développements auxquels on se reportera (p. 200 et suiv.). On en examine ci-après une petite partie.

⇨ ***Configurations du plan en 2de* (suite)**

Matériaux pour une réponse

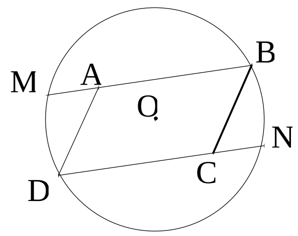
1. Rappel

– Le travail à conduire avec les élèves consiste en une succession d'études de ***problèmes*** de géométrie plane, c'est-à-dire d'une ***succession d'activités d'étude et de recherche*** […].

– La différence avec la plupart des situations didactiques qu'appelle le reste du programme tient en ce que de telles AER n'ont pas à être conçues pour « forcer » l'introduction de ***nouveaux*** outils technologiques ou techniques, mais pour obliger à revenir vers des technologies et des techniques géométriques ***déjà mises en place*** (au collège) ou qui se situent ***dans le « voisinage immédiat »*** des éléments disponibles à la fin du collège.

2. On prendra ici pour exemple le problème 1.2 de la liste proposée par le GTD de mathématiques dans le document intitulé *À propos de la géométrie plane* (voir GTD - A propos de la géométrie plane.pdf).

Sur la figure ci-après, le parallélogramme ABCD et le cercle ont même centre O. On demande quel est le « lien entre [MN] et le cercle ».



– La clé de la solution tient dans l'emploi de la symétrie de centre O, et du théorème « l'image d'une intersection est l'intersection des images » (qui vaut pour toute transformation injective) : l'image de (AB) est (CD), et donc l'image de M ∈ (AB)∩$\mathcal{C}$ (où $\mathcal{C}$ est le cercle) appartient à (CD)∩$\mathcal{C}$, puisque $\mathcal{C}$ est sa propre image par la symétrie. Comme (CD)∩$\mathcal{C}$ = {D,N} et que D est l'image de B ≠ M, M a pour image N : [MN] est donc un diamètre de $\mathcal{C}$.

– Comme souvent, le travail précédent devrait être mis en relation avec le type de tâches qui motive nombre de théorèmes et notions de géométrie élémentaire : les tâches de ***« constructions graphiques »***, quel que soit le système d'instruments employés (y compris les logiciels de géométrie dynamique). Ici, le principal problème de construction qu'il s'agira de résoudre est simplement celui-ci : ***comment produire la figure donnée ?***

– Le document cité ajoute alors ce commentaire :

> « Cette situation peut être le prétexte pour aborder une propriété des transformations tombant sous le sens mais difficile à expliciter, à savoir : "l'image d'une intersection est l'intersection des images". Cette propriété s'avère utile dans de nombreux problèmes faisant intervenir une transformation ; elle ne semble pas explicitée ni utilisée au collège. »

– Le travail autour du problème « inaugural » de l'étude choisi pour exemple doit ainsi au moins porter sur…

• … ***la mise au point du théorème*** utilisé ci-dessus, y compris dans ses aspects ***logiques*** ;

• … ***la mise en œuvre de ce théorème*** dans un certain nombre de problèmes « auxiliaires » où ce théorème apparaît comme un ***ingrédient clé*** de la solution (il en existe « de nombreux », indique le GTD) ;

• … ***la mise en forme*** dans une synthèse appropriée des éléments ***techniques et technologiques*** ainsi mis à jour, y compris les ***outils logiques*** (qui pourront faire l'objet d'une synthèse propre, mais non coupée des situations d'emploi ayant motivé leur institutionnalisation).

b) Ainsi qu'on l'a vu, la ***détermination*** d'une organisation mathématique locale (OML) de la forme $O = [T_i / \tau_i / \theta / \Theta]_{i\in I}$ suppose l'exploration *a priori*, de la part du professeur (de préférence au sein d'une équipe de professeurs de l'établissement), des composants pratico-techniques T_i et τ_i ($i \in I$) ainsi que des composants technologico-théoriques θ et Θ.

• Lors de la séance 3, on avait ainsi mentionné un problème de technologie mathématique que l'on peut formuler comme suit.

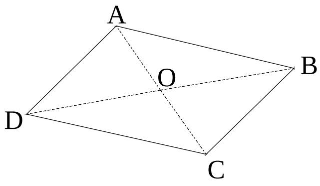
Examiner l'assertion $\vdash_{\text{TGD}} \theta$, où θ est l'énoncé « Dans un parallélogramme, les diagonales *et les médianes* se coupent [en leur milieu] » et où la TGD est supposée inclure la *technologie de la symétrie centrale*.

• Avant de proposer une solution au problème soulevé, on examine le texte du programme. Le ***thème*** du *Parallélogramme* apparaît dans le ***domaine*** des *Travaux géométriques*, et plus précisément dans le ***secteur*** intitulé *« Dans le plan, transformation de figures par symétrie centrale ; parallélogramme »*.

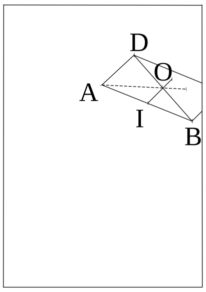
➔ S'agissant de la symétrie centrale, un commentaire du programme en vigueur en 2005-2006 précisait que l'étude de cette transformation doit conduire à « la mise en évidence de la conservation des distances, de l'alignement, des angles et des aires », et prescrivait « l'étude d'exemples d'utilisation de ces propriétés ».

➔ À propos du « travail entrepris sur le parallélogramme et la symétrie centrale », censé aboutir « à des énoncés précis que les élèves doivent connaître », un autre commentaire précisait que « des séquences déductives pourront s'appuyer sur ces énoncés » (Le « pourront » explique que, dans la classe de 5^{e} observée, la professeure ait pu légitimement renoncer à établir la propriété des diagonales par déduction dans la TGD.)

• Plaçons-nous dans le cas où un parallélogramme est défini comme un quadrilatère ABCD dans lequel les droites (AB) et (CD) d'une part, (BC) et (AD) d'autre part, sont parallèles – ce qui est le cas de la classe observée.

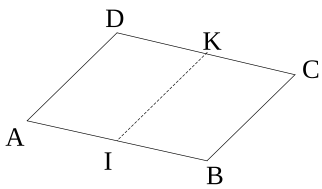


Soit O le milieu de [BD] : la symétrie *s* de centre O transforme B en D, et réciproquement. La symétrie *s* transforme la droite (AB) en la droite parallèle passant par *s*(B) = D : en d'autres termes, *s*(AB) = (CD). De même, *s* transforme la droite (AD) en la droite parallèle passant par *s*(D) = B : en d'autres termes, *s*(AD) = (BC). Il en résulte que *s*(A) appartient à *s*(AB) = (CD) et à *s*(AD) = (BC) : on a donc *s*(A) = C. Par suite, A, O et C sont alignés et O est le milieu de [AC]. On a donc bien : $\vdash_{TGD} \theta_\delta$.



• Désignons par I, J, K, L les milieux de [AB], [BC], [CD], [DA] ; la symétrie *s* transforme le milieu I de [AB] en le milieu du segment d'extrémités *s*(A) = C et *s*(B) = D, soit en K : il en résulte que la médiane [IK] passe par O, et plus précisément que O est le milieu de [IK]. On a un résultat analogue pour [JL]. Finalement, on a établi que $\vdash_{TGD} \theta$ (où $\theta = \theta_\delta^{\#\#}$).

• On aura observé que le résultat utile pour justifier la technique τ_δ' est en fait le suivant : la parallèle *d* à (AD) passant par le milieu I de [AB] et les diagonales du parallélogramme ABCD sont concourantes en un point O. Pour se ramener à $\theta_\delta^{\#\#}$, il suffit de montrer que le point K où *d* coupe (CD) est le milieu de [CD], ce qu'on peut faire ainsi : le quadrilatère AIKD, dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles, est un parallélogramme ; on a donc IA = KD. On établit de même que IB = KC. Comme IA = IB, on a KD = KC : K est le milieu de [CD], CQFD.



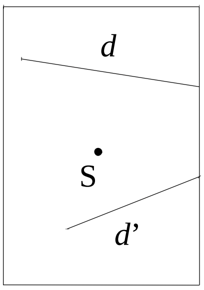
• Pour la séance prochaine, les participants au Séminaire se pencheront sur le problème soulevé par la question suivante.

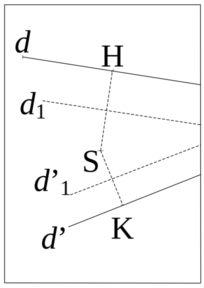
Quelle est précisément la technologie sur laquelle « s'appuie » la technique qui permet de déterminer la droite passant par S et P (P : intersection de deux droites ne se trouvant pas sur la feuille…) ? (JB, CR, 2de, 3)

Les points S et P sont ceux qui apparaissent dans le passage suivant des notes du Séminaire 2005-2006, cité lors de la séance 2 du Séminaire, à propos de la question des contenus des synthèses à conduire.

Supposons ainsi que l'on ait étudié le type de problèmes suivant :

Un point P extérieur à la feuille sur laquelle on travaille est défini comme l'intersection de deux droites *d* et *d*'. Comment déterminer la droite passant par S et P ? (Voir la figure ci-dessous à gauche.)





Si la technique mise en place est celle illustrée par la figure ci-dessus à droite (H et K étant les projetés orthogonaux de S sur *d* et *d*’ respectivement, on trace les médiatrices de [SH] et [SK], qui se coupent en P_1 : on a (SP) = (SP_1) ; si P_1 est extérieur à la feuille, on recommence), c’est cette technique qu’il conviendra de faire figurer dans la synthèse, suivie, bien entendu, de sa technologie – qu’on abandonne, en l’espèce, à la sagacité des participants au Séminaire.

2.3. Cahier de textes ?

a) Quelques questions, reproduites ci-après, ont été formulées à propos du ***cahier de textes de classe*** : hormis la première, au libellé sobre mais peu explicite, les deux autres envisagent un ***type de tâches*** déterminé – disons, « tenir le cahier de textes de classe » – et demandent comment accomplir ce type de tâches. Cela revient à demander une ***technique*** – justifiée ! – de tenue du cahier de textes de classe.

1. Cahier de textes de la classe ? (MBP, OS, 2de, 1)

2. Comment remplir le cahier de textes ? Quels documents y inclure ? (SP, MJ, 4^{e}, 2)

3. Comment organiser le cahier de textes de la classe ? Faut-il y faire figurer toutes les photocopies distribuées en classe ? (PP, MJ, 2de, 2)

b) La clé d’une réponse à la question posée se trouvent dans les ***raisons d’être*** – aujourd’hui ***très largement oubliées*** – du cahier de textes, soit ce qui motive son existence dans l’organisation scolaire de l’étude. Une rapide plongée dans les *Archives du Séminaire* permet de rapporter des notes du Séminaire 2004-2005 le butin reproduit ci-après, qui se suffit à lui-même (en notant que l’édition 2006 de la notice *Le temps de l’étude* mentionnée dans ce qui suit ne sera cette année étudiée qu’un peu plus tard).

⇨ ***Cahier de textes***

• On examine maintenant les questions portant sur le ***cahier de textes***. Avant toute chose, on prendra garde à… l’orthographe, souvent fautive du fait qu’on n’entend plus guère aujourd’hui le sens du mot « texte » dans ce contexte. On appelait « texte », autrefois, un « sujet de travail proposé à des élèves » (*Dictionnaire historique de la langue française*) ; en conséquence, on écrit « cahier de texte***s*** » comme on écrirait « cahier de leçons », « cahier de devoirs », « cahier de poèmes », « cahier d’exercices », etc. Cela noté, les questions formulées étaient les suivantes.

1. Que doit-on écrire sur le cahier de textes à chaque séance ? (4^{e}, 0, 2004-2005)

2. Dans mon établissement, il est proposé expérimentalement de faire le cahier de textes informatiquement et de le mettre sur le Net (le cahier de textes sur papier restant obligatoire). Serait-il intéressant de faire de ce cahier électronique un « livre de bord » en y détaillant beaucoup plus les notions faites en séance ? (4^{e}, 0, 2004-2005)

Matériaux pour une réponse

1. Dans la notice *Première rentrée des classes*, l'existence d'un cahier de textes (de classe ou individuel) est seulement mentionnée. La notice *Le temps de l'étude* consacre en revanche au cahier de textes un assez long développement, que l'on reproduit ici.

3.4. À tout programme de travail – qu'il soit relatif à une heure de classe, à une semaine entière, ou à quelque autre unité de temps – doit correspondre une phase de ***bilan*** proportionnée au travail accompli, qui permette de ***faire le point*** et prépare ainsi l'effort de ***synthèse***.

Pour ce faire, on peut notamment, au collège comme au lycée, utiliser le ***cahier de textes de la classe***, dont le contenu pourra être, une fois par semaine par exemple, ***revu et complété collectivement***, sous la direction du professeur, à partir notamment de l'ensemble des traces écrites (cahiers et cahiers de textes des élèves, etc.) du travail réalisé dans la période écoulée, avec pour objectif traditionnel, aujourd'hui bien oublié, d'aider élèves, parents et… professeurs à se situer par rapport à l'avancée de l'étude, comme le rappelait jadis la circulaire du 3 mai 1961 :

« Un cahier de textes bien tenu est, pour l'élève, l'instrument premier de tout travail personnel efficace. Le cahier de textes de classe, qui sert avant tout de référence aux cahiers de textes individuels, et doit être, de façon permanente, à la disposition des élèves qui peuvent à tout moment s'y reporter, assure en outre, dans l'esprit de la circulaire du 20 octobre 1952 la liaison entre les professeurs et les maîtres chargés des études surveillées. Il permet enfin, en cas d'absence ou de mutation d'un professeur de ménager une étroite continuité entre l'enseignement du maître précédent et celui de son suppléant ou de son successeur. À ces divers titres, cahiers de textes de classe et cahiers individuels doivent être complets, de maniement facile et exempts de fautes. Ils doivent refléter la vie de la classe et permettre de suivre avec précision la marche des études. »

Un tel ***travail de la mémoire***, qui rassemble la classe autour de son histoire en réduisant l'asymétrie structurelle entre professeur et élèves par rapport au temps de l'étude, et contribue à l'éducation des élèves à la citoyenneté et à la démocratie, peut prendre évidemment d'autres formes. On notera seulement, ici, le rôle que peuvent jouer, dans cette perspective, les ***travaux individuels de rédaction***, en classe et ***hors classe***, qui pourront avoir pour objet, à l'occasion par exemple de chaque période de vacances, de dresser l'inventaire « des choses faites et des choses qui restent à faire », à titre de préparation au ***bilan de rentrée***, collectif, inaugurant la reprise de l'étude.

2. Contrairement à ce qu'on croit trop souvent aujourd'hui, remplir le cahier de textes n'est donc pas, un pensum administratif auquel il faudrait, bon gré, mal gré, se soumettre (et dont certains esprits forts croient pouvoir s'exonérer). C'est au contraire un ***dispositif didactique*** dont il faut apprendre à tirer le meilleur profit ***pour la formation des élèves***. Dans la perspective désignée plus haut, le cahier de textes doit donner un tableau fidèle et raisonnablement complet de la vie et du travail de la classe dans la discipline concernée. Plusieurs choix sont possibles. Le professeur peut par exemple, à l'issue de chaque séance, écrire quelques notes rapides qui serviront de repères pour une rédaction plus substantielle élaborée ***avec la classe***, en un effort collectif de ***mémoire*** dont le bénéfice pour les apprentissages ne saurait guère être surestimé. Lorsque la chose est possible – elle l'est de plus en plus –, la rédaction pourra se faire à l'ordinateur (piloté par le professeur), ***en classe*** (par exemple lors d'une séance de fin de semaine, surtout si elle est « mal située »), le contenu de l'écran étant vidéoprojeté pour que chacun puisse participer. La version ainsi élaborée, retouchée ensuite par le professeur si nécessaire, sera alors imprimée et collée dans le cahier de textes de classe. On peut aussi envisager, chaque semaine, qu'un binôme ou un trinôme d'élèves prépare ce travail et soumette sa proposition à la classe, etc. On peut encore demander aux élèves un petit travail hors classe de bilan de l'activité de la semaine, etc.

3. Le projet évoqué dans la deuxième question ci-dessus s'intègre naturellement dans la perspective précédente. À ceci près qu'il convient de n'en pas diminuer l'utilité didactique possible en en faisant une production unilatérale du professeur, ce qui ôterait à ce projet une partie non négligeable de son intérêt pour la formation des élèves – lesquels doivent au contraire tenir un rôle bien défini dans ***l'élaboration et l'usage*** du contenu du « cahier de textes électronique » envisagé.

3. Observation & analyse (2^{e} partie)

3.1. Élaborer un contrôle : critères

a) On partira des questions suivantes.

> 1. Comment gérer le temps d'un contrôle ? Pour un élève de 5^e par exemple, comment savoir quel temps il va mettre pour faire telle ou telle question ? Certains élèves vont aller plus vite que d'autres, vaut-il mieux préparer un contrôle plus long ou plutôt court ? (FLA, OS, 5^e, 3)
>
> 2. Comment savoir le temps qu'il faut laisser aux élèves pour résoudre une interrogation ? Pour ne pas faire des interrogations trop longues ou trop courtes ? (JS, OS, 2de, 3)

b) D'une façon générale, ces questions renvoient à une question professionnelle plus globale – comment accomplir les tâches du type T_κ suivant :

T_κ. Concevoir et réaliser un contrôle en classe relatif à un programme de contrôle donné.

Pour aller vers une réponse à la question Q_κ ainsi soulevée – comment accomplir une tâche du type T_κ ? –, on examine d'abord les préconisations des textes officiels.

• Le document du groupe « Mathématiques » de l'Inspection générale intitulé ***Les travaux écrits des élèves en mathématiques au collège et au lycée***, déjà mentionné lors de la première séance de ce Séminaire, bien qu'un peu ancien (1997), apporte des indications simples et claires que l'on reproduit ci-après.

> **III. L'évaluation en temps limité**
>
> Il convient de garder un rapport correct entre l'évaluation et la formation : c'est l'évaluation qui est au service de la formation, et non le contraire. En particulier, il ne faut pas négliger, par un choix judicieux des épreuves, le rôle formateur de l'évaluation.
>
> Il convient de faire se côtoyer deux types d'épreuves écrites d'évaluation :
>
> – les interrogations écrites courtes (10 à 20 min) dont le but est de vérifier qu'une notion, une méthode ou une démonstration est correctement assimilée. On peut en prévoir une par chapitre du cours (soit une par quinzaine en moyenne) ;
>
> – les devoirs de contrôle (de 30 min en 6^e à 3 ou 4 h en terminale) sont peu fréquents (2 à 3 par trimestre) et doivent rester de difficulté et de longueur raisonnables. Ils ne doivent en aucun cas déborder du programme de la classe, ni faire appel à des notions ou des méthodes qui n'y sont pas étudiées.

• Peu disert, le nouveau programme du cycle central, qui vient d'entrer en vigueur en 5^e, reprend certaines des indications précédentes.

> **L'évaluation comme repère des apprentissages**
>
> Vérifier les acquis fait partie intégrante de l'action pédagogique.
>
> L'évaluation est un outil indispensable au professeur dans la conduite de son enseignement, à différents moments de son apprentissage.
>
> En début, comme en cours d'apprentissage, le repérage des acquis, des difficultés et des obstacles permet d'adapter les supports et les modalités de l'enseignement.
>
> Le bilan terminal permet de mesurer la maîtrise qu'a chaque élève des savoirs et des savoir-faire visés et, si nécessaire, d'envisager des activités de remédiation.

• Le programme de 2de propose un commentaire bref, un peu indirect.

Dans les multiples formes que peut prendre l'évaluation, apparaissent les devoirs de contrôle : le nombre de ceux-ci doit être réduit (trois, voire deux, par trimestre suffisent) ; on y intégrera plusieurs composantes de l'activité mathématique signalées par le programme.

• L'ancien programme de 2^{de}, en vigueur jusqu'à l'année 1999-2000, était plus explicite.

Les ***devoirs de contrôle***, ***peu nombreux***, combinent des exercices d'application directe du cours et des problèmes plus synthétiques, comportant des questions enchaînées de difficulté progressive et permettant aux élèves de vérifier leurs résultats. Ils doivent être suffisamment ***courts*** pour permettre à la grande majorité des élèves d'étudier l'ensemble des questions posées et de ***rédiger posément*** la solution qu'ils proposent.

c) Pour saisir plus concrètement la difficulté examinée ici, on observe maintenant un contrôle réalisée dans une classe de 2^{de} par une professeure « chevronnée ». Les informations utilisées ci-après proviennent d'un travail de recherche réalisé dans des classes de 2^{de} d'une autre académie. On reproduit ici l'énoncé du contrôle.

Classe 28 Vendredi 21 mars 2003

Contrôle n° 8

Les calculatrices sont autorisées, les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - (2x - 8)^2$.

1) Étudier le sens de variation de f sur $[4 ; +\infty[$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = 2x - 6$

c) $f(x) \leq 8$

d) $f(x) \geq -5$

Exercice 2 (6 points)

ABCD est un rectangle tel que AB = 13 et BC = 11.

M est un point du segment [AB] distinct de A et de B.

N est sur [BC], P sur [CD] et Q sur [DA] tels que AM = BN = CP = DQ.

Les triangles AMQ et NPC sont isométriques, de même pour BMN et DPQ.

On note AM = x.

1) Exprimer les aires suivantes en fonction de x :

a) triangles AMQ et BMN.

b) parallélogramme MNPQ

2) A l'aide de la calculatrice, chercher l'aire minimale de MNPQ.

Exercice 3 (4 points)

Représenter dans un repère orthogonal (O, I, J) une fonction f définie sur $[-5 ; 4]$ et vérifiant les propriétés suivantes :

f est croissante sur $[-5 ; -2]$, décroissante sur $[-2 ; 1]$ et croissante sur $[1 ; 4]$

les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -4, 0 et 3 ;

1 et -5 sont les seuls zéros de $f(x)$;

l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ est $]-5 ; 4]$;

l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 2$ est $]-\frac{5}{2} ; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{17}{4} ; 4]$.

Exercice 4 (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$4x - 7 < 7(x - 5) + 3x$

$4x^2 < (x + 1)^2$

$5x(1 - x)(2 + 4x) \geq 0$

$4(5x + 3)(3x^2 + 3) \leq 0$

• Le contrôle dure 40 minutes. La professeure le regarde comme un échec – sur l'énoncé qu'elle communique au chercheur elle a noté à la main : « trop d'erreurs pour une majorité d'élèves, la correction sera faite en classe jeudi 8 à 9 h. » La moyenne de la classe est de 7,6/20 : c'est grâce à l'exercice 3, que la professeure note finalement sur 4,5, voire sur 5, qu'elle n'est pas catastrophique (sans cela, la moyenne tomberait à 5,3/20) !

• On aura noté que l'énoncé de l'exercice 3 comporte à l'évidence des erreurs (qui semblent avoir justifié l'octroi de demi-points supplémentaires au travail rendu par les élèves).

➔ Tout d'abord, les hypothèses que « 1 et –5 sont les seuls zéros de $f(x)$ » et que « l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ est]–5 ; 4] » sont incompatibles (il semble que la professeure ait voulu écrire « $f(x) > 0$ », et non « $f(x) \geq 0$ »).

➔ Ensuite, l'indication selon laquelle $f(x) \geq 2$ lorsque $x \in \left]-\frac{5}{2} ; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{17}{4} ; 4\right]$ est incohérente avec l'hypothèse initiale selon laquelle fonction f est définie sur [–5 ; 4] : la professeure, ici, signale au chercheur que la fraction $\frac{17}{4}$ est le résultat d'une « erreur de frappe ».

• Pour quiconque est un tant soit peu accoutumé à observer des classes de 2[de], l'énoncé rédigé par la professeure apparaît d'emblée pléthorique pour un travail en autonomie d'une durée de 40 minutes !

➔ S'il en est bien ainsi, on peut s'étonner que la professeure, qui enseigne depuis une vingtaine d'années, et a en responsabilité des classes de seconde depuis des années, commette une telle erreur de « calibrage ».

➔ En vérité, cet épisode confirme une observation banale : même aguerri, plus d'un professeur est tenté de sur-calibrer les devoirs de contrôle qu'il conçoit, comme s'il craignait – jusqu'au dernier moment – que les élèves ne se jouent des difficultés qu'il soumet à leur sagacité… ***On s'efforcera donc de ne pas céder à cette panique d'avant contrôle*** – qui produit tant de « catastrophes », grandes ou petites !…

• Le sur-calibrage ***« quantitatif »*** du contrôle dépend en fait fortement de son adéquation ***« qualitative »*** : si, en effet, les types de tâches dont relèvent les tâches proposées avaient été suffisamment travaillés dans la classe pour y être devenus ***routiniers***, alors le temps n'aurait pas manqué et le succès aurait été au rendez-vous.

➔ Même s'il n'en est pas ainsi, un devoir de contrôle doit… contrôler la maîtrise par la classe ***des praxéologies mathématiques construites*** : on ne saurait contrôler ce qui n'existe pas !

➔ Un ***critère essentiel*** est donc le suivant : pour chaque tâche dont l'accomplissement est demandé dans le contrôle, 1) le ***type*** de tâches correspondant doit avoir été bien identifié par la classe, 2) une ***technique*** efficace et intelligible doit avoir été mise en place et travaillée substantiellement, 3) et un ***environnement technologique*** (ou technologico-théorique) adéquat doit avoir été élaboré et ***institutionnalisé***.

3.2. Une analyse didactique *« a priori »*

a) On se réfère au critère précédent pour examiner l'exercice 1 du contrôle, dont on reprend ici l'énoncé.

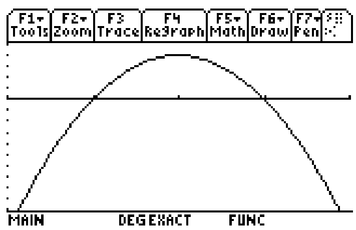
> **Exercice 1 (6 points)**
> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - (2x - 8)^2$.
> 1) Étudier le sens de variation de f sur $[4 ; +\infty[$.
> 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
> a) $f(x) = 0$
> b) $f(x) = 2x - 6$
> c) $f(x) \leq 8$
> d) $f(x) \geq -5$

b) La première tâche demandée est d'établir la variation d'une certaine fonction f sur un certain intervalle (non borné), à savoir $[4 ; +\infty[$. Ici, il s'agit d'une fonction qu'on peut regarder raisonnablement comme relevant du type de fonction de la forme $F(x ; a, b, c) = c \pm (ax - b)^2$. Comment la classe a-t-elle pu apprendre à accomplir une telle tâche ? Comment, lors de ce contrôle, peut-on attendre que les élèves procèdent ? (On sait que, en 2de, l'étude de la variation de f à l'aide de l'étude du signe de f' est une technique non encore disponible.)

• Une première technique consiste à mettre en œuvre la définition (supposée) de la croissance et de la décroissance d'une fonction, en étudiant le signe de $f(x_2) - f(x_1)$ lorsqu'on suppose (ici) que $4 \leq x_1 < x_2$.

➔ On a :
$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= [4 - (2x_2 - 8)^2] - [4 - (2x_1 - 8)^2] \\ &= (2x_1 - 8)^2 - (2x_2 - 8)^2 \\ &= [(2x_1 - 8) - (2x_2 - 8)][(2x_1 - 8) + (2x_2 - 8)] \\ &= (2x_1 - 2x_2)(2x_1 + 2x_2 - 16) = 4(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 8) \\ &= -4(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 8) \\ &= -4(x_2 - x_1)[(x_1 - 4) + (x_2 - 4)]. \end{aligned}$$

➔ Comme $x_1, x_2 \geq 4$ (avec $x_1 < x_2$), on ***voit*** (sur l'expression obtenue) que l'on a $f(x_2) - f(x_1) < 0$: la fonction f est donc décroissante sur $[4 ; +\infty[$.



➔ Ce résultat aurait pu être ***anticipé***, et peut à tout le moins être maintenant ***contrôlé***, à l'aide ***de la calculatrice graphique***, à laquelle on demande la représentation de la fonction f, par exemple sur l'intervalle $[2 ; 6]$.

• Une autre technique peut reposer sur une technologie adéquate des courbes du second degré, dont l'ingrédient clé, ici, peut se résumer ainsi :

> La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = c - (ax - b)^2$ est croissante sur l'intervalle $]-\infty ; \frac{b}{a}]$, atteint son maximum, égal à c, en $x = \frac{b}{a}$, et décroît sur l'intervalle $[\frac{b}{a} ; \infty[$.

La technique consiste alors à « appliquer » ce résultat à la fonction considérée.

• Une autre technique existe, de portée en principe plus large que la précédente, qui consiste à regarder f comme le résultat de la composition de fonctions « de référence » : pour $x \geq 4$, l'application croissante $x \mapsto 2x - 8$ prend des valeurs positives ; comme l'application $x \mapsto x^2$ est croissante pour $x \geq 0$, il en résulte que l'application $x \mapsto (2x - 8)^2$ est croissante pour $x \geq 4$; par suite, l'application $x \mapsto -(2x - 8)^2$ est décroissante sur $[4 ; +\infty[$ et il en est donc de même de l'application $x \mapsto -(2x - 8)^2 + c = f(x)$.

• *A priori*, on peut penser que, des trois techniques envisagées jusqu'ici, c'est cette dernière technique qui est la plus vraisemblablement attendue des élèves. Cela pourrait par exemple expliquer que l'étude de la variation de f ne soit demandée que sur l'intervalle $[4 ; +\infty[$: son étude sur $]-\infty ; 4]$ reviendrait en effet à répéter sans grand changement le travail déjà accompli à propos de $[4 ; +\infty[$, lequel suffit à contrôler que l'élève sait – ou ne sait pas – mettre en œuvre cette technique.

c) La deuxième question de l'exercice 1 demande de résoudre les équations et inéquations suivantes (où $f(x) = 4 - (2x - 8)^2$) : a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = 2x - 6$; c) $f(x) \leq 8$; d) $f(x) \geq -5$.

• En binôme, les participants mettent par écrit une ébauche de réponse à la question suivante :

> Quelles techniques, associées à quels éléments technologiques, ont pu être mises en place dans la classe relativement aux types de tâches correspondants aux quatre tâches précédentes ?

• On notera que ce type de tâches – conjecturer comment les élèves pourraient être supposés accomplir telle ou telle tâche – est ***fondamental dans l'activité du professeur***. Devant le ***projet de contrôle*** qu'il aura rédigé, ainsi, le professeur doit en effet se demander, pour chacune des tâches mathématiques demandées aux élèves, ***comment*** ces derniers pourront bien faire, quelle technique ils pourront raisonnablement et régulièrement mettre en œuvre, étant donné ce qui se sera construit dans la classe.

Séminaire de didactique des mathématiques – Travaux dirigés 1

N. B. La séance de travail dirigé dont rendent compte les notes ci-après n'a concerné qu'une moitié des participants au Séminaire environ. Elle ne sera pas reprise in praesentia *avec les participants composant l'autre moitié : par principe, et dans le cadre de leur formation au travail en équipe, ces derniers devront étudier le contenu du TDDM 1 à partir des notes qui suivent et avec l'aide, laissée à la convenance de chacun, de participants ayant dûment suivi cette séance.*

➔ Séance 1 : mardi 10 octobre 2006 (9 h – 10 h 30)

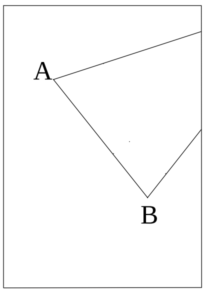
Programme de la séance. 1. Vérifier une propriété conjecturée // 2. Conjecturer une propriété, etc. // 3. Contrôler un procédé de construction donné

1. Vérifier une propriété conjecturée

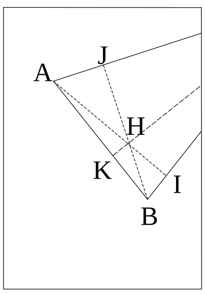
1.1. Concours des hauteurs

a) Considérons le problème suivant et la solution qui lui est conjecturalement donnée.

Sur une feuille de papier, on a voulu tracé un triangle ABC dont, en fait, le sommet C tombe hors de la feuille. Pour une raison non précisée, on souhaite tracer (la partie figurant sur la feuille de) la hauteur issue de C.



S'il était vrai que les hauteurs concourent, on pourrait, à l'aide d'une règle et d'une équerre, procéder ainsi : on marque le projeté orthogonal I de A sur (BC), le projeté orthogonal J de B sur (AC) : les droites (AI) et (BJ) se coupent en H ; il ne reste plus qu'à marquer le projeté orthogonal K de H sur (AB) pour obtenir la droite (HK) demandée.



b) La propriété utile – le concours des hauteurs d'un triangle – est-elle ***vraie*** dans l'espace sensible $\mathcal{E}$?

• Pour répondre à cette question, on envisage de concevoir et de réaliser une ***expérience graphique***, ou plutôt ***une simulation à l'ordinateur*** d'une telle expérience.

• Dans ce qui suit, on utilise le logiciel Geoplan et on appelle « expérience » ce qui est en fait une simulation de l'expérience.

c) Un premier travail à réaliser est la ***conception de l'expérience***. Plusieurs possibilités s'offrent.

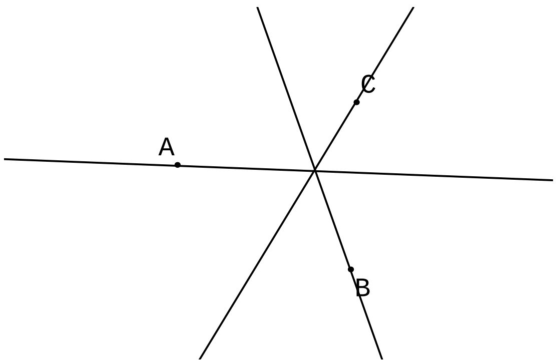
• La plus immédiate consiste à suivre l'énoncé de la propriété :

1) On crée trois points libres dans le plan, A, B et C.
2) On crée les projetés orthogonaux I, J, K de A, B, C sur (BC), (CA), (AB).
3) On crée les droites (AI), (BJ), (CK).
4) Après l'avoir mis en gras pour le saisir plus facilement, on déplace le point C dans le plan pour observer s'il y a bien concours des hauteurs.

• On peut plus simplement demander au logiciel de géométrie de tracer les perpendiculaires aux côtés du triangle issues des sommets opposés :

1) On crée trois points libres dans le plan, A, B et C.
2) On crée les droites (d_1), (d_2), (d_3) passant respectivement par A, B et C et respectivement perpendiculaires à (BC), (CA), (AB).
3) Après l'avoir mis en gras pour le saisir plus facilement, on déplace le point C dans le plan pour observer s'il y a bien concours des droites (d_1), (d_2), (d_3).

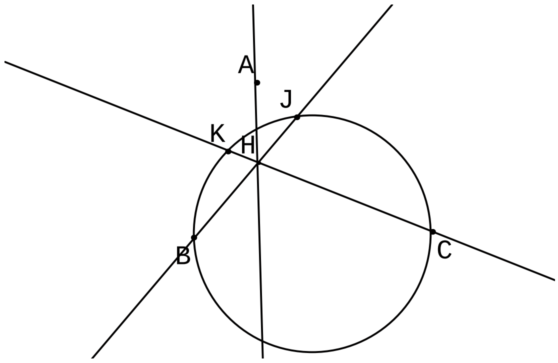
• On notera que, dans chacun des cas précédents, l'aspect visuel de la configuration dynamique créée s'éloigne de la figure « standard » d'un triangle avec ses trois hauteurs. Voici par exemple à quoi conduit le deuxième « montage » expérimental (v. TD 1 - Hauteurs 1.g2w).



• En fonction de ses connaissances géométriques, on peut envisager d'autres expériences, par exemple celle-ci (v. TD 1 - Hauteurs 2.g2w) :

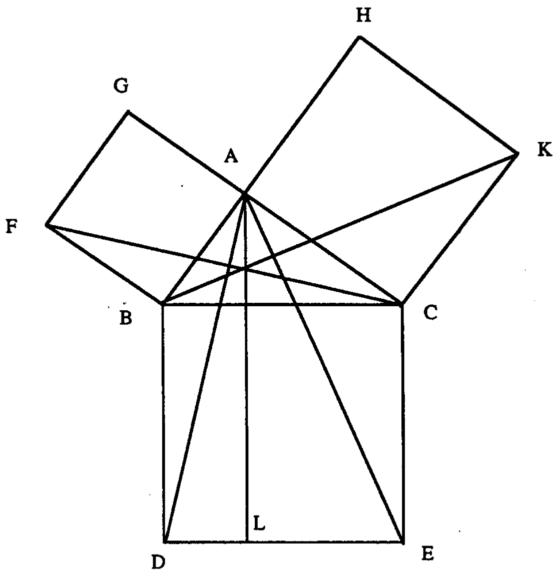
1) On crée deux points libres dans le plan, B et C.
2) On crée le cercle de diamètre [BC].
3) On crée deux points J et K libres sur le cercle.
4) On trace les droites (BJ) et (CK) et on crée leur point d'intersection H.
5) On crée le point d'intersection A de (BK) et (CJ).

6) On crée la perpendiculaire à (BC) passant par H et on vérifie si elle passe bien par H.



1.2. Une très ancienne figure

a) La figure ci-après apparaît dans les *Éléments* d'Euclide (vers 300 av. J.-C.), à l'occasion de la démonstration du théorème de Pythagore.



• La démonstration euclidienne du théorème de Pythagore, en effet, procède « par les aires ». Observons tout d'abord que les triangles ABD et LBD ont même aire, et que, de même, les triangles ACE et LCE ont même aire, en sorte que l'on a : $\mathcal{A}(ABD) + \mathcal{A}(ACE) = \mathcal{A}(LBD) + \mathcal{A}(LCE) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(BCED)$. Observons ensuite que les triangles ABD et FBC, d'une part, ACE et KCB, d'autre part, sont isométriques et ont donc même aire. On voit en outre que $\mathcal{A}(FBC) = \mathcal{A}(FBA) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(FBAG)$ et, de même, que $\mathcal{A}(KCB) = \mathcal{A}(KCA) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(KCAH)$. On a donc :

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}(BCED) = \mathcal{A}(ABD) + \mathcal{A}(ACE) = \mathcal{A}(FBC) + \mathcal{A}(KCB) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(FBAG) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(KCAH),$$

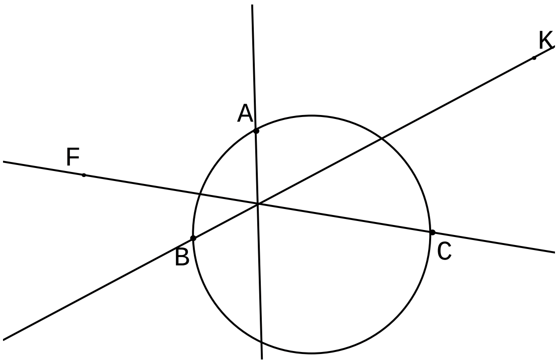
soit : $\mathcal{A}(BCED) = \mathcal{A}(FBAG) + \mathcal{A}(KCAH)$, CQFD.

b) Sur les figures apparaissant dans différentes éditions des *Éléments* comme dans des ouvrages qui reprennent la démonstration d'Euclide, il semble que les droites notées plus haut (BK), (CF) et (AL) soient ***concourantes***, propriété éventuelle qui, il est vrai, ***n'est pas*** utilisée dans la démonstration euclidienne. Cette propriété ***apparente*** serait-elle le fait d'un choix de figure particulier, qui ferait apparaître graphiquement un minuscule triangle d'intérieur vide ? Ou bien est-elle tout simplement ***vraie*** dans l'espace sensible ?

• Associés en binômes, les participants conçoivent une expérience à réaliser à l'aide du logiciel Geoplan pour soumettre à son verdict la conjecture du concours des trois droites.

• Les binômes présentent le fruit de leur travail ; certaines de ces propositions sont réalisées immédiatement afin de pouvoir conclure…

• On obtient une configuration dynamique dont un état typique est le suivant (v. TD 1 - Euclide.g2w).

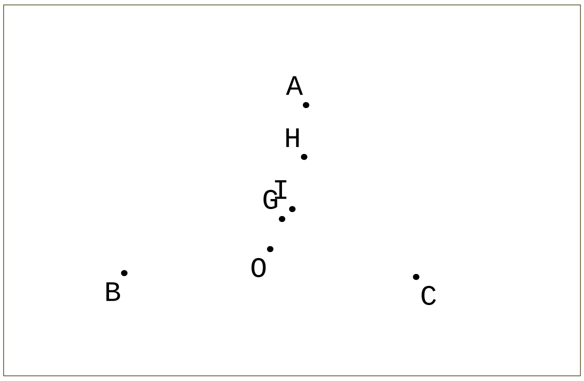


c) Comment ***déduire*** la propriété précédente dans la TGD supposée ? On trouvera dans les *Archives du Séminaire* la réponse apportée à cette question par Vecten, alors professeur au lycée de Nîmes, en 1817.

1.3. Une propriété oubliée ?

a) Parmi ce qu'on nomme traditionnellement les ***points remarquables*** d'un triangle ABC figurent d'abord

– le ***centre de gravité***, G, point d'intersection des médianes ;
– le ***centre du cercle inscrit***, I, point d'intersection des bissectrices ;
– le ***centre du cercle circonscrit***, O, point d'intersection des médiatrices ;
– l'***orthocentre***, H, point d'intersection des hauteurs.



b) On croit se rappeler – sans en être sûr – que ***trois de ces quatre points seraient alignés*** – mais on ne sait plus lesquels !

• En binômes, les participants conçoivent une expérience à réaliser à l'aide du logiciel Geoplan pour tenter de découvrir quel est le triplet de points éventuellement alignés.

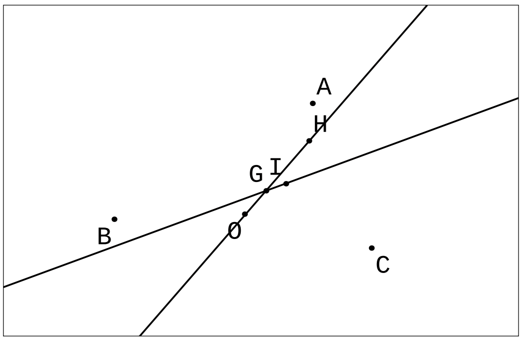
• Les binômes présentent le fruit de leur travail ; certaines de ces propositions sont réalisées immédiatement afin de conclure.

• Un certain nombre de remarques peuvent être faites en vue de concevoir le montage expérimental demandé.

➔ Des points A, B, C ayant été créés, le logiciel utilisé permet de créer directement les points G, I, O, H.

➔ Lorsqu'on veut examiner si trois points parmi quatre points donnés M, N, P, Q sont alignés, il ***suffit*** d'examiner les droites (MN) et (PQ) (à condition que les points qui les définissent soient distincts!). Les triplets possibles sont en effet (M, N, P), (M, N, Q), (M, P, Q), (N, P, Q) , or les deux premiers se trouvent sur la droite (MN), et les deux suivants sur la droite (PQ).

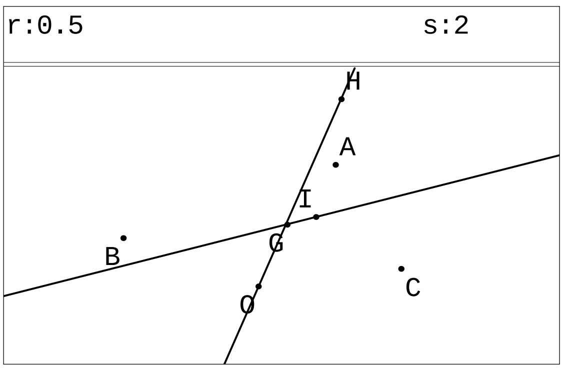
• Le montage graphique réalisé fournit par exemple une configuration dynamique dont un état typique est reproduit ci-dessous (v. TD 1 - Alignement 1.g2w).



• L'observation de la configuration dynamique créée montre que les points G, O, H sont alignés, tandis que le point I n'est pas aligné, en général, avec les trois précédents.

c) L'expérience graphique précédente montre également que le point G est situé entre O et H.

• L'observation suggère qu'il pourrait exister un rapport constant entre GO et GH. Pour s'en assurer, on peut définir x = GO, y = GH, $r = x/y$, $s = y/x$ et faire afficher r et s, comme on le voit sur la copie d'écran ci-dessous (v. TD 1 - Alignement 2.g2w).

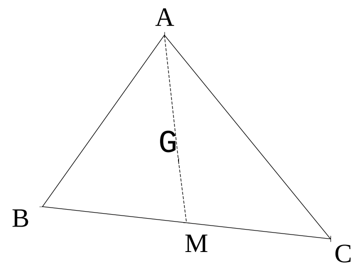


• On conclut donc que l’on a : $\models_{\mathcal{E}} \overrightarrow{GH} = -2\,\overrightarrow{GO}$.

d) Le résultat précédent attire l’attention sur l’***homothétie*** de centre G et de rapport –2.

• En binômes, et en supposant que la TGD contient la technologie de l’homothétie, les participants recherchent une ***déduction*** de la propriété d’alignement des points G, O, H, qu’ils présentent ensuite à l’examen des autres participants.

• Cette déduction prend pour point de départ la propriété suivante (supposée présente dans la TGD) : le point G est situé sur chaque médiane aux deux tiers de la longueur de la médiane en partant du sommet. Ou, en d’autres termes : l’homothétie de centre G et de rapport –2 transforme le milieu d’un côté en le sommet opposé.



• Dans l’homothétie en question, la médiatrice de [BC], par exemple, c’est-à-dire la perpendiculaire à (BC) passant par M, se transforme en une parallèle, donc perpendiculaire à (BC), passant par le transformé de M, soit A ; en d’autres termes, cette médiatrice se transforme en la hauteur issue du sommet opposé. Plus généralement, il en résulte que l’homothétie de centre G et de rapport –2 transforme le centre O du cercle circonscrit en l’orthocentre H, en sorte que l’on a bien $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$. En particulier, les points G, O et H sont alignés, CQFD.

2. Conjecturer une propriété, etc.

2.1. Une propriété oubliée, *suite*

a) On a vu que, dans un triangle ABC, les points G, O et H sont alignés mais que le point I, centre du cercle inscrit, point de concours des bissectrices, n’est pas ***en général*** aligné avec G, O et H. On se demande s’il existe des ***cas particuliers*** dans lesquels il y a cependant ***alignement des quatre points*** G, O, H et I, et quels sont ces cas.

• Il est clair que les points G, O, H, I sont alignés lorsque ABC est ***équilatéral***, puisqu’ils sont alors ***confondus***.

• L’alignement existe également lorsque ABC est ***isocèle***, puisque ces quatre points se trouvent alors sur l’axe de symétrie du triangle. Mais sont-ce là les seuls cas d’alignement ?

b) Pour répondre à la question précédente, on envisage de faire une expérience graphique simulée à l’aide de Géoplan.

• Associés en binômes, les participants conçoivent une telle expérience, avant de présenter le fruit de leur travail.

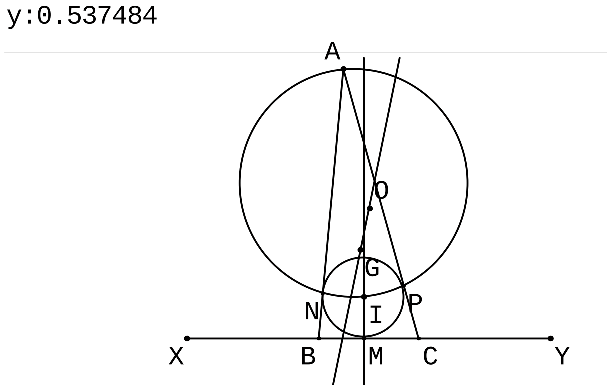
• Une idée de montage expérimental est de se donner et de garder fixes la droite *d* = (BC) et le point I, en faisant varier le point A. Pour cela,

1) On crée deux points libres dans le plan, X et Y, ainsi que la droite (XY).
2) On crée un point libre dans le plan, I, non sur (XY).
3) On crée le projeté orthogonal M de I sur (XY).
4) On crée le cercle c_1 de centre I passant par M.
5) On crée un point libre dans le plan, A, le cercle c_2 de diamètre [AI] ainsi que les points d'intersection N et P des cercles c_1 et c_2.
6) On crée les points d'intersection B et C de (XY) avec (AN) et (AP).
7) On crée les points G et O et la droite (GO).

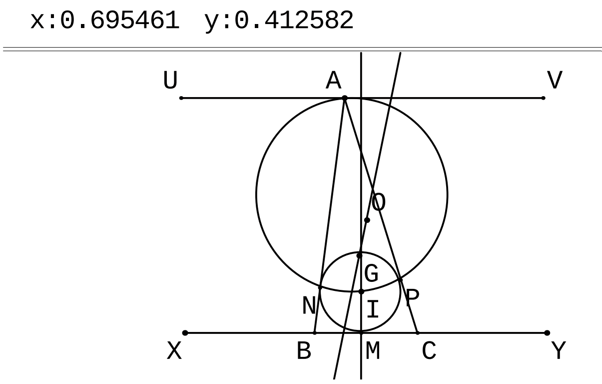
• Pour voir plus nettement le phénomène, on peut compléter le montage expérimental précédent par l'opération suivante :

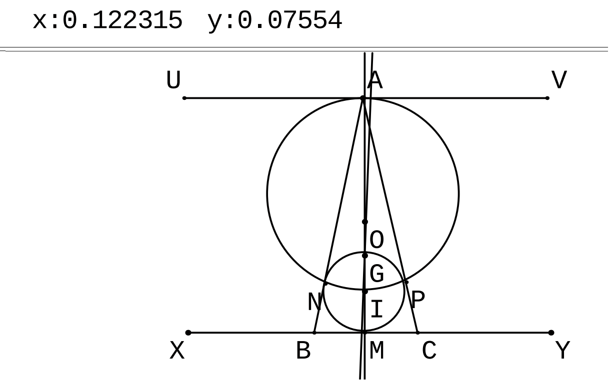
8) On crée la distance y de I à la droite (GO).

L'observation semble bien montrer que ce n'est que lorsque A est sur (IM), c'est-à-dire lorsque ABC est isocèle, que (GO) passe par I.



c) On peut exploiter davantage le logiciel : on assujettit A à être sur une droite (UV) parallèle à (XY) et on crée la distance x de A à (IM). On peut alors explorer la relation entre x et y : expérimentalement, y apparaît varier dans le même sens que x (v. TD 1 - Alignement 4.g2w).





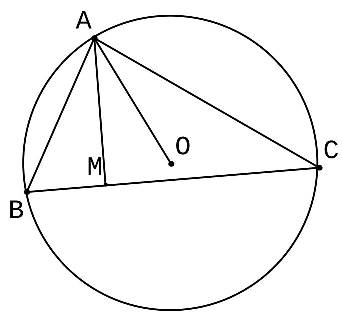
2.2. Une propriété classique revisitée

a) On part ici de la question suivante : étant donné un triangle ABC, se peut-il que ***le centre O du cercle circonscrit se trouve sur l'un des côtés*** ?

b) Cette question fait l'objet d'une exploration graphique analogue à celle réalisée pour l'alignement des points G, H, O et I ci-dessus, à l'aide d'une configuration dynamique que les participants doivent d'abord élaborer.

• On peut envisager l'expérience suivante (v. TD 1 - Centre sur côté.g2w).

1) On crée deux points libres dans le plan, O et B, ainsi que le cercle c centré en O et passant par B.
2) On crée deux points libres sur c, C et A.
3) On déplace A pour tenter de l'amener sur (BC).



• L'observation de la configuration dynamique créée suggère deux faits. Lorsque O est sur (BC), 1) O est en fait le milieu de [BC] ; et 2) l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.

• Associés en binômes, les participants s'efforcent d'établir que ces deux faits se déduisent aisément de la TGD augmentée de l'énoncé suivant :

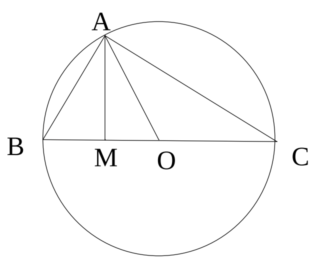
Le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont alignés.

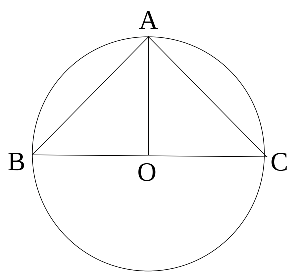
➔ Le fait que O est le milieu de [BC] se déduit en effet immédiatement du fait que le cercle c, de centre O, passe par B et C.

➔ Le fait que l'angle $\widehat{BAC}$ est droit se déduit du fait que H est sur la droite (GO), soit donc sur la médiane issue de A.

– Si, en effet, celle-ci n'est pas perpendiculaire à (BC) [v. figure ci-dessous à gauche], comme H est aussi sur la perpendiculaire à (BC) passant par A, on a H = A, si bien que (CA) = (CH) est perpendiculaire à (AB), CQFD.

– Si la médiane est perpendiculaire à (BC) [figure ci-dessous à droite], les triangles OAB et OAC sont rectangles isocèles, leurs angles à la base sont de 45º, et par suite l'angle $\widehat{BAC}$ est de 90º, CQFD.

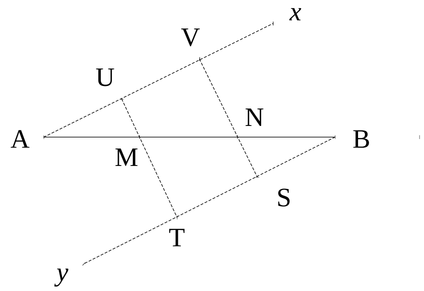




3. Contrôler un procédé de construction donné

3.1. Contrôle expérimental

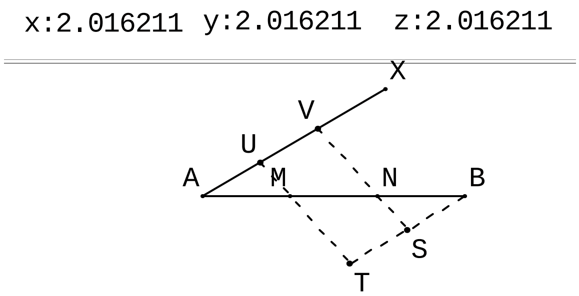
a) On suppose avoir rencontré (dans un livre, etc.) un certain ***procédé de construction*** (exacte). À titre d'exemple, considérons le procédé illustré par la figure suivante.



• Si cette technique « marchait » (si les points M et N qu'elle fournit vérifiaient effectivement AM = MN = NB), elle serait à plusieurs égards intéressante : elle ne nécessite en effet que le tracé de ***deux*** parallèles, ce qui peut être fait à l'aide d'une règle ***à deux bords parallèles*** ; elle suppose seulement, alors, le report sur chaque parallèle de $n - 1$ segments de même longueur, ce qu'on peut faire à l'aide d'une règle dont le bord porte ***deux marques***.

• Précisons en outre qu'il s'agit là, en vérité, du cas particulier (pour $n = 3$) d'une technique graphique pour découper un segment en n parties égales.

b) Notons θ l'assertion que les points M et N vérifient AM = MN = NB. Une première étape de l'étude mathématique à conduire consiste à s'assurer ***expérimentalement*** que l'on a bien : $|=_{\mathcal{E}} \theta$. (S'il n'en était pas ainsi, la technique pourrait éventuellement être « recyclée » comme procédé de construction ***approchée***.) En l'espèce, la réalisation d'une simulation de l'expérience graphique à l'aide de Geoplan ne laisse pas de doute sur la vérité de θ, comme le suggère la configuration reproduite ci-après, où x = AM, y = MN, z = NB (v. TD 1- Trisection d'un segment.g2w).



3.2. Contrôle théorique

a) La propriété de l'espace $\mathcal{E}$ appelée θ dans ce qui précède se laisse-t-elle déduire de la théorie géométrique disponible ? Cette TGD permettait-elle de « prévoir » le résultat expérimental obtenu ?

b) Les participants au Séminaire rechercheront une réponse à la question précédente, en précisant la TGD considérée.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

NB. La séance 5, initialement prévue le 3 octobre, a dû être annulée et a été reportée au 10 octobre.

➔ Séance 5 : mardi 10 octobre 2006

Programme de la séance

➔ **Matin** : 0. Questions de la semaine // 1 Observation & analyse // 2. Forum des questions

➔ **Après-midi** (explicitation) : 3. Les Archives du Séminaire // 4. Programme d'études & forum express // 5. Questionnaire d'évaluation

Matin

0. Questions de la semaine

Journée 5 (10 octobre 2006)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4e (et soutien en 5e)

Comment faire pour préparer une séance en salle d'informatique sur, par exemple, le théorème de Pythagore ?

1 Observation & analyse

1.1. Les moments de l'étude, encore

a) Étant donné une OML $O = [T_i / \tau_i / \theta / \Theta]_{i\in I}$, ou, plus exactement une OMP extraite de O, soit $O_i = [T_i / \tau_i / \theta_i / \Theta_i]$, sa mise en place dans une classe donnée passe par divers ***moments*** didactiques.

• Les trois premiers moments sont

– le moment ***de la première rencontre*** avec T_i ;
– le moment de l'***exploration*** de T_i et de ***l'émergence d'une technique*** τ_i ;
– le moment ***technologico-théorique***, de ***création du bloc*** $[\theta_i / \Theta_i]$.

Comme l'illustre l'observation d'une classe de 5e travaillant sur le thème du parallélogramme, ce sont ***ces trois moments que doit incarner l'AER proposée à la classe***.

• Le quatrième moment est celui du ***travail de l'organisation mathématique*** (et en particulier ***de la technique***) : il se vit essentiellement à travers le volet des ***exercices & problèmes***.

• Le cinquième moment est celui de l'***institutionnalisation*** : il est incarné essentiellement par la ***synthèse***.

• Le sixième moment, enfin, est le moment ***de l'évaluation***, où l'on évalue la ***maîtrise*** qu'a la classe et ses membres de l'organisation mathématique créée, mais aussi où l'on évalue ***cette organisation mathématique elle-même***.

b) La réalisation concrète des six moments n'a pas en général de structure linéaire, « à la queue le leu », et cela pour deux grandes raisons.

• Une phase de travail (en classe ou hors classe) participe en général de ***plusieurs*** moments de l'étude, même si l'un d'eux est, à chaque instant, dominant.

➔ Dans la séance observée en 5^e, l'émergence de la technique τ_δ va de pair avec la première rencontre avec le type de tâches T_δ : pour certains élèves, et donc pour la classe, cette rencontre se poursuit tout au long de la création collective τ_δ.

➔ De même, et de façon plus organique encore, l'émergence de τ_δ s'articule avec la conjecture de la propriété clé, θ_δ (« Dans un parallélogramme, chaque diagonale passe par le milieu de l'autre »), qui participe du moment technologico-théorique.

• Le travail de la classe engendre des « circuits » entre les différents moments, circuits qui empruntent en particulier les trajectoires ci-après.

➔ Le ***travail de l'OM*** conduit à retoucher celle-ci : à l'occasion de tel ***exercice*** ou, surtout, de tel ***problème***, la classe pourra être amenée à revenir sur la ***synthèse***, c'est-à-dire à vivre un nouveau moment de l'***institutionnalisation***.

➔ Il en va ainsi avec les exercices et problèmes constituant le matériau sur lequel a lieu l'***évaluation*** – qui est, rappelons-le, ***inséparablement*** évaluation de la maîtrise qu'ont (ou pas) les élèves de l'OM mise en place ***et évaluation de cette OM elle-même***. Notons d'ores et déjà que, contrairement à une habitude indurée dans les pratiques de nombre de classes, une épreuve d'évaluation (DS, DM, etc.) n'est pas « terminale » : ce qui s'y construit d'éventuellement inédit devra faire l'objet, à l'occasion de la « correction », d'une reprise du travail de ***synthèse***.

➔ Dans quelques cas, en principe rares, le constat d'une lacune ou d'une imperfection importante dans l'OM créée et institutionnalisée conduira à ***relancer une activité d'étude et de recherche***, ce qui engendrera un nouveau cycle d'étude.

1.2. En amont de l'évaluation : un exemple

a) On revient ici au contrôle réalisé dans une classe de 2de dont l'examen a été entamé lors de la séance 4. Son étude avait été motivée par des questions sur la « longueur » d'un contrôle appréciée *a priori* (c'est-à-dire avant les résultats observées à l'issue de la réalisation du contrôle). Une telle interrogation s'exprime encore dans les questions suivantes.

1. Comment évaluer au mieux la durée d'une interrogation ? (YB, MJ, 4^e, 4)

2. Pour une interrogation écrite d'une heure, comment savoir si la quantité d'exercices proposée est raisonnable ? (CS1, CR, 1^{re} STL, 4)

b) Un élément de réponse crucial a été esquissé : un même ***contenu*** peut, pour une classe donnée, appeler des durées de travail très différentes ***en fonction du travail accompli par la classe en amont du contrôle***, c'est-à-dire, en pratique, en fonction de ***l'état d'élaboration des OM*** sur la maîtrise desquelles porte le contrôle. À cet égard, et sauf exception (sur laquelle on reviendra), il convient que, pour chaque tâche dont l'accomplissement est demandé dans le contrôle,

– le ***type*** de tâches correspondant ait été bien ***identifié*** par la classe,

– une ***technique*** intelligible, fiable et efficace ait été mise en place et travaillée par la classe,

– un ***environnement technologique*** adéquat ait été ***élaboré*** et ***institutionnalisé***.

c) Le contenu des ***synthèses*** réalisées est à cet égard un élément clé pour s'assurer de la ***légitimité didactique*** d'un contrôle. (Rappelons que, en principe comme en pratique, il est important pour les apprentissages de la classe que la synthèse ait été construite ***par la classe***, sous la direction du professeur, même si ce dernier est amené par après à « lisser » les formulations produites.)

• Considérons la tâche demandée dans la première question de l'exercice 1 du contrôle : étudier le sens de variation sur l'intervalle [4 ; +∞[de la fonction définie sur ℝ par

$$f(x) = 4 - (2x - 8)^2.$$

• Cette tâche est légitimement exigible si, par exemple, on trouve dans les feuilles de synthèse un passage proche de ce qui suit – où la description de la technique inclut des éléments technologiques.

Lycée Jules Gal
$2^{de}3$ – Mathématiques

Synthèse : Variation de fonctions

(Dernière mise à jour : 28-09-06)

………………………………………………………..

***n*. Fonctions $f : x \mapsto a(bx-c)^2 + d$ ($a \neq 0$, $b > 0$)**

1) Technique. La constante d n'intervient pas dans le sens de variation de f : on peut donc l'ignorer.

• Lorsque $x \leq \frac{c}{b}$, $bx - c = b\left(x - \frac{c}{b}\right)$ est négatif et l'application $x \mapsto (bx - c)^2$ est donc décroissante ; par suite, f est décroissante si a est positif, croissante si a est négatif.

• Lorsque $x \geq \frac{c}{b}$, $bx - c = b\left(x - \frac{c}{b}\right)$ est positif et l'application $x \mapsto (bx - c)^2$ est donc croissante ; par suite, f est croissante si a est positif, décroissante si a est négatif.

2) Justification de la technique

• L'application affine $x \mapsto bx - c$ étant croissante et s'annulant en $\frac{c}{b}$, l'expression $bx - c$ est négative lorsque $x \leq \frac{c}{b}$, positive lorsque $x \geq \frac{c}{b}$.

• On sait que l'application $x \mapsto x^2$ est décroissante lorsque $x \leq 0$, croissante lorsque $x \geq 0$.

• Lorsque x croît sur $]-\infty\ ; \frac{c}{b}]$, $bx - c$ croît en étant négatif, en sorte que $(bx - c)^2$ décroît ; lorsque x croît sur $[\frac{c}{b}\ ; \infty[$, $bx - c$ croît en étant positif, en sorte que $(bx - c)^2$ croît.

• On sait que, g étant une application quelconque, si $a > 0$, g et ag varient dans le même sens ; si $a < 0$, g et ag varient dans des sens opposés.

• Par suite, si $a > 0$, l'application $x \mapsto a(bx - c)^2$ décroît sur $]-\infty\ ; \frac{c}{b}]$ et croît sur $[\frac{c}{b}\ ; \infty[$; si $a < 0$, elle croît sur $]-\infty\ ; \frac{c}{b}]$ et décroît sur $[\frac{c}{b}\ ; \infty[$.

3) Exemples

• La fonction $x \mapsto 2 + 5(x - 1)^2$ est décroissante sur $]-\infty\ ; 1]$, croissante sur $[1\ ; \infty[$.

• La fonction $x \mapsto 5(2 - 3x)^2 - 7 = 5(3x - 2)^2 - 7$ est décroissante sur $]-\infty\ ; \frac{2}{3}]$, croissante sur $[\frac{2}{3}\ ; \infty[$.

• La fonction $x \mapsto -5(4 + 2x)^2 + 12 = -5(2x - (-4))^2 + 12$ est croissante sur $]-\infty\ ; -2]$, décroissante sur $[-2\ ; \infty[$.

• …

4) Remarque

• Dans certains cas, l'expression d'une fonction du second degré peut aisément être ramenée à la forme $x \mapsto a(bx - c)^2 + d$, comme dans l'exemple suivant :

$$3(x^2 + 4x + 4) - 2 = 3(x + 2)^2 - 2.$$

• En observant que l'on a

$$3(x^2 + 4x + 4) - 2 = 3x^2 + 12x + 10$$

on voit que l'on peut déterminer les variations de la fonction $x \mapsto 3x^2 + 12x + 10$, à condition de savoir que l'on a

$$3x^2 + 12x + 10 = 3(x^2 + 4x + 4) - 2.$$

• En seconde, on ne demandera d'étudier les variations d'une fonction de la forme $x \mapsto ux^2 + vx + w$ qu'en donnant en même temps l'expression de $ux^2 + vx + w$ sous la forme $a(bx - c)^2 + d$, comme dans l'exercice suivant :

1. Vérifier l'identité suivante :

$$-12x^2 - 60x + 25 = -3(2x + 5)^2 + 100.$$

2. En déduire les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par $f(x) = -12x^2 - 60x + 25$.

c) Dans le cas de la classe de 2^de^ observée, l'échec assez large des élèves sur la tâche demandée peut être relié à un fait qui rentre subtilement dans le cadre du critère de qualité d'un contrôle que l'on vient d'expliciter.

• En effet, l'examen du contenu des séances qui ont précédé le contrôle montre que la classe a travaillé de manière assez substantielle sur la détermination du sens de variation des fonctions de la forme $x \mapsto a(bx - c)^2 + d$ ($a \neq 0$, $b > 0$), mais que le travail n'a en réalité porté ***que*** sur l'étude relative à des intervalles de la forme $]-\infty\ ; \alpha]$, où $\alpha = \frac{c}{b}$. Il semble que la ***première rencontre*** de la classe avec l'étude du sens de variation sur un intervalle de la forme $[\alpha\ ; \infty[$

se réalise ***dans le cadre du contrôle !*** Or le passage de l'un à l'autre « cas » ***ne va pas de soi*** à ce niveau.

• Voilà ce que le contrôle révèle *a posteriori*, pour l'embarras de la professeure. Celle-ci, sans en être parfaitement consciente, ou du moins en minimisant de façon abusive la difficulté opposée aux élèves, a réalisé de fait une ***rupture de contrat*** : tout en effet portait les élèves à croire qu'il leur serait demandé d'étudier une fonction de la forme considérée sur un intervalle $]-\infty\,;\alpha]$ (où $\alpha = \frac{c}{b}$) ; or ce n'est pas cela qui se produit.

• Il semble que, pour la classe observée, il ne se soit pas construit un type de tâches T « Étudier le sens de variation d'une fonction f de la forme $x \mapsto a(bx - c)^2 + d$ ($a \neq 0$, $b > 0$) sur $\mathbb{R}$ » mais seulement le type de tâches T_- « Étudier le sens de variation de… sur $]-\infty\,;\frac{c}{b}]$ » : pour la classe, étudier le sens de variation sur $[\frac{c}{b}\,;\infty[$ est un ***autre*** type de tâches, T_+, ***non rencontré avant le contrôle***. On ne peut en ce cas s'attendre qu'à de sérieux déboires.

• Peut-on ranger le choix – fatal – de la professeure dans la catégorie des gestes inappropriés qu'engendre ce qu'on a appelé, lors de la séance 4, la « panique d'avant contrôle » ? Ce n'est nullement à écarter. Mais on voit alors que, silencieusement, subrepticement, souterrainement, ce genre de panique se prépare souvent de longue main.

d) On s'arrête ici sur la question que voici.

> Les interrogations doivent-elles de préférence porter sur des exercices (ou types d'exercices) déjà faits en classe ? Peut-on intégrer des exercices où il faut une « bonne idée », sous la forme d'une question bonus par exemple ? (OL2, OS, 5^{e} & option 1re L, 4)

• Lors d'un « Forum express » dont rendent compte les notes du Séminaire 2005-2006, la question suivante avait été formulée.

> Je structure les DS de telle sorte que les applications directes permettent d'obtenir entre 10 et 12 points (en comptant les points de présentation). Je propose ensuite des exercices plus complexes (mais pas trop quand même) pour compléter la note sur 20. Cette structure est-elle convenable ou doit-on se contenter de ne faire que des exercices « basiques » ?

• On a reproduit ci-après la réponse faite à cette occasion.

> ***Réponse express****. – Pour beaucoup de classes, sans doute, la structure de DS évoquée dans la question apparaît peu opportune. Un DS est un* contrôle, *qui doit viser à contrôler la maîtrise par les élèves de ce qui a été fait par la classe, et non de ce qui n'y a pas été fait. Le fait qu'on y propose des « exercices » – c'est-à-dire des problèmes relevant de types* bien travaillés par la classe *– est essentiel ; qu'ils soient « simples » (« basiques ») ou « plus complexes » ne se décide pas au moment de concevoir le DS, mais dépend des types de tâches étudiés (même si la proportion dans le DS des uns et des autres peut en effet varier). Si tel type de tâches étudié est complexe – c'est-à-dire suppose la mise en œuvre d'une technique dont l'exécution se découpent en plusieurs étapes successives –, un spécimen de ce type pourra figurer légitimement dans un contrôle en classe, sans excès quantitatif. Mais il faut se garder autant qu'il est possible de commettre une rupture de contrat – en tant qu'*évaluateur *– en proposant un problème d'un type non étudié, ou étudié seulement de façon très partielle – ce qui reviendrait à se décharger de sa responsabilité de* formateur. *Si une telle manœuvre peut apparaître flatteuse pour l'enseignant dans la mesure où elle donne de l'enseignement prodigué une image arrangée, elle est infidèle à la réalité vécue par les élèves et peut être désastreuse pour la classe. Cela*

n'interdit pas, cependant, de proposer, dans un ensemble respectueux du travail accompli, un problème qui se situerait, non dans la ZEN (la zone d'étude normale*, celle où le travail de la classe s'est mené à bien), mais dans la ZEP (la* zone d'étude proche*), c'est-à-dire un problème dont la résolution supposerait la construction par les élèves, guidés par l'énoncé, soit en autonomie didactique* relative*, d'une technique certes inédite mais peu complexe et combinant un petit nombre d'éléments techniques eux-mêmes bien connus.*

1.3. Un « rapport de correction »

a) L'exercice 1 proposé aux élèves avait l'énoncé suivant.

Exercice 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 4 - (2x - 8)^2$.

1) Étudier le sens de variation de f sur $[4 ; +\infty[$.

2) Résoudre dans ℝ les équations et inéquations suivantes :

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = 2x - 6$

c) $f(x) \leq 8$

d) $f(x) \geq -5$

b) Les participants à la séance 4 du Séminaire ont ébauché des éléments de réponse à la question suivante :

Quelles techniques, associées à quels éléments technologiques, ont pu être mises en place dans la classe relativement aux types de tâches correspondants aux quatre tâches précédentes ?

On ébauche ci-après un ***« rapport de correction »*** relatif aux travaux recueillis.

c) Considérons d'abord la tâche consistant à résoudre l'équation $f(x) = 0$, soit l'équation

$$4 - (2x - 8)^2 = 0$$

• On s'arrête d'abord sur le ***type de tâches*** T_a dont relèverait cette tâche. Sur les 18 fiches rendues, 15 ***ne le précisent pas***. Cette omission a pu être induite par la consigne, qui n'explicitait pas une telle exigence. Deux fiches donnent cependant un libellé explicite au ***type*** de tâches mis en jeu ici. Mais elles le font d'une manière ***trop large***. La première précise ainsi ce que serait le type T_a en question :

Résoudre une équation à une inconnue.

La seconde est, elle, plus précise :

Résoudre une équation du 2nd degré.

Quant à la troisième fiche, c'est implicitement qu'elle donne une formulation du type de tâches en jeu, tout en la présentant **–** ***à tort*** **–** comme la ***technique*** à mettre en œuvre :

La technique utilisée est : « Trouver les zéros d'une fonction polynomiale à une inconnue du 2nd degré. »

Cette dernière formulation est la plus précise des trois ; mais, à l'instar des deux autres, ***elle s'éloigne de la situation réelle observée***, où il s'agit de résoudre une équation de la forme

$$a - (bx - c)^2 = 0, \text{ avec } a, b, c > 0.$$

ou même de la forme : $a^2 - (bx - c)^2 = 0$, avec $a, b, c > 0$. Or il n'est pas du tout évident que la classe de 2de observée ait vu émerger en son sein la notion d'équation ***générale*** (à une inconnue) ***du second degré*** : vraisemblablement, il n'en est rien, comme le suggère l'étude (conjecturale) de la technique τ_a – car c'est bien en étudiant τ_a, *a priori* et *a posteriori*, que l'on pourra éventuellement conclure.

• La plupart des fiches recueillies (17 sur 18) mentionne la technique consistant

– à factoriser l'expression $a - (bx - c)^2$ en la regardant comme une instance de la forme $A^2 - B^2$ et en utilisant l'identité remarquable classique $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, ce qui donne, pour le spécimen du contrôle : $4 - (2x - 8)^2 = [2 - (2x - 8)][2 + (2x - 8)] = (10 - 2x)(2x - 6)$;

– à résoudre ensuite l'équation produit obtenue en la ramenant à la disjonction de deux équations du premier degré, ce que, dans le cas proposé, on peut écrire ainsi :

> On a : $(10 - 2x)(2x - 6) = 0 \Leftrightarrow 10 - 2x = 0$ ou $2x - 6 = 0$. Il vient $10 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 5$ et $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$; d'où finalement : $S = \{ 3 ; 5 \}$.

• Aucune fiche ne mentionne la technique qui conduirait ici à écrire quelque chose comme ceci :

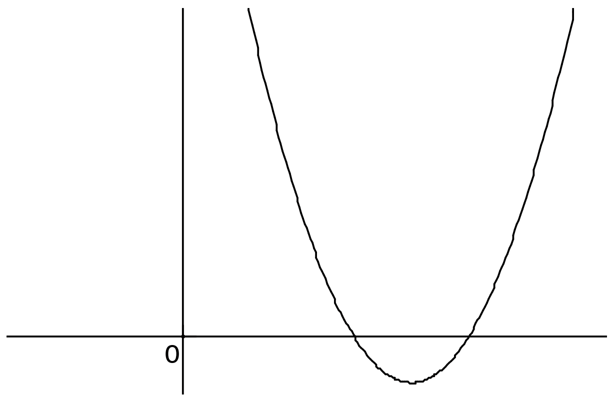
$4 - (2x - 8)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 8)^2 = 4$

$(2x - 8)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x - 8 = \pm 2$

$\Leftrightarrow 2x - 8 = 2$ ou $2x - 8 = -2$

$\Leftrightarrow \dots$

• À côté de la technique précédente, deux fiches mentionnent une technique ***graphique*** (qu'illustre la figure ci-après, où la longueur unité sur l'axe des abscisses a été choisie cinq fois supérieure à la longueur unité sur l'axe des ordonnées). Un élément du contrôle pouvait en effet faire penser que ce pourrait être là la technique attendue : le fait que l'on demande préalablement d'étudier le sens de variation de f (bien qu'on ne demande nullement d'en tracer la courbe représentative). Mais cette technique, utilisée seule, ne permet en principe qu'une résolution ***approchée***, et non une résolution ***exacte***.



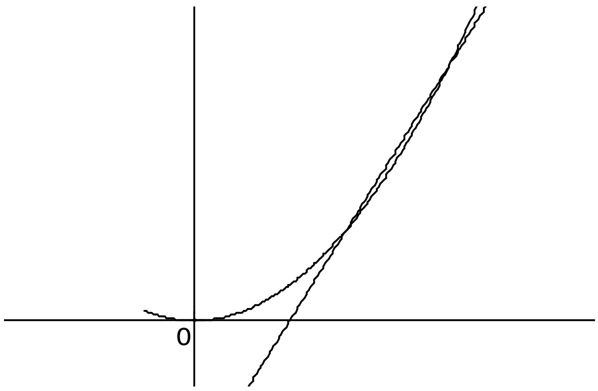
• Notons qu'une troisième fiche mentionne la technique graphique comme moyen de ***conjecturer*** les solutions de l'équation à résoudre ***avant*** de passer à la technique par factorisation : la technique graphique joue en ce cas un rôle ***d'anticipation et de contrôle***.

• Deux fiches ne mentionnent ***que*** la technique graphique, l'une d'elles précisant en outre explicitement qu'il s'agit d'opérer « en utilisant la calculatrice ».

• Aucune fiche ne mentionne une variante de la technique graphique autrefois classique, qui utilisait une représentation graphique « standard » de la ***seule*** fonction $x \mapsto x^2$ (d'où le fait qu'il s'agisse d'une fonction « de référence »). Pour cela, cette technique suppose que l'on « toilette » l'équation donnée avant de passer à l'étude graphique classique. Dans l'exemple proposé, ce toilettage aurait par exemple l'allure suivante :

$$\begin{aligned} 4 - (2x - 8)^2 = 0 \quad & \Leftrightarrow (2x - 8)^2 - 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow 4x^2 - 32x + 64 = 4 \\ & \Leftrightarrow 4x^2 = 32x - 60 \\ & \Leftrightarrow x^2 = 8x - 15 \end{aligned}$$

On trace alors la droite d'équation $y = 8x - 15$ et on « lit » l'abscisse de ses points d'intersection avec la parabole d'équation $y = x^2$. On notera toutefois que, dans le cas proposé à la classe, la mise en œuvre de cette technique ne va pas de soi, comme l'illustre la figure suivante (qui utilise le même repère que la figure précédente).



• Dans les travaux recueillis, la ***technologie*** de la technique notée τ_a ci-dessus fait l'objet de conjectures « raisonnables », les deux ingrédients ***spécifiques*** principaux signalés étant les suivants :

θ_{a1}. Quels que soient les nombres A et B, on a : $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

θ_{a2}. Si les nombres A et B vérifient l'égalité $A \times B = 0$, alors soit $A = 0$, soit $B = 0$.

Bien entendu, il convient de mentionner en outre la technologie de la résolution des équations ***du premier degré***, ce que font (quoique de façon inégalement explicite) 5 des 18 fiches examinées.

d) La seconde équation que le contrôle demande aux élèves de résoudre s'écrit $f(x) = 2x - 6$, soit donc $4 - (2x - 8)^2 = 2x - 6$. Seules 5 fiches examinent, si peu que ce soit, cette tâche.

• Arrêtons-nous d'abord sur la question du ***type de tâches***. Lorsque, de façon explicite ou implicite, on regarde les équations (voire les équations et les inéquations) proposées comme ***« du second degré »***, on tend à envisager une technique qui vaudrait pour l'ensemble des équations (et/ou des inéquations) à résoudre. Ainsi en va-t-il pour une fiche qui n'envisage ***que*** la technique graphique – ce qui, on l'a dit, est une conjecture didactique fort peu vraisemblable ici –, dans laquelle on lit ceci :

Technique mise en œuvre

<u>Résolution graphique</u>

∗ Représentation de la fonction

∗ Représentation des 4 droites

∗ Observation des résultats attendus.

• Deux autres fiches évoquent explicitement l'idée de ***factoriser*** l'expression obtenue après développement éventuel de l'expression « brute » donnée, cette factorisation étant, précise l'une de ces fiches, « à mettre en évidence, à rechercher ». Cette technique pourrait *grosso modo* conduire en l'espèce à ceci :

$$4 - (2x - 8)^2 = 2x - 6 \Leftrightarrow (2x - 8)^2 - 4 + 2x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 34x + 54 = 0$$
$$\Leftrightarrow \dots$$

Arrivés là, cependant, les élèves ne disposent pas de la technique « canonique » (usant du discriminant) pour avancer : la voie semble donc bouchée ! Souscrivant implicitement à la problématique technique évoquée ici, l'auteur (anonyme) d'une fiche note en conséquence :

b) Nécessité d'utiliser Δ qui n'est pas au programme de 2^{de}.

S'il en était ainsi, le problème proposé ne pourrait pas être résolu par ces élèves – ce qui paraît bien peu vraisemblable (sauf erreur de la professeure).

• Une fiche note sobrement ceci :

b) $f(x) = 2x - 6$
$(10 - 2x)(2x - 6) = 2x - 6$
Même résolution.

Telle est sans doute le « tronçon terminal » de la voie que les élèves sont supposés suivre. Mais comment passer de l'équation de départ, soit $4 - (2x - 8)^2 = 2x - 6$, à l'équation « décisive » $(10 - 2x)(2x - 6) = 2x - 6$?

(À suivre)

2. Forum des questions

2.1. Préparer un contrôle avec la classe

a) Lors de la séance 4, la question des « interrogations surprises » avait été évoquée de façon impromptue. Cette évocation s'était référée à la question suivante.

> Si je veux faire un petit contrôle surprise de vingt minutes, vaut-il mieux le faire en début ou en fin de séance ? (SM1, MJ, 4e, 3)

b) Les notes du Séminaire 2001-2002 abordent ce sujet : on examine donc le passage correspondant, reproduit ci-après.

> **Interrogations surprises ?**
>
> Doit-on faire des interrogations « surprises » pour s'assurer que les élèves travaillent régulièrement ? Avec quelle fréquence ? (4e, 1, 2001-2002)
>
> **Matériaux pour une réponse**
>
> 1. Le recours à l'interrogation surprise ne peut qu'être déconseillé au double plan ***éthique*** et ***didactique***. Au point de vue ***éthique***, une telle pratique est en effet une forme, sans doute traditionnelle, mais réelle de « tyrannie » : comme tous les actes « sensibles » de la vie de la classe, les épreuves de contrôle doivent au contraire être programmées, annoncées, préparées – en classe et/ou hors classe –, quelle

qu’en soit la durée et la forme. Du point de vue ***didactique***, la pulsation imposée par les épreuves de contrôle doit ***favoriser l’étude***, et donc ***en respecter les rythmes propres*** : nul n’est tenu d’être « toujours prêt » à fournir une prestation qui suppose en général un minimum de préparation, et la chose n’en est que plus vraie lorsque cette prestation est demandée dans une situation « critique », où l’absence de préparation va de pair avec un surcroît de tension.

2. Pour compléter les notations précédentes, on se réfèrera aux indications suivantes, proposées récemment par l’Inspection générale de mathématiques :

Il convient de faire se côtoyer deux types d’épreuves écrites d’évaluation :

– les interrogations écrites courtes (10 à 20 min) dont le but est de vérifier qu’une notion, une méthode ou une démonstration est correctement assimilée. On peut en prévoir une par chapitre du cours (soit une par quinzaine en moyenne) ;

– les devoirs de contrôle (de 30 min en 6^{e} à 3 ou 4 h en terminale) sont peu fréquents (2 à 3 par trimestre) et doivent rester de difficulté et de longueur raisonnables. Ils ne doivent en aucun cas déborder du programme de la classe, ni faire appel à des notions ou des méthodes qui n’y sont pas étudiées.

Au collège, en particulier, on pourra parler plus précisément de ***micro-épreuve*** pour désigner une « interrogation écrite courte » de 10 minutes, de ***mini-épreuve*** pour un « interrogation écrite courte » de 20 à 30 minutes, enfin d’***épreuve***, tout court, lorsque la durée est supérieure à la demi-heure. Il est alors possible et judicieux, pour scander et impulser adéquatement l’effort didactique de la classe, de prévoir dans l’emploi du temps ***hebdomadaire*** un créneau fixe (par exemple le jeudi de 10 h 50 à 11 h 10) pour ce qui serait alternativement une micro-épreuve et une mini-épreuve, la micro-épreuve n’étant d’ailleurs pas nécessairement notée, mais permettant et une évaluation de la part du professeur et une ***auto-évaluation*** de la part de l’élève, afin que la classe arrive bien préparée au point de rendez-vous constituée par la mini-épreuve – sans oublier bien sûr les (macro-)épreuves.

c) On reviendra sur le problème ***éthique*** – l’exigence de non-tyrannie –, dont la mention, dans le passage précédent, peut surprendre. Notons que les éléments rapportés ici éclairent aussi la question suivante :

Combien de temps est-il raisonnable de laisser entre la fin d’un chapitre et un contrôle dont une partie porte sur ce chapitre ? (TB, CR, 4^{e}, 4)

• S’agissant d’un contrôle « long » (« macro-épreuve »), l’intervalle de temps doit permettre notamment…

– … d’annoncer ce contrôle ***et son programme***, qui fera l’objet d’un examen approprié avec la classe ;

– … de mettre en place un ***point de rendez-vous***, en classe, autour de la ***préparation hors classe du contrôle*** (celle-ci étant individuelle ou en équipe, à l’initiative des élèves).

• Le scénario précédent peut être rendu plus « incitatif » – en réalisant le ***point de rendez-vous*** sous la forme d’un ***micro-contrôle*** de 10 minutes et de sa ***« correction »*** : cette dernière, qui aura lieu alors lors de la séance suivant celle de la passation du micro-contrôle, permettra d’apporter des précisions sur le programme du contrôle encore venir. (On peut imaginer par exemple qu’un micro-contrôle préliminaire qui aurait comporté un spécimen du type de tâches T_+ aurait pu changer substantiellement les choses dans la classe de 2de observée.)

2.2. Cahier de textes – encore

a) La question suivante a été formulée lors de la dernière séance du Séminaire.

Dans mon lycée, il existe des responsables de cahier de textes. Peut-on envisager de demander à ces élèves de rédiger un récapitulatif des séances de la semaine qui pourrait figurer dans le cahier de textes et être discuté en classe ? (ML, MJ, 2^{de}, 4)

b) On peut confier chaque semaine à un binôme d'élèves de préparer le travail de tenue hebdomadaire du cahier de textes de classe préconisé lors de la séance 4, leur proposition de rédaction étant présentée, débattue, corrigée, augmentée par la classe sous la direction du professeur. (Bien entendu, c'est ce dernier qui validera en fin de compte les indications rédigées dans le cahier de textes de la classe.)

• L'important est que la charge de préparer le travail de la classe ne repose pas indéfiniment sur les mêmes élèves.

• Il est possible aussi que, à l'instar des autres travaux hors classe demandés aux élèves, ce travail de préparation soit demandé à ***l'ensemble*** des élèves, ceux-ci travaillant seuls ou, de préférence, en binômes.

2.3. Un problème de déduction

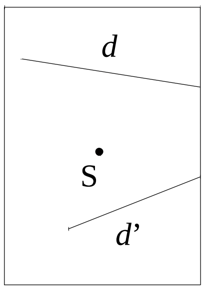
a) Les participants au Séminaire étaient invités à se pencher sur la question suivante.

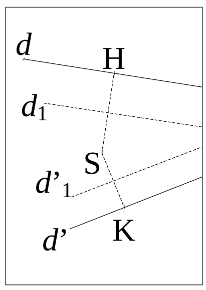
Quelle est précisément la technologie sur laquelle « s'appuie » la technique qui permet de déterminer la droite passant par S et P (P : intersection de deux droites ne se trouvant pas sur la feuille…) ? (JB, CR, 2^{de}, 3)

Les points S et P sont ceux qui apparaissent dans le passage suivant des notes du Séminaire 2005-2006, cité lors de la séance 2 du Séminaire, à propos de la question des contenus des synthèses à conduire.

Supposons ainsi que l'on ait étudié le type de problèmes suivant :

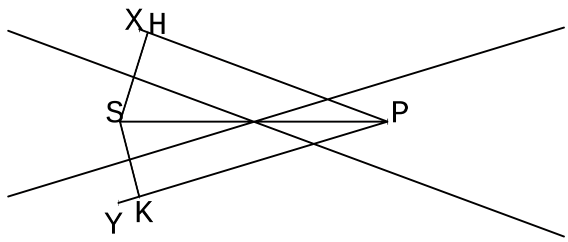
Un point P extérieur à la feuille sur laquelle on travaille est défini comme l'intersection de deux droites *d* et *d*'. Comment déterminer la droite passant par S et P ? (Voir la figure ci-dessous à gauche.)





Si la technique mise en place est celle illustrée par la figure ci-dessus à droite (H et K étant les projetés orthogonaux de S sur *d* et *d*' respectivement, on trace les médiatrices de [SH] et [SK], qui se coupent en P_1 : on a (SP) = (SP_1) ; si P_1 est extérieur à la feuille, on recommence), c'est cette technique qu'il conviendra de faire figurer dans la synthèse, suivie, bien entendu, de sa technologie – qu'on abandonne, en l'espèce, à la sagacité des participants au Séminaire.

b) Avant toute chose, on peut s'assurer que la propriété annoncée est vraie en simulant la configuration indiquée à l'aide d'un logiciel de géométrie (v. Droites qui se coupent.g2w).



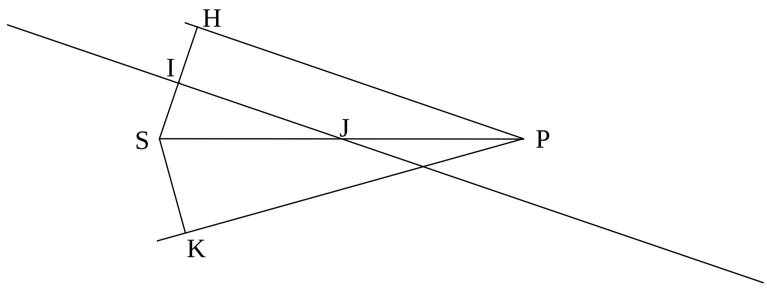
c) Cette question est l'occasion de réfléchir sur la notion de ***puissance*** d'une technologie.

• Si l'on dispose de la technologie de l'homothétie, il est clair que l'opération indiquée revient à faire subir à la configuration initiale une homothétie de centre S et de rapport $\frac{1}{2}$: la droite (SP) est transformée en elle-même, de sorte que P_1 est sur la droite (SP). Etc.

• Si l'on ne dispose que de la TG disponible en fin de 4^e^, par exemple, il faudra davantage de travail pour établir déductivement la propriété annoncée.

➔ En appliquant le deuxième théorème des milieux (« Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, elle coupe le troisième en son milieu ») à la figure ci-après, on voit que la médiatrice de [SH] coupe [SP] en son milieu J.

➔ En répétant ce raisonnement pour le triangle SKP, on conclut que la médiatrice de [SK] passe également par J. Il en découle que les médiatrices *d* et *d*' se coupent sur (SP), CQFD.



Après-midi

Séance d'explicitation

3. Les Archives du Séminaire

3.1. Le dispositif : rappel

a) La rubrique ***Les Archives du Séminaire*** a pour objet la recherche et la présentation d'éléments de réponse $R^{\lozenge}$ à certaines questions Q dans les archives des séminaires des années 2000-2001 à 2005-2006.

b) On en rappelle ci-après le mode de fonctionnement tel qu'il est décrit dans le document intitulé ***Formation et validation des PCL2 de mathématiques***.

– Une question choisie par le responsable du Séminaire après consultation des tuteurs est communiquée à un trinôme, qui procède à une recherche dans les ***Archives du Séminaire*** afin de dégager les éléments de réponse que ces archives recèlent.

– Le trinôme désigné prépare, ***pour la séance d'explicitation suivante***, une présentation orale, d'une durée de ***10 minutes environ***, en s'en tenant strictement aux éléments de réponses $R^\lozenge$ qu'il aura extraits des ***Archives du Séminaire***.

– Chaque présentation fait l'objet d'un débat n'excédant pas 10 minutes et peut en outre appeler, de la part des formateurs, des commentaires, correctifs et additifs, immédiatement ou dans les semaines qui suivent.

– Chaque trinôme fournit au responsable du Séminaire, dans un délai de quinze jours, une version écrite de ***trois pages maximum*** de sa présentation orale. Augmenté le cas échéant de commentaires des formateurs, ce texte est mis en ligne, à la disposition de l'ensemble des participants. Il sera par ailleurs pris en considération par le jury d'évaluation des enseignements, en fin d'année.

3.2. Comptes rendus de recherches

a) Une première recherche dans les *Archives*, confiée au trinôme formé d'*AC*, *JS* et *MBP*, apporte une réponse à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant au dispositif de ***l'enseignement modulaire*** en classe de Seconde ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforce de présenter (en les résumant adéquatement) les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Pendant les modules/TD ou au cours d'exercices posés en classe, faut-il ménager de « longs » temps de réflexion individuelle, ou vaut-il mieux interroger un élève au tableau et l'aider en faisant participer les autres ? (ALP, CR, 2^{de}, 1)

2. Que doit-on faire en modules ? Des exercices ? Utiliser la calculatrice, l'ordinateur ? (CS2, OS, 2^{de}, 1)

• L'échange qui suit prend en compte notamment les questions suivantes.

3. J'ai une classe de 2^{de}. Qu'est-on censé faire en heure de module ? (VAC, MJ, 2^{de}, 2)

4. En 2^{de}, quel type d'« activité » mathématique peut-on faire pendant l'heure de module ? Manipulation de la calculatrice (ses limites…) et méthodes (par exemple « Comment démontrer que… ») peuvent-elles ou doivent-elles entrer dans l'heure de module ? Peut-on faire de la géométrie en module pendant que le chapitre traité en classe entière entre dans la partie « Calcul et fonctions » ou inversement ? (AMJ, CR, 2^{de}, 2)

5. Que faire pendant les modules ? Exercices d'entraînement sur le cours, un thème particulier ?… (ALP, CR, 2^{de}, 2)

6. Étant donné l'horaire de la classe de 2^{de} (3 heures en classe entière, 1 h en module), il m'est apparu difficile du point de vue organisationnel de mener deux chapitres de front, d'autant plus que l'emploi du temps de la classe est le suivant : 1 h en classe entière le lundi, 1^{er} groupe de module le lundi, 2 h en classe entière le jeudi, 2^{e} groupe de module le vendredi. J'ai pris le parti d'alterner les domaines pendant les heures en classe entière. Je pensais donc, pour faire deux domaines différents en même temps, 1) utiliser les heures de module pour, par exemple, faire des choses plus « méthodiques » et qui me demandent d'être plus attentive à chaque élève (en géométrie par exemple, sur les configurations du plan), 2) mettre à profit les DM. Est-ce une bonne option ou pas ? Quelles autres pourraient être exploitées ? (AMJ, CR, 2^{de}, 3)

7. J'ai une heure de cours entre deux heures de module. Dois-je, du coup, consacrer les heures de module à des activités ou des exercices pour ne pas qu'il y ait de décalage durant l'heure de cours en classe entière ? (BR, MJ, 2^{de}, 3)

8. Compte tenu du grand nombre d'élèves dans ma classe, ne vaut-il pas mieux privilégier les AER en module ? Ou au contraire est-il nécessaire de les faire travailler en classe entière ? (BR, MJ, 2^{de}, 4)

• Une question soulevée à propos de l'adjectif « mathématico-didactique » (qui signifie « relatif à l'étude d'une question de mathématiques »), conduit à préciser la différence entre didactique et mathématique dans l'emploi qui est fait de ces mots dans le Séminaire.

➔ Soit une tâche mathématique t à effectuer ; si la personne x censée l'accomplir dispose d'une praxéologie mathématique relative au type de tâches T dont relève t (c'est-à-dire si elle maîtrise une praxéologie de la forme $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$), alors x se contentera d'accomplir la tâche t, sans procéder à aucune étude – sans donc qu'il y ait là « du didactique ». Si, en revanche, cette tâche t est ***problématique*** pour la personne x, cette dernière devra, d'une manière ou d'une autre, se livrer à une certaine étude – une étude de T abordée à travers t. Si cette étude parvient jusqu'à son terme, x disposera finalement d'une praxéologie $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$ qu'elle aura créée, ou, plus souvent, empruntée et transposée pour l'adapter à ses besoins propres. Dans ce dernier cas, elle se sera livrée, si peu que ce soit, à une activité didactique et, en l'espèce, puisqu'il s'agit d'une tâche t de nature mathématique, à une activité « mathématico-didactique ». Supposons que x soit un professeur de mathématiques ; si la tâche t consiste à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - 5X - 5 = 0$, x agira de façon « routinière », en mettant en jeu une praxéologie mathématique « bien connue » de lui : établissant que l'on a les égalités $X^2 - 5X - 5 = \left(X - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 5 = \left(X - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}$,il en tirera les solutions cherchées, à savoir $\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3\sqrt{5}}{2}$. Mais si la tâche consiste à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^3 - 5X - 2 = 0$, on peut penser que x ne disposera pas d'une praxéologie « toute faite », opérationnelle, et qu'il devra en conséquence ***étudier la question*** ou, plus exactement, en faire l'objet d'une activité « d'étude et de recherche ».

➔ L'étude d'une question mathématique appelle des gestes (mathématico-)***didactiques*** qui permettront d'élaborer une technique (mathématique), de préciser une technologie (mathématique), etc., gestes dont, souvent, aucune trace n'apparaîtra dans les entités mathématiques ainsi construites. C'est ainsi que si, au cours de l'étude d'une configuration géométrique, je crois pouvoir penser que deux droites sont parallèles, ou que deux segments se coupent en leur milieu, je peux décider, avant même de me lancer dans la recherche d'une « démonstration » de ces conjectures par déduction au sein d'une certaine TGD, de m'assurer par une simulation sur ordinateur que les choses se passent bien comme je le crois – qu'il est bien ***vrai*** que les deux droites sont parallèles ou que les deux segments se coupent en leur milieu. Cela étant fait, la déduction de ces faits spatiaux à laquelle je parviendrai éventuellement ensuite ne gardera plus la trace du fait qu'à un certain moment j'ai accompli ce geste didactique consistant à ***vérifier*** par une expérience simulée les propriétés établies ensuite déductivement. On notera ici que la culture didactico-mathématique des élèves, c'est-à-dire leur capacité d'autonomie (mathématico-)didactique, est souvent faiblement développée par l'enseignement qu'ils reçoivent, ce qui est évidemment contraire à une éducation mathématique bien pensée.

➔ À propos des fonctions didactiques des modules, plus précisément, un point est signalé dans les notes du Séminaire 2004-2005, où on peut lire page 209 ce commentaire de la note de service du 25 mai 1992 parue au *BOEN* n° 23 du 4 juin 1992 qui définissait les « enseignements modulaires » :

> Entre les mains du professeur, l'enseignement modulaire est « un moyen d'observation des élèves et de dialogue avec eux qui facilite les choix pédagogiques pour l'ensemble de leur enseignement », ce qui suppose la mobilisation de « diverses modalités d'évaluation » permettant tant de « repérer les besoins » que de « reconnaître les conditions de réussite d'une activité ».

On soulignera donc le temps d'enseignement modulaire permet au professeur de parfaire sa connaissance des élèves en vue d'aboutir aux décisions les plus appropriées possibles.

• Parmi les questions reproduites plus haut, les questions 6 et 7 abordent une « difficulté » qui n'en est pas véritablement une. Il suffit en effet, pour chacun des deux groupes de module créés, de donner à la séance de module correspondante la fonction de moduler le travail accompli depuis la séance de module précédente. Les deux séances de module de la semaine ne portent donc pas sur la même période écoulée.

b) La deuxième recherche dans les *Archives*, confiée au trinôme formé de *ML*, *BR* et *WT*, a trait à la question suivante :

> Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant au dispositif de ***l'aide individualisée*** (AI) en classe de Seconde ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforce de présenter (en les résumant adéquatement) les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

> 1. Pour constituer le groupe d'AI en 2^{de}, faut-il faire une mini-épreuve le premier jour et se baser dessus ou prendre la classe entière pour la première fois ? (BR, MJ, 2^{de}, 0)
>
> 2. Comment choisir les élèves qui participeront à l'AI ? (AG, CR, 2^{de}, 1)
>
> 3. Pour l'AI en 2^{de}, faut-il « sélectionner » les élèves sur la base du volontariat ou de l'obligation ? (ML, MJ, 2^{de}, 1)
>
> 4. En début de 2^{de}, ne connaissant pas le niveau des élèves, comment organiser les premières séances d'AI ? (MG2, OS, 2^{de}, 1)

• L'échange qui suit prend en compte notamment les questions suivantes.

> 5. Comment prépare-t-on une heure d'AI ? (MB, CR, 2^{de}, 2)
>
> 6. Pour l'AI, vaut-il mieux fonctionner sur la base du volontariat avec des élèves motivés ou cibler une lacune dans un groupe d'élèves et travailler sur celle-ci, quitte à convoquer des élèves pas très motivés ? (BR, MJ, 2^{de}, 2)
>
> 7. Est-ce que je peux dès à présent constituer des groupes d'AI ? (PV, MJ, 2^{de}, 2)

• Une question est posée sur la signification d'une préconisation officielle aux termes de laquelle le temps d'AI ne doit pas être situé dans l'emploi du temps d'une manière qui pourrait « stigmatiser » ce dispositif didactique. Le passage suivant de la note de service n° 99-094 du 18 juin 1999 parue dans le *BOEN* n° 25 du 24 juin 1999 répond, semble-t-il, à l'interrogation soulevée :

Le chef d'établissement veille dans la confection des emplois du temps à placer les heures d'aide individualisée à des moments de la journée pédagogiquement pertinents et qui ne pénalisent pas les élèves ; ainsi, les heures d'aide individualisée ne doivent pas avoir lieu, dans la mesure du possible, en début ou en fin de journée ou le samedi matin ; en outre, il est préférable qu'elles ne soient pas placées les jours où l'élève a plusieurs heures de cours dans les disciplines qui correspondent à l'aide pour éviter un effet de saturation. Bien entendu, elles ne sont pas situées sur des plages horaires prévues pour d'autres activités obligatoires comme la participation à certains enseignements optionnels.

• À cette occasion, un autre point est souligné : contrairement à ce que font certains professeurs, il n'est nullement question de n'appeler en AI que des élèves qui seraient volontaires pour y venir. La désignation des élèves est de la responsabilité du professeur, qui doit communiquer sa décision aux élèves concernés en la leur commentant de façon appropriée – notamment lorsque l'élève se montre réticent à bénéficier de ce dispositif de formation. La « négociation » qui peut quelquefois être de mise ne saurait exonérer le professeur de sa responsabilité, qu'il ne peut, en cela comme en d'autres domaines, déléguer à l'élève. Agir autrement conduirait à renoncer à faire bénéficier de l'AI des élèves qui en ont visiblement le plus grand besoin, tout en y admettant parfois des élèves inquiets qui y recherchent davantage une réassurance qu'une aide véritable. On se gardera tout particulièrement de la tentation, parfois compréhensible, de renoncer à utiliser ce moyen de formation auprès de certains des élèves pourtant les plus scolairement démunis.

• Aux indications précédentes s'ajoute une remarque quant à l'importance de ne pas prolonger outre mesure le séjour d'un élève dans le dispositif d'AI, en accord avec l'idée que le but de l'AI est de ré-immerger à terme l'élève dans les structures didactiques communes (classe entière et modules, en l'espèce). En même temps, il faut travailler à faire entrer dans la culture des élèves – et dans celle des professeurs – l'idée que chacun de nous a, de temps à autre, tout à gagner à s'imposer (ou à se voir imposer) de participer ***à nouveau*** à telle activité de formation (de formation continue pour un professeur, par exemple), de soins (retourner chez son dentiste…), de loisir (sportif ou studieux), etc.

c) Confiée au trinôme formé de *MB*, *AMJ* et *SR*, la troisième recherche dans les *Archives* avait trait à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant aux ***outils logiques*** du travail mathématique, au collège et en classe de Seconde ?

• Ce compte rendu s'efforce de présenter des éléments de réponse à la question ci-après.

Le chapitre « Configurations du plan » au programme de 2de peut-il être l'occasion de marquer une différence entre collège et lycée en matière de raisonnements et de démonstrations (que l'on veut plus « élaborés » au lycée) ? Cela peut-il être l'occasion de faire de la logique ? (AC, OS, 2de, 0)

• L'échange qui suit prend en compte notamment les questions suivantes.

2. Comment introduire le raisonnement par équivalence en 2de ? (PP, MJ, 2de, 3)

3. Doit-on « cantonner » la rédaction *si… alors* à une propriété ou peut-on aussi l'utiliser pour une définition ? (SM2, MJ, 4^{e}, 4)

• Une remarque est faite à propos du raisonnement par analyse et synthèse, qui est aujourd'hui quelque peu perdu de vue. Un exemple est donné : soit à résoudre l'équation

$\ln(x^2 + 1) = \ln(3 - x)$. L'***analyse*** consiste à identifier les valeurs de x qui pourraient convenir, et cela par une suite d'implications : ***si*** $\ln(x^2 + 1) = \ln(3 - x)$, ***alors*** $x^2 + 1 = 3 - x$, et donc… $x = 1$ ou $x = -2$. La ***synthèse*** conduit alors à examiner si ces valeurs « candidates » conviennent : pour $x = 1$, l'égalité de départ est bien satisfaite, et 1 est donc solution de l'équation proposée ; pour $x = -2$, il en va de même, et l'ensemble des solutions est ainsi $S = \{ -2 ; 1 \}$.

• Un point de difficulté est soulevé à propos de l'indication suivante donné par le document d'accompagnement du programme de 2^de^ reproduit ci-après.

> À l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique formelle de ceux de la logique du langage courant, et, par exemple, à dissocier implication mathématique et causalité.

➔ Le « langage courant » a une sémantique qui s'éloigne fréquemment des langages spécialisés des sciences. Ainsi en va-t-il, par exemple, s'agissant des mathématiques, de l'usage des mots « rectangle » et « carré » : dans le langage courant un rectangle n'est pas un carré, alors que, en mathématiques, un carré est un cas particulier de rectangle.

➔ En matière de relations « logiques », la sémantique du langage ordinaire charrie une atmosphère ***causale*** étrangère à la logique mathématique. La logique ordinaire, notamment, est « temporalisée » : de même que la cause est pensée comme venant ***avant*** l'effet, les formes langagières exprimant le motif, la raison de quelque fait sont formées comme des ***métaphores temporelles*** où s'inscrit l'idée de ***consécution temporelle***. Dans l'expression *Si… alors*, en particulier, le *si* vient d'un mot latin qui signifiait « toutes les fois que », ce qui situe déjà la relation dans le temps (une fois, une autre fois, etc.). Mais c'est surtout l'adverbe *alors* (« à lors », à l'heure) qui témoigne de cette sémantique temporelle omniprésente, forme affaiblie d'une sémantique causale elle-même ubiquitaire : *lors* (qui donne *lors que*, devenu ensuite *lorsque*) est issu du latin tardif *illa hora*, « à cette heure ». L'énoncé *Si p alors q* signifie ainsi, dans le langage ordinaire, « chaque fois que *p* se produit, à l'heure [c'est-à-dire à une certaine heure] *q* se produit ». La chose est plus claire encore sans doute pour les élèves catalans d'aujourd'hui, puisque, en catalan, *Si… alors* se dit *Si… alashores*, « si… aux [à les] heures ». On pensera aussi, bien sûr, à l'italien *allora* (*se p allora q*), etc.

➔ Dans la langue mathématique, en revanche, les formes langagières exprimant des relations logiques sont supposées être dépourvues de toute « coloration » causale et en particulier être étrangères à toute temporalité : la logique formelle se situe hors du temps, elle ignore le temps. Il est illusoire de prétendre aider les élèves à passer d'un univers temporalisé à un univers détemporalisé (et « décausalisé ») en leur ***interdisant*** certaines manières de dire, et en particulier en leur interdisant d'user de la conjonction de coordination *car*, attitude qui conduit à tort à rejeter des formulations telle « le triangle ABC est rectangle en A ***car*** on a $BC^2 = BA^2 + AC^2$ », même si, étant donné la relative opacité de *car* (du latin *quare*, « par quelle [*qua*] chose [*res*] »), on peut lui préférer « le triangle ABC est rectangle en A ***puisque*** $BC^2 = BA^2 + AC^2$ », revenant ainsi à une métaphore temporelle classique (« ***puis*** que »), qu'il s'agira de « dévitaliser » dans l'usage mathématique. À titre de contre-exemple à la prohibition de certaines connecteurs classiques, voici ***quelques*** formulations extraites d'une fiche d'exercices corrigés due au mathématicien David A. Madore, caïman à l'ENS de la rue d'Ulm (v. http://fr.wikipedia.org/wiki/David_Madore), où l'on a mis en gras la conjonction « car » (www.madore.org/~david/math/deugmias/corr1.pdf).

∗ Le produit de deux nombres pairs est pair. Soit $(\forall a \in \mathbb{Z})(\forall b \in \mathbb{Z})(a$ pair et b pair$) \Rightarrow ab$ pair). En effet, si $a = 2a'$ et $b = 2b'$ (avec a, b, a', b' des entiers) alors $ab = 2 \times (2a'b')$ est pair ***car*** il s'écrit $2c$ où $c = 2a'b'$ est un entier.

∗ Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair. Soit $(\forall a \in \mathbb{Z})(\forall b \in \mathbb{Z})$ (a pair et b impair) $\Rightarrow ab$). En effet, si $a = 2a'$ et $b = 2b'+1$ alors $ab = 2 \times (2a'b'+a')$ est pair ***car*** il s'écrit $2c$ où $c = 2a'b'+a'$ est un entier.

∗ On a $(\forall m \in \mathbb{Z})(m$ pair $\Leftrightarrow m^2$ pair). En effet, si m est pair alors m_2 est pair comme le produit de deux nombres pairs (…) ; réciproquement, si m^2 est pair, alors m ne peut pas être impair, ***car***, s'il l'était, m^2 serait le produit de deux nombres impairs, donc impair (…), ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, m est pair si et seulement si m^2 est pair.

∗ La contraposée de n premier $\Rightarrow$ ($n = 2$ ou n impair) est ($n \neq 2$ et n pair) $\Rightarrow n$ composé. C'est juste, ***car*** si n est pair, il s'écrit $n = 2n'$ avec n' entier naturel ; et on a $n' \neq 1$ car $n \neq 2$; donc on a écrit n comme le produit de deux naturels différents de 1, ce qui montre que n est composé.

➔ En réalité, c'est en faisant travailler une ***variété*** de formes langagières que l'on parviendra à éliminer peu à peu la charge causale du langage ainsi travaillé. Notons à titre d'illustration que, dans un traité intitulé *Notions de logique formelle* (1967), l'auteur (Joseph Dopp) offrait pour formulations « rhétoriques » de l'implication $p \Rightarrow q$ le florilège suivant : Si *p*, alors *q* ☻ *p* suffit pour que *q* ☻ *p* n'est pas vrai sans que *q* ne soit vrai ☻ *p* seulement si *q* ☻ *p* n'est vrai que si *q* est vrai ☻ *p* suppose *q* ☻ non-*p* à moins que *q* ☻ *q*, si *p* ☻ *q* dès que *p* ☻ *q* pourvu que *p* ☻ *q* est nécessaire pour que *p* ☻ *q* à moins que non-*p* ☻ *q* sauf si non-*p* ☻ non-*p* suffit pour que non-*p*. La chose mérite d'être méditée.

3.3. Recherches à venir dans les *Archives*

a) Pour la prochaine séance d'explicitation, ***le mardi 7 novembre***, des recherches appropriées dans les *Archives* viseront à répondre aux quatre questions que voici.

1. Que nous disent les *Archives du Séminaire* à propos des ***punitions et sanctions*** au collège et au lycée ?

Trinôme : VAC, YB, SM1.

2. Que nous disent les *Archives du Séminaire* à propos des ***notations*** (mathématiques et autres) à employer avec les élèves ?

Trinôme : SM2, SP, PP.

3. Que nous disent les *Archives du Séminaire* en matière d'***AER de géométrie*** ?

Trinôme : MD, MG1, JL.

4. Que nous disent les *Archives du Séminaire* à propos de ***la géométrie dans l'espace en classe de 2^de^*** ?

Trinôme : CL, CS2, FV.

b) La première recherche se fera en prenant notamment en compte les questions de la semaine suivante.

1. Vaut-il mieux évoquer avec les élèves, dès le premier jour de la rentrée, l'ensemble des règles de vie et de travail de la classe, et les *sanctions* en cas de non-respect ? (SP, MJ, 4e, 0)

2. Comment gérer les sanctions ? (VD, OS, 4e, 1)

3. Que donner comme sanction pour des bavardages, à part des observations (que je trouve exagérées) ? (VAC, MJ, 2de, 2)

4. Puisque les interrogations écrites sont à déconseiller comme punition, quels systèmes peut-on mettre en place quand on s'aperçoit que la majorité de la classe est inattentive ? (MG2, OS, 2de, 2)

5. Dans le règlement intérieur de mon collège, il est précisé que le mauvais comportement d'un élève ne peut faire baisser une note qu'il a eue. Peut-on imaginer de mettre en place une note d'oral qui valoriserait la participation des élèves et sanctionnerait les bavardages ? (WB, MJ, 4^{e}, 3)

6. Quelles sont les punitions les mieux adaptées à un élève indiscipliné ? (YB, MJ, 4^{e}, 3)

7. Comment réagir face à des élèves qui ont copié lors d'un contrôle et qui ont admis l'avoir fait ? Et dans le cas où ils ne l'admettent pas ? (WB, MJ, 4^{e}, 4)

8. Si un élève a copié toute l'interrogation sur son voisin de manière évidente (mêmes méthodes, mêmes erreurs, etc.), dois-je leur donner un zéro et/ou leur donner une colle et/ou les envoyer voir le CPE ou le proviseur ? (Ce cas suppose qu'on ne sait pas lequel des deux a copié.) Dans le cas où les énoncés ne sont pas les mêmes pour des élèves assis à côté, le copieur est connu ; dois-je là aussi punir les deux élèves (le copié n'étant pas forcément au courant) ? (SG, OS, 2de, 4)

9. Quelles sanctions donner à un élève tricheur ? Faut-il tenir compte du moment où l'on a décelé la tricherie ? Ou mettre une sanction exemplaire ? (ML, MJ, 2de, 4)

10. Quels types de punitions peuvent avoir un intérêt pédagogique ? (SM1, MJ, 4^{e}, 4)

c) La deuxième recherche dans les *Archives* prendra en compte les questions que voici.

1. Doit-on permettre l'utilisation des abréviations (th., *i. e.*, ssi, etc.) lors d'un contrôle ? (SK, CR, 5^{e}, 1)

2. Quelle règle faut-il énoncer pour les priorités de calcul lorsqu'il n'y a que des $\times$ et des $\div$? Y a-t-il une règle ? $4 \div 2 \times 8$ est-il égal à $\frac{4}{2} \times 8$ ou à $\frac{4}{2 \times 8}$? (SK, CR, 5^{e}, 4)

d) La troisième recherche se fera en gardant notamment en mémoire les questions ci-après.

1. Existe-t-il une base de données mise à la disposition d'enseignants qui débutent, avec des séquences-séances « types », éprouvées et agréées par l'Inspection générale, par exemple, qui pourraient aider au démarrage notamment en ce qui concerne la progression, la gestion du temps et l'élaboration de séquences-séances (quitte évidemment à les réévaluer, à titre de $R^{\lozenge}$, par la suite) ? (JB, CR, 2de, 1)

2. Comment faire participer les élèves en classe ? Comment les amener à découvrir les notions par eux-mêmes (par opposition à un cours magistral) ? (MG1, CR, 2de, 3)

3. Sur quoi puis-je m'appuyer pour proposer des exercices pertinents aussi bien en activité qu'en DS ? (PV, MJ, 2de, 3)

4. Quels sont les sites sur lesquels je peux trouver des exercices ainsi que des activités pour la 2de ? (VAC, MJ, 2de, 4)

5. Comment mettre en place des AER qui permettent aux élèves de travailler quand même tout seuls sur des thèmes pas forcément connus par eux ? (PV, MJ, 2de, 4)

4. Forum express

a) Cette rubrique permet l'examen impromptu de questions proposées par les GFP. Le travail accompli dans ce cadre fait en principe l'objet d'une reprise et d'un approfondissement ultérieurs.

b) Une première question peut s'énoncer ainsi : comment rendre compte de l'observation à faire dans le cadre du SPA ? On reviendra sur cette question lors de la prochaine séance ; mais on peut d'ores et déjà indiquer qu'elle appelle une technique, qui elle-même suppose une technologie, et un embryon de théorie. Du point de vue théorique, on soulignera surtout ici qu'il n'existe pas une manière « totalisante » de décrire une séance de classe, par contraste avec des descriptions « partielles ». C'est ainsi que l'enregistrement sonore ou vidéo d'une classe, toujours imparfait, n'est qu'une prise d'information ***parmi d'autres possibles et non moins pertinentes*** (quoique éventuellement lacunaires) : cet enregistrement ne restitue peut-être le « vécu sonore » d'aucun des acteurs de la séance – professeur ou élèves – non plus que l'observateur éventuel qui prend des notes à la volée ; il est une reconstitution partielle et conjecturale des dits et des gestes des acteurs de la séance. La technique que l'on préconisera – et sur laquelle nous reviendrons – est celle qui permet d'aboutir à un compte rendu du type de celui étudié à propos d'une classe de 5^{e}.

c) Une seconde question est soulevée autour de la diffusion de documents écrits par le professeur (« polycopiés »), documents fournissant un corrigé de travaux donnés à faire hors classe, sans qu'il y ait eu en classe de travail préalable ou complet de « correction ». Il s'agit là, à nouveau, d'une question que l'on examinera plus avant dans la suite du Séminaire. On se contentera de souligner tout de suite le danger que comporte une telle manière de faire, qui peut pousser subrepticement le professeur à fuir ou du moins à alléger sa ***responsabilité didactique***, ainsi qu'il en irait clairement s'il décidait de faire étudier dans un DM tel thème dûment inscrit au programme de la classe, en se contentant d'en donner ensuite un corrigé écrit aux élèves – corrigé que chaque élève aurait à étudier par ses propres moyens, sans plus de secours du professeur. À la limite, et en caricaturant très fort le risque sur lequel on entend attirer ici l'attention, on peut imaginer un professeur qui donnerait en début d'année un énorme polycopié – son « cours » – à ses élèves, à charge pour ces derniers de l'étudier dans les mois à venir, avec rendez-vous en juin, pour un contrôle unique et global ! Le recours au procédé évoqué devra donc être nettement circonscrit et, comme il en va ***pour l'ensemble du travail hors classe proposé par le professeur***, entouré de garanties sévères quant à la faisabilité et à la bonne adéquation du « geste » didactique précisément demandé à l'élève.

5. Questionnaire d'évaluation

Faute de temps, la passation du questionnaire a été différée à la séance 6.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 6 : mardi 17 octobre 2006

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Problématique et fonctionnement du Séminaire // 2. Forum des questions // 3. Observation & analyse // 4. Questionnaire d'évaluation

0. Questions de la semaine

Journée 6 (17 octobre 2006)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4e (et soutien en 5e)

Doit-on obligatoirement faire une AER pour toutes les notions rencontrées ou peut-on se permettre de n'en faire qu'une ou deux par chapitre ?

1. Problématique et fonctionnement du Séminaire

1.1. Les *Archives du Séminaire* et leurs usages

a) Les ***comptes rendus de recherche*** dans les *Archives*, qui ne doivent pas dépasser quelques pages, doivent être fournis assez vite (en l'espèce d'ici les vacances de Toussaint s'agissant des recherches présentées le mardi 10 octobre), et cela dans une version ***Word*** et une version ***imprimée***. Ils doivent en outre contenir un relevé précis des passages des *Archives* où le sujet de la recherche fait l'objet d'un développement. Sur la question des ***outils logiques***, par exemple, ce relevé comprendra entre autres la référence suivante par exemple :

Séminaire 2003-2004, p. 133-136.

b) Il faut rappeler encore que les *Archives* sont un outil de formation professionnelle ***personnelle***, qui aidera, avant même tout débat dans le cadre du Séminaire, à prendre des décisions pertinentes. On donne ci-après deux exemples de ce type de situations.

1.2. Exemple 1 : à propos du *Si… alors*

a) Le premier exemple porte sur ce qu'on peut regarder comme un « détail » qui, pour autant, appelle une analyse circonstanciée.

Doit-on « cantonner » la rédaction *si… alors* à une propriété ou peut-on aussi l'utiliser pour une définition ? (SM2, MJ, 4[e], 4)

b) Cette question a une origine connue et, à ce titre, a déjà été travaillée au cours des années précédentes, par exemple dans le Séminaire 2002-2003. Une question voisine a été formulée de même en 2005-2006. Nous les reproduisons ci-après.

1. … dans une définition, on nous a dit, en première année (oral 1), qu'on devait mettre « si » et non « si et seulement si ». Après discussion avec les autres enseignants, ils pensent qu'il faut mettre « si et seulement si ». (2[de], 4, 2002-2003)

2. Dans certains manuels, il y a des « si et seulement si » dans les définitions. Lors de mes études, on m'a dit qu'il ne fallait pas en mettre dans celles-ci. Le « si et seulement si » est-il réservé aux théorèmes, propriétés ?… Et pourquoi ? (2[de], 18, 2005-2006)

c) On reproduit maintenant les éléments de réponse apportés en 2002-2003 (et repris en 2005-2006) à la première des deux questions précédentes.

2. S'agissant du débat entre les partisans du « si » ou du « seulement si » dans les définitions, on se réfèrera d'abord au passage suivant de l'*Introduction à la logique* (Gauthier-Villars, Paris, 1969) du logicien mathématicien Alfred Tarski (1902-1983) :

La locution *« si et seulement si »* s'emploie fréquemment dans la rédaction des DEFINITIONS, c'est-à-dire des conventions stipulant quel sens doit être attribuée à une expression qui jusque là n'avait pas figuré dans une certaine discipline, et qui pourrait n'être pas d'emblée compréhensible. Imaginez, par exemple, qu'en arithmétique le symbole « ≤ » n'ait pas encore été employé mais qu'on veuille maintenant l'introduire dans les considérations (le regardant, selon l'usage, comme une abréviation de l'expression « *est plus petit que ou égal à* »). À cette fin, il faut définir ce symbole, c'est-à-dire expliquer exactement son sens en termes qui sont déjà connus et dont le sens ne fait aucun doute. Pour en arriver là, nous rédigeons la définition que voici – en supposant que « > » fait partie des symboles déjà connus :

nous disons que $x \leq y$ *si, et seulement si, ce n'est pas le cas que* $x > y$.

La définition que nous venons de formuler pose l'équivalence des deux fonctions propositionnelles

$$x \leq y$$

et

ce n'est pas le cas que $x > y$ *;*

on peut dire, partant, que cette définition permet la transformation de la formule « $x \leq y$ » en une expression équivalente qui ne contienne plus le symbole « ≤ » mais qui soit formée entièrement en termes qui nous sont déjà compréhensibles.

La difficulté évoquée dans la question examinée semble donc levée…

3. Traditionnellement, on nomme ***definiendum*** l'assertion que l'on définit (le definiendum est l'énoncé « $x \leq y$ » dans l'exemple choisi par Tarski), et ***definiens*** l'assertion qui le définit (l'énoncé « ce n'est pas le cas que $x > y$ » dans ce même exemple). Cela noté, le texte déjà cité se poursuit alors ainsi :

Il convient de noter que les mathématiciens, lorsqu'ils rédigent des définitions, préfèrent les mots « *si* » ou « *dans le cas où* » à la locution « *si, et seulement si* ». Ainsi, pour la définition du symbole « ≤ », ils donneraient probablement la forme suivante :

nous disons que $x \leq y$ *si ce n'est pas le cas que* $x > y$.

Il semble qu'une telle définition affirme seulement que le definiendum découle du definiens, sans bien marquer que la relation de conséquence est vraie aussi dans la direction opposée, et qu'ainsi elle ne réussit pas à exprimer l'équivalence du definiendum et du definiens. Mais ce que nous avons en fait ici, c'est une convention tacite à l'effet que « *si* » ou « *au cas où* », s'ils sont employés pour joindre le definiendum et le definiens, veulent dire la même chose que la locution « *si, et seulement si* ».

Telle est l'origine de la remarque faite en première année. Encore faut-il en comprendre la raison, sur laquelle on s'arrêtera maintenant.

4. Notons T la théorie dont on augmente le langage L en y introduisant par une définition un mot ou symbole ♣ qui n'y figurait pas : on pose $L^* = L \cup \{♣\}$. Dans la théorie T^* ainsi augmentée par une définition qui exprime un certain *definiendum* $\theta_♣$ à l'aide d'un certain *definiens* Θ ne contenant pas d'occurrence de ♣, on a bien

$$T^* \vdash \theta_♣ \Leftrightarrow \Theta$$

parce que l'assertion $\theta_♣$ « veut dire » Θ, en sorte que ce qui précède équivaut à écrire :

$$T^* \vdash \Theta \Leftrightarrow \Theta.$$

Il est donc indiscutable que, par exemple, on aura :

$$T^* \vdash x \leq y \Leftrightarrow \neg(x > y).$$

Cela précisé, la réticence à utiliser le connecteur « *si et seulement si* » s'explique semble-t-il ainsi : au moment où on introduit un certain mot ou symbole ♣, l'énoncé $\theta_♣$ ***n'a pas de sens dans T***. S'il est donc possible de dire que

si Θ est vrai (dans T) alors [on écrira, on dira] que $\theta_♣$ est vrai (dans T^*)

cela n'a pas de sens de dire que

si $\theta_♣$ est vrai (dans T^*) alors Θ est vrai (dans T)

puisque le langage L^* et donc la théorie T^* ***n'ont pas encore été définis***, et qu'on ne sait donc pas ce que ♣ et donc $\theta_♣$ « veulent dire »…

5. Conclusion : la critique précédente du « si et seulement si » n'est certes pas infondée, mais elle est fort subtile. On pourra donc sans déchoir s'en tenir à des définitions exprimées à l'aide du « si et seulement si » !

1.3. Exemple 2 : à propos de *statistique*

a) Le second exemple se rapporte à la question que voici.

Je vais commencer la partie *Statistique* (étude d'une série statistique). Le programme parle de « cahier de statistique ». De quoi s'agit-il exactement ? Comment le mettre en place ? (MB, CR, 2de, 4)

b) La question ***explicite*** trouve une réponse dès le Séminaire 2000-2001 (où le programme actuel de la 2de entre en vigueur), année où la question suivante est posée.

On parle dans le programme « d'ouvrir un cahier de statistique ». Qu'est-ce donc ? (2de, 11, 2000-2001)

Les éléments de réponse alors apportés sont reproduits ci-après.

3. Le ***cahier de statistique*** est présenté dans les passages réunis ci-après des textes officiels qui gouvernent l'enseignement des mathématiques en seconde.

Programme

« L'élève pourra se faire un “cahier de statistique” où il consignera une grande partie des traitements de données et des expériences de simulation qu'il fait, des raisons qui conduisent à faire des simulations ou traiter des données, l'observation et la synthèse de ses propres expériences et de celles de sa classe. Ce cahier sera complété en première et terminale et pourra faire partie des procédures d'évaluation annuelle. »

Accompagnement

« **Cahier de statistique**

Les élèves pourraient commencer en seconde un cahier de statistique rendant compte des expériences faites ou simulées, en classe ou chez eux, à la demande de l'enseignant ou de leur propre initiative. La rédaction d'un tel document individuel leur permettrait d'organiser et de planifier les expériences et les simulations, de donner forme à la conclusion qu'ils en tirent, aux questions théoriques qui se sont posées et qu'ils pourront reprendre ultérieurement. La tenue de ce cahier pourrait contribuer efficacement à structurer le travail expérimental proposé et aider ultérieurement chaque élève à mieux expliciter le lien entre l'expérience et la théorie ; cela permettrait à l'enseignant de contrôler la qualité des travaux réalisés, de vérifier que ne s'installe pas des perceptions erronées sur les phénomènes aléatoires, de faire des évaluations sur la partie statistique du programme. Ce cahier pourrait être continué en première et terminale : l'enseignant de première pourrait ainsi savoir quels thèmes ont été travaillés par ses élèves en seconde.

La production d'un texte écrit est en soi un élément formateur ; un tel cahier, où se mêlent texte écrit et représentations graphiques, présentant des éléments narratifs et des argumentations, s'inscrit de plus dans le cadre du nouveau programme de français des élèves de seconde. »

4. Sans doute parce que les rédacteurs des passages ci-dessus ont un lien particulièrement authentique, au plan scientifique, avec la statistique, et aussi parce qu'il s'agit pour eux de redéfinir presque *ab ovo* l'enseignement de ce domaine, les textes cités témoignent à son égard d'une attention plus soutenue, ***qui ne devrait pas manquer pour autant aux deux autres domaines mathématiques étudiés*** – celui du calcul et des fonctions, et celui de la géométrie. Cette attention les conduit à mettre l'accent sur l'utilité de matérialiser par un ***« cahier »*** l'importance des ***activités d'étude et de recherche***, et par insister sur le rôle que chaque élève peut jouer dans le développement de ces AER. Car le cahier de statistique n'est, en vérité, ***ni plus ni moins qu'un cahier d'AER*** propre à la statistique.

5. Deux points seulement méritent, au-delà, d'être mentionnés. D'abord, l'idée que ce cahier peut accompagner l'élève sur ***plusieurs années*** du cursus d'études. Ensuite, la suggestion que ce cahier peut faire l'objet d'une ***évaluation spécifique***, comme l'indique le passage ci-après du document d'accompagnement :

« Dans les multiples formes que peut prendre l'évaluation, apparaissent les devoirs de contrôle : le nombre de ceux-ci doit être réduit (trois, voire deux, par trimestre suffisent) ; on y intégrera plusieurs composantes de l'activité mathématique signalées par le programme. La moyenne annuelle de ces contrôles, souvent déterminante pour l'orientation de chaque élève, sera pondérée par un bilan chiffré des divers travaux (cahier de statistique, travail sur ordinateur…) portant sur les sujets difficiles à évaluer lors de ces contrôles. »

Mais il n'y a rien en tout cela qui ne s'étende aux deux autres domaines étudiés en classe de seconde : on retiendra particulièrement à cet égard le rôle assigné à l'évaluation du « cahier d'AER ».

c) Il existe cependant, derrière la question explicitement formulée, une autre question, plus fondamentale : ***qu'est-ce que la statistique et comment l'enseigner ?*** Avant de s'engager à apporter une ***réponse en acte*** dans la classe dont on a responsabilité, il est raisonnable de s'informer sur ce que les *Archives* peuvent contenir à cet égard. On reproduit ici simplement une ***toute petite partie*** de ce qu'offre le Séminaire 2000-2001 sur la question évoquée.

⇨ ***Enseigner la statistique***

A. Questions génératrices en statistique

– Les développements qui suivent se réfèrent prioritairement, mais pas uniquement, au cas de la classe de ***seconde***.

– L’enseignement de la statistique suppose, comme toujours, deux ordres d’analyse :

• la détermination des ***organisations de savoir*** – organisations mathématiques pures ou mixtes – à mettre en place ;

• la détermination des ***organisations didactiques*** appropriées à cette mise en place.

– Le premier point à élucider en vue de déterminer les OM(M) et les OD demandées est la question des ***questions génératrices***, que l’on peut énoncer ainsi :

À quels ***types de questions*** la statistique concourt-elle à apporter réponse ?

– Une réponse qui couvre largement le cadre de l’étude à accomplir en 2de est la suivante :

La statistique a pour objet d’aider à répondre aux questions qui trouvent leur origine dans le fait général de la ***variabilité***, et dont la formulation exprime la reconnaissance de ce fait. La statistique est en ce sens la ***« science de la variabilité »***.

– À titre d’illustration, on a rassemblé ci-après un bref florilège de telles questions.

1. Un professeur, ça gagne combien ?
2. Ça pèse combien, une tomate ?
3. Ça gagne bien, un professeur ?
4. C’est gros, une tomate ?
5. C’est quoi une grosse tomate ?
6. C’est quoi, un professeur qui gagne beaucoup ?
7. Professeur, ça gagne mieux que commerçant ?
8. Une tomate, c’est plus léger qu’une pomme ?
9. Un rectangle, ça doit être beaucoup plus long que large ?
10. Le prof m’a engueulé en me disant de dessiner un rectangle “normal”. C’est quoi un rectangle normal ?
11. C’est quoi, un gros éléphant ?
12. Ça pèse combien, un éléphant ?

– La ***production d’une réponse*** à une telle question suppose un ensemble de moyens qu’il appartient à ***la statistique*** de fournir, de concert avec des ***savoirs (non statistiques) plus spécifiques***, qui varient avec les questions étudiées, et que, dans l’enseignement de la statistique ***en classe de mathématiques***, on s’efforcera de réduire au « strict nécessaire » ***sans pour autant chercher à les éliminer***.

d) Les notes du Séminaire 2000-2001 contiennent une série de développements intitulés *Enseigner la statistique*, que l’on trouve aux pages 324-331, 350-357, 411-416, 471-477, 493-495. Les notes relatives aux années qui suivent ajoutent à cela un certain nombre de développements (par exemple sur les éléphants, les tomates, les rectangles « normaux »…), qu’il convient de repérer pour nourrir son travail personnel sur le sujet.

1.4. Forum des questions : un bilan express

a) Lors de la séance 3, le 19 septembre 2006, on avait recensé les « grandes questions » auxquelles le Séminaire avait alors commencé d’accorder une certaine attention : on reproduit ci-après cet inventaire.

Comment programmer l'étude (dont les contrôles, etc.) ?
Quelle forme donner aux révisions ?
Quels travaux hors classe proposer aux élèves et pourquoi ?
Comment faire reconnaître son autorité et obtenir le respect de la discipline ?
Comment penser et réaliser les programmes personnalisés de réussite éducative (PPRE) ?
Pourquoi assigner une note de vie scolaire et comment le faire ?
Comment intégrer dans son enseignement le contenu du socle commun de connaissances et de compétences ?
Quelle place donner et quels usages faire des technologies de l'information et de la communication (TIC) ?
Comment penser et réaliser l'aide au travail personnel de l'élève (ATPE) ?

b) Cet inventaire peut aujourd'hui être augmenté : aux questions précédentes se sont entre temps ajoutées les suivantes.

Comment analyser l'organisation mathématique présente et/ou en voie d'émergence au cours d'une séance en classe ?
Comment analyser l'organisation didactique mobilisée ou en voie de mobilisation au cours d'une séance en classe ?
Comment situer par rapport aux différents moments de l'étude un épisode observé au cours d'une séance en classe ?
Comment identifier les raisons d'être d'une entité mathématique à enseigner ?
Comment déterminer l'organisation mathématique correspondant à un thème mathématique à enseigner ?
Comment élaborer l'argument mathématique d'une AER relative à un thème mathématique à enseigner ?
Comment étudier expérimentalement la vérité d'une assertion donnée, relative à l'espace sensible ?
Comment découvrir expérimentalement une propriété de l'espace sensible ?
Comment étudier la déductibilité d'un énoncé donné dans une théorie mathématique donnée ?
Comment contrôler l'exactitude d'un procédé de construction graphique ?
Comment organiser la tenue du cahier de textes de classe ?
Comment élaborer un contrôle en classe ?
Comment, sans le rendre illégitime, concevoir un contrôle en classe comportant en particulier une question relevant de la ZEP plutôt que de la ZEN ?
Comment inférer la technique mise en place dans une classe à propos d'un type de tâches dont un spécimen est proposé dans un contrôle en classe ?
Comment construire un rapport de correction ?
Pourquoi proscrire le recours à des « interrogations surprises » ?
Comment contrôler de façon appropriée l'écart entre l'avancée du temps didactique officiel et l'avancement du temps de l'apprentissage de la classe, sans pour cela recourir à des « interrogations surprises » ?
Comment penser et construire le travail à conduire dans les heures d'enseignement modulaire en classe de Seconde ?
Comment penser et construire le travail à conduire dans les heures d'aide individualisée en classe de Seconde ?
Comme conduire la construction et l'utilisation appropriées des outils logiques du travail mathématique, au collège et en classe de Seconde ?
Comment rendre compte par écrit de l'observation d'une séance en classe ?
Comment user de façon appropriée de documents écrits par le professeur à l'intention des élèves ?

c) Ajoutons un bref commentaire concernant la notion – illustrée lors de la séance 5 – de « rapport de correction ». Cette notion apparaît dans un document déjà plusieurs fois cité, dû au groupe mathématique de l'Inspection générale, intitulé *Les travaux écrits des élèves en mathématiques au collège et au lycée*, dans lequel on lit ceci.

> Les travaux individuels de rédaction (et notamment les « devoirs à la maison »), dont les fonctions sont multiples (…) peuvent et doivent prendre des formes variées (résolution individuelle, ou en petits groupes, d'un problème comportant éventuellement des questions ouvertes et aboutissant à une rédaction individuelle, compte rendu et synthèse d'une séance de travaux dirigés, recherche d'exemples, constitution d'un dossier sur un thème donné, mise au point et rédaction de solutions d'exercices dont l'étude a été engagée en classe…). Ils font l'objet d'une rédaction individuelle sur copie, d'une correction détaillée des copies par le professeur, et d'un rapport de correction destiné notamment à rectifier les erreurs les plus courantes et à dégager les méthodes essentielles.

1.5. Formation professionnelle personnelle

a) Tout cela rappelé, une mise au point doit être faite quant au statut des éléments de réponse apportés au fil des séances du Séminaire.

b) Il n'est pas rare que ces éléments de réponse apparaissent dissonants par rapport à certaines pratiques – pas toujours majoritaires, cependant – installées dans le système scolaire, telles que les participants au Séminaire ont pu les observer comme élèves de collège puis de lycée, ou telles encore qu'ils croient pouvoir les observer aujourd'hui même, autour d'eux, dans les établissements où ils effectuent leurs différents stages.

• Ce sentiment de dissonance révèle assez souvent une réelle difficulté à résister à la tentation d'une adhésion spontanée, peu critique, au monde professionnel ***tel qu'il est encore***, du moins en partie, monde dont on peut croire ainsi devenir au plus vite membre « de plein exercice », en s'identifiant de façon quasi instantanée à ce qui serait le plus emblématique dans les pratiques établies.

• Cette « passion » pour le monde-tel-qu'il-est-encore-en-partie peut conduire certains participants au Séminaire à se tenir à distance des éléments de réponse qu'ils jugent « dissonants », et finalement à « éviter » une partie plus ou moins importante de la formation, alors même que celle-ci leur apporte des outils ***pour se libérer***, par un travail de déconstruction et de reconstruction critiques, des réponses établies, qui ont d'abord pour caractéristique d'avoir été construites sous des ***systèmes de conditions et de contraintes*** tout différents de ceux prévalant aujourd'hui – ce qui est un fait parfois douloureux pour les professeurs qui se sont formés il y a une ou plusieurs décennies. On ne saurait donc trop exhorter chacun, dans ce Séminaire, ***à entrer pleinement dans la formation proposée*** pour être en mesure d'œuvrer réellement au processus de déconstruction et de reconstruction indispensable pour se former comme professeur ***d'aujourd'hui et de demain*** – et non pas, chimériquement, comme professeur d'hier ou d'avant-hier.

c) Mais la même problématique acritique que l'on doit parfois constater dans le rapport au monde-tel-qu'il-est prévaut aussi quelquefois dans le rapport aux éléments de réponse apportés par la formation.

• Il convient ainsi de mettre en garde contre le caractère inapproprié d'un « recopiage » consciencieux, méticuleux, mais mécanique et formel des solutions ébauchées dans la formation.

• Ces éléments de réponse techniques, technologiques, théoriques sont en effet proposés comme des ***matériaux*** à utiliser dans la construction de la ***réponse personnelle*** que l'on mettra en œuvre dans la classe où l'on intervient – réponse personnelle qui, bien entendu, devra rester ***indéfiniment ouverte à l'analyse critique***.

• En particulier, on essaiera de s'inspirer de ***l'esprit*** des ***technologies*** professionnelles élaborées plutôt que de la ***lettre*** des techniques évoquées à titre d'illustrations et de suggestions.

1.6. Règles de vie et de travail, *suite*

a) Les considérations précédentes et le temps déjà employé à la formation – ***un quart*** du temps alloué aura été consommé à la fin de cette journée ! – gagnent à se formuler en termes de règles de vie et de travail.

b) Rappelons d'abord les règles déjà consignées par écrit, qui se réfèrent au travail à conduire en relation avec ce Séminaire.

Règles de vie et de travail

• Chaque semaine, avant le mardi matin, chacun a lu et étudié, seul ou dans un cartel de travail,

– … les *Questions de la semaine* précédente ;

– … les notes du *Séminaire* du mardi précédent ;

– … les parties des notices de l'*Encyclopédie du professeur de mathématiques* ayant fait l'objet d'une étude dirigée le mardi précédent ;

– … les documents, officiels ou non, proposés à la lecture, soit sous forme imprimée, soit sous forme électronique ;

– ses notes personnelles.

• Chacun reprend régulièrement l'ensemble des documents précédents, en fonction des questions qui se posent à lui ou elle.

c) Avant d'aller plus loin, il convient de préciser la structure de ***l'engagement formatif*** demandé à chacun, et cela en rappelant le cycle des lieux de formation où il convient de s'investir ardemment :

– il y a d'abord le ***Séminaire du mardi matin**, **en « grand groupe »***, où des questions sont formulées et des éléments de réponse proposés, à quoi s'ajoutent les différents dispositifs de ***la FGC*** du mercredi ;
– il y a ensuite le travail en ***GFP***, ***en groupe restreint***, où les réponses ébauchées en Séminaire peuvent être reprises, travaillées, ré-élaborées, et où d'autres questions encore surgissent et sont travaillées ;
– il y a alors le travail avec le ***PCP maître de stage***, c'est-à-dire (sauf exception) ***à deux***, à l'interface de la formation reçue à l'IUFM et de l'enseignement donné ou à donner en classe ;
– il y a enfin le travail personnel du professeur stagiaire ***au chevet de la classe***, c'est-à-dire ***seul*** auprès des élèves, lieu essentiel d'émergence d'une part des questions qui seront formulées ensuite en Séminaire.

• Chacun de ces lieux de formation suppose un ***travail personnel spécifique*** – avant et après le Séminaire, avant et après le GFP, etc.

• Le travail réalisé en chacun de ces lieux de formation ***et autour*** (par le travail personnel qu'ils suscitent) conditionne la possibilité du bon fonctionnement de ces dispositifs de formation : le GFP, par exemple, travaille et sur le travail réalisé dans le Séminaire du matin, et sur le travail conduit « sur le terrain », avec le maître de stage et au chevet de la classe.

• De la même façon, le Séminaire du mardi matin ne peut fonctionner efficacement si certains de ses participants ne s'engagent pas avec détermination – et persévérance – dans la mise en œuvre ***en classe*** des apports de la formation, même s'il doit être clairement entendue qu'il n'existe pas ***une manière unique, rigidement définie, de tenter cette mise en œuvre***.

• La formation est là, certes, pour permettre à chacun de reconnaître et d'assumer concrètement, dans l'immédiat, les principales exigences du métier auquel on se forme. Mais ***l'exercice du métier***, et en particulier le travail au chevet de la classe, dans le cadre du stage en responsabilité notamment, est là, inversement, ***pour permettre à chacun de tirer pleinement profit de la formation*** – dont l'ambition ne saurait avoir pour seul horizon le temps présent !

d) Il y a ainsi une dialectique entre l'engagement formatif et l'engagement professionnel, dialectique qui, en principe, ne prend nullement fin avec la fin de la formation ***initiale***.

• Pour concrétiser en partie au moins la phase actuelle de cette dialectique, on ajoutera maintenant aux règles déjà énoncées quelques autres principes qui touchent plus spécialement au travail ***auprès de la classe***.

Règles de vie et de travail *(suite)*

• Pour tout thème mathématique à enseigner, il convient d'amorcer la préparation (le « développement ») de cet enseignement une quinzaine de jours à l'avance au moins, en vue de déterminer l'OML à mettre en place et l'OD permettant cette mise en place.

• Dans le travail de détermination mathématique et didactique exigé avant et pendant l'enseignement donné, il convient de consulter, d'analyser et d'évaluer…

– … le programme de la classe, les programmes des classes antérieures et les documents d'accompagnement correspondants ;

– … les *Archives du Séminaire* mises en ligne ;

– … le manuel de la classe ainsi que d'autres manuels et documents disponibles dans les « archives du métier ».

• Une fois un scénario mathématico-didactique ébauché, afin de pouvoir procéder à d'indispensables réajustements, il convient d'en effectuer une analyse réitérée…

– … avec son PCP maître de stage ;

– … dans le cadre du GFP, sous la direction du tuteur du GFP, si l'opportunité se présente.

• Ce travail de développement se poursuit en continu au cours de la réalisation de l'enseignement correspondant, et cela jusqu'au complet achèvement de cet enseignement.

• À chaque instant du processus de préparation et de réalisation de l'enseignement du thème mathématique considéré, il convient de faire connaître, de façon éventuellement répétée, dans le cadre des *Questions de la semaine* notamment, les difficultés rencontrées que l'on ressent comme les plus saillantes.

• Ainsi qu'on a pu l'entrapercevoir lors de l'inventaire des questions abordées jusqu'ici, le détail ***technique*** par lequel les règles précédentes peuvent prendre forme concrète – en quoi, par exemple, consiste et comment mener à bien la détermination d'une OML et/ou d'un OD ? – est étudié dans le cadre de la formation, en Séminaire et en GFP notamment : on n'en dira rien de plus ici.

2. Forum des questions

2.1. Une question de typographie

a) On s'arrête d'abord sur la question que voici ;

> Quelles sont les notations de « seconde » et « second » ? Je crois que cela se note « 2^{de} » et « 2^{nd} » mais je n'en suis pas sûre. (ML, MJ, 2^{de}, 5)

b) La rubrique *Documents / 2^{nd} degré* du site de l'IUFM contient des fichiers intitulés respectivement ***Typographie 1*** et ***Typographie 2***, dont la présence avait été signalée lors de la séance 2 du Séminaire. Mais ces documents sont muets sur la question posée ici !

c) La réponse est cependant aisée : comme on le voit dans la parenthèse qui suit la question examinée, « seconde » s'abrège en « 2^{de} ». Quand à « second » la conjecture formulée est juste et pouvait être vérifiée en recherchant « 2^{nd} » dans le fichier des séances du Séminaire de cette année (par exemple), où l'on trouve ceci.

> ∗ … sous la rubrique *Documents / 2^{nd} degré*…
> ∗ On prendra l'habitude d'examiner la rubrique *Documents / 2^{nd} degré* sur le site de l'IUFM…
> ∗ … sous la rubrique *Documents / 2^{nd} degré*
> ∗ … sous la rubrique *Documents / 2^{nd} degré* du site de l'IUFM.
> ∗ … (on le trouvera en ligne, à la rubrique « Documents / 2^{nd} degré »)…

2.2. Triangles isométriques

a) Deux questions ont été formulées à propos d'un thème important du programme de seconde : on les reproduit ci-après.

> 1. Sur le thème *Triangles isométriques, triangles de même forme*, je ne comprends pas le commentaire suivant : « Pour des formes courantes (équilatéral, demi-carré, demi-équilatéral), on fera le lien avec les sinus et cosinus des angles remarquables. » (MG2, OS, 2^{de}, 5)
>
> 2. Comment préparer une AER sur les triangles isométriques ? J'ai proposé aux élèves l'activité suivante :
> – déterminer dans un ensemble de figures proposées celles qui sont superposables, puis mesurer les longueurs et les angles ;
> – tracer plusieurs triangles (trois ou quatre) avec les trois longueurs des côtés imposées et vérifier qu'ils sont superposables ;
> – tracer des triangles connaissant certains éléments.
> Résultat : certains élèves comprenant très vite ce que l'on voulait montrer n'avaient pas envie d'effectuer toutes les mesures et constructions ; d'autres élèves étaient gênés par leur niveau : ils ne savaient pas effectuer les constructions demandées. Comment améliorer cette activité ? Est-elle pertinente et adaptée pour introduire les triangles isométriques ? (ALP, CR, 2^{de}, 5)

b) Les ***cas d'isométrie*** et les ***cas de similitude*** constituent un outil simple et puissant longtemps disponible au collège qui, après une éclipse de plusieurs décennies, a été réintroduit au lycée par le programme de 2de entré en vigueur en 2000. Les notes du Séminaire 2002-2003 contiennent là-dessus un long développement, dont on a extrait ce qui suit.

1. On commence par un bref historique.

① Les ***« cas »*** (ou « critères ») d'égalité (c'est-à-dire ***d'isométrie***) des triangles sont à la base de la ***géométrie d'Euclide*** (vers 300 av. J.-C.). Le premier cas fait l'objet de la proposition 4 du livre I des *Éléments*, le deuxième cas, de la proposition 26, le troisième cas, de la proposition 8, toujours du livre I.

② L'enseignement de la géométrie s'est *grosso modo* inspiré des *Éléments* d'Euclide jusqu'à ***la réforme des mathématiques modernes***, autour de 1970 : les « cas d'égalités » y étaient donc essentiels. Dans un *Traité de géométrie élémentaire* publié en 1885, l'auteur commente en ces termes lesdits cas d'égalité :

Remarque. – *Utilité des théorèmes précédents.* Les cas d'égalité des triangles sont appliqués sans cesse, en géométrie, pour trouver que *deux droites* sont égales, ou que *deux angles* sont égaux.

③ L'auteur cité reconnaissait toutefois que la technique à mettre en œuvre se révèle parfois complexe :

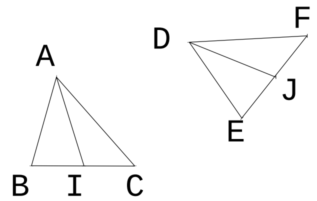
Mais ce qui fait la difficulté de la méthode, c'est que presque jamais les triangles ne sont tracés. Il faut alors commencer par les imaginer et, pour cela, mener une ou des droites auxiliaires.

Lors de la réforme des mathématiques modernes, qui entendait ***mettre à jour*** les mathématiques enseignées en les accordant à l'évolution des mathématiques savantes dans le siècle écoulé, et qui avait été préparée par un ensemble de travaux mathématico-didactiques depuis 1950 environ, l'argument du caractère artificiel de l'emploi des cas d'isométrie sera repris et amplifié. Parmi les écrits ayant impulsé cette réforme figure ainsi le livre de Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* paru en 1964, dont l'influence fut grande (à côté de celle du livre de Gustave Choquet, *L'enseignement de la géométrie*, paru la même année). Dans une préface riche et drue, Dieudonné écrivait notamment :

Ce que l'on sait moins (et ce pourquoi est écrit ce livre), c'est que depuis les travaux de Grassmann et Cayley entre autres (qui remontent à plus de 100 ans), on dispose, en « Géométrie élémentaire », comme l'a si bien dit Choquet, d'une « route royale » par laquelle, à partir d'axiomes extrêmement simples à énoncer (au contraire de ceux d'Euclide-Hilbert) tout s'obtient de la façon la plus directe en quelques lignes de calculs triviaux, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions de triangles auxiliaires, afin de se ramener vaille que vaille aux sacro-saints « cas d'égalité » ou « cas de similitude » des triangles, points d'appui de toute la technique traditionnelle.

La « voie royale » évoquée était celle offerte alors par l'algèbre moderne, qu'empruntent encore de manière presque exclusive les programmes de l'agrégation et du CAPES de mathématiques : le plan est (re)défini comme un espace affine à deux dimensions, que l'on munit d'un produit scalaire, etc. Bref, il s'agit de ***partir*** de la structure vectorielle du plan au lieu d'y ***arriver*** – ainsi que le faisait l'exposé traditionnel de la géométrie, « modernisé » *in fine* par l'introduction des vecteurs.

④ Les « cas d'égalité » sont des ***conditions suffisantes*** pour qu'il existe une isométrie transformant un triangle en l'autre. Ce fait a un caractère de plus large portée : si, par exemple, les triangles ABC et DEF sont isométriques, si I est le milieu de [BC] et J le milieu de [EF], alors on conclut immédiatement que AI = DJ (voir la figure ci-dessous).



Si l'on ne dispose que des ***cas*** d'isométrie, on parvient à ce résultat en considérant les triangles ABI et DEJ (par exemple) et en observant que l'on peut leur appliquer l'un des cas (« un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ») pour obtenir que AI = DF.

⑤ Selon un phénomène très général dans l'évolution du curriculum mathématique, la mise à l'écart des cas d'isométrie ne fut pas accompagnée de l'introduction du nouvel outil – les isométries – au nom duquel l'ancien outil se trouvait banni. En conséquence, certains faits qui pouvaient autrefois être démontrés à un certain niveau du cursus des études secondaires (en 4^{e} par exemple) grâce à une TGD incluant les « cas d'égalité » ne purent plus l'être au même niveau après l'éviction des « cas » : l'exigence d'une mathématisation plus authentique aboutissait ainsi à une démathématisation réelle !

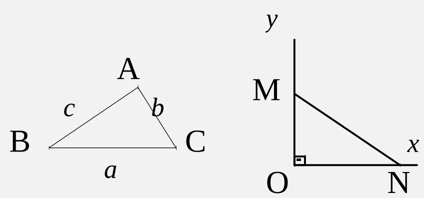
2. Comment se servait-on des cas d'égalité ? Revenons à un problème examiné lors de la séance 5 du Séminaire : celui de la démonstration de la ***réciproque*** du théorème de Pythagore. Par contraste avec les considérations faites lors de cette séance, il était autrefois chose aisée de produire la démonstration requise dès lors qu'on disposait du « troisième cas d'égalité des triangles » : si deux triangles ABC et A'B'C' ont leurs côtés homologues « égaux » (c'est-à-dire de même longueur), alors ils sont isométriques, et ont en particulier leurs angles correspondants égaux. Ainsi tel manuel de collège proposait-il alors la démonstration suivante :

« **Réciproque du théorème de Pythagore. Si les trois côtés a, b, c d'un triangle vérifient la relation**

$$\mathbf{a^2 = b^2+c^2}$$

ce triangle est rectangle.

Construisons un angle droit *x*O*y*. Portons sur O*y* une longueur OM = *b* et sur O*x* une longueur ON = *c*. Traçons MN. On a :



$\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = b^2+c^2$.

ou : $\overline{MN}^2 = a^2$

Ainsi : MN = a.

Dès lors, les triangles OMN et ABC sont égaux comme ayant les trois côtés respectivement égaux.

Par suite : ∠A = ∠O = 1 droit,

et le rectangle ABC est rectangle en A.

Cas particulier. *Un triangle dont les côtés sont proportionnels à* 3, 4 *et* 5 *est rectangle*. »

3. Les « cas d'isométrie » sont ainsi des outils pour démontrer ***l'égalité de longueurs ou d'angles***. Un tel usage suppose au minimum que l'on sache « reconnaître des triangles isométriques », comme le demande le programme de 2de, exigence qu'un manuel de collège d'autrefois présentait dans les termes suivants :

« … pour démontrer que deux segments rectilignes sont égaux, on cherche à les faire entrer dans deux triangles dont on établit ensuite l'égalité. On procède souvent de même pour démontrer que deux angles sont égaux. »

① L'une des toutes premières applications des cas d'égalité étaient traditionnellement la démonstration (due à Pappus, vers 340) du théorème appelé *pons asinorum* (pont aux ânes), selon lequel, dans un triangle isocèle ABC, les angles à la base sont égaux : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. Il suffit en effet, pour cela, de considérer les triangles ABC et… ACB, qui se révèlent isométriques en vertu du 2^{e} ou du 3^{e} cas d'isométrie (un angle égal entre deux côtés égaux, ou les trois côtés égaux).

② Le problème suivant fournit une illustration moins immédiate de l'usage des cas d'isométrie : …

③ …

④ Le geste clé qui commande l'emploi des cas d'égalité consiste à ***décomposer les configurations étudiées en triangles à comparer***. Pour prolonger cette première réflexion, on méditera par exemple sur le problème suivant, rédigé dans un langage un brin daté :

« Si l'on forme un quadrilatère avec 4 tiges rigides, l'ensemble est-il rigide ? Comment ajouter une 5e tige pour qu'il soit rigide ? En déduire que, si deux quadrilatères ABCD et A'B'C'D' ont leurs quatre côtés égaux chacun à chacun, ils ne sont pas, en général, égaux. Si l'on ajoute, en outre, que BD = B'D' (ou AC = A'C'), peut-on affirmer qu'ils sont égaux ? »

4. Ce qui précède met en évidence les principales ***raisons d'être*** des « cas d'isométrie ». Il convient alors de situer ces théorèmes au sein d'une TGD « raisonnable »…

(À suivre)

3. Observation & analyse

3.1. Un « rapport de correction », *suite*

a) Le travail « corrigé » portait sur l'exercice 1 proposé aux élèves de la classe de seconde observée.

Exercice 1 (6 points)
Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 4 - (2x - 8)^2$.
1) Étudier le sens de variation de f sur $[4 ; +\infty[$.
2) Résoudre dans ℝ les équations et inéquations suivantes :
- a) $f(x) = 0$
- b) $f(x) = 2x - 6$
- c) $f(x) \leq 8$
- d) $f(x) \geq -5$

b) La détermination du sens de variation de f sur l'intervalle $[4 ; +\infty[$ a constitué pour la classe observée un obstacle quasi insurmontable : en vérité, un seul élève l'avait menée à bien ! L'examen de la première tâche composant la question 2 ci-dessus – résoudre l'équation $4 - (2x - 8)^2 = 0$ – avait conduit à la conjecture, confirmée par divers éléments d'observation de la classe, que la technique de résolution mise en place par la professeure consiste à factoriser d'abord l'expression de la fonction f, ce qui donne ici

$$4 - (2x - 8)^2 = (10 - 2x)(2x - 6) = 4(5 - x)(x - 3),$$

puis à annuler les facteurs non constant du produit obtenu, ce qui fournit donc $x = 3$ et $x = 5$. Dans la classe observée, cette tâche a été assez bien réussie : 21 élèves (sur 33) en sont venus à bout. Mais ils ne seront plus que 11 – un sur trois – à résoudre la deuxième équation, sur laquelle on s'arrête maintenant : $4 - (2x - 8)^2 = 2x - 6$.

• Une fiche parmi les 18 initialement rendues indiquait ceci :

b) $f(x) = 2x - 6$
$(10 - 2x)(2x - 6) = 2x - 6$
Même résolution.

L'auteur de cette fiche avait lui-même précisé que la factorisation utilisée était un sous-produit de la résolution de l'équation $4 - (2x - 8)^2 = 0$.

• Une 19^{e} fiche, rendue le jour même, propose de la technique à reconstituer conjecturalement la description suivante :

1) Soustraire $2x - 6$ à chaque membre de l'équation.
2) Mettre $(2x - 6)$ en facteur dans $f(x) - (2x - 6)$
c'est-à-dire dans $(10 - 2x)(2x - 6) - (2x - 6)$
3) Résoudre $(9 - 2x)(2x - 6) = 0$.

c) On avait noté que l'idée du réemploi de l'identité $4 - (2x - 8)^2 = (10 - 2x)(2x - 6)$ obtenue lors de la résolution de l'équation $4 - (2x - 8)^2 = 0$ ***ne va pas de soi*** : pour le professeur, attendre un tel réemploi « spontané » est sans nul doute risqué ! Mais surtout, l'obtention de l'égalité $(10 - 2x)(2x - 6) - (2x - 6) = 0$ ne fait pas cesser les difficultés : la mise en facteur de $2x - 6$, en effet, est classiquement une source d'erreur, du fait qu'il convient alors d'écrire quelque chose comme $(10 - 2x)(2x - 6) - (2x - 6) = (2x - 6)[(10 - 2x) - 1]$. Pourquoi cela ?

• Le langage généralement utilisé par les élèves (et les professeurs) est en effet presque toujours entendu en un sens ***additif*** : parmi les élèves qui se diront à voix basse

« Quand je mets $2x - 6$ en facteur, là il ***reste*** $10 - 2x$, et là, il ne reste ***rien*** »,

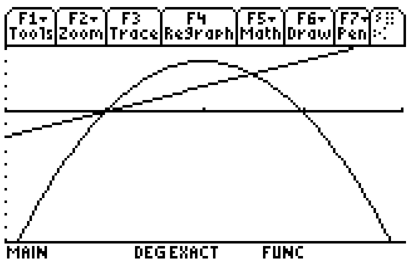
plusieurs sans doute interpréteront ce « rien » comme un ***« rien » additif***, c'est-à-dire comme un ***zéro***, et non comme un ***« rien » multiplicatif***, c'est-à-dire comme un ***un***, en sorte qu'on aura finalement, ainsi, le résultat erroné

$$(10 - 2x)(2x - 6) - (2x - 6) = \dots = (2x - 6)(10 - 2x).$$

• La situation de calcul serait à cet égard nettement différente, pour au moins certains élèves, s'il s'était agi de factoriser l'expression algébrique $(10 - 2x)(2x - 6) - 5(2x - 6)$, ce qui aurait conduit à dire que, quand on factorise $2x - 6$ dans $5(2x - 6)$, « il reste 5 », et donc à écrire ceci : $(10 - 2x)(2x - 6) - 5(2x - 6) = (2x - 6)[(10 - 2x) - 5] = (2x - 6)(10 - 2x - 5) = \dots$

d) Cela noté, était-il possible de prévenir ces erreurs ou échecs de la part des élèves ?

• L'observation de la classe qu'a réalisée le chercheur à qui nous empruntons ici quelques données montre que, pour résoudre une équation de la forme $a^2 - (bx - c)^2 = dx - e$, la professeure observée a mis en place une technique dans laquelle on commence par s'assurer que $dx - e$ peut être mis en facteur dans l'expression (non encore factorisée) $a^2 - (bx - c)^2$; l'originalité tient ici au fait que, pour ce faire, l'élève est censé s'assurer ***graphiquement***, à l'aide d'une calculatrice adéquate, que les courbes d'équation $y = a^2 - (bx - c)^2$ et $y = dx - e$ se coupent bien sur l'axe des abscisses, comme on le voit ci-après pour $y = 4 - (2x - 8)^2$ et $y = 2x - 6$.



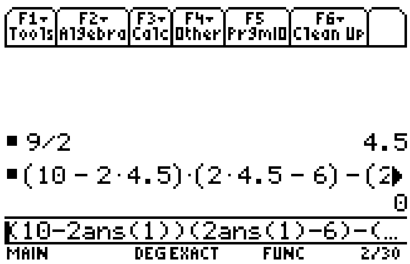
• En vérité, cette vérification graphique est ***inutile***. Elle peut en effet être remplacée par une variante purement ***numérique***, plus rapide, qui consiste à s'assurer si l'unique zéro de $dx - e$

annule bien l'expression $a(x - b)^2 + c$. Dans le cas à étudier dans le contrôle, par exemple, on doit simplement vérifier si $4 - (2x - 8)^2$ s'annule pour $x = 3$, autrement dit on doit calculer $4 - (2\times3 - 8)^2$…

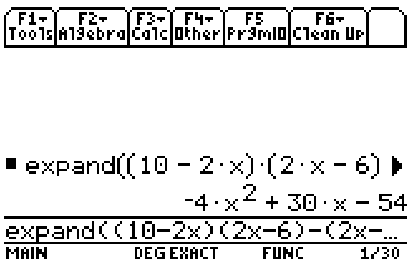
• Notons que, si le zéro de $dx - e$ n'annulait pas $a^2 - (bx - c)^2$, la seule technique connue de ces élèves – factoriser $a^2 - (bx - c)^2$ pour y faire apparaître le facteur $dx - e$ – serait impuissante : le cas étudié se situerait en ce cas ***hors de portée*** de la technique, et son étude devrait être pour le moment abandonnée.

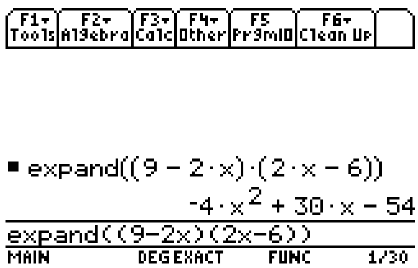
• Par contraste avec un contrôle graphique peu utile, il aurait été bon d'installer dans la classe l'usage de ***contrôler*** les calculs effectués (ou même simplement « conjecturés »). Si l'on croit par exemple avoir établi l'identité $(10 - 2x)(2x - 6) - (2x - 6) = (9 - 2x)(2x - 6)$, on devra, avant d'aller plus loin, s'arrêter pour ***vérifier posément*** qu'il en est ainsi.

➨ On pourra par exemple s'assurer que, puisque le facteur $(9 - 2x)$ s'annule pour $x = 4{,}5$, il en va de même du premier membre de l'égalité, et cela en utilisant sa calculatrice comme le suggère l'écran ci-après.



➨ Bien entendu, il n'est nullement interdit d'utiliser les possibilités de ***calcul symbolique*** qu'offre la calculatrice en lui demandant – par exemple – le développement de chacun des membres de l'identité présumée.





La conclusion s'ensuit.

3.2. Rédiger un compte rendu

a) En prévision du travail demandé dans le cadre du SPA (et en vue du TER), plusieurs questions ont été formulées, que l'on rappelle.

1. Dans cinq semaines, le mardi 21 novembre, nous devrons rendre notre compte rendu d'observation de SPA qui sera à la base du TER. Quelles sont les principales techniques développées par les formateurs pour réaliser des comptes rendus d'observations efficaces ? (JB, CR, 2de, 5)

2. Compte rendu d'observation de séance : quels contenus ? quels objectifs ? quelle mise en forme ? (SP, MJ, 4e, 5)

3. Lors du SPA, comment arriver à organiser son observation de manière éloquente ? (PV, MJ, 2de, 5)

b) La « technique » mise en œuvre a été observée sur un spécimen, le compte rendu relatif à l'étude des diagonales d'un parallélogramme dans une classe de 5^e. Sans pour autant délaisser cette première observation, on prend maintenant contact avec un deuxième compte rendu, intitulé ***Avec des nombres relatifs***, qui restitue en quelques pages une séance dans une autre classe de 5^e.

c) Comment peut-on constituer le compte rendu demandé dans le cadre du SPA ?

• Une première étape consiste à être présent en classe durant la séance et

– … à noter à grande vitesse l'essentiel des interventions du professeur et les principales interventions des élèves ;

– … à enrichir ces notes d'indications concises sur certains aspects de la vie et du travail de la classe dont l'appréhension ne peut être que globale : diminution ou augmentation du niveau sonore, engagement didactique des élèves, etc. ;

– … à obtenir communication des divers documents diffusés par le professeur aux élèves, tout particulièrement de ceux qui sont utilisés durant la séance observée.

• À partir de ces matériaux bruts, et dans une seconde étape, on rédigera un compte rendu qui tente de restituer la structure de la séance, son contenu, sa dynamique, sa chronique.

• Dans l'une et l'autre étapes, on aura en tête les besoins de l'***analyse didactique*** qui, le cas échéant, devra prendre pour objet le compte rendu en cours de constitution : d'une façon certes non entièrement déterminée (on va y revenir), les éléments consignés dans le compte rendu devront alimenter les rubriques constituant une analyse didactique, soit, outre la rubrique *Structure et contenu*, les trois rubriques de l'*Organisation mathématique*, de l'*Organisation didactique* et de la *Gestion de la séance*.

d) En pratique, notamment si le compte rendu rédigé est choisi comme point de départ du TER, les notes « primaires » prises lors de l'observation *in situ* pourront être sollicitées à nouveau pour modifier ce compte rendu initial, et cela notamment parce que les besoins de l'***analyse*** à réaliser pourront être revus en fonction des besoins de l'***évaluation*** à laquelle il conviendra de procéder en vue du travail de ***développement*** ultérieur. Il pourra ainsi y avoir ***rétroaction*** des étapes ultérieures (analyse, évaluation, développement) sur l'étape de l'observation proprement dite – point sur lequel nous reviendrons.

3.3. Analyser la gestion de la séance

a) On a jusqu'ici travaillé les trois premières rubriques constitutives de l'analyse didactique d'une séance observée. La matière de la quatrième rubrique, soit ce qui relève proprement de la ***gestion de la séance***, est souvent délicat à appréhender. La chose est paradoxale : car la gestion de la séance, avec sa chronique toute en surface, ses repères événementiels, ses épisodes frappants ou attachants, etc., est ce qui s'impose d'emblée à l'observateur profane – lequel tend à ignorer et l'organisation mathématique émergente, et l'organisation didactique qui permet cette émergence !

b) Le travail du professeur pour gérer la séance porte sur ce qui fait la matière des trois rubriques précédemment envisagées : c'est par la gestion de la séance que la séance ***se structure***, qu'une ***organisation mathématique*** émerge, dotant ainsi la séance d'un ***contenu***, et cela par le moyen d'une ***organisation de l'étude*** que le professeur doit savoir faire vivre *hic et nunc*, dans l'immédiateté de la séance.

• Pour tenter de mieux saisir ce qui appartient proprement au registre de la gestion de la séance, on peut se livrer à l'expérience mentale suivante. Soit une séance pour laquelle un scénario mathématico-didactique a été construit (un tel scénario n'est pas difficile à reconstituer dans ses grandes lignes en ce qui concerne les séances observées dans les deux classes de 5^{e}, par exemple). Il s'agit alors de « réaliser » le scénario, concrètement, dans une certaine classe : tel est l'objet de la gestion de la séance par le professeur. On voit alors immédiatement que, pour des réactions identiques des élèves, les décisions et les interventions du professeur pourront varier, aboutissant ainsi à des « gestions de la séance » substantiellement différentes !

c) Afin de se former à dégager de tels éléments de gestion *in situ*, on observe le début de la séance filmée dans la classe de 5^{e} travaillant sur les nombres relatifs.

4. Questionnaire d'évaluation

a) Ce questionnaire comporte les quatre questions suivantes.

Question 1a. Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous paraît plutôt *positif*.

Question 1b. Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt *négatif*.

Question 2a. Indiquez *un* aspect de votre travail personnel dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît plutôt *positif*.

Question 2b. Indiquez *un* aspect de votre travail personnel dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt *négatif*.

b) Chaque participant remplit individuellement la fiche qui lui a été distribuée.

c) Les formulations recueillies seront mises en ligne le plus rapidement possible. Elles feront l'objet d'un commentaire lors de la journée de formation suivante, dans le cadre du séminaire du matin ainsi qu'en GFP.

IUFM d’Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 7 : mardi 24 octobre 2006

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. L’Encyclopédie du professeur de mathématiques : *Le temps de l’étude* // 2. Forum des questions // 3. Observation & analyses // 4. Problématique et fonctionnement du Séminaire

0. Questions de la semaine

Journée 7 (24 octobre 2006)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4^e^ (et soutien en 5^e^)

J’aborderai au début du deuxième trimestre le chapitre « Cosinus d’un angle aigu ». Pourquoi parle-t-on d’abord du cosinus d’un angle en 4^e^ et pas du sinus de la tangente ?

1. L’Encyclopédie du professeur de mathématiques

1.1. Une nouvelle notice : *Le temps de l’étude*

a) Une notice intitulée ***Le temps de l’étude*** est diffusée. Le thème en est présenté dans les lignes suivantes.

> *Dans la conduite d’une classe, le professeur a en charge la tâche essentielle de créer du temps didactique, ce* temps de l’étude *dont il règle l’avancée tout en régulant les apprentissages qu’impulse et scande cette avancée. On examine ci-après les principaux problèmes qui surgissent dans l’exercice de cette mission essentielle du professeur, qui le distingue notamment de tout autre « aide à l’étude ».*

b) Dans ce qui suit, on examine les deux premières parties de la notice.

1.2. Le programme de la classe et son organisation

> 1.1. L’activité de la classe, et notamment le ***contenu*** de cette activité, n’est pas livrée à la fantaisie ou à l’arbitraire du professeur, mais découle de décisions de niveau supérieur qui engagent ***professeur et élèves*** dans un ***pacte d’instruction*** précisant les ***questions*** sur lesquelles la classe devra s’efforcer de s’instruire tout au long de l’année [1. Sur la « fabrication » des programmes, voir l’ouvrage récent de Dominique Raulin, *Les programmes scolaires. Des disciplines souveraines au socle commun* (Retz, Paris, 2006).].

1.2. La pratique aujourd'hui banale de fixer dans un programme le détail d'une matière à étudier est, à l'échelle historique, relativement récente. Le mot ***programme***, emprunté à la fin du XVII^{e} siècle au latin classique *programma* (littéralement, « ce qui est écrit à l'avance »), s'applique d'abord, en effet, non à la description de la matière d'un cours, mais à la présentation (par voie d'affiche par exemple) des cérémonies et spectacles publics que les établissements secondaires avaient alors coutume d'organiser. C'est au XIX^{e} siècle que le mot de programme acquiert son sens actuel : l'apparition des programmes scolaires est en effet liée au développement progressif, à partir de la fin du XVIII^{e} siècle, du système des ***examens et concours*** (brevets, concours d'entrée aux écoles normales, baccalauréat, concours des grandes écoles, etc.). Ceux-ci, au début, ***n'ont pas de programme*** et les candidats sont ainsi à la merci des examinateurs, dont les préparateurs étudient les questions préférées afin d'établir le programme idéal de préparation. Pour les concours d'entrée aux grandes écoles scientifiques, cette situation conduira à la publication de revues spécialisées – telle la *Revue de mathématiques spéciales* de Henry Vuibert – qui recueillent et font connaître les questions les plus fréquemment posées, créant en cela une tradition qui dure encore [2. La *RMS* a pris depuis quelques années le nom de *Revue des mathématiques de l'enseignement supérieur*. Henry Vuibert, alors le plus jeune agrégé de mathématiques de France, fonde en 1877 la librairie qui porte toujours son nom. En 1879, il publie un recueil de *Questions de mathématiques élémentaires à l'usage des candidats aux écoles du gouvernement, des aspirants au baccalauréat ès sciences et des élèves des établissements d'enseignement secondaire*. En 1885, il crée les *Annales du Bac*, première collection parascolaire en France, qui sera un immense succès éditorial.]. Mais elle conduit aussi à des pratiques didactico-mercantiles beaucoup plus douteuses : « Sous la monarchie de Juillet, écrit ainsi l'historien Antoine Prost, triomphe [...] un bachotage quasi industriel. Des préparateurs spécialisés étudient les jurys et garantissent le succès : leurs services, qu'ils proposent dans les petites annonces des journaux, sont payables à forfait après réception [3. Antoine Prost, *Histoire de l'enseignement en France, 1800-1967,* Armand Colin, Paris, 1968, p. 60.]. » Sous la pression des parents et des professeurs, on cherche donc à limiter la dangereuse liberté des examinateurs. En 1821, ceux-ci doivent rédiger à l'avance et numéroter les questions qu'ils poseront au baccalauréat : la question que le candidat doit traiter est déterminée par tirage au hasard, dans une urne, d'une boule portant un numéro. En 1840, ce travail est fait directement par le ministère, qui publie la liste en 500 numéros – dont 50 pour les mathématiques – des questions qui pourront « sortir » au bac. Ainsi en va-t-il des questions suivantes, relatives à l'arithmétique :

1. Définitions. Qu'appelle-t-on grandeur ou quantité ? Unité ? Nombre ? Nombre abstrait et nombre concret ?
Numération. Objet de la numération. Principe fondamental. Les différents ordres d'unités. Changements que subit un nombre lorsqu'on écrit à sa droite ou qu'on y supprime un ou plusieurs zéros.
2. Addition. Objet de cette opération. Règle. Pourquoi commence-t-on le calcul par la droite ? Preuve de l'addition par l'addition même.
Soustraction. Explication de cette opération. Sa preuve par l'addition.
3. Multiplication. Définition particulière au cas des nombres entiers. Qu'appelle-t-on multiplicande ? Multiplicateur ? Produit ? Facteurs ? Espèce des unités du produit.
Table de Pythagore. Multiplication par un nombre d'un seul chiffre. Multiplication par un nombre composé d'un seul chiffre suivi de plusieurs zéros. Multiplication par un nombre de plusieurs chiffres. Cas où les facteurs sont terminés par des zéros. Preuve de la multiplication au moyen d'une autre multiplication.
4. Démonstration des deux principes suivants : a) le produit de deux nombres reste le même quand on change l'ordre des deux facteurs ; b) on multiplie un nombre par un produit de deux facteurs en multipliant ce nombre successivement par chacun de ces facteurs. Usage principal de la multiplication.

Ainsi naît le premier programme de baccalauréat : les premiers programmes d'études sont d'abord des ***programmes d'examen***, énumérant une liste de ***questions*** à étudier en vue de l'examen.

1.3. Cette structure primitive est aujourd'hui moins visible, mais elle demeure. D'une façon générale, les types de questions, que l'on peut regarder comme des ***sujets*** d'étude, sont regroupés plus ou moins clairement dans des organisations mathématiques ***locales***, les ***thèmes d'études***, qu'on peut à leur tour « amalgamer » pour former des organisations ***régionales***, les ***secteurs d'études***, dont la réunion constitue enfin une organisation ***globale*** ou ***domaine d'études***. C'est ainsi que les programmes de mathématiques actuellement en vigueur en 4^{e} et 3^{e} font apparaître trois grands domaines : le domaine des ***Travaux géométriques***, le domaine des ***Travaux numériques***, enfin un domaine composite intitulé ***Organisation et gestion de données. Fonctions***.

1.4. Les domaines d'études se laissent analyser en ***secteurs*** [4. Le découpage en secteurs indiqué ci-après est celui que fait apparaître le tableau synoptique des programmes du collège publié avec le programme de 3e actuellement en vigueur (voir le document *Programmes du collège*).]. Dans les classes de 4e et 3e, ainsi, le domaine des travaux géométriques comporte deux secteurs, intitulés respectivement ***Configurations, constructions et transformations*** et ***Repérage, distances et angles***. Le domaine des travaux numériques réunit de même deux secteurs : ***Nombres et calcul numérique***, et ***Calcul littéral*** (incluant le calcul « équationnel »). Le troisième domaine, enfin, se décompose également en deux secteurs, comme son intitulé l'indique : ***Représentation et organisation de données*** et ***Fonctions numériques***. Un septième secteur, ***interdomaine***, doit encore être dégagé : empruntant sa matière aux trois grands domaines indiqués, il est relatif aux ***Grandeurs et mesures***. Dans les nouveaux programmes de collège publiés jusqu'ici (6e, 5e, 4e), ce secteur interdomaine est devenu un domaine d'études à part entière : sous l'intitulé ***Grandeurs et mesures***, précisément, il prend place à la suite des trois domaines traditionnels que les programmes nouveaux détaillent successivement sous l'intitulé ***Organisation et gestion de données. Fonctions*** pour le premier, ***Nombres et calculs*** pour le deuxième et ***Géométrie*** pour le troisième. En 5e, par exemple, ce dernier domaine est scindé en trois secteurs intitulés respectivement ***Figures planes***, ***Prismes droits, cylindres de révolution*** et ***Symétrie centrale***.

1.5. Chaque secteur est constitué d'un certain nombre de ***thèmes*** : le secteur ***Figures planes*** comporte ainsi, en 5e, le thème des ***Figures simples ayant un centre de symétrie ou des axes de symétrie***, celui de la ***Caractérisation angulaire du parallélisme*** ou encore le thème intitulé ***Construction de triangles et inégalité triangulaire***. À son tour, chaque thème se décline en ***sujets*** d'étude, c'est-à-dire, en pratique, en ***types de tâches mathématiques*** que l'élève doit étudier afin d'apprendre à les accomplir de manière satisfaisante, acquérant par là une nouvelle ***compétence*** mathématique. S'agissant du thème *Construction de triangles et inégalité triangulaire*, les élèves de 5e doivent ainsi apprendre à « construire un triangle connaissant la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents », ou encore « connaissant les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés ».

1.6. Le même type d'analyse vaut pour ***l'ensemble des classes de la scolarité secondaire***. En 2de, le programme est ainsi scindé en ***trois domaines*** : ***Statistique***, ***Calcul et fonctions***, ***Géométrie***. Le domaine ***Calcul et fonctions*** se découpe en ***trois secteurs*** : le secteur ***des nombres***, avec ***deux*** thèmes d'études (« Nature et écriture des nombres » et « Ordre des nombres. Valeur absolue d'un nombre ») ; celui ***des fonctions***, avec ***quatre*** thèmes d'études (« Fonctions », « Étude qualitative de fonctions », « Premières fonctions de référence » et « Fonctions linéaires et fonctions affines ») ; le secteur (qu'on peut appeler) ***des modèles et de la modélisation algébriques***, avec ***deux*** thèmes d'études (celui des modèles, intitulé « Fonctions et formules algébriques », et celui de la modélisation, intitulé « Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations »).

1.3. La programmation de l'étude

2.1. L'observation montre que nombre de professeurs ont tendance à voir le programme comme ***un ensemble de thèmes***, en oubliant ***les niveaux supérieurs d'organisation*** (secteurs et domaines), au point quelquefois de sembler ignorer, par exemple, que le programme de 2de se distribue en ***trois*** domaines, et non deux [5. Les élèves, quant à eux, ont tendance à s'arrêter aux ***sujets*** d'étude, sans doute parce que les évaluations scolaires portent aujourd'hui de manière presque exclusive sur ce niveau d'organisation mathématique.]. Cette réduction de la discipline se fait en outre, traditionnellement, sur la base d'un certain ***enfermement disciplinaire***, contraire à l'évolution engagée depuis quelques années dans le sens d'une « recomposition » pluridisciplinaire, avec notamment la création d'un ***« pôle disciplinaire »*** relatif à la ***« culture scientifique et technique »*** rassemblant, au collège [6. Voir le « cahier des exigences pour le collégien », qu'on trouvera dans le document *Qu'apprend-on au collège ?* Le même texte intègre les mathématiques dans un second « pôle », celui de la « maîtrise des langages ».], en relation avec la mise en place des ***itinéraires de découverte*** (IDD) et, à partir de 2006-2007 en 5e, celle des ***thèmes de convergence*** [7. Sur cette dernière question, voir le document *Mathématiques en 5e et 4e*. Les six thèmes de convergence sont les suivants : 1. *Énergie* ; 2. *Environnement et développement durable* ; 3. *Météorologie et climatologie* ; 4. *Importance du mode de pensée statistique dans le regard scientifique sur le monde* ; 5. *Santé* ; 6. *Sécurité*.], les sciences de la vie et de la Terre, la physique-chimie, la technologie, les mathématiques, « auxquelles s'ajoutent l'éducation physique et sportive ainsi que la géographie ». Un mouvement analogue de rapprochement disciplinaire s'est affirmé depuis 1999 et s'est concrétisé notamment par la création des ***travaux personnels encadrés*** (TPE), notamment dans les classes de première [8. Voir le texte « L'enseignement des sciences au lycée » paru dans le *BOEN* hors série no 6 du 12 août 1999 et reproduit dans le document *Programme de Seconde*. Notons que les TPE, obligatoires en Terminale jusqu'en 2004-2005, y ont été supprimés à partir de 2005-2006.].

2.2. La réduction du programme aux thèmes d'études est peut-être en partie impulsée par l'obligation ***de programmer l'étude dans le temps***, c'est-à-dire de créer un ***ordre*** qui ***enchaîne*** les éléments à étudier, chaque élément nouvellement abordé s'articulant avec les éléments précédemment étudiés. Soulignons pour le contraste que le professeur disposait autrefois d'une programmation « canonique », qu'il lui restait alors à ***réaliser*** dans la classe. Ainsi, dans un ouvrage où il propose une modification profonde du curriculum mathématique, le mathématicien Henri Lebesgue (1875-1941) pouvait-il encore se référer au « premier livre de la géométrie » (ou au second, ou au troisième) comme à une réalité connue de tous ses lecteurs : « Ce chapitre, écrivait-il par exemple [9. Henri Lebesgue, *La mesure des grandeurs*, Albert Blanchard, Paris, 1975, p. 28. (C'est nous qui soulignons.)], serait aussi ***le premier*** en quelque sorte ***de la géométrie*** et l'on serait donc fondé à parler, en géométrie, de la distance de deux points. Actuellement, on ne parle pas du nombre distance au ***premier livre de la géométrie*** ; on n'en parle qu'***au troisième***, après avoir parlé ***au second***, de la mesure des angles et des arcs [...]. D'où vient cet ordre traditionnel ? On en est réduit à des conjectures. »

2.3. La matière à enseigner, ordonnée dans ses grandes masses par la tradition, faisait en outre l'objet de diverses programmations portées à la connaissance des professeurs. Dans l'enseignement primaire, en particulier, nombre de manuels proposaient à leurs utilisateurs une ***répartition mensuelle***, voire ***hebdomadaire***, et même ***journalière***, de la matière à étudier. Certains ouvrages spécialisés fournissaient, avec les programmes et instructions, des répartitions, mensuelles et hebdomadaires, pour les différentes classes et les différentes matières. C'est de l'un d'eux, publié dans les années 1950, qu'est tirée par exemple la proposition suivante, relative au mois d'octobre, concernant le « cours supérieur [10. Classe qui, bien que relevant de l'école primaire, correspondait à peu près à la 6^{e} actuelle.] » à propos des trois domaines d'études du programme :

1. *Système métrique* : Mesure des longueurs. Emploi des instruments usuels (chaîne ou ruban d'arpenteur, mètres en bois, en métal, règles graduées et réglets).
2. *Géométrie* : Longueur de la circonférence. Usage de la règle, de l'équerre, du rapporteur et du compas pour des tracés usuels. Constructions simples : droites perpendiculaires, – droites parallèles – angle égal à un angle donné – bissectrice d'un angle, etc.
3. *Arithmétique* : Problèmes : vitesse dans le cas d'un mouvement uniforme ; espace parcouru pendant l'unité de temps et temps nécessaire au parcours de l'unité d'espace. Numération des mesures de longueur.

2.4. Par contraste, c'est aujourd'hui au professeur qu'il revient de ***planifier et de programmer l'étude***, c'est-à-dire d'établir une ***progression***, ce pour quoi les textes officiels lui reconnaissent « une totale liberté », mais… « à condition que soient atteints les objectifs visés par le programme » ! Il s'agit là d'une tâche dans laquelle le professeur engage ainsi ***seul*** sa responsabilité de « directeur d'étude », à ce point que la programmation de l'étude tend à prendre, dans son activité, le statut d'un acte ***privé***, quasi intime, que l'on ne mentionne guère, fût-ce à titre de problème, dans les discussions entre collègues – sauf bien sûr si une « progression commune » est adoptée par l'équipe disciplinaire de niveau. Or il s'agit d'une tâche tout à la fois fondamentale et d'une grande difficulté – notamment lors de la prise en charge d'une classe nouvelle –, à laquelle il importe d'accorder ***une priorité dans l'organisation générale de l'étude***, et de revenir – pour des retouches et des ajustements – ***tout au long de l'année***.

2.5. Faute d'une programmation toute faite, on peut, dans une première étape, établir une répartition, même grossière et provisoire, qui porte ***sur l'ensemble de l'année***, et qui couvre ***l'ensemble des domaines et secteurs*** composant le programme. Cette première répartition, élaborée en conformité avec le texte du programme, peut avantageusement prendre appui sur les découpages – formulés généralement en termes de thèmes d'étude – proposés par les ***manuels***, ou, de manière parfois plus utilisable (parce que davantage « stylisée »), par les ouvrages de synthèse qui s'adressent ***aux élèves***. Ainsi, pour la classe de 3^{e}, tel ouvrage relevant de cette dernière catégorie propose-t-il de fait au professeur intéressé le découpage suivant :

1. Nombres et calculs. 2. Développer – Factoriser. 3. Équations à une inconnue. 4. Inéquations à une inconnue. 5. Systèmes à deux inconnues. 6. Applications affines. 7. Équations de droites. 8. Géométrie analytique. 9. Géométrie plane. 10. Trigonométrie. 11. Géométrie dans l'espace. 12. Autour de Thalès. 13. Translation et vecteurs. 14. Statistiques.

Dans une deuxième étape, les mêmes outils (texte du programme, ouvrages divers) permettent alors une première analyse de chacun des thèmes retenus. C'est ainsi que le chapitre 13, *Translation et vecteurs*, de l'ouvrage mentionné est découpé de la manière suivante :

13. Translation et vecteurs : Relier translation et vecteur / Relier vecteur et parallélogramme / Ajouter des vecteurs / Utiliser les coordonnées d'un vecteur.

Chacune des rubriques identifiées devra enfin, dans une troisième étape, faire l'objet d'une ultime analyse, en termes de ***types de problèmes*** (ou ***types de tâches***).

2.6. Le travail de programmation suppose alors que l'on établisse un ***« budget temps »*** précisant le temps d'horloge alloué à l'étude de chacun des blocs thématiques identifiés. Faute d'expérience, on peut, pour cela, considérer en première approximation que le ***programme*** est fait d'une succession de thèmes θ_k ($1 \le k \le n$), que, dans le cas de la 2[de] par exemple, on peut identifier, *grosso modo*, aux différents « blocs » qui composent le programme (on les désigne ici par les premiers mots de leur libellé) :

I. Statistique. 1. Résumé numérique… **2.** Définition de la distribution… **3.** Simulation et fluctuation d'échantillonnage…
II. Calcul et fonctions. 1. Nature et écriture des nombres… 2**.** Ordre des nombres… **3.** Fonctions… **4.** Étude qualitative de fonctions… **5.** Premières fonctions… **6.** Fonctions linéaires et fonctions affines… **7.** Fonctions et formules algébriques… **8.** Mise en équation…
III. Géométrie. 1. Géométrie dans l'espace **2.** Les configurations du plan... **3.** Triangles isométriques… **4.** Repérage dans le plan… **5.** Multiplication d'un vecteur par un réel… **6.** Équations de droites… **7.** Système d'équations linéaires...

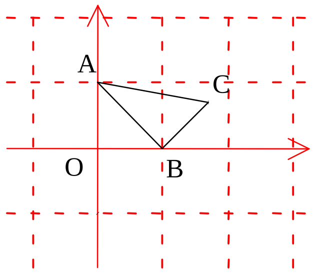
Un modèle arithmétique grossier consiste alors à répartir ces blocs entre les quelque 30 semaines ouvrables (auxquelles s'ajoutent 3 semaines consacrées à ce que le programme de 2[de] nomme des « thèmes d'étude » et qu'il vaut mieux désigner comme thèmes d'études *libres*, TEL). La durée adoptée ici est évidemment un ***maximum*** ; mais il faut envisager fermement de travailler ***jusqu'à la fin de l'année***, et le ***faire entendre aux élèves*** en leur indiquant clairement ce « programme de fin d'année ». Pour effectuer cette allocation, on peut faire comme si chacun des blocs exigeait le même temps d'étude : l'étude de chaque bloc se verrait ainsi allouée une durée de 30 semaines divisée par 3 + 8 + 7, soit 1,7 semaines environ [11. La « semaine » est ici une unité de compte, et non une réalité calendaire, en particulier si l'on mène de front, chaque semaine, l'étude de deux thèmes du programme.]. Toujours de manière formelle – faute de mieux –, on affinera ensuite cette première allocation en la corrigeant par une répartition proportionnelle au nombre de pages occupées par chaque bloc dans le manuel de la classe (par exemple) ou au nombre de sous-blocs en lesquels on les aura éventuellement décomposés.

2.7. Les opérations précédentes ne donnent pas encore une programmation annuelle : il reste à mettre en bijection les « blocs » et les unités de temps, c'est-à-dire à élaborer un ***calendrier de l'étude***. Pour cela, on doit décider si l'on procède par enseignement d'un bloc après l'autre, ou – ce qu'on peut recommander – si l'on opte pour l'étude en parallèle de ***deux blocs*** appartenant à deux secteurs différents (voire à deux domaines différents), avec toutefois un ***décalage*** temporel entre les deux (en gros, il convient d'avoir dépassé les principales difficultés du premier pour lancer l'étude du second). Bien entendu, il est possible de couper en deux sous-blocs un bloc ***trop substantiel***, pour l'étudier en deux ***périodes séparées de quelques semaines***, ce qui exige une gestion soignée des traces écrites. Il en va ainsi notamment lorsque les relations de ***dépendance mathématique*** entre les divers éléments que le choix d'une progression déterminée fait se succéder font que, lors de l'étude d'un thème θ, certains outils mathématiques nécessaires à un traitement « complet » du thème ne soient pas encore disponibles : lors de l'étude du thème θ' qui mettra en place ces outils, on reviendra donc sur les types de problèmes associés à θ que l'on avait provisoirement laissés de côté. Plus généralement, il conviendra d'intégrer dans le travail de programmation de l'étude le traitement des relations ***interthématiques***, voire ***intersectorielles***, que la structure explicite du programme tendrait à occulter.

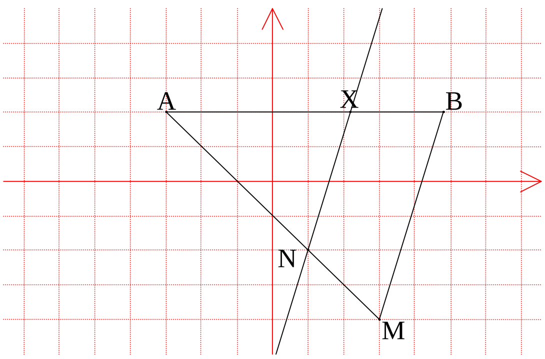
2.8. Quelle que soit la programmation adoptée, une ***gestion didactique rigoureuse*** est absolument indispensable, ce qui passe en particulier par le respect de quatre principes essentiels : ***premièrement***, ne pas pratiquer de « révision systématique », mais aller autant que possible de l'avant (en s'assurant qu'on ne laisse pas les élèves derrière soi) ; ***deuxièmement***, ne pas se laisser aller à une « marche aléatoire » dans le programme, en se satisfaisant de « donner du travail aux élèves », en classe et hors classe, car il est irréaliste d'imaginer pouvoir revenir ***à loisir*** sur tel ou tel point déjà abordé ; ***troisièmement***, déterminer de manière précise, pour chacun des thèmes à enseigner, ***le contenu « nécessaire et suffisant »***, en se gardant de céder (au nom de la « liberté pédagogique » du professeur)

à la tentation ravageuse de faire des « extra » sous la forme par exemple d'« exercices » isolés qui ne seraient pas clairement des spécimens des ***quelques*** types de problèmes relevant sans ambiguïté du thème en cours d'étude ; ***quatrièmement***, faire régulièrement le point sur le calendrier prévu et la marche réelle de l'étude, afin de retoucher la programmation et d'appliquer plus rigoureusement les trois principes précédents.

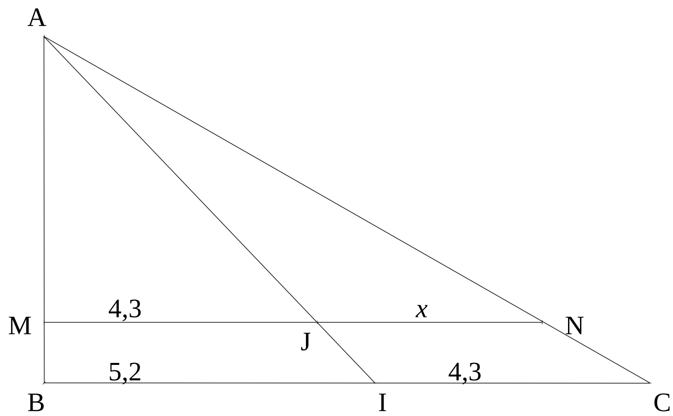
2.9. La mise en œuvre des principes de gestion précédents suppose évidemment l'existence d'une ***dynamique de l'étude*** que le professeur s'interdira de laisser s'emballer, dériver, musarder, etc. Dans une organisation générale de l'étude d'un style maintenant classique, cette dynamique est supposée être régulièrement relancée par l'introduction, par le professeur, d'une AER nouvelle, souvent sans lien avec celles qui l'ont précédées non plus qu'avec celles qui suivront [12. Sur la notion d'AER, voir la notice *Première rentrée des classes*.]. Cette structure faiblement intégrée de la suite des AER impulsant l'étude pose problème : l'expérience montre en effet que cette ossature didactique est relativement fragile parce que l'introduction *ex abrupto* d'une AER nouvelle se fait alors, en règle générale, sans ***motivation mathématique*** suffisante, et en particulier sans véritable raison autre que la volonté – du professeur, ou même de la classe, quand celle-ci a voix au chapitre en la matière – de lancer l'étude de tel ou tel bloc thématique. Par contraste, la dynamique à lancer et à nourrir gagne à avoir pour moteur, non une suite peu intégrée d'AER organisées chacune autour d'une question ***isolée***, dont le choix, extrinsèque, resterait entièrement à la charge du professeur (éventuellement en dialogue avec la classe), mais un petit nombre de suites d'AER intégrées au sein de ce qu'on nommera un PER, un ***parcours d'étude et de recherche*** engendré par une ***« grande » question***, c'est-à-dire par une question ayant un ***fort pouvoir générateur***, et qui va donc ***motiver***, au plan de la connaissance, l'étude de beaucoup de questions.



À titre d'exemple, considérons la figure ci-dessus, sur laquelle $\widehat{ABC} = 90°$ et BC = 1 ; on voit aisément qu'on a $AC = \sqrt{3}$. On a ainsi ***« construit graphiquement »*** le nombre $\sqrt{3}$, et on obtient alors une valeur décimale approchée de ce nombre ***par une simple mesure de longueur***. Cet exemple illustre de manière simplifiée ce qu'on nommait autrefois ***calcul graphique***, domaine des mathématiques appliquées aujourd'hui presque oublié mais qui, pendant plus d'un siècle à partir de 1860, permit aux ingénieurs d'effectuer graphiquement des calculs en tous genres (évaluation de fonctions, calcul d'intégrales, résolution de systèmes d'équations, etc.). En 4^{e}, notamment, on peut se proposer un parcours d'étude et de recherche portant sur la question de la construction d'un « calculateur graphique », c'est-à-dire visant à développer un ensemble d'***algorithmes géométriques*** permettant d'effectuer graphiquement les principaux types de calculs rencontrés à ce niveau. Sur la figure ci-dessous, on a ainsi « construit », à titre d'exemple, sur papier quadrillé, le nombre $AX = \frac{2}{3} \times 7{,}8$.



Sur la figure ci-après, on a construit, sur papier blanc, le nombre $x = \frac{4{,}3^2}{5{,}2}$.



À partir du calculateur graphique peu à peu construit, on pourra fabriquer un calculateur ***électronique*** en utilisant un logiciel de géométrie dynamique tel Géoplan : il suffit pour cela d'exécuter sur Géoplan l'algorithme géométrique trouvé, puis de demander au logiciel de mesurer la distance voulue. Mais on notera surtout que l'étude de la question génératrice du PER – comment calculer graphiquement ? – engendre nombre de questions qu'il peut être pertinent d'étudier en 4^e (ou en d'autres classes). Ainsi apparaît « naturel », dans ce PER, de se demander quels entiers naturels n s'écrivent comme une ***somme*** de deux carrés d'entiers ($n = x^2 + y^2$) : si par exemple on cherche à « construire » le nombre $\sqrt{202}$, on observera que $202 = 11^2 + 9^2$ et il suffira alors de mesurer, sur une feuille de papier d'écolier, la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle ont pour longueur 11 cm et 9 cm. On justifierait de semblable façon le fait de s'interroger [13. Cette dernière question peut être étudiée en 4^e : on montre aisément que les entiers en question sont les entiers impairs et les entiers multiples de 4. La première, en revanche, ne peut guère être étudiée très avant (on démontre que les entiers cherchés sont ceux dans la décomposition en facteurs premiers desquels les facteurs premiers congrus à 3 modulo 4 sont affectés d'un exposant *pair*) ; mais ce n'est pas une raison pour ne pas la poser, et l'étudier quelque peu, si elle se présente.] sur la nature des entiers n qui s'écrivent comme une ***différence*** de carrés d'entiers ($n = x^2 - y^2$). Bien entendu, le fait de prendre la décision de lancer la classe dans l'étude de telle question poussée en avant par l'étude de la question à l'origine du PER, ou le fait, cette étude amorcée, de l'interrompre à tel moment, incombe en dernier ressort au professeur, agissant en directeur d'étude selon les principes indiqués plus haut.

1.4. Une question de la semaine

On aura observé que les développements précédents contiennent des éléments de réponse à la question que voici, que l'on ne commentera donc pas davantage ici.

Est-il pertinent de traiter simultanément des chapitres appartenant à des domaines différents et, si oui, un découpage horaire est-il recommandé (par exemple du numérique en 1re heure et de la géométrie en 2^e heure ou inversement, le lundi et le vendredi) ? (RH, MJ, 4^e, 6)

2. Forum des questions

2.1. Orthotypographie & orthographe

a) On s'arrête d'abord sur la question que voici.

Doit-on écrire « numéro » n^o ou n$^{\underline{o}}$? (SM1, MJ, 4^e, 6)

• Dans l'abréviation n^o, le signe en exposant est la lettre *o* minuscule : numéro → numéro → no → n^o.

• Cette abréviation est la bonne : le soulignement du *o* en exposant est inutile.

• On notera que, au pluriel, « numéros » s'abrège normalement en n^{os}.

b) Une autre question professionnelle, d'orthographe cette fois, a été soulevée.

Doit-on orthographier « *a* et *b* sont de même signe » ou « *a* et *b* sont de mêmes signes » ? (AMJ, CR, 2de, 6)

• De même que deux personnes peuvent être de même père (ou de pères différents), de même deux nombres peuvent être de même signe (ou de signes différents).

• À titre d'illustration, voici une phrase d'André Gide citée par Jean-Paul Colin dans son *Dictionnaire des difficultés de la langue française* (Le Robert, Paris, 1994) : *« Nous avions même taille, même aspect, même démarche, mêmes goûts. »*

2.2. Questions de vocabulaire

a) On considère d'abord la question que voici.

Y a-t-il une différence entre « corrigé » et « correction » ? (SM1, MJ, 4^{e}, 6)

• D'une façon générale, la correction est… l'***action*** de corriger, ce verbe dérivant du latin *corrigere* « redresser, réformer ». Il y a correction lorsqu'un professeur corrige des travaux écrits d'élèves ou d'étudiants. Il y avait correction encore lorsque, au XVIII^{e} siècle, dans les collèges de Jésuites, le ***corrector*** infligeait le fouet aux élèves qui lui étaient désignés comme devant recevoir cette punition.

• On notera l'observation suivante due au philosophe Henri Bergson (1859-1941), prix Nobel de littérature 1927 :

> Les corrections les plus utiles sont, je crois, celles qui soulignent les qualités plutôt que les défauts. On arrive plutôt à remédier à ses défauts en prenant ses qualités pour point d'appui, qu'en contemplant tels quels des défauts simplement accusés. Je ne sais même pas si, dans le second cas, nous n'y portons pas une certaine complaisance qui nous pousse à les déclarer incorrigibles.

• La citation précédente est extraite du *Dictionnaire de la langue pédagogique* de Paul Foulquié (PUF, Paris, 1971) : cet auteur l'a extraite de l'ouvrage de G. Maire, *Bergson, mon maître* (Grasset, Paris, 1935). On trouve dans ce même dictionnaire le développement suivant.

> **Corrigé**. – Écrit dans lequel le professeur, après avoir corrigé les devoirs de ses élèves en relevant qualités et défauts, traite à son tour la même question pour leur montrer une bonne manière de la traiter.

• Le substantif « corrigé » au sens précédent, précise le *Dictionnaire culturel en langue française* (Le Robert, Paris, 2005), apparaît en 1834. Sa formation – il procède du participe passé du verbe *corriger* – peut aujourd'hui conduire à douter de la distinction classique entre correction (l'action) et corrigé (le résultat de l'action), compte tenu de l'amplification récente du processus de création de substantifs à partir de participes passés : dans un certain jargon qui tend à devenir commun, on parlera ainsi du *vécu*, de l'*éprouvé*, du *ressenti*, du *raconté*, etc., même quand des substantifs en bonne et due forme existent (le « raconté », par exemple, c'est, tout bonnement, le *récit* que l'on fait de quelque chose).

• Notons enfin que l'on nomme aussi « correction », comme chacun sait, le temps passé en classe à écouter le professeur commenter les travaux qu'il a corrigés, et faire donc, de façon informelle ou davantage structurée, un « rapport de correction », auquel pouvait s'ajouter autrefois la présentation d'un « corrigé » d'origine magistrale. On verra que, dans la suite de ce Séminaire, ces dispositifs seront amenés à évoluer.

b) On répond maintenant à l'interrogation suivante, en empruntant pour cela, en l'espèce, au Séminaire 2003-2004.

Quand on parle de « côtés » (d'un carré, d'un triangle, etc.), cela signifie-t-il les segments ([AB], [AC], [BC] pour le triangle ABC ou les longueurs de ces segments (on parle de carré de côté *z*…) ? (MG1, CR, 2^de^, 6)

• Dans les notes relatives à la séance 11 de l'année 2003-2004, tout d'abord, on peut lire ce qui suit.

Correct, pas correct ?

1. Est-il vrai qu'il n'est pas correct mathématiquement de dire « prolonger la droite » mais plutôt « tracer la droite support » ? (2^de^, 10, 2003-2004)

2. En 4^e^, on étudie le chapitre sur les droites remarquables du triangle. Selon les livres, le vocabulaire utilisé pour décrire les médianes ou les bissectrices varie (droite ou segment pour la médiane, droite ou demi-droite pour la bissectrice) sans que le programme précise la chose. Quelle est la désignation la mieux appropriée ? Ou est-ce laissé au seul jugement du professeur ? (4^e^, 10, 2003-2004)

Matériaux pour une réponse

1. Une droite est un objet géométrique distinct de cet autre objet géométrique qu'on appelle segment de droite : une droite est, en effet, « infinie dans les deux sens ». Bien entendu, une droite géométrique ne peut être représentée ***graphiquement*** que par un ***segment*** de droite graphique : droites graphiques et segments graphiques ne se distinguent donc pas !

2. En supposant que le support est assez grand, on peut toujours prolonger un segment graphique (dans un sens, dans l'autre), ce qui fait un autre segment graphique – qui pourra selon le cas représenter un segment de droite (géométrique) ou une droite (géométrique). Mais on ne peut « prolonger » une droite (géométrique). On peut dire en revanche que l'on va prolonger le segment (graphique) qui représente la droite (géométrique), ce qu'on peut vouloir abréger en « prolonger la droite » : mais il s'agit là d'un abus de langage !

3. Longtemps, ce problème ne s'est pas posé parce qu'on faisait du mot « droite » un usage utilement polysémique. Voici par exemple comme un *Traité de géométrie élémentaire* publié en 1885 formule des théorèmes encore classiques en 4^e^ :

… la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égale à sa moitié.

…

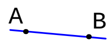
Corollaire. – Si dans un trapèze on mène une parallèle aux bases par le milieu d'un de ses côtés non parallèles, cette droite est égale à la demi-somme des bases.

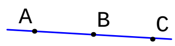
4. Cette pratique traditionnelle a été critiquée – en particulier à l'occasion de la réforme « des mathématiques modernes », autour de 1970 – au nom de la « rigueur ». De là qu'on se soit mis à vouloir faire en toutes circonstances un emploi distinct de termes distincts, ***quel que soit le contexte***

d’emploi, et qu’on ait cherché de manière systématique à « épurer » sévèrement le langage en usage en distinguant par exemple le segment [AB] et la droite (AB) « support » du segment [AB], etc.

5. Cela noté, l’expression « tracer la droite support » n’a elle-même, en vérité, guère de sens ! On peut simplement, dans la représentation graphique d’une configuration géométrique, décider de prolonger le segment graphique censé représenter la droite géométrique *d* – afin par exemple d’y placer le point C symétrique d’un point A de *d* par rapport à un point B de *d*, comme ci-après.

6. On retrouve constamment les anciennes pratiques polysémiques dès lors que l’on parle de médianes, de hauteurs, de bissectrices, etc. Il est en effet économique (et traditionnel) d’employer le même mot pour désigner des entités étroitement apparentées – par exemple la ***droite hauteur***, le ***segment hauteur***, la ***longueur hauteur*** –, dès lors que le contexte d’emploi permet de les distinguer.



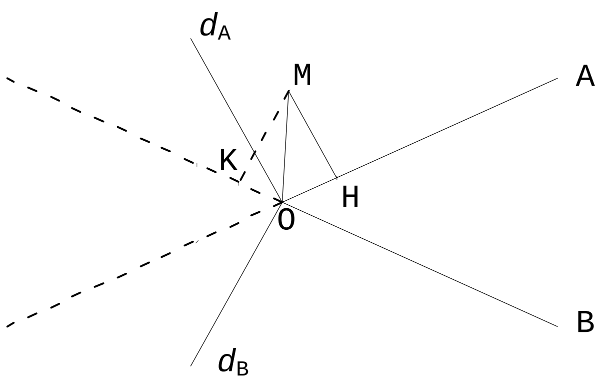


7. Bien entendu, ce langage peut comporter des ambiguïtés. Mais on cherchera à gérer celles-ci de manière ***spécifique*** dans chaque type de cas plutôt qu’à s’en prémunir « une fois pour toutes ». Dire, par exemple, que « si des triangles ABC et DEF ont même base et même hauteur, alors ils ont même aire » est une assertion dont l’hypothèse (l’antécédent) est ambiguë – même si la conclusion (le conséquent), elle, est valide dans tous les cas. Que « base » et « hauteur », en effet, désignent ici, respectivement, les côtés [AB] et [DE] et les segments [CH] et [FK] (en notant H et K les projetés orthogonaux des points C et F sur les droites (AB) et (DE), ou que l’hypothèse de l’égalité des « bases » et des « hauteurs » désigne plutôt le fait que AB = DE et CH = FK, la proposition implicative est vraie (et peut être démontrée dans la TGD à partir de la 5^{e}).

8. La question de la bissectrice pose un problème un peu différent – bien que, ici, le même mot puisse renvoyer encore et à un segment de droite (déterminé par un sommet et le point d’intersection de la bissectrice issue de ce sommet avec le côté opposé), et à sa longueur. Le problème est celui de savoir si la bissectrice d’un angle $\widehat{AOB}$ est une demi-droite ou une droite.

① Si l’on définit la bissectrice comme le lieu des points équidistants des deux côtés [OA) et [OB) de l’angle, que trouve-t-on ? La première difficulté est de définir la distance d’un point M du plan à une demi-droite $\overline{d}$. Il est normal de la définir comme le minimum de e(M, P) où P ∈ $\overline{d}$, où *e* désigne la distance euclidienne ; comme ce minimum est celui obtenu en se restreignant aux points P de $\overline{d}$ contenus dans un disque de centre M ayant avec $\overline{d}$ une intersection non vide, il existe N ∈ $\overline{d}$ où ce minimum est atteint.

② Considérons la figure ci-après.



Ce qui précède permet d’y voir quatre régions : 1) celle du secteur fermé $\widehat{AOB}$, où les points équidistants de [OA) et [OB) sont exactement les points de la demi-droite fermée bissectrice de ce secteur ; 2) les quarts de plan ouverts déterminés par les demi-droites [OA) et d_A et [OB) et d_B, où d_A et d_B sont perpendiculaires respectivement à [OA) et [OB), dans lesquels aucun point n’est équidistant des demi-droites [OA) et [OB) ; 3) le secteur angulaire fermé ***saillant*** déterminé par d_A et d_B – c’est celui qui ne contient ni A ni B –, dans lequel ***tout*** point M est équidistant des demi-droites [OA) et [OB) – la distance de M à chacune de ces demi-droites étant égale à MO.

③ On arrive ainsi à une conclusion rarement explicitée : si l'on appelle bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ l'ensemble des points ***du plan*** qui sont équidistants des ***demi-***droites [OA) et [OB), alors la bissectrice est une demi-droite (fermée) augmentée d'un secteur angulaire fermé saillant, dont les côtés sont perpendiculaires aux côtés de l'angle…

④ On voit en même temps par où pèche la définition adoptée plus haut : la bissectrice ne doit pas être définie comme « le lieu des points [du plan] équidistants des deux côtés [OA) et [OB) de l'angle » mais comme « le lieu des points du secteur angulaire fermé saillant déterminé par [OA) et [OB) qui sont équidistants des côtés [OA) et [OB) de l'angle ». Dès lors, « la » bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ est, indubitablement, une ***demi-***droite – ce qui n'empêche pas de considérer la droite « support » de cette bissectrice, laquelle est l'une des deux droites composant le lieu des points du plan équidistants des ***droites*** (OA) et (OB)…

⑤ On peut confronter les conclusions précédentes avec la tradition des manuels de l'enseignement secondaire (ou primaire supérieur, autrefois) pour y saisir ***à la fois*** la précision établie ci-dessus et son ***effacement***. Ce qui suit, en l'espèce, est un extrait du *Traité de géométrie élémentaire* déjà cité.

Théorème III. – Points équidistants de deux droites données

63. *Tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des côtés de cet angle.*

…

64. Réciproquement *tout point intérieur à un angle et équidistant des côtés de cet angle est situé sur la bissectrice de l'angle.*

…

65. **Corollaire.** – Les deux propositions précédentes peuvent se résumer ainsi : *le lieu géométrique des points* EQUIDISTANTS *des deux côtés d'un angle est la* BISSECTRICE *de l'angle ; et, par là même, le lieu des points équidistants de deux droites indéfinies se compose des bissectrices des quatre angles formés par ces droites.*

• Lors de la séance 16, la même année, les deux questions suivantes sont à leur tour examinées.

Bissectrice, etc.

1. Comment doit être définie la bissectrice d'un angle en 6^e ? Est-ce la droite ou la demi-droite qui partage l'angle en deux angles égaux ? Doit-on accepter les deux réponses de la part des élèves ? (4^e, 15, 2003-2004)

2. Dit-on *la* hauteur d'un cylindre de révolution ou *une* hauteur d'un cylindre de révolution ? (5^e, 15, 2003-2004)

• En guise de réponse, on trouve alors repris le développement de la séance 11 reproduit ci-dessus, avant que le commentaire suivant ne soit formulé.

2. Les développements précédents éclairent aussi la deuxième question à examiner.

① Dans la séance 8, on avait considéré par exemple l'énoncé suivant :

Deux pyramides ***dont les hauteurs ont la même longueur*** et dont les bases ont la même aire ont le même volume.

Ici, « hauteur » désigne un ***segment***. En entendant par hauteur la ***longueur*** du segment hauteur, on peut le reformuler ainsi :

Deux pyramides ***qui ont la même hauteur*** et dont les bases ont la même aire ont le même volume.

Ou plus simplement encore :

Deux pyramides ***de même hauteur*** et dont les bases ont la même aire ont le même volume.

② Dans le cas, non d'une ***pyramide***, mais d'un ***cylindre*** de révolution, la « difficulté » est que « la » hauteur n'existe pas, en ceci qu'elle n'est pas unique : le segment hauteur est défini à une rotation près autour de l'axe du cylindre. Un tel segment est donc ***une*** hauteur du cylindre ; tandis que ***la*** hauteur désignera la longueur (commune) des différents segments hauteurs.

③ On notera que l'emploi de hauteur tantôt pour désigner un segment, tantôt pour désigner la longueur de ce segment, est présent dans le texte des programmes. C'est ainsi que, en 3^{e}, un commentaire précise ceci :

À propos de pyramides, les activités se limiteront à celles dont la hauteur est une arête latérale…

En ce cas, la hauteur est un segment. Par ailleurs, en 5^{e}, l'une des compétences exigibles consiste à savoir « calculer l'aire d'un triangle connaissant un côté et la hauteur associée », formulation où « côté » et « hauteur » désignent respectivement la ***longueur*** d'un côté et la longueur de ***la*** hauteur.

2.3. Quadrillages

a) On s'arrête maintenant sur la question suivante.

Quels logiciels utiliser pour faire des quadrillages (en repère affine quelconque) ? (AC, OS, 2de, 7)

b) Les notes du Séminaire 2004-2005 contiennent une réponse à une question plus particulière. On reproduit le développement en question.

Quadrillage sous Word

Comment obtenir un quadrillage sous Word ? (2de, 16)

Matériaux pour une réponse

1. On peut pour cela utiliser la barre de dessin de la façon suivante.

① En cliquant sur **Dessin** on fait apparaître un menu dans lequel on choisit **Grille** :

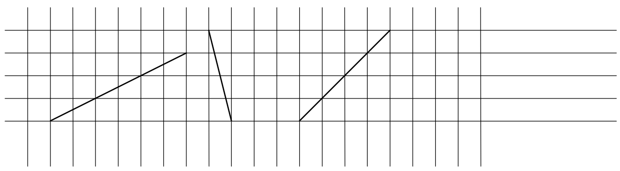
On coche **Aligner sur la grille** et on choisit un espacement horizontal et un espacement vertical (ici, 0,3 cm), avant de valider.

② On trace alors un trait horizontal (par exemple), que l'on fait bouger légèrement pour qu'il se place (automatiquement) sur une horizontale de la grille (elle-même invisible) :

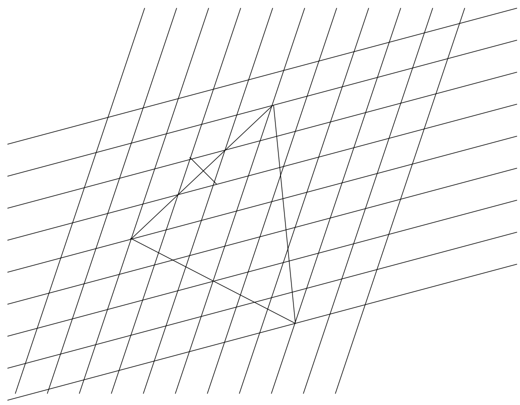
③ On copie cette horizontale et on la colle n – 1 fois en « faisant bouger » chacune des horizontales successivement obtenues ; on obtient ainsi n horizontales correspondant à la grille, mais qui se décalent vers la droite :

④ On sélectionne ces horizontales et, dans le menu **Dessin**, on choisit **Aligner ou répartir** ; là, on coche **Aligner la gauche**. On obtient ce qui suit, que l'on prend soin de **Grouper** (après l'avoir sélectionné) :

2. En créant de même des verticales (que l'on aligne en choisissant **Aligner le haut**), on obtient un quadrillage sur lequel on peut maintenant placer des segments, etc.



c) On notera qu'on peut aussi choisir des directions non perpendiculaires et des espacements différents, comme l'illustre la figure ci-après.



En ce cas, pour tracer des segments d'un point du quadrillage à l'autre, il convient de positionner ses extrémités (à l'aide de la souris par exemple) en maintenant enfoncer la touche Alt.

2.5. DM ?

a) On s'arrête ici sur les questions suivantes.

1. Ma PCP m'a conseillé de demander des DM très régulièrement à mes élèves de 2de. Combien doit-on donner de DM au minimum à une 2de pour chaque trimestre ? (SG, OS, 2de, 5)

2. Que peut-on faire si des élèves nous rendent des DM un peu trop semblables ? (CS2, OS, 2de, 6)

3. Quel rôle donner aux devoirs notés faits hors classe ? Sachant qu'une aide extérieure est possible, voire souhaitée, peut-on contrôler ce travail dans un contrôle en classe ultérieur ? (CAR, OS, 5e, 6)

b) La première question a fait l'objet d'une réponse dès le début de la formation, puisque la notice *Première rentrée des classes* aborde ce sujet dans des termes que l'on a reproduit ci-après dans leur contexte.

L’organisation didactique que le professeur doit progressivement concevoir et mettre en place articule divers lieux et dispositifs qui, ensemble, constituent l’***espace de l’étude*** (ou espace ***didactique***), dont le professeur fera un recensement précis : au-delà de la classe entière, il bénéficiera peut-être de temps en ***demi-classe*** ou, plus généralement, en groupes plus restreints, comme il en va dans les ***modules*** ou les diverses formes de ***soutien*** (aide individualisée, etc.). Chacun de ces dispositifs didactiques est un auxiliaire précieux du travail en classe entière : dès lors qu’on en maîtrise le bon usage, ils permettent au professeur de multiplier utilement les formes et les contenus de ses interventions au service des apprentissages des élèves. Le recensement évoqué ne doit évidemment pas oublier ce dispositif traditionnel – et indépassable – qu’est l’***étude personnelle hors de la classe***, que ce soit hors de l’établissement (« à la maison ») ou dans l’établissement (permanence, études surveillées, études encadrées ou dirigées). Il est en effet nécessaire de donner aux élèves, ***à l’issue de chaque séance*** sauf exception, un certain travail personnel à accomplir, à condition de ***bien calibrer l’effort demandé***, tant au plan quantitatif qu’au plan qualitatif, afin de satisfaire au mieux les ***besoins didactiques*** des élèves. Dans ce but on proposera des travaux qui ne soient pas seulement des « exercices d’entraînement » et qui s’intègrent de manière appropriée à la dynamique du travail de la classe : mise en forme de la solution d’un ou plusieurs exercices résolus en classe, travail numérique, graphique ou statistique préparatoire à une AER, bilan personnel d’une AER préparatoire à la synthèse collective relative à cette AER, etc. Certains de ces travaux feront l’objet d’une rédaction relevée, corrigée et éventuellement notée par le professeur, en évitant cependant, selon le principe « souvent et court plutôt que rarement et long », de recourir aux lourds « problèmes » autrefois traditionnels en matière de DM (devoir à la maison).

c) Les mêmes préconisations se trouvent dans le texte de l’inspection générale plusieurs fois mentionné, ***Les travaux écrits des élèves en mathématiques au collège et au lycée*** : on en reproduit ici un passage qu’il ne convient pas moins de méditer.

L’importance des travaux individuels de rédaction étant capitale pour la formation des élèves, notamment dans la perspective de la poursuite d’études, leur fréquence doit être élevée. Ainsi, hors les semaines où figure un devoir de contrôle (voir III), la présence d’un travail hebdomadaire de rédaction en temps libre est la règle dans les classes scientifiques (1re et terminale S, 1re et terminale L et ES comportant une option ou un enseignement de spécialité en mathématiques). Cette fréquence constitue une solide base de principe dans toutes les classes mais peut éventuellement être aménagée en fonction de la section et du niveau d’enseignement concernés (par exemple dans les classes de lycée technologique à horaire chargé). En fait, c’est certainement la longueur et la difficulté des devoirs qu’il convient d’adapter afin d’obtenir un équilibre raisonnable, en fonction du niveau d’enseignement. Dans ce domaine, il vaut mieux faire « souvent et court » que « rarement et long ». Il s’agit en effet de donner aux élèves l’habitude de ces travaux, et de leur faire prendre conscience du caractère essentiel de ceux-ci en montrant notamment que la recherche et la résolution d’un problème sont inséparables de la mise au point et de la rédaction de la solution trouvée. À cet égard, la mise en œuvre de ces principes par l’ensemble des professeurs dès la classe de sixième et la manifestation constante de l’intérêt et de l’importance accordés à ce type de travaux sont des moyens forts pour accentuer cette prise de conscience.

d) Le problème soulevé par les questions 2 & 3 est, hélas ! classique. La question 3 suggère une solution également classique, du moins ***dans la tradition de ce Séminaire***.

• Voici d’abord un extrait des notes du Séminaire 2004-2005.

③ La question lancinante de l’aide apportée à l’élève hors classe et qui ferait du devoir rendu un travail inauthentique – sans parler du pur et simple recopiage du travail d’un camarade – appelle des développements clairs et nets.

➊ Le travail exigé par un DM a d’abord pour objet la ***formation*** des élèves : ce qui mérite d’être évalué, c’est en conséquence ***ce que ce travail aura permis à l’élève de construire***. Le fait de procéder à cette évaluation en évaluant le DM lui-même est un choix traditionnel au secondaire, mais c’est un choix ***tronqué***. D’une façon générale, ce n’est pas le choix fait en nombre d’institutions d’enseignement supérieur, où un travail fait en temps libre, et permettant la recherche de toute aide pertinente, est toujours ***contrôlé***, en général par ***une présentation*** devant un jury suivie d’***un entretien*** avec ce jury. Ainsi en va-t-il pour le travail aboutissant à un ***mémoire de thèse*** à l’université, ou au ***mémoire professionnel*** à l’IUFM, ainsi en va-t-il même, au lycée, s’agissant des TPE, etc.

❷ Concernant les DM, un autre choix – que l’on poussera en avant dans ce Séminaire – consiste à procéder systématiquement à un « contrôle de DM » mais sous une forme ***écrite***, en introduisant dans la vie de la classe une règle du type suivant (à consigner sous la rubrique ***Vie et travail de la classe en mathématiques***) :

1. Chaque ***jeudi***, hormis les semaines précédant un contrôle, les élèves reçoivent l’énoncé d’un DM et l’examinent rapidement sous la direction du professeur.

2. Une ***foire aux questions*** relative au DM a lieu lors de la séance du ***lundi suivant***.

3. Les élèves rendent leur DM le ***jeudi qui suit***, et sont soumis aussitôt à une ***micro-épreuve de contrôle*** (10 min) portant sur une partie du DM.

4. La ***correction*** en classe du DM [incluant une reprise appropriée de la synthèse relative aux thèmes d’étude concernés] est faite le ***lundi d’après***.

5. Une ou plusieurs questions du DM pourront réapparaître dans le DS qui clora l’étude du ou des thèmes concernés.

❸ En instituant ainsi un ***contrôle*** de DM, on déplace l’objet de l’évaluation et, par là, on fait mieux apparaître le DM lui-même comme un ***moyen*** (didactique) au service d’une ***fin*** (d’apprentissage), qu’il s’agira d’apprécier ***individuellement***. On peut alors faire clairement du moyen – le DM – un outil de formation, mis en œuvre individuellement ***ou en équipe***, tandis que le ***contrôle*** du DM sera, lui, ***strictement individuel***.

❹ Dès lors qu’un contrôle de DM existe, il est possible de donner un sens délivré de l’obsession de la « triche » à l’aide reçue par l’élève hors la classe : celui d’un moyen complémentaire de formation dont les effets, indéniables sauf psittacisme pur (ce qui est rare), seront alors jugés de façon indépendante. Même si le texte de l’IG insiste sur « l’importance des travaux individuels de rédaction », on pourra ainsi accepter, notamment, des travaux ***collectifs*** (à deux ou à trois), qui sont de nature à favoriser la capacité à ***étudier à plusieurs***, dans un cadre humain plus resserré que celui de la classe, ce qui permet d’échapper ainsi à l’oscillation brutale entre l’individu isolé et la « division » au complet, en favorisant l’affirmation personnelle de chaque élève dans un contexte coopératif – celui du binôme ou du trinôme – de bien plus grande proximité.

❺ On notera ici que l’insistance du texte de l’IG sur « les travaux individuels de rédaction » n’est nullement incompatible avec l’organisation proposée. Ce même texte, en effet, comporte les indications suivantes :

… les travaux individuels de rédaction (et notamment les « devoirs à la maison »), dont les fonctions sont multiples (…) peuvent et doivent prendre des formes variées (résolution individuelle, ou en petits groupes, d’un problème comportant éventuellement des questions ouvertes et aboutissant à une rédaction individuelle, compte rendu et synthèse d’une séance de travaux dirigés, recherche d’exemples, constitution d’un dossier sur un thème donné, mise au point et rédaction de solutions d’exercices dont l’étude a été engagée en classe, …).

L’injonction faite au professeur de susciter des travaux « de résolution individuelle, ou en petits groupes, d’un problème comportant éventuellement des questions ouvertes et aboutissant à une rédaction individuelle » est au contraire pleinement satisfaite par le système DM + contrôle du DM : en certains cas, même, ce sera là le seul moyen d’assurer (par le biais du ***contrôle*** de DM) une rédaction presque sûrement ***individuelle***. C’est en particulier dans le contrôle de DM que, bien davantage qu’en DS, on jugera l’élève sur « la clarté des raisonnements, la qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation ».

• Le Séminaire 2005-2006 comporte un additif qui mérite d’être examiné.

➔ La question des DM ayant fait l’objet d’un exposé rendant compte d’une recherche dans les *Archives du Séminaire*, cet exposé avait suscité la question suivante.

À propos de l'exposé « Comment réagir et agir de manière appropriée lorsqu'un élève n'a pas fait son travail, et en particulier ne rend pas un DM ? », la proposition a été faite, pour contrôler que chacun a bien fait son DM, de faire un devoir en classe sur feuille qui porte sur le DM (sur une partie du DM), le DM étant noté sur 10 ou 15 et le devoir en classe sur feuille sur le reste des points. Mais si un élève a buté sur un exercice et que ce même exercice est donné sur feuille en classe, il est doublement pénalisé… Comment gérer ce fait ? (5e, 4, 2005-2006)

➔ La « règle » d'organisation indiquée dans le Séminaire 2004-2005 n'était qu'un exemple possible – le texte parlait prudemment d'« une règle du type suivant ». La réponse à l'objection précédente par une variante de la règle particulière évoquée.

La micro-épreuve de contrôle n'a pas de raison particulière d'être réalisée le jour même de la remise des DM par les élèves. ***Un délai de quelques jours*** peut permettre à chacun de se préparer au micro-contrôle du DM, ***y compris*** en séance de soutien (ou en AI). Notons que, s'agissant de la notation, le partage 20 = 15 + 5 peut être 20 = 12 + 8, voire 20 = 10 + 10, etc.

• Ajoutons encore un passage des notes du Séminaire 2005-2006, qui amorce le lien avec le thème des ***punitions et sanctions***, qui fera l'objet d'un compte rendu de recherche dans les *Archives du Séminaire* lors de la séance prochaine, le mardi 7 novembre.

➔ Les questions suivantes avaient été soulevées.

1. Comment réagir avec deux élèves qui ont rendu deux copies identiques (à la virgule près : même fautes d'orthographe, mêmes phrases écrites aux mêmes endroits, présentation identique) d'un DM ? Je le leur ai fait remarquer en les gardant tous les deux seulement à la fin d'un cours mais je n'ai adopté aucune sanction… (5e, 8, 2005-2006)

2. Y a-t-il un intérêt à faire un devoir pour travailler sur du long terme ? Par exemple, un DS portant sur plusieurs chapitres fait au début de l'année ? (5e, 8, 2005-2006)

3. J'ai demandé aux élèves de recopier la correction d'un contrôle. J'ai deux copies écrites par le même élève mais bien sûr deux noms différents. Que dois-je faire ? (4e, 8, 2005-2006)

➔ Voici alors les éléments de réponse consignés par écrit.

1) De la même façon que le professeur de mathématiques s'efforce de mettre en place de « bonnes techniques » pour accomplir les tâches mathématiques de tel ou tel type, de même il doit prendre sa part dans la mise en place et l'adoption, au moins dans l'espace de la classe, de « bonnes techniques » relatives aux types de tâches que l'élève doit accomplir dans sa relation à l'institution scolaire et à ses acteurs – élèves, professeurs, personnels de toute nature, parents, etc. Au souci d'*éducation mathématique* s'ajoute ainsi – de façon distincte, certes, mais en pratique organiquement liée – le souci d'*éducation « institutionnelle »,* l'une et l'autre offrant des techniques (et des technologies / théories) dont l'élève, dûment « équipé », pourra ensuite faire librement usage dans son activité hors de l'institution scolaire.

2) Face à une anomalie comme celle rapportée dans la première question ci-dessus, il convient de réagir à différents niveaux. On a dit que, pour dissuader ce comportement, inacceptable dans son principe (hormis lorsque le principe de travaux à plusieurs est admis), mais surtout pour réguler les effets d'apprentissage recherchés, il convenait de mettre en place un *contrôle du DM* sous la forme d'une micro-épreuve en classe, la note de l'ensemble DM + μ-DS se distribuant de façon étudiée (20 = 15 + 5 = 12 + 8 = 10 + 10 = …). Mais lorsque, malgré cela, la chose advient, la « technique institutionnelle » usitée par les élèves ne doit pas davantage être validée que ne le serait une technique mathématique inappropriée ! Ici, la première étape est sans doute celle d'un rappel formel au règlement, comme cela semble avoir été le cas. Mais en cas de récidive, il convient de mettre en œuvre – après l'avoir

clairement annoncé – une mesure déterminée, par exemple une retenue avec rédaction d'un devoir qui se substituerait, pour les élèves concernés, au DM copié (sans μ-DS de contrôle).

3) D'une façon générale, les travaux en classe et hors classe ne doivent pas apparaître comme passés et dépassés : qu'ils le soient ne peut qu'inciter les élèves les plus faibles moralement (et en général mathématiquement) à « s'en débarrasser » d'une manière ou d'une autre. On pourra ainsi prendre le parti d'inclure en tout DS l'un des petits problèmes ou des exercices étudiés dans l'un des DM précédents. On pourra même consacrer de loin en loin tout un DS à une reprise de situations travaillées dans les DS et DM précédents, avec, bien sûr, une exigence de qualité – au plan mathématique comme au plan rédactionnel – sensiblement accrue. En revanche, il conviendra, en annonçant clairement le *programme du DS*, de préciser les DM et DS auxquels le DS à venir pourra emprunter, comme le suggère ce document.

Collège Georges Bouligand
4e5 – Mathématiques

DS 5 : programme

Le DS 5 du lundi 28 novembre portera sur les contenus mathématiques suivants :

– DM 6, DM 7, DS 3 ;

– Types de problèmes mettant en jeu le centre de gravité d'un triangle ;

– Types de problèmes mettant en jeu des puissances de 10 d'exposant entier relatif.

4) Le dispositif évoqué dans la troisième question – recopier la correction d'un contrôle et remettre sa rédaction sous la forme d'une « copie » – pâtit sans doute, mais de façon plus nette encore, du même défaut que les DM « ordinaires » : quelle fonction didactique poursuit-il qui pourrait dissuader au moins certains élèves de « se débarrasser » du pensum qui leur est infligé ? Dans le principe, on pourrait reprendre à son propos ce qui a été dit plus haut ; mais il conviendra plus sûrement encore de ré-envisager, à la lumière des observations précédentes, l'ensemble du dispositif de contribution personnelle des élèves au travail de la classe.

2.7. Autorité et abus de pouvoir

a) En prolongement de certains des développements précédents, on s'arrête sur la question suivante.

Lors d'un contrôle d'une heure, quel programme prévoir (tout depuis le début de l'année ou depuis le dernier contrôle) ? (AB, OS, 3e, 5)

b) « Tout depuis le début de l'année » ? Certainement pas, même si certains professeurs continuent d'agir ainsi ! On retrouve là une double difficulté, déjà évoquée à propos des « interrogations surprises ».

• Donner pour programme de contrôle « tout ce qui a été fait depuis le début de l'année » est d'abord un choix contestable au plan ***didactique***.

➔ Le programme du contrôle doit en effet ***engendrer de l'apprentissage***, et pour cela il doit ***engendrer de l'étude*** – collective ***et personnelle***. Si ce programme devient énorme, il sera de nature à décourager tout particulièrement ceux des élèves qui auraient plus que d'autres besoin d'un surcroît d'étude : devant le gigantisme de la tâche, beaucoup renonceront même à l'effort qu'ils étaient prêts à consentir – car pourquoi étudier ceci ou cela quand ce n'est plus qu'une goutte d'eau dans l'océan qu'il faudrait labourer ?

➔ On notera qu’à l’embarras de l’élève répond celui du professeur : s’il entend apporter sa contribution à la préparation du contrôle par les élèves, quels choix de contenus seront les siens pour cette préparation aidée ? Pourquoi ceci plutôt que cela ? S’il consent à choisir, il est fort probable, en outre, que ses choix seront interprétés comme des indications données discrètement aux élèves à propos de ce sur quoi le contrôle portera véritablement, ce qui, s’il en allait autrement, ne manquerait pas d’avoir les effets désastreux – déjà observés dans une classe de 2de – que peut avoir toute ***rupture de contrat***, qu’elle soit volontaire ou involontaire. S’il se refuse à ce piège, il abandonnera par force ses élèves à leurs seules forces : le contrôle ne sera pas préparé, ni collectivement, ni, pour la plupart, individuellement.

➔ En vérité, les observations précédentes valent encore à propos de la formule « tout depuis le dernier contrôle ». Le programme du contrôle doit permettre aux élèves d’organiser leur préparation selon certaines règles de vie et de travail « raisonnables ». Pour plus de précisions sur ce point, on s’inspirera et du programme de contrôle évoqué plus haut à propos de la 4e 5 du collège Georges Bouligand, et des commentaires formulés lors de la séance 5 de ce Séminaire à propos du laps de temps qu’il paraît « raisonnable de laisser entre la fin d’un chapitre et un contrôle dont une partie porte sur ce chapitre », commentaires que l’on reproduit ici.

> • S’agissant d’un contrôle « long » (« macro-épreuve »), l’intervalle de temps doit permettre notamment…
>
> – … d’annoncer ce contrôle ***et son programme***, qui fera l’objet d’un examen approprié avec la classe ;
>
> – … de mettre en place un ***point de rendez-vous***, en classe, autour de la ***préparation hors classe du contrôle*** (celle-ci étant individuelle ou en équipe, à l’initiative des élèves).
>
> • Le scénario précédent peut être rendu plus « incitatif » – en réalisant le ***point de rendez-vous*** sous la forme d’un ***micro-contrôle*** de 10 minutes et de sa ***« correction »*** : cette dernière, qui aura lieu alors lors de la séance suivant celle de la passation du micro-contrôle, permettra d’apporter des précisions sur le programme du contrôle encore venir…

• Donner pour programme de contrôle « tout ce qui a été fait depuis le début de l’année » est ensuite un choix contestable au plan ***éthique***.

➔ On retrouve ici un thème difficile, qui sera abordé plus nettement à partir de la rentrée, celui du travail à conduire sur soi et sur autrui pour aller vers des relations humaines non tyranniques. L’évolution des mœurs, le « procès de civilisation » rendent en effet de plus en plus mal supporté le fait qu’un détenteur d’une autorité forcément ***délimitée*** s’affranchisse de ces limites et, d’une manière ou d’une autre, abuse du pouvoir qui lui est normalement reconnu.

➔ Le franchissement de la frontière qui sépare souvent de manière bien floue l’autorité légitime, ***toujours spécifique***, de l’abus de pouvoir par extension subreptice du domaine supposé d’autorité est d’autant plus difficile à éviter qu’il est l’héritage pluriséculaire, en vérité millénaire, de relations sociales brutales, généralisantes, liant le maître à l’esclave, le père à l’enfant, le patron au salarié, la maîtresse de maison bourgeoise à ses domestiques, etc. Tout ce passé dépassé ne passe pourtant guère ! Le diable, dit le proverbe, est dans les détails ; et il peut être – entre autres choses – dans le fait de ne pas préciser autrement le programme d’un contrôle qu’en disant qu’il comporte « tout ce qu’on a fait depuis le contrôle précédent ».

3. Observation & analyse

3.1. Organiser l'étude ou gérer la séance ?

a) Les questions qui suivent feront transition avec le thème précédent.

1. Mes élèves de 2^{de} sont passifs et attendent presque toujours la correction, que ce soit dans les activités en classe ou les exercices à la maison. Faut-il qu'une fois prochaine je ramasse leur travail par surprise pour leur donner une note, dans l'espoir qu'ils se mettront au travail par la suite ? (SG, OS, 2^{de}, 6)

2. Quelle réaction avoir face à des élèves qui, lors de la recherche d'un exercice, ne produisent pas de traces écrites ? (MG2, OS, 2^{de}, 6)

b) À la lumière des analyses précédentes, on voit d'emblée que la suggestion de la première question, dans sa forme actuelle, ne saurait être que rejetée.

c) Les deux questions comportent en filigrane une difficulté qu'il faut commencer par reconnaître : celle de la tentation de verser ***du côté de la gestion de la séance*** ce qui a son assise ***dans l'organisation*** (ou l'inorganisation) ***de l'étude*** ; celle, donc, de mettre ***trop*** sur le compte de la gestion de la séance et ***pas assez*** sur celui de l'organisation didactique.

d) Bien entendu, il n'existe, aux « pathologies » constatées, aucun « remède » absolu, qui réussirait ***à tout coup***. Il faut en outre penser le « remède » éventuel dans la perspective ouverte par une analyse des « causes (éventuelles) du mal ».

• L'attitude signalée dans la première question participe d'une ***culture didactique archaïque***, encore trop répandue, où l'élève attend que le professeur ait « enseigné » – c'est-à-dire « montré », « exhibé » – l'OMP à maîtriser pour, éventuellement, en travailler la maîtrise. Culture de l'***obtempération***, elle s'éloigne d'une culture de la ***participation égalitaire*** à la production, sous l'impulsion et sous la direction du professeur, d'une OMP répondant au problème étudié.

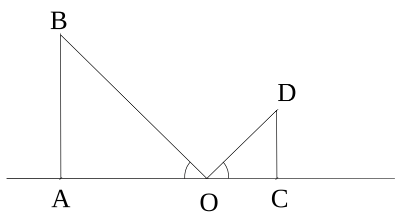
• Bien qu'il n'y ait pas d'automaticité à cet égard, l'introduction dans l'organisation de l'étude officielle de la classe ***d'AER dignes de ce nom*** devrait à moyen terme changer les choses.

➔ Sans aller plus loin sur ce sujet, indiquons simplement qu'une AER « digne de ce nom » repose en premier lieu sur une ***question génératrice clairement formulée***, telle la suivante, à laquelle la classe s'efforcera d'apporter une réponse.

Dans la figure ci-contre, on suppose que les longueurs OC, CD et OA sont fixées.

Il en résulte que la longueur AB est déterminée.

Comment exprimer AB en fonction de OC, CD et OA ?



➔ La situation créée dans la classe par la question formulée doit en outre répondre à un petit « cahier des charges » qu'explicite par exemple le document intitulé ***Mathématiques en 5^e^ et 4^e^*** que l'on trouvera en ligne sous la rubrique *Documents / 2^nd^ degré*.

Les situations choisies doivent :
– prendre en compte les objectifs visés et une analyse préalable des savoirs en jeu, ainsi que les acquis et les conceptions initiales des élèves ;
– permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne reposer que sur des consignes simples et n'exiger, au départ, que des connaissances solidement acquises par tous ;
– créer rapidement un problème assez riche pour provoquer des conjectures ;
– rendre possible la mise en jeu, puis la formulation des notions ou des procédures dont l'apprentissage est visé ;
– fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement ; on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.

• Bien entendu, même si l'organisation didactique est en principe adéquate, son bon fonctionnement peut être ***entravé par une gestion de séance inadéquate*** **–** par exemple si le temps de travail en autonomie de la classe est rogné par le professeur, qui lui-même demeure assujetti à la culture didactique archaïque évoquée plus haut, laquelle le porte à exhiber *motu proprio* la solution qu'il a préparée au problème pourtant soumis à la sagacité de la classe.

3.2. Analyser la difficulté & organiser autrement l'étude

a) Qu'en est-il de la deuxième question ci-dessus ? Rappelons-la d'abord.

Quelle réaction avoir face à des élèves qui, lors de la recherche d'un exercice, ne produisent pas de traces écrites ? (MG2, OS, 2de, 6)

b) Seuls ou associés en binômes, les participants consignent par écrit des éléments de réponse aux deux questions suivantes :

1. Comment expliquer le comportement signalé ?
2. De quel changement dans l'organisation de l'étude pourrait-on attendre l'effacement partiel de ce comportement ?

4. Problématique et fonctionnement du Séminaire

4.1. La journée de rentrée

a) La journée de rentrée, ***le mardi 7 novembre***, aura la même structure que la journée du mardi 10 octobre : demi-classe de 9 h à 10 h 30 ; classe entière de 10 h 45 à 12 h 15 ; à nouveau classe entière de 17 h 15 à 18 h 45.

b) La demi-classe appelée à réaliser le TD2 de 9 h à 10 h 30 a la composition suivante :

VAC – AB – YB – TB – MBP – MD – VD – AEO – AG – NG – RH – AMJ – ML – OL1 – OL2 – SM1 – JN – SP – CAR – BR – SR – CS2 – JS – PV

4.2. D'ici là…

a) Il conviendra de mettre à profit les vacances scolaires pour reprendre l'ensemble des traces écrites issues de l'activité du Séminaire, chacun s'interrogeant, chaque fois, sur le niveau de mise en œuvre actuel, dans la ou les classes dont il ou elle assume la responsabilité pour ce qui est mathématiques, des apports de la formation, ainsi que sur son engagement présent et à venir dans le travail de déconstruction et de reconstruction de son « équipement praxéologique professionnel », cela dans la perspective d'une meilleure intégration des apports formatifs.

b) Outre la notice nouvellement diffusée – *Le temps de l'étude* –, on examinera, dans le document mis en ligne sous le titre ***Mathématiques en*** 5^e ***et*** 4^e (rubrique *Documents* / 2^{nd} *degré*), la section intitulée ***Introduction générale pour le collège***. **Cela noté…**

Bonne vacances !

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Travaux dirigés de didactique des mathématiques

➔ Séance 2 : mardi 7 novembre 2006 (9 h – 10 h 30)

Programme de la séance. 1. Du calcul numérique au calcul algébrique // 2. Expériences numériques et calculs algébriques

1. Du calcul numérique au calcul algébrique

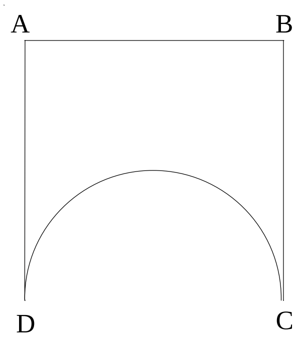
1.1. Un programme de calcul « en mots »

a) Un professeur a préparé pour sa classe de 4^{e} un scénario d'AER que l'on examine ci-après. On en reproduit d'abord le tout début.

---

1. Un problème de calcul numérique

Dans une classe de 4^{e}, les élèves, travaillant en équipes, ont eu à déterminer l'aire de la plaque ci-dessous, faite d'un carré ABCD de côté 2*a* dont on a retiré le demi-disque de diamètre [CD]. La consigne était de décrire « avec des mots » le programme de calcul proposé.

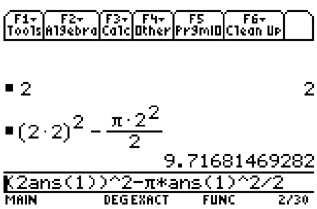


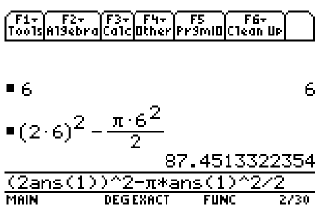
1.1. Plusieurs équipes ont proposé le programme de calcul qu'on peut formuler ainsi :

On calcule l'aire du carré ABCD, c'est-à-dire $(2a)^2$, et on lui retranche alors la moitié de l'aire du disque de diamètre [CD], c'est-à-dire du disque de rayon *a*, c'est-à-dire qu'on lui retranche le produit de π par a^2, divisé par 2.

Question 1. Exécutez ce programme de calcul pour $a = 2$ et pour $a = 6$.

[**Réponse 1.** Si $a = 2$, on calcule $4^2 = 16$ et on lui retranche $\pi \times 4 / 2 = 2\pi$: l'aire vaut $16 - 2\pi \approx 9{,}72$. Si $a = 6$, on calcule $12^2 = 144$ et on lui retranche $\pi \times 36 / 2 = 18\pi$: l'aire vaut $144 - 18\pi \approx 87{,}45$.]





Question 2. Sur la feuille de calcul d'un tableur, créer une colonne contenant les valeurs entières de *a* de 1 à 20, et, dans la colonne suivante, faire calculer les valeurs, arrondies à deux décimales, de l'aire de la plaque (voir ci-après).

[**Réponse 2.** Voir ci-après.]

B1 = =(2*A1)^2-PI()*A1^2/2

	A	B	C	D
1	1	2,43		
2	2	9,72		
3	3	21,86		
4	4	38,87		
5	5	60,73		
6	6	87,45		
7	7	119,03		
8	8	155,47		
9	9	196,77		
10	10	242,92		
11	11	293,93		
12	12	349,81		
13	13	410,54		
14	14	476,12		
15	15	546,57		
16	16	621,88		
17	17	702,04		
18	18	787,06		
19	19	876,94		
20	20	971,68		

---

b) En binômes, les participants ébauchent par écrit un ***corrigé*** du travail qu'il est prévu de demander aux élèves, en même temps qu'ils esquissent une ***analyse* a priori** de la réalisation éventuelle par les élèves de la tâche qui leur est demandée.

• Les binômes présentent le fruit de leur travail ; certaines de ces propositions sont considérées immédiatement afin de pouvoir conclure.

• Plusieurs points méritent d'être notés.

➔ On notera le souci de vérifier, par la question 1, que le programme de calcul « en mots » a été bien compris. Les valeurs calculées – à la main et à la calculatrice – serviront en outre de ***jeu d'essai*** pour la formule à établir dans la question 2.

➔ La première difficulté potentielle dans le traitement de la question 2 est la création du contenu de la colonne A. On peut supposer ici que la classe visée maîtrise préalablement la technique standard consistant à écrire 1 en A1, 2 en A2, puis à « tirer la poignée » pour obtenir la progression arithmétique de raison 1 demandée.

➔ Le cœur du travail demandé est donc l'exigence d'écrire la « formule »

=(2*A1)^2-PI()*A1^2/2

avant de « tirer la poignée ».

➔ La formule demandée peut être plus ou moins généreusement parenthésée, comme dans le cas suivant :

=((2*A1)^2)-(PI()*(A1^2)/2).

S'il y a bien évidemment de « mauvais » parenthésages (conduisant soit à des formules « mal formées », soit à des formules bien formées mais n'exprimant pas le programme de calcul considéré), on ne se hâtera pas d'aller vers un parenthésage réputé « canonique », et en particulier vers un parenthésage ***minimal*** : la question du parenthésage devra au contraire émerger longuement comme ***problème*** avant de recevoir ultérieurement une solution bien partagée dans la classe.

➔ On peut supposer que les élèves ont déjà fabriqué des formules, du moins dans des cas simples : le fait de se lancer dans le travail d'expression symbolique demandé ne devrait donc pas en soi faire difficulté. Le fait d'être parvenu à une expression correcte peut alors être contrôlé en confrontant les valeurs obtenues en B2 et en B6 avec les valeurs du jeu d'essai obtenues pour $a = 2$ et $a = 6$ respectivement.

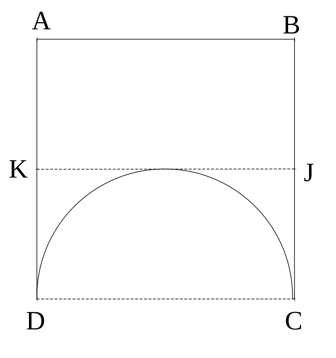
➔ Face à une proposition de formule bien formée mais n'exprimant pas le programme de calcul considéré, on peut envisager d'effectuer (lors de la correction de la question 2) une traduction ***en sens inverse***, en passant de l'expression ***symbolique*** proposée à la formulation « en mots », appelée parfois ***« rhétorique »***.

1.2. Un second programme

a) On poursuit l'examen du scénario d'AER.

1.2. Ayant découpé (mentalement) la plaque comme on le voit ci-après (J et K sont le milieu de [BC] et de [DA]), une équipe d'élèves a proposé le programme de calcul suivant.

On calcule l'aire du rectangle ABJK, c'est-à-dire $(2a)a$, et on lui ajoute la différence entre l'aire du rectangle KJCD, c'est-à-dire $(2a)a$, et celle du demi-disque de diamètre [CD], c'est-à-dire du demi-disque de rayon a, soit le produit de π par a^2, divisé par 2.



Question 3. Exécutez ce programme de calcul pour $a = 2$ et pour $a = 6$.

[**Réponse 3.** Si $a = 2$, on calcule $4 \times 2 = 8$ et on lui ajoute la différence 8 et de $\pi \times 4 / 2 = 2\pi$, soit $8 - 2\pi$: l'aire vaut $8 + (8 - 2\pi) \approx 8 + 1{,}72 = 9{,}72$. Si $a = 6$, on calcule $12 \times 6 = 72$ et on lui ajoute la différence de $12 \times 6 = 72$ et de $\pi \times 36 / 2 = 18\pi$: l'aire vaut $72 + (72 - 18\pi) \approx 72 + 15{,}45 = 87{,}45$.]

Question 4. Plusieurs élèves disent que le programme de calcul précédent, « c'est pareil que le premier », que par exemple, lorsque $a = 2$, le premier programme de calcul donne $16 - 2\pi$, le second donne $8 + (8 - 2\pi)$, et que $8 + (8 - 2\pi) = 16 - 2\pi$. Le professeur leur demande :

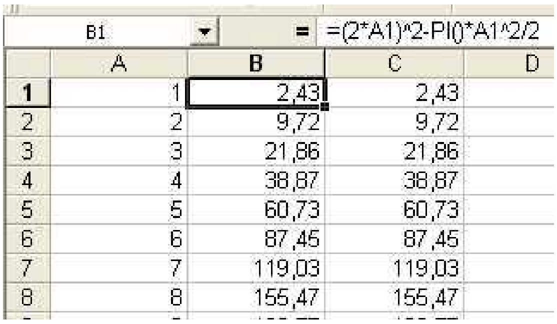
∗ de vérifier si c'est « pareil » pour $a = 10$;

∗ si c'est *« toujours pareil »*.

Des élèves proposent de vérifier directement que c'est « toujours pareil » en utilisant un tableur. Faites-le.

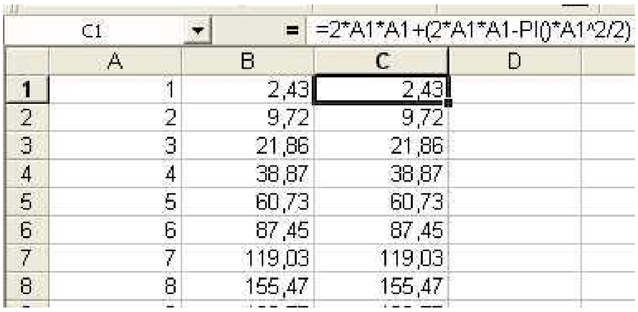
[**Réponse 4.** ∗ Si $a = 10$, le premier programme donne $20^2 - \pi \times 10^2/2$, soit $400 - 50\pi$; le second programme renvoie $(2 \times 10) \times 10 - [(2 \times 10) \times 10 - \pi \times 10^2/2] = 200 + (200 - 50\pi) = 400 - 50\pi$: les deux programmes fournissent la même valeur.

∗ Pour un exemple, voir ci-après.]



B1 = =(2*A1)^2-PI()*A1^2/2

	A	B	C	D
1	1	2,43	2,43	
2	2	9,72	9,72	
3	3	21,86	21,86	
4	4	38,87	38,87	
5	5	60,73	60,73	
6	6	87,45	87,45	
7	7	119,03	119,03	
8	8	155,47	155,47	



C1 = =2*A1*A1+(2*A1*A1-PI()*A1^2/2)

	A	B	C	D
1	1	2,43	2,43	
2	2	9,72	9,72	
3	3	21,86	21,86	
4	4	38,87	38,87	
5	5	60,73	60,73	
6	6	87,45	87,45	
7	7	119,03	119,03	
8	8	155,47	155,47	

---

b) En binômes, les participants ébauchent par écrit un ***corrigé*** du travail qu'il est prévu de demander aux élèves, en même temps qu'ils esquissent une ***analyse* a priori** de la réalisation éventuelle par les élèves de la tâche qui leur est demandée.

• Les binômes présentent le fruit de leur travail ; certaines de ces propositions sont considérées immédiatement afin de pouvoir conclure.

• Un petit nombre de remarques sont de mises.

➔ La question 3 a pour fonction de s'assurer que le programme de calcul « en mots » a été bien compris ; les valeurs obtenues peuvent désormais être confrontées aux valeurs correspondantes obtenues dans les questions 1 & 2.

➔ Dans la question 4, la difficulté que pouvait soulever la création du contenu de la colonne A est désormais ***neutralisée***.

➔ La formule à écrire dans la question 4 est plus complexe que celle appelée par la question 3 : on passe de

=(2*A1)^2-PI()*A1^2/2

à

=2*A1*A1+(2*A1*A1-PI()*A1^2/2).

On a dans cette complexification (contrôlée !) un ressort simple mais essentiel de la dynamique d'étude et d'apprentissage cristallisée dans le scénario d'AER examiné.

➔ La gestion des parenthèses se pose à nouveau ; comme précédemment on ne s'offusquera pas d'un « sur-parenthésage » éventuel et on laissera les observations factuelles s'accumuler (on pourra le cas échéant en faire un court bilan lors de la correction de la question 4).

➔ On notera que, pour s'assurer de la qualité et de la pertinence de la formule écrite, il est possible maintenant de comparer deux à deux l'ensemble des valeurs nouvellement obtenues avec celles obtenues à la question 2.

1.3. Le calcul littéral entre en scène

a) Le scénario d'AER envisagé se poursuit ainsi.

---

2. Problèmes de calcul littéral

2.1. Avant même que la vérification réalisée avec le tableur n'ait confirmé l'assertion de certains élèves, d'autres interviennent pour indiquer une autre voie, comme le précise la question suivante.

Question 5. Un élève insiste sur le fait que ce n'est pas la peine de « faire ça ». « Quand on écrit les programmes de calcul avec a, on voit bien que c'est pareil », dit-il. Le professeur demande à la classe de le faire. Faites-le à votre tour.

[**Réponse 5.** L'expression littérale du premier programme de calcul est $(2a)^2 - (\pi \times a^2)/2$, l'expression littérale du second est $(2a)a + ((2a)a - (\pi \times a^2)/2)$. L'*équivalence* des deux programmes de calcul résulte alors du fait que l'on a l'identité

$$(2a)a + ((2a)a - (\pi \times a^2)/2) \equiv (2a)a + (2a)a - (\pi \times a^2)/2$$

et aussi $(2a)a + (2a)a \equiv 2((2a)a) \equiv 2(2a^2) \equiv 4a^2$, en sorte que l'on a : $(2a)a + ((2a)a - (\pi \times a^2)/2) \equiv (2a)^2 - (\pi \times a^2)/2$.]

---

b) En binômes, les participants mettent en évidence par écrit un ensemble de ***règles de calcul littéral*** permettant d'établir l'identité des deux expressions examinées et esquissent une ***analyse*** **a priori** de la réalisation éventuelle par les élèves de la tâche qui leur est demandée.

• Les binômes présentent le fruit de leur travail ; certaines de ces propositions sont considérées immédiatement afin de pouvoir conclure.

• Ce qui est demandé ici appelle une identification adéquate de la « forme » des expressions dont l'équivalence doit être justifiée déductivement (« par le calcul »). Les règles formelles que l'on peut dégager sont les suivantes.

➔ L'identité $(2a)a + ((2a)a - (\pi \times a^2)/2) \equiv (2a)a + (2a)a - (\pi \times a^2)/2$ se justifie par la règle :

$$x + (y - z) \equiv (x + y) - z.$$

➔ L'identité $(2a)a + (2a)a \equiv 2((2a)a)$ se justifie par la règle

$$x + x \equiv 2x,$$

qu'on peut elle-même regarder comme un cas particulier de la règle

$$kx + \ell x \equiv (k + \ell)x.$$

➔ L'identité $2((2a)a) \equiv 2(2a^2)$ se justifie par la règle

$$(kx)y \equiv k(xy).$$

➔ L'identité $2(2a^2) \equiv 4a^2$ se justifie par la même règle, prise dans l'autre sens :

$$k(xy) \equiv (kx)y.$$

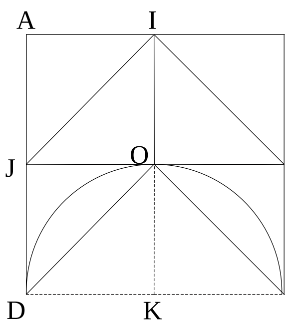
• Le travail attendu des élèves doit d'abord aboutir aux équivalences incluses dans les notes préparatoires du professeur, ci-dessus. Leur justification, non mentionnée explicitement par le scénario d'AER examiné, doit s'introduire naturellement – « Pourquoi peut-on écrire que $(2a)a + (2a)a \equiv 2((2a)a)$, “c'est pareil” que $2((2a)a)$, etc. ? » –, sans rechercher des réponses formelles « minimales » : c'est le « jeu justificatif » qu'il convient ici d'amorcer.

1.4. Un troisième programme de calcul

a) Le scénario construit par le professeur continue par le développement suivant.

2.2. Une autre équipe d'élèves a réalisé un découpage de la figure représenté ci-dessous et qui les a conduit au programme de calcul suivant. (C'est le professeur qui leur a indiqué, à leur demande, le nom de « segment de cercle ».)

On calcule 6 fois l'aire du triangle AIJ, c'est-à-dire 6 fois a^2 divisé par 2, diminué de 2 fois l'aire du segment de cercle défini par la corde [OD], c'est-à-dire 2 fois la différence entre l'aire d'un quart de disque, c'est-à-dire $\pi \times a^2/4$, et l'aire du triangle DKO, c'est-à-dire a^2 divisé par 2.



Question 6. Exécutez ce programme de calcul pour $a = 2$ et pour $a = 6$.

[**Réponse 6.** Si $a = 2$, on calcule $6 \times 2^2/2 = 12$ et on lui retranche 2 fois $\pi \times 2^2/4 - 2^2/2 = \pi - 2$: l'aire vaut $12 - 2(\pi - 2) = 16 - 2\pi \approx 9{,}72$. Si $a = 6$, on calcule $6 \times 6^2/2 = 108$ et on lui retranche deux fois $\pi \times 6^2/2 - 6^2/2 = 18\pi - 18$: l'aire vaut $108 - 2(18\pi - 18) = 144 - 18\pi \approx 87{,}45$.]

Question 7. Des élèves proposent de vérifier que ce programme est équivalent aux deux autres à l'aide du tableur. D'autres élèves proposent de chercher l'expression littérale de ce troisième programme et d'en déduire directement, par le calcul, que ce programme est bien équivalent aux deux autres. Le professeur demande à la classe de commencer par mettre à l'épreuve la conjecture que ce troisième programme est équivalent aux deux autres à l'aide du tableur, chacun (ou chaque binôme) annonçant préalablement l'intervalle de vérification qu'il choisit (par exemple [1 ; 100], [201 ; 310], [61,1 ; 61,9], etc.). Faites-le.

[**Réponse 7.** Le tableur confirme la conjecture d'équivalence (voir les copies d'écran ci-après).]

D1 = =6*(A1^2/2)-2*(PI()*A1^2/4-A1^2/2)

	A	B	C	D
1	1	2,43	2,43	2,43
2	2	9,72	9,72	9,72
3	3	21,86	21,86	21,86
4	4	38,87	38,87	38,87
5	5	60,73	60,73	60,73
6	6	87,45	87,45	87,45
7	7	119,03	119,03	119,03
8	8	155,47	155,47	155,47

D1 = =6*(A1^2/2)-2*(PI()*A1^2/4-A1^2/2)

	A	B	C	D
1	201	98142,26	98142,26	98142,26
2	202	99121,23	99121,23	99121,23
3	203	100105,05	100105,05	100105,05
4	204	101093,74	101093,74	101093,74
5	205	102087,28	102087,28	102087,28
6	206	103085,69	103085,69	103085,69
7	207	104088,95	104088,95	104088,95
8	208	105097,07	105097,07	105097,07

D1 = =6*(A1^2/2)-2*(PI()*A1^2/4-A1^2/2)

	A	B	C	D
1	61,1	9068,73	9068,73	9068,73
2	61,2	9098,44	9098,44	9098,44
3	61,3	9128,19	9128,19	9128,19
4	61,4	9158,00	9158,00	9158,00
5	61,5	9187,86	9187,86	9187,86
6	61,6	9217,76	9217,76	9217,76
7	61,7	9247,71	9247,71	9247,71
8	61,8	9277,71	9277,71	9277,71

---

b) En binômes, les participants ébauchent par écrit un ***corrigé*** du travail qu'il est prévu de demander aux élèves, en même temps qu'ils esquissent une ***analyse* a priori** de la réalisation éventuelle par les élèves de la tâche qui leur est demandée.

• Les binômes présentent le fruit de leur travail ; certaines de ces propositions sont considérées immédiatement afin de pouvoir conclure.

• Quelques points doivent être soulignés.

➔ Une fois vérifiée la bonne compréhension du programme « en mots » (question 6), la formule à « produire » (question 7), soit par exemple

=6*(A1^2/2)-2*(PI()*A1^2/4-A1^2/2),

est plus complexe encore que celle de la question 5 : la trajectoire « ascendante » suivie jusqu'ici à cet égard se poursuit.

➔ La complexité atteinte peut certes rebuter quelques élèves ; mais elle a toute chance aussi de susciter, chez plus d'un, un sentiment de jubilation dû au fait de « jouer » avec une expression si complexe ! On s'efforcera d'en tirer profit dans l'impulsion, non de tel ou tel, mais de ***la classe*** comme totalité étudiante.

➔ Dans cette partie du scénario d'AER, on laisse de côté le travail algébrique esquissé à l'occasion de la question 5 (ce travail sera réamorcé par la question 8). En revanche, on réintroduit une « variable » neutralisée après la question 2 : la « fabrication » du contenu de la colonne A.

➔ Bien que la chose ne soit pas précisée par les notes préparatoires du professeur, on peut ici lancer ***d'abord*** la classe sur le problème de l'expression symbolique (dans le langage du tableur) du programme en mots, ***en conservant*** l'intervalle des entiers de 1 à 20, avant de demander aux élèves (ou aux binômes d'élèves) de faire varier cet intervalle, ce qui posera un petit problème d'emploi « économique » du tableur – à résoudre collectivement ! (Avec le tableur utilisé ici, on pourra par exemple réécrire les valeurs des cellules A1 et A2, avant de « tirer la poignée », comme on le voit ci-après, de gauche à droite.)

	A	B	C	D
1	61,1	9068,73	9068,73	9068,73
2	61,2	9098,44	9098,44	9098,44
3	3	21,86	21,86	21,86
4	4	38,87	38,87	38,87
5	5	60,73	60,73	60,73
6	6	87,45	87,45	87,45
7	7	119,03	119,03	119,03
8	8	155,47	155,47	155,47

	A	B	C	D
1	61,1	9068,73	9068,73	9068,73
2	61,2	9098,44	9098,44	9098,44
3	61,3	9128,19	9128,19	9128,19
4	61,4	9158,00	9158,00	9158,00
5	61,5	9187,86	9187,86	9187,86
6	61,6	9217,76	9217,76	9217,76
7	7	119,03	119,03	119,03
8	8	155,47	155,47	155,47

1.5. Calculs algébriques

a) Le scénario du professeur se poursuit ainsi.

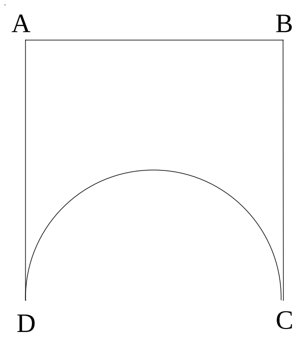
2.3. Les deux premiers programmes de calcul ont respectivement pour expression algébrique

$$(2a)^2 - (\pi \times a^2)/2$$

et

$$(2a)a + ((2a)a - (\pi \times a^2)/2).$$

Question 8. Un élève dispose d'un livre d'exercices corrigés dans lequel figure le problème du calcul d'une plaque de la forme envisagée jusqu'ici (AB = 2*a*).



Dans le livre, la réponse, c'est-à-dire le programme de calcul donnant l'aire de la plaque à partir de la valeur de *a*, est donné directement par son expression algébrique :

$$\mathcal{A} = \left(4 - \frac{\pi}{2}\right)a^2.$$

Le professeur demande aux élèves de vérifier par le calcul qu'on a bien les identités

$$(2a)^2 - (\pi \times a^2)/2 \equiv \left(4 - \frac{\pi}{2}\right)a^2$$

et

$$(2a)a + ((2a)a - (\pi \times a^2)/2) \equiv \left(4 - \frac{\pi}{2}\right)a^2.$$

Faites-le.

[**Réponse 8.** Pour le premier programme de calcul, on a :

$$(2a)^2 - (\pi \times a^2)/2 \equiv 4a^2 - \frac{\pi}{2}a^2 \equiv \left(4 - \frac{\pi}{2}\right)a^2.$$

On a vu que le second programme de calcul est équivalent au premier ; il est donc également équivalent au troisième :

$$(2a)a + ((2a)a - (\pi \times a^2)/2) \equiv (2a)^2 - (\pi \times a^2)/2 \equiv \left(4 - \frac{\pi}{2}\right)a^2.$$

On peut aussi opérer directement, par exemple ainsi :

$$(2a)a + ((2a)a - (\pi \times a^2)/2) \equiv 2a^2 + (2a^2 - \frac{\pi}{2}a^2) \equiv 4a^2 - \frac{\pi}{2}a^2 \equiv \left(4 - \frac{\pi}{2}\right)a^2.]$$

---

b) En binômes, les participants ébauchent par écrit un ***corrigé*** du travail qu'il est prévu de demander aux élèves, en même temps qu'ils esquissent une ***analyse* a priori** de la réalisation éventuelle par les élèves de la tâche qui leur est demandée.

b) En binômes, les participants dégagent des ***règles de calcul littéral*** permettant d'établir les identités demandées.

• Les binômes présentent le fruit de leur travail ; certaines de ces propositions sont considérées immédiatement afin de pouvoir conclure.

• Les règles que l'on peut dégager sont les suivantes.

➔ L'identité $(2a)^2 - (\pi \times a^2)/2 \equiv 4a^2 - \frac{\pi}{2}a^2$ se justifie par les règles suivantes :

$$(kx)^2 \equiv k^2x^2 \text{ et } (kx)/\ell \equiv (k/\ell)x.$$

➔ L'identité $4a^2 - \frac{\pi}{2}a^2 \equiv \left(4 - \frac{\pi}{2}\right)a^2$ se justifie à partir de la règle

$$kx - \ell x \equiv (k - \ell)x.$$

Etc.

• Quelques points doivent être soulignés.

➔ À travers l'hypothèse de l'élève disposant d'un livre d'exercices corrigés, le scénario d'AER prévoit de confronter les résultats du travail de la classe avec les formulations plus « canoniques » contenues dans la culture, formulations qui ne doivent cependant pas prendre la valeur de normes d'écriture indépassables.

➔ À nouveau, comme il en allait dans le travail préconisé sur la question 5, si le travail attendu des élèves doit d'abord aboutir à l'équivalence

$$(2a)^2 - (\pi \times a^2)/2 \equiv \left(4 - \frac{\pi}{2}\right)a^2,$$

la ***justification*** des équivalences écrites successivement doit renforcer l'acquis du travail réalisé à propos de la question 5.

➔ De ce point de vue, un bilan des règles formelles qui constitueront peu à peu la ***théorie algébrique disponible*** (TAD) devra être mené à bien qui permettra de faire apparaître de règles « de base » utiles : associativité de l'addition, associativité de la multiplication, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, voire distributivité de l'exponentiation par rapport à la multiplication…

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ **Séance 8 : mardi 7 novembre 2006**

➔ **Matin** : 0. Questions de la semaine // 1 Forum des questions // 2. Évaluation & développement

➔ **Après-midi** (explicitation) : 3. Les Archives du Séminaire // 4. Programme d'études

Matin

0. Questions de la semaine

Journée 8 (7 novembre 2006)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4^e^ (et soutien en 5^e^)

Mes élèves viennent de recevoir leurs ordinateurs portables prêtés par le conseil général. Comment utiliser ces ordinateurs dans le cadre de mes cours ?

1. Forum des questions

1.1. C2i2e ?

a) La question envisagée ici provient non pas de la rubrique des ***Questions de la semaine*** mais d'un message d'AC, intervenant en tant que délégué, message dont la partie essentielle est reproduite ci-après.

Il est apparu lors de la conférence TICE que nous avons eu mercredi 25 octobre que nous manquions d'informations sur le C2i2e :
– quelles sont les compétences à valider ?
– quelles serons les modalités de validations ?
– quand pourra-t-on commencer à déclarer ses compétences au travers de l'Espar ?
– pour les stagiaires redoublants : qu'en est-il des compétences acquises l'année dernière ?

b) Le document de présentation de la formation et de sa validation examiné le 30 août 2006 invitait à aller visiter le site que l'on trouve à l'adresse suivante :

http://c2i.education.fr/C2i2e/.

La page d'accueil se présente ainsi.

• Sous la rubrique *Actualités*, on trouve notamment la plus récente circulaire sur le C2i2e. On la trouvera aussi dans la rubrique *Documents / 2nd degré* du site de l'IUFM, parmi un ensemble de circulaires réunies sous le titre ***C2i2e – Textes officiels***. On la reproduit et on l'examine rapidement ici.

Enseignement supérieur, recherche et technologie

CERTIFICAT INFORMATIQUE ET INTERNET
Achèvement de la généralisation du C2i® niveau 2 "enseignant"

Circulaire n° 2006-147 du 5 septembre 2006 / BO n° 33 du 14 septembre 2006

Texte adressé aux rectrices et recteurs d'académie ; aux directrices et directeurs des instituts universitaires de formation des maîtres

Le C2i® niveau 2 "enseignant", institué par la circulaire n° 2004-46 du 2 mars 2004 (B.O. n° 11 du 11-3-2004), mis en expérimentation durant l'année 2004-2005 conformément à la circulaire n° 2004-216 du 3 décembre 2004 (B.O. n° 46 du 16-12-2004), est entré dans sa phase de généralisation au cours de l'année 2005-2006 dans le cadre décrit par la circulaire n° 2005-222 du 19 décembre 2005 (B.O. n° 1 du 5-1-2006).

La présente circulaire explicite les conditions de l'achèvement de la généralisation.

I – Les objectifs

– À partir de l'année 2006-2007, tous les stagiaires de tous les IUFM entrent dans le processus de formation et de certification des compétences du C2i® niveau 2 "enseignant".

– Il est attendu que les IUFM créent les conditions de réussite pour que le plus grand nombre de stagiaires soient certifiés tout en maintenant le plus haut niveau d'exigence possible.

II – Le référentiel national

Le référentiel défini dans la circulaire n° 2005-222 du 19 décembre 2005 est opérationnel ainsi qu'en attestent les résultats de la première phase de généralisation. Il est donc reconduit en l'état et joint pour information en annexe.

III – Le cahier des charges

Il est rappelé que le processus qui allie la formation, l'évaluation et la validation des compétences doit être soumis aux instances de l'établissement. Ce processus s'appuie sur les principes suivants :

– l'évaluation doit essentiellement s'effectuer régulièrement tout au long de l'année lors d'activités prévues dans les plans de formation ;

– l’ensemble des formateurs et l’ensemble des disciplines sont concernés, aussi les IUFM sont-ils encouragés à poursuivre ou à mettre en place une formation de formateurs adaptée aux besoins.

Conditions de certification

Les conditions de certification définies dans la circulaire n° 2005-222 du 19 décembre 2005 sont réaffirmées, à savoir :

– les 18 items signalés par une étoile dans la colonne de droite du référentiel doivent être obligatoirement validés ;

– parmi les 9 items restants (sans étoile), 5 au moins devront aussi être validés.

Les IUFM, établissements certificateurs pour le C2i® niveau 2 “enseignant”, déterminent les conditions et exigences minimales requises pour la validation des compétences, aux fins de délivrance du certificat.

La liste des compétences validées sera remise aux stagiaires n’ayant pas obtenu le certificat.

Compte tenu des textes en vigueur, chaque IUFM décide des incidences des résultats au C2i® niveau 2 “enseignant” sur la validation de la formation des stagiaires.

Dispositif de suivi

– Le groupe national d’experts proposera aux IUFM de nouveaux documents d’accompagnement s’appuyant sur les enseignements tirés de l’évaluation des pratiques mises en œuvre au cours des années 2004-2005 et 2005-2006.

– Les IUFM participeront aux regroupements nationaux organisés par le ministère (SDTICE) en accord avec la CD-IUFM.

– Chaque IUFM fournira toutes les informations sur l’organisation de la formation, de la validation et de la certification en réponse aux enquêtes initiées par le ministère pour permettre une harmonisation des pratiques.

Pour le ministre de l’éducation nationale, de l’enseignement supérieur et de la recherche
et par délégation,
Le directeur du Cabinet
Patrick GÉRARD
Annexe
Le référentiel national
Ce document est disponible en téléchargement
MENT0602067C_referentiel_national (.pdf, 2 pages, 34 ko)

• Le « référentiel national » de compétences évoqué à la fin de la circulaire précédente est explicité dans la circulaire du 19 décembre 2005, antérieure, que l’on trouvera également dans le document intitulé ***C2i2e – Textes officiels*** : on va y venir.

• Le site visité (ou à visiter) propose entre autres un ***document d’accompagnement*** du référentiel national de compétences, document qu’on trouvera également sous la rubrique *Documents / 2nd degré* du site de l’IUFM, où il apparaît sous le titre ***C2i2e – Accompagnement***.

c) Un document ***spécifique*** pour la préparation et la validation du C2i2e dans la filière « Mathématiques », ***C2i2e – Repères & balises***, est en ligne sur le site de l’IUFM, à l’adresse
http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2006-2007/ombilic.html.
On l’examine rapidement.

• Ce document ***évolutif*** précise d’abord quelques textes de référence – dont la liste pourra s’enrichir au fil du temps.

• On y énonce ensuite les ***Principes, préceptes et règles*** du travail de formation et de validation concernant l'intégration des TIC dans le travail du professeur de mathématiques et dans la classe de mathématiques. On en examine le contenu à ce jour.

Principes, préceptes & règles de formation et de validation
1. Commençons par la fin, la ***validation***. Pour que celle-ci soit prononcée, il est nécessaire et suffisant que, sur les 27 compétences du référentiel national, le candidat soit validé sur les 18 compétences retenues par le ministère comme devant être maîtrisées (ou en voie de l'être), et qu'il soit validé en outre sur 5 des 9 autres. 2. La règle essentielle gouvernant la procédure de validation est celle-ci, qui simplifie beaucoup sans la dénaturer une situation spontanément complexe et floue. a) La validation de chacune des 27 compétences se fait sur la base de ***documents*** déposés par l'élève professeur stagiaire dans son ***portfolio***, sur la plate-forme *Espar*, ***espace numérique de travail*** (ENT) disponible sur le site de l'IUFM à l'adresse suivante : http://www.aix-mrs.iufm.fr/espar/. b) Chaque document déposé dans son portfolio par le candidat au C2i2e inclut une ***courte présentation*** dont le contenu dépend de la ou des compétences dont on vise, à travers ce document, à obtenir la validation. 3. Une ***compétence*** est l'alliance d'un ***savoir-faire*** et d'un ***savoir***. Maîtriser cette compétence, c'est maîtriser ce savoir-faire ***et*** ce savoir. Dans tous les cas, on s'attachera, dans le processus de formation, à dégager et à maîtriser les savoir-faire (types de tâches et techniques) et les savoirs (technologies et théories) constitutifs d'une « bonne » compétence, laquelle est un construit institutionnel, et rarement un pur « donné », mais apparaît toujours à construire, à retoucher, à corriger, etc. a) Le premier ***type de tâches*** qu'il convient de maîtriser dans la perspective de la validation consiste à ***accéder à son portfolio***, à y ***déposer un document***, éventuellement à le ***supprimer*** pour le ***remplacer*** par un autre, etc. ⇨ Portfolio 1. b) Au plan ***technologico-théorique***, il convient également de préciser la notion de ***portfolio*** utilisée dans ce qui précède. ⇨ Portfolio 2. 4. Comme en tout autre domaine, l'identification des ***types de tâches cruciaux*** est la première étape dans la construction d'une compétence : les « compétences » retenues par le référentiel national ne sauraient renvoyer, dans l'actuel des choses, à des ensembles ***précis*** de types de problèmes (lesquels deviendront ensuite, pour nous, de « simples » types de tâches). a) Il appartient aux professions concernées de préciser leurs besoins en la matière, dans la mesure notamment où ces besoins naissent d'une pratique relativement méconnue, parce qu'innovante, du métier. b) La formation des élèves professeurs stagiaires ***de mathématiques*** se nourrit d'un ***travail par questions*** visant à faire émerger les ***problèmes de la profession*** (de professeur de mathématiques de l'enseignement secondaire français). Elle est donc structurée par une procédure « du bas vers le haut » *(bottom-up)*. Il convient alors de l'articuler avec un référentiel de compétences qui, lui, va à l'évidence « du haut vers le bas » *(top-down)*, c'est-à-dire qu'il convient de répondre à la question suivante : comment « opérationnaliser » le référentiel des compétences en accord avec l'état de repérage des problèmes de la profession réalisé dans la formation et en consonance avec les principes essentiels de cette formation ? 5. Les ***techniques*** à développer dans le domaine de l'intégration didactique et pédagogique des TIC sont souvent très ***sensibles au contexte*** institutionnel et pratique. Il y a là une donnée indépassable dans l'immédiat – la multiplication presque indéfinie des logiciels disponibles quel que soit l'usage visé en témoigne –, qui est une source presque intarissable d'une problématicité impossible à fuir, certes, mais qu'il convient en même temps de n'affronter que dans les cas où elle se révèle incontournable, en travaillant d'abord – pour soi-même et surtout pour les élèves – à l'indispensable ***routinisation*** des techniques utilisées.

a) La construction d'une technique « informatique » relative à tel type de tâches est souvent fortement dépendante des ***ressources du milieu*** – de ses ressources ***logicielles*** comme des ressources matérielles et de maintenance. Ce qu'on peut faire avec tel logiciel de traitement de texte, par exemple, peut se révéler impossible – ou d'une lourdeur invalidante – avec tel autre, qui sera peut-être pourtant le seul accessible aux élèves dans l'établissement.

b) Cette situation conduit à distinguer, pour un niveau donné d'enseignement, les types de tâches ***fondamentaux***, indispensables, et les types de tâches (simplement) ***instrumentaux***, en ce sens qu'ils n'existent qu'en tant qu'ingrédients d'une certaine technique relative à un type de tâches fondamental (voire instrumental). Dans le cas où les ressources du milieu *hic et nunc* ne permettent pas de disposer d'une technique raisonnable pour un tel type de tâches, deux voies s'offrent : soit tenter un ***enrichissement*** approprié des ressources du milieu, mais la chose peut prendre du temps ; soit s'efforcer de substituer à la technique forçant la réalisation de tâches du type considéré une technique n'y faisant pas appel, ce qui sera généralement, à court et moyen termes, la solution la moins mauvaise. Pour un exemple de problème de ce type ⇨ Géoplan en vraie grandeur.

6. D'une façon générale, les techniques et technologies constitutives des compétences à construire (collectivement) et à maîtriser (individuellement ou en équipe) doivent tendre à satisfaire un ***ensemble de critères*** eux-mêmes soumis régulièrement à un examen critique.

a) Certains de ces critères valent pour toute technique : ainsi une technique gagne-t-elle à être ***fiable***, ***économique***, ***intelligible***, par exemple.

b) D'autres critères sont davantage spécifiques. Ainsi les techniques de création de fichiers informatiques gagnent-elles à ***minimiser la taille*** des fichiers créés, comme on peut le souhaiter, par exemple, lorsqu'on importe une ***copie d'écran*** dans un fichier de texte. ⇨ Copies d'écran.

7. Parmi les principes essentiels de la formation figure une condition que l'école (au sens large du terme) s'engage ***par nature*** à réaliser : la diffusion « scolaire » des praxéologies est placée sous le contrôle d'une ***instance de supervision et de vérification***, fonction que, au collège comme au lycée, assument les professeurs, chacun dans son domaine institutionnel de compétence.

a) Dans une classe, ainsi, les élèves sont appelés à s'exprimer, à proposer, à débattre, mais toujours, en dernière instance, ***sous la supervision du professeur***. Dans le cas du travail du chercheur, cette supervision n'est pas, sauf exception, le fait d'un « superchercheur », mais de la ***communauté des pairs*** (ce qu'on nomme de façon commode *la* communauté scientifique).

b) D'une façon plus générale, tout collectif de travail, qu'il soit nombreux ou réduit à une personne, doit se donner une ***instance de supervision***, qui diminuera les risques de dérive épistémologique. Un thésard a un directeur de thèse (et présente le fruit partiel de ses travaux dans un séminaire, par exemple) ; un trinôme réalisant son TER est supervisé par le tuteur du GFP ; etc. Que cette supervision cesse d'exister et ***l'engagement formatif de l'institution concernée sera par définition réduit à rien***.

c) Ce principe implique que ne pourront être validés des travaux n'ayant bénéficié d'aucune supervision raisonnable ; pour le dire sans ambages, ***n'importe quoi n'est pas validable***. Ainsi, s'agissant par exemple du domaine de compétences B.1 (le « travail en réseau avec l'utilisation des outils de travail collaboratif » : voir ci-après), le travail en réseau éventuel avec des professeurs de l'établissement du stage en responsabilité, par exemple, ne saurait être allégué ***sans plus***, même accompagné de l'observation que les professeurs concernés se seraient déclarés « satisfaits » du travail réalisé. On est ainsi constamment conduit à rechercher le meilleur degré ***d'intégration dans la formation et sa validation*** telles qu'elles existent actuellement.

d) Les ***balises*** relatives aux différentes compétences (voir ci-après) se construiront peu à peu à partir des « questions de la semaine » qui se feront l'écho des difficultés rencontrées soit dans la conception, soit dans la réalisation de « gestes professionnels » intégrant ou visant à intégrer les TIC : elles constitueront ***un élément essentiel du dispositif de formation et de supervision de la formation*** à cet égard.

• La section suivante a trait aux douze ***« compétences générales liées à l'exercice du métier »***. Ce volet A du référentiel ne fera l'objet de précisions complémentaires qu'après que le « module général », qui lui est normalement consacré dans la formation aux TICE prévue, aura eu lieu.

• La dernière section concerne les 15 ***« compétences nécessaires à l'intégration des TICE dans sa pratique »***. Pour chacune d'elles, on y présente d'abord, sous le titre ***Repères***, des extraits du ***document d'accompagnement*** relatifs à la compétence examinée. Vient alors une sous-section intitulée ***Balises*** qui se construira au fur et à mesure de l'avancée du travail collectif de formation. Dans sa version actuelle, le document ***C2i2e – Repères & balises***, ne présente de balises, à titre d'illustration, qu'à propos des trois premières compétences du volet B ; on les examine rapidement.

B.1. « Travail en réseau avec l'utilisation des outils de travail collaboratif »

B.1.1. « Rechercher, produire, partager et mutualiser des documents, des informations, des ressources dans un environnement numérique »

a) *Repères*

Activités possibles du stagiaire

Les activités les plus significatives à mettre en place seront :

– la production, la mutualisation et la mise en ligne de documents, de ressources pédagogiques nécessaires pour la formation,

– la préparation des stages, le mémoire professionnel,

– la participation à l'alimentation d'une base de données commune.

Pistes pour l'évaluation

– Il s'agira :

· d'évaluer la participation effective du stagiaire et son degré d'engagement dans les activités initiées par les formateurs,

· d'évaluer cette compétence au travers de l'évaluation plus globale d'une activité collective visant la conception d'une situation d'apprentissage, la conduite d'un projet interdisciplinaire, ou dans le cadre d'une dominante (PE2).

– L'implication de tous les formateurs dans le processus d'évaluation est indispensable.

– Il sera nécessaire de tenir compte de la disponibilité des outils techniques auquel le stagiaire peut avoir accès.

b) *Balises*

• Cette compétence peut trouver à se montrer – et d'abord à se construire – dans le cadre du ***travail d'étude et de recherche*** (TER) mené en bien en trinôme. La ***supervision*** est en ce cas assumée 1) ***pendant*** le temps du travail d'étude et de recherche aboutissant à la rédaction du ***mémoire professionnel***, par le ***directeur du TER***, et 2) à l'étape de la soutenance du mémoire professionnel, par le ***jury d'évaluation des mémoires professionnels***.

• …

B.1.2. « Contribuer à une production ou à un projet collectif au sein d'équipes disciplinaires, interdisciplinaires, transversales ou éducatives »

a) *Repères*

Activités possibles du stagiaire

Tout type d'activité collective, mise en œuvre et rapportée, mobilisant des outils de travail collaboratif, dans le cadre des enseignements ou en stage, telle que :

– la contribution à une production collective, disciplinaire, interdisciplinaire ou transversale,

– la participation à des étapes de travail collectif, lors de la rédaction du mémoire professionnel,

– la participation à un projet au sein d'une équipe pédagogique, sur le lieu du stage (exemple : mise en place du B2i école, en lien avec ses collègues et le coordinateur TICE de circonscription).

Pistes pour l'évaluation

– Cette compétences sera évaluée le plus souvent au travers d'une évaluation plus globale d'activités collectives dans le cadre d'un projet disciplinaire, transversal, interdisciplinaire, ou d'une dominante (PE2).

– Tous les formateurs impliqués dans ces projets ou ces dispositifs peuvent être amenés à évaluer cette compétence.

b) *Balises*

• Cette compétence peut trouver à se montrer – et d'abord à se construire – dans le cadre du ***travail d'étude et de recherche*** (TER) mené en bien en trinôme. La ***supervision*** est en ce cas assumée 1) ***pendant*** le temps du travail d'étude et de recherche aboutissant à la rédaction du ***mémoire professionnel***, par le ***directeur du TER***, et 2) à l'étape de la soutenance du mémoire professionnel, par le ***jury d'évaluation des mémoires professionnels***.

• …

B.1.3. « Concevoir des situations de recherche d'information dans le cadre des projets transversaux et interdisciplinaires »

a) *Repères*

Activités possibles du stagiaire

Cette compétence pourra être mobilisée dans le cadre des enseignements et lors des activités suivantes :

– la conduite, dans le cadre de la formation, d'activités de recherche documentaire, au service d'un projet collectif transversal ou interdisciplinaire.

– la conception de situations de recherche d'information pour des élèves en tenant compte notamment des exigences d'une utilisation professionnelle et citoyenne des TICE (compétence associée A3), et des critères de contrôle de validité des informations (compétence A2).

Pistes pour l'évaluation

– En dehors d'une évaluation qui peut porter sur des projets spécifiques, cette compétence peut être évaluée selon les modalités ordinaires d'évaluation des enseignements et des stages.

– Dans certains cas, elle peut être articulée aux domaines B2 et B3.

– Les formateurs documentalistes sont nécessairement associés à cette évaluation.

b) *Balises*

• Cette compétence non obligatoire, qui n'a pas trait à des « projets » disciplinaires mais, si l'on peut dire, à des projets ***au moins*** interdisciplinaires, peut faire l'objet d'un travail d'ampleur limitée, qui pourrait ***par exemple*** prendre la forme suivante : 1) sur l'un des six ***thèmes de convergence*** qui, en classe de 5^{e} cette année, doivent faire l'objet d'une étude concertée entre plusieurs disciplines, définir un ***sujet d'étude*** prenant la forme d'une question *Q* validée par le tuteur ; 2) amorcer l'exploration des ressources, disponibles sur l'Internet, appropriées à des élèves qui auraient à étudier *Q* ; 3) rédiger une fiche indiquant, outre le thème de convergence et le sujet *Q*, quelques liens conduisant à certaines des ressources ainsi repérées, avec un commentaire sur leur usage éventuel par des élèves du niveau considéré ayant à étudier *Q*.

• …

d) Pour amorcer le travail collectif sur l'ensemble des compétences du référentiel national, on s'arrête un instant, ici, sur la compétence B.2.2

• Cette compétence est formulée de la façon suivante.

B.2.2. Concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de la classe.

• Maîtriser cette compétence, c'est donc ***être capable*** de « concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de la classe ».

• Seuls ou en binômes, et en s'inspirant notamment du travail accompli jusqu'ici dans la formation, les participants consignent ***par écrit*** un spécimen ou des spécimens de types de tâches qui, selon eux, témoigneraient de la maîtrise de cette compétence – sur laquelle on reviendra.

1.2. Ordina 13 ?

a) On complète l'introduction précédente en s'arrêtant un instant sur les questions que voici.

1. Quelle pourrait être la fréquence d'utilisation de l'ordinateur en 4e ? Une ou deux fois par mois est-il trop ou pas assez ? (MD, CR, 4e & demi-5e, 7)

2. Les élèves de ma classe ont hier reçu les ordinateurs de l'opération Ordina 13. Ils m'ont demandé quand on allait s'en servir. Je leur ai dit qu'on allait faire des activités de géométrie puisqu'ils sont équipés du logiciel CABRI. Mais y a-t-il d'autres domaines où l'utilisation de l'ordinateur peut être intéressante et surtout où puis-je trouver ce type d'utilisation ? (VD, OS, 4e, 7)

3. Comment gérer les travaux sur ordinateur, notamment avec l'opération Ordina 13 ? Vaut-il mieux demander aux élèves de travailler sur leur ordinateur à la maison et corriger/continuer l'activité sur un seul ordinateur projeté en classe, ou leur faire apporter leur ordinateur en classe, avec tous les risques du transport ? (CL, OS, 4e, 7)

b) L'ordinateur ne doit certes pas être utilisé juste pour être utilisé. Mais son usage ***motivé*** et ***raisonné*** en mathématiques doit tendre à être fréquent, dès lors que la chose apparaît utile didactiquement et possible matériellement.

• Conséquence : dans le cas des Bouches-du-Rhône, où les élèves de 4e et de 3e disposent chacun d'un ordinateur portable, il n'y a pas de raisons de s'en tenir à deux fois par mois.

• Bien entendu, on peut articuler au cours d'une même séance l'emploi individuel (ou en binômes) des ordinateurs et l'usage d'un ordinateur « collectif », autour duquel la classe se rassemble : on retrouve ici un balancement classique, entre le cahier de travail de l'élève à sa place – équivalent de l'ordinateur personnel de l'élève – et le tableau – équivalent de l'ordinateur « collectif ».

• Le fait de demander aux élèves de réaliser un travail hors classe avec leur ordinateur doit, comme toujours en pareil cas (c'est-à-dire hors de la présence du professeur), être entouré de beaucoup de précautions afin d'être didactiquement utile et non pas contre-productif. Tant que les techniques à mettre en œuvre n'ont pas été clairement construites et travaillées ***en classe*** (de façon à rendre les élèves suffisamment autonomes en la matière), il est sage de différer une utilisation hors classe de l'ordinateur qui mettent en jeu ces techniques. Ici comme ailleurs, l'autonomie se conquiert « morceau par morceau ».

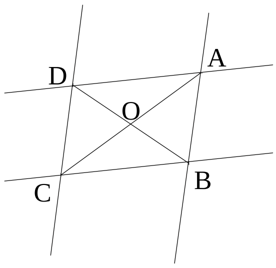
• Les ordinateurs de l'opération Ordina 13 sont équipés d'un ***tableur***, qui devrait être utilisé au moins aussi intensivement que le logiciel de géométrie dynamique qui peut s'y trouver installé : pour un exemple, on se reportera, *supra*, aux notes relatives au TD 2.

c) Un bon exemple d'utilisation en classe d'un ordinateur « collectif » est fourni par la séance observée dans une classe de 5e sur le thème du parallélogramme, comme en témoigne l'extrait du compte rendu d'observation ci-après.

P : « Je vous propose d'expérimenter à l'ordinateur pour voir si on a bien les diagonales qui se coupent en leur milieu. » P projette au tableau l'écran d'un ordinateur portable et demande à un élève d'aller écrire au tableau en même temps. L'élève note :

Avec le logiciel Cabri-géomètre
On a tracé un parallélogramme ABCD

Une élève se plaint que c'est écrit « trop petit ». P fait apparaître deux couples de parallèles, « des bandes », disent les élèves. Elle trace les diagonales, nomme O leur intersection.



« Il y a une fonction dans l'ordinateur qui permet de mesurer les distances », dit P. Un élève précise : on mesure AO, etc. Les distances mesurées apparaissent en projection sur le tableau. Échange pour savoir si O est bien le milieu de [BD] : oui ! Ensuite, on passe à AO et OC, qui sont eux aussi trouvés égaux. Conclusion : dans ce parallélogramme, O est le milieu des deux diagonales. P précise : « On peut changer les droites avec ce logiciel. » Elle sollicite un élève qui va à l'ordinateur pour faire bouger (AD) et (AB) : il y parvient après un minimum d'hésitations. Les distances affichées restent égales entre elles ! Les élèves : « L'autre droite ! L'autre bande ! » L'élève le fait, fort bien. Pendant ce temps, l'élève au tableau a écrit :

On a bougé les diagonales AC et BD
On mesure BO et OD pour savoir
Si O est le milieu puis on fait pareil
avec AO et OC
On a bougé les droites et on
remarque que O est bien le milieu

Un élève s'étonne que les diagonales n'aient pas la même longueur. Une élève affirme : « C'est que dans les carrés ! » P prend acte du propos de l'élève mais ajoute qu'on verra, que là on voit que ce n'est pas pareil… L'élève au tableau a écrit :

remarque que O est bien le milieu des segments
DB et AC

P corrige les notations fautives. Puis elle demande à un élève de formuler la propriété étudiée, ce qu'il fait : « Les diagonales se coupent en leur milieu. »

2. Évaluation & développement

2.1. Deux questions & un bilan d'étape

a) On poursuit l'étude amorcée lors de la séance 6 autour des questions ci-après.

1. Sur le thème *Triangles isométriques, triangles de même forme*, je ne comprends pas le commentaire suivant : « Pour des formes courantes (équilatéral, demi-carré, demi-équilatéral), on fera le lien avec les sinus et cosinus des angles remarquables. » (MG2, OS, 2de, 5)

2. Comment préparer une AER sur les triangles isométriques ? J'ai proposé aux élèves l'activité suivante :
– déterminer dans un ensemble de figures proposées celles qui sont superposables, puis mesurer les longueurs et les angles ;

– tracer plusieurs triangles (trois ou quatre) avec les trois longueurs des côtés imposées et vérifier qu'ils sont superposables ;
– tracer des triangles connaissant certains éléments.

Résultat : certains élèves comprenant très vite ce que l'on voulait montrer n'avaient pas envie d'effectuer toutes les mesures et constructions ; d'autres élèves étaient gênés par leur niveau : ils ne savaient pas effectuer les constructions demandées. Comment améliorer cette activité ? Est-elle pertinente et adaptée pour introduire les triangles isométriques ? (ALP, CR, 2^{de}, 5)

b) Rappelons les principales conclusions établies.

• Les ***cas d'isométrie*** sont un outil simple et ***puissant***, autrefois introduit dès le collège, pour déduire des égalités de longueurs (de segments) et des égalités d'angles.

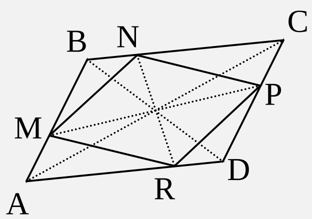
• Pour user de cet outil, il convient de pouvoir regarder les deux éléments à comparer (les deux segments, les deux angles) comme éléments correspondants dans deux triangles dont on parvienne alors à établir qu'ils relèvent de l'un des trois « cas » d'isométrie, c'est-à-dire qu'ils vérifient l'une (au moins) des trois conditions suffisantes traditionnelles d'isométrie.

• Chacune des conditions suffisantes d'isométrie implique qu'il existe au moins une isométrie qui transforme un triangle en l'autre – sans qu'on sache de quelle nature est cette isométrie (la chose importe peu).

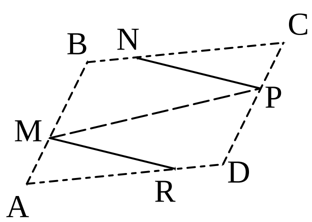
c) Pour illustrer l'emploi des cas d'isométrie, on reprend ici un exemple présent dans le passage des notes du Séminaire 2002-2003 déjà exploité lors de la séance 6. On y observera la mise en jeu de la technique de recherche d'une déduction par ***questions cruciales***, ainsi que la structure de cette recherche : contrairement à une affirmation trop souvent entendue, ***on part des conclusions à établir*** et on essaie de remonter aux ***hypothèses***.

Sur les côtés d'un parallélogramme ABCD, et en tournant toujours dans le même sens, on prend des longueurs égales AM = BN = CP = DR.

Montrer que le quadrilatère MNPR est un parallélogramme qui a même milieu que ABCD.

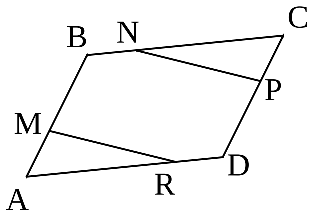


➊ Essayons de montrer que (MR)//(PN). Si l'on sait que les angles $\widehat{AMR}$ et $\widehat{CPN}$ sont égaux, on y parvient aisément en considérant la figure formée par les droites (MR) et (PN) avec la sécante (MP).



Les droites (AB) et (CD) étant parallèles, on a d'abord $\widehat{BMP} = \widehat{MPD}$. Puisque $\widehat{AMR} = \widehat{CPN}$, on a alors $\widehat{PMR} = \widehat{MPN}$ (comme supplémentaire des angles égaux $\widehat{BMP} + \widehat{AMR} = \widehat{MPD} + \widehat{CPN}$). D'après le théorème des angles alternes-internes, les droites (MR) et (PN) sont donc parallèles.

❷ Le problème est donc résolu si l'on sait démontrer que les angles $\widehat{AMR}$ et $\widehat{CPN}$ sont égaux. Pour cela, selon le principe rappelé plus haut, il convient de faire apparaître ces angles comme appartenant à deux triangles « égaux » : il suffit par exemple de montrer que les triangles AMR et CPN sont isométriques. Or ces triangles ont « un angle égal compris entre deux côtés égaux » (2e cas d'isométrie)



On a en effet $\widehat{MAR} = \widehat{PCN}$ (comme angles opposés dans le parallélogramme ABCD), AM = CP (par construction), et, puisque AD = CB (comme côtés opposés dans le parallélogramme ABCD) et BN = DR (par construction), AR = AD – DR = CB – BN = CN. Les triangles AMR et CPN étant isométriques, leurs angles correspondants sont égaux : en particulier on a $\widehat{AMR} = \widehat{CPN}$.

3.2. Évaluation : critères

a) Comment construire une AER qui pousse en avant l'intérêt de disposer des cas d'isométrie ? On commence par dresser une liste (très incomplète…) de conditions *a priori* qu'il conviendra de chercher à satisfaire, et qui joueront le rôle de critères d'évaluation des scénarios d'AER envisagés (ou envisageables).

• L'AER demandée doit consister en l'étude d'un problème ***déductif*** : pour un motif éventuellement non précisé, on souhaite établir déductivement une certaine propriété de l'espace – un certain « fait spatial ».

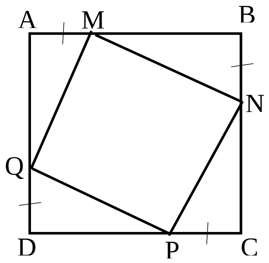
• Le fait spatial en question doit découler d'***égalités de longueurs*** et/ou d'***angles***.

• Si du moins elle emprunte une voie relativement « naturelle », l'étude collective dirigée du problème retenu doit conduire à reconnaître comme clé de ce problème ***la « comparaison » entre deux triangles*** (qui, sans qu'on puisse encore le dire ainsi, seront « isométriques »)

b) Le scénario dont la description est ébauchée dans la seconde des deux questions reproduites ci-dessus ne satisfait pas les critères précédents : en réalité, son objet n'est pas la reconnaissance de l'intérêt de disposer de critères d'isométrie de triangles mais la mise en évidence de tels critères – ce qui constitue une étape ultérieure de l'étude à concevoir.

3.3. Une propriété géométrique

a) On peut commencer par l'étude d'une propriété à ***identifier expérimentalement*** – propriété dont l'établissement ***par voie déductive*** sera ensuite placée au cœur de l'AER à concevoir.



b) On choisit ***ici*** d'étudier la configuration suivante. Soit un carré ABCD : voir le ***schéma*** ci-contre, que l'on a dessiné de façon volontairement grossière. Sur]AB[on marque un point M. Cela fait, on marque le point N de]BC[tel que BN = AM, puis le point P de]CD[tel que CP = AM, enfin le point Q de]DA[tel que DQ = AM.

On se demande alors si le quadrilatère MNPQ ainsi obtenu a des propriétés particulières.

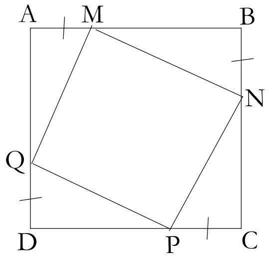
c) Le schéma fourni aux élèves ne permet pas une conjecture évidente. Le travail hors classe suivant est donc proposé. (*Nota bene* : le logiciel Wallis n'existe pas ; ce nom désigne simplement, par défaut, le logiciel géométrique d'usage courant dans la classe.)

Lycée Jules Gal
2de3 – Mathématiques

Travaux hors classe

pour le *27-10-06*

Soit un carré ABCD (voir le schéma ci-contre). Sur]AB[on marque un point M. Cela fait, on marque le point N de]BC[tel que BN = AM, puis le point P de]CD[tel que CP = AM, enfin le point Q de]DA[tel que DQ = AM.



En utilisant le logiciel de géométrie *Wallis*, identifier et vérifier les propriétés éventuelles du quadrilatère MNPQ.

C'est tout !

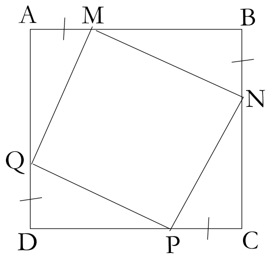
d) La « correction » du travail demandé se fait en classe. Le professeur réalise l'une ou l'autre des propositions des élèves. La classe aboutit à des conclusions qui sont consignées dans le cahier de synthèse.

Lycée Jules Gal
2de3 – Mathématiques

Synthèse

Triangles isométriques

1. a) ***Problème.*** Considérons un carré ABCD (voir le schéma ci-contre). Sur]AB[on marque un point M.



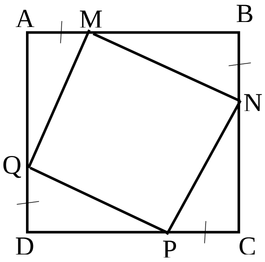
Cela fait, on marque le point N de]BC[tel que BN = AM, puis le point P de]CD[tel que CP = AM, enfin le point Q de]DA[tel que DQ = AM.

b) ***L'expérience montre*** que le quadrilatère MNPQ a ses côtés de même longueur (c'est donc un losange) et ses quatre angles droits (c'est donc un rectangle). Il s'agit finalement d'un ***carré*** (comme le quadrilatère ABCD donné).

c) ***Remarque.*** L'expérience a en réalité été simulée à l'aide du logiciel de géométrie *Wallis*.

3.4. Quel outil déductif ?

a) Considérons l'égalité des ***longueurs*** du quadrilatère MNPQ, et par exemple celle de MQ et de MN. Dans le cas évoqué ici, le triangle de Pythagore attire l'attention sur les triangles AMQ et BNM.



Ces triangles, respectivement rectangles en A et B, ont leurs côtés de l'angle droit deux à deux de même longueur (par construction) : AM = BN, AQ = AD – DQ = AB – AM = BM. D'après le théorème de Pythagore, on a alors : $MQ = \sqrt{AM^2 + AQ^2} = \sqrt{BN^2 + BM^2} = MN$.

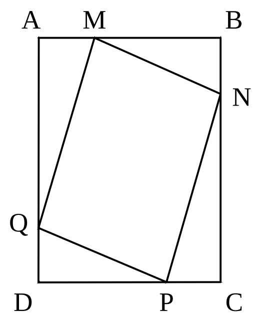
• L'organisation de l'étude doit bien évidemment s'arc-bouter à la ***question cruciale*** (apportée par la classe ou, à défaut, par le professeur)

« Comment établir que deux segments ont même longueur ? »

• ***La*** réponse, tout aussi cruciale, à la question précédente est ici :

« En les faisant apparaître comme hypoténuses de deux triangles rectangles ayant des côtés de l'angle droit deux à deux de même longueur ».

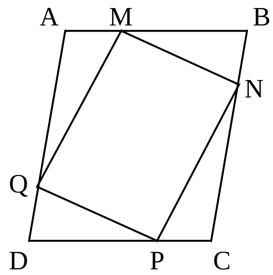
b) La suite du scénario d'AER ébauché jusqu'ici va s'appuyer sur un changement « structurel ». Tout d'abord, au lieu d'un carré ABCD, on part d'un ***rectangle*** (non carré) ABCD, ce qui change les choses sur un point.



• Le quadrilatère MNPQ se révèle, à l'exploration expérimentale, être un parallélogramme qui n'est pas un losange. On n'a donc pas à tenter d'établir que MQ = MN puisque cette égalité n'est pas vraie, mais MQ = NP.

• La situation examinée pousse à « comparer » les triangles AMQ et CPN. Comme ces triangles sont toujours rectangles, on peut reconduire la solution mise au point dans le cas du carré. Le changement essentiel est encore à venir.

• Ce changement se produit lorsqu'on remplace ABCD par un parallélogramme (non rectangle) : on obtient toujours un parallélogramme MNPQ, mais cette fois les triangles AMQ et CPN ne sont plus rectangles.



Après-midi

Séance d'explicitation

4. Les Archives du Séminaire

4.1. Punitions et sanctions

a) Une recherche dans les *Archives* a été confiée au trinôme formé de *VAC*, *YB* et *SM1*, qui présente maintenant leur compte rendu de leurs trouvailles à propos de la question suivante.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* à propos des ***punitions et sanctions*** au collège et au lycée ?

b) Remarques & commentaires.

4.2. Notations mathématiques (et autres)

a) Le trinôme formé de *SM2*, *SP* et *PP* présente ensuite son compte rendu de recherche dans les *Archives* à propos de la question que voici.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* à propos des ***notations*** (mathématiques et autres) à employer avec les élèves ?

b) Remarques & commentaires.

4.3. AER de géométrie

a) Le trinôme formé de *MD*, *MG1* et *JL* rend compte de leur recherche dans les *Archives du Séminaire* à propos de la question suivante.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* en matière d'***AER de géométrie*** ?

b) Remarques & commentaires.

4.4. Géométrie dans l'espace en 2de

Faute de temps, le compte rendu de recherche que devait proposer le trinôme constitué de *CL*, *CS2* et *FV* sera présenté lors de la prochaine séance d'explication, le ***mardi 28 novembre***.

5. Programme d'études

5.1. Recherches à venir dans les *Archives*

a) Une première recherche répondra à la question suivante.

> Que recèlent les *Archives du Séminaire* à propos de ***l'enseignement des nombres relatifs*** au collège ?

Cette recherche sera réalisée par le trinôme constitué de *FLA*, *AEO* et *OL1*.

b) Une deuxième recherche s'attachera à la question que voici.

> Que nous disent les *Archives du Séminaire* à propos de ***l'effet Pygmalion*** et plus généralement des « effets de contexte » dans la gestion des apprentissages ?

Cette recherche sera menée à bien par *SK* et *CS1*.

b) Une troisième recherche prendra pour objet la question ci-après.

> Que contiennent les *Archives du Séminaire* à propos de ***l'enseignement des fonctions***, notamment ***en classe de 2de*** ?

Cette recherche sera réalisée par *KE* et *RH*.

5.2. Un programme de travail

a) La prochaine séance du Séminaire aura lieu le ***mardi 21 novembre***.

b) En vue de cette séance, on mettra à profit le temps d'étude personnelle dégagé par l'annulation de la séance du 14 novembre en inscrivant dans son ***programme de travail personnel*** les trois volets suivants.

• ***Tout d'abord***, on étudiera les notes résumant la séance de ***travaux dirigés numéro 2*** relative aux programmes de calcul et au calcul littéral (voir ci-dessus), en vue d'une ***synthèse*** des contenus praxéologiques professionnels qui ont émergé lors de ce TD.

• ***Ensuite***, on prendra connaissance plus complètement de la version actuelle du document ***C2i2e – Repères & balises***.

• **Enfin**, dans la notice ***Le temps de l'étude***, on lira avec attention les sections 3 et 4, intitulées respectivement ***Le programme, l'élève et le temps de l'étude*** et ***Transitions didactiques et reprises d'étude***, en reliant notamment cette 4^{e} section à la question suivante.

J’ai du mal à constituer les tests d’entrée. On ne peut pas, dans un test, examiner tous les types de tâches rencontrés dans les années précédentes. Comment choisir les types de tâches essentiels ? (ML, MJ, 2de, 7)

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 9 : mardi 21 novembre 2006

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques // 2. Forum des questions

0. Questions de la semaine

Journée 9 (21 novembre 2006)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4e (et soutien en 5e)

Dans le programme, il est demandé d'aborder le calcul littéral tout au long de l'année. M'étant aperçue que mes élèves avaient de grandes difficultés, j'ai décidé de traiter ce chapitre dès maintenant. Je suis d'ailleurs étonnée que dans certaines progressions comme celui de ma PCP, le calcul littéral ne soit abordé qu'en fin d'année.

1. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques

1.1. *Le temps de l'étude*

a) Les participants au Séminaire avaient à examiner les sections 3 et 4 de la notice ***Le temps de l'étude***.

b) On examine ici la première de ces deux sections, intitulée ***Le programme, l'élève et le temps de l'étude***.

3.1. Le professeur ne se contente pas de « séquencer » la matière à enseigner à l'échelle de l'année, du trimestre, du mois, de la semaine : son magistère s'étend jusqu'à l'***heure*** de classe, qu'il doit programmer minutieusement. Cette organisation de l'étude, qui fait du professeur le « maître du temps » – le « chronomaître » –, rend l'élève très fortement ***dépendant du professeur***. À chaque instant, en effet, l'élève ignore ***ce qu'il aura à faire la minute d'après***, parce que cela dépend à peu près sans partage du professeur, qui sait seul ce qui viendra ***après***, ce qu'on fera dans la classe ***ensuite***. Nulle part ailleurs sans doute, en aucune des institutions de la vie ordinaire, l'aliénation temporelle de l'individu n'atteint une telle extrémité ! Dans les contrats didactiques modernes, l'absence de contrôle sur l'avancée du temps didactique caractérise ainsi la position de l'élève, ce qui va de pair, presque mécaniquement, avec une ***grande sensibilité*** des élèves aux manquements éventuels du professeur en la matière. Ainsi les élèves (et leurs parents) sont-ils portés à s'enquérir régulièrement de l'état d'avancement de l'étude, pour s'assurer que le programme est effectivement traité. Si on la rapporte aux prérogatives magistrales, presque absolues en ce domaine, il s'agit là d'une surveillance ***minimale***, que le professeur ne saurait légitimement refuser. Tout à l'inverse, il convient de faire droit à l'exigence démocratique de ***publicité des programmes d'études*** (annuel, hebdomadaire, etc.), qui, du même mouvement, allège la dépendance temporelle de l'élève et permet que se formule le pacte d'instruction rassemblant parents, professeurs, élèves dans un projet d'étude partagé.

3.2. Dans cette perspective, l'une des premières tâches des équipes pédagogiques consiste à présenter aux élèves (et, du moins au collège, à leurs parents) le programme d'études de l'année [14. Ce souci n'est pas nouveau : en 1925, Anatole de Monzie, premier « ministre de l'Éducation nationale » (et non plus « de l'Instruction publique »), signait un arrêté énonçant que les « programmes doivent être connus non seulement des administrateurs et des professeurs, mais encore, dans tous leurs détails, des familles et des élèves ». « Les administrations collégiales, ajoutait-il, veilleront à leur diffusion. »]. Cette présentation, qui gagne à être conduite collectivement pour ***l'ensemble des élèves d'un même niveau de classe***, peut comporter différents éléments : présentation, s'il existe, du ***livret de niveau*** de l'établissement (livret de Quatrième, etc.), des équipes pédagogiques, des objectifs de formation, des dispositifs où les élèves seront amenés à travailler au sein de l'établissement, ainsi que leurs fonctions didactiques principales ; présentation aussi du travail demandé hors de l'établissement, des modalités d'évaluation, des procédures d'orientation, et, bien sûr, des emplois du temps des différentes classes du niveau concerné [15. On pourra se référer à cet égard au document *Qu'apprend-on au collège ?* déjà mentionné.]. Dans tous les cas, le programme doit jouir d'une ***forte publicité au sein de la classe***, par affichage lorsque c'est possible, et, dans tous les cas, par diffusion aux élèves d'une version adaptée servant de support à ***un repérage collectif régulier*** de l'avancée de l'étude, repérage permettant à la classe de situer le ***travail accompli*** et ***celui qui reste à accomplir***, et contribuant par là à relancer dans la classe le pacte d'instruction.

3.3. Au-delà du programme de travail de l'année, il convient encore de présenter aux élèves le programme de travail ***de périodes de temps plus restreintes***. Il n'était pas rare autrefois de voir l'instituteur expliciter le programme de la ***journée*** [16. Le vendredi 9 mars 1888, à l'école de Biesles (Haute Marne), le programme de travail était ainsi le suivant : « *Matin :* Instruction morale : devoirs relatifs au corps / Copie de la rédaction / Histoire de France : Louis XIV / Devoir d'histoire de France. *Soir :* Lecture : Lyon le soir / Exercice de géométrie : tracé des tangentes / Exercice d'application / Écriture du cahier-journal ».]. Une telle pratique semble trouver moins facilement sa place lorsque la durée de la séance est inférieure à la demi-journée ; *a fortiori* peut-elle paraître déplacée dans une séance de durée inférieure à l'heure ! Même dans ce cas pourtant, on doit regarder comme une saine pratique le rituel consistant à ***lancer la séance*** en en présentant d'abord rapidement le « menu » – et cela par exemple de vive voix, tout en notant ou en faisant noter par un élève, dans un coin du tableau, et pour mémoire, quelques mots clés. À plus forte raison procèdera-t-on à la présentation du programme de travail de la ***semaine*** : elle se fera par exemple en début de semaine, le rituel précédemment évoqué ayant alors pour objet, en chaque séance, de rappeler et de préciser la partie du programme de la semaine à réaliser durant la séance qui commence.

3.4. À tout programme de travail – qu'il soit relatif à une heure de classe, à une semaine entière, ou à quelque autre unité de temps – doit correspondre une phase de ***bilan*** proportionnée au travail accompli, qui permette de ***faire le point*** et prépare ainsi l'effort de ***synthèse*** [17. C'est sur un tel bilan, consigné par écrit dans le « cahier-journal », que s'achevait il y a un peu plus d'un siècle la journée de travail à l'école primaire de Biesles...]. Pour ce faire, on peut notamment, au collège comme au lycée, utiliser le ***cahier de textes de la classe***, dont le contenu pourra être, une fois par semaine par exemple, ***revu et complété collectivement***, sous la direction du professeur, à partir notamment de l'ensemble des traces écrites (cahiers et cahiers de textes des élèves, etc.) du travail réalisé dans la période écoulée, avec pour objectif traditionnel, aujourd'hui bien oublié, d'aider élèves, parents et… professeurs à se situer par rapport à l'avancée de l'étude, comme le rappelait jadis la circulaire du 3 mai 1961 [18. Pour le texte complet de cette circulaire, voir le document *Circulaire du 3 mai 1961 sur le cahier de textes*.] :

Un cahier de textes bien tenu est, pour l'élève, l'instrument premier de tout travail personnel efficace. Le cahier de textes de classe, qui sert avant tout de référence aux cahiers de textes individuels, et doit être, de façon permanente, à la disposition des élèves qui peuvent à tout moment s'y reporter, assure en outre, dans l'esprit de la circulaire du 20 octobre 1952 la liaison entre les professeurs et les maîtres chargés des études surveillées. Il permet enfin, en cas d'absence ou de mutation d'un professeur de ménager une étroite continuité entre l'enseignement du maître précédent et celui de son suppléant ou de son successeur. À ces divers titres, cahiers de textes de classe et cahiers individuels doivent être complets, de maniement facile et exempts de fautes. Ils doivent refléter la vie de la classe et permettre de suivre avec précision la marche des études.

Un tel ***travail de la mémoire***, qui rassemble la classe autour de son histoire en réduisant l'asymétrie structurelle entre professeur et élèves par rapport au temps de l'étude, et contribue à l'éducation des élèves à la citoyenneté et à la démocratie, peut prendre évidemment d'autres formes. On notera seulement, ici, le rôle que peuvent jouer, dans cette perspective, les ***travaux individuels de rédaction***, en classe et ***hors classe***, qui pourront avoir pour objet, à l'occasion par exemple de chaque période de vacances, de dresser l'inventaire « des choses faites et des choses qui restent à faire », à titre de préparation au ***bilan de rentrée***, collectif, inaugurant la reprise de l'étude.

1.2. *Le temps de l'étude* : suite et… fin

Pour la séance 10 (le 28 novembre), on relira la dernière section de la notice *Le temps de l'étude*, intitulée ***Transitions didactiques et reprises d'étude***.

2. Forum des questions

2.1. Du numérique à l'algébrique

a) Les participants au Séminaire avaient à étudier les notes résumant la séance de ***travaux dirigés numéro 2*** relative aux ***programmes de calcul*** et au ***calcul littéral***, en vue d'une ***synthèse*** des contenus praxéologiques professionnels qui ont émergé lors de ce TD. Dans cette perspective, on a réuni ci-après certains « ingrédients » d'une problématique mathématique de l'algèbre élémentaire.

a) Comme il en va en matière de géométrie, l'algèbre se construit comme la science d'un certain ordre de faits, les ***faits algébriques***. Mais l'adjectif « algébrique » est, en vérité, opaque (on reviendra sur son origine et son étymologie). Une assertion géométrique a trait à un « fait spatial » et peut, à ce compte-là, être trouvée ***vraie*** ou ***fausse***. Mais on peut se demander à quoi se réfère, par exemple, « l'assertion » qui s'énonce ainsi :

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 – yz – zx –xy) = x^3+ y^3+ z^3 – 3xyz.$$

Qu'en est-il, de même, de l'assertion selon laquelle $3x^2 – 5x – 2 = (3x + 1)(x – 2)$? Que signifie le fait de dire – de prétendre – que ces assertions algébriques sont vraies ou fausses ?

c) L'algèbre est victime du même phénomène que la géométrie : on y dispose *a priori* d'une ***théorie toute faite***, dans laquelle on peut ***déduire*** les faits algébriques précédents ; mais, faute de savoir ***de quoi cette théorie est la théorie***, de quoi nous parlent les assertions algébriques qu'on peut y démontrer, on ne sait pas ***(re)construire*** cette théorie.

• Conséquence de cet état de fait, on ne sait pas indiquer clairement pourquoi ***on n'a pas***, par exemple, $3x^2 = 6x$, ou pourquoi ***on a bien*** $4x – 11x = –7x$, etc.

• Il est de même usuel de parler d'***expression*** algébrique, sans que l'on sache ce que cette « expression » ***exprime*** ! Pour qu'il en aille autrement, il convient de partir de ce dont nous parle l'algèbre : $3x^2$, par exemple, est l'expression algébrique (ou littérale) d'un certain ***programme de calcul***, à savoir le programme de calcul qui, étant donné un nombre x, « renvoie » le nombre $3x^2$, et qui, donc, pour $x = 1$, renvoie 3, pour $x = 4$ renvoie 48, etc. L'algèbre élémentaire est ainsi la science ***des programmes de calcul*** (sur les nombres), et en particulier la science ***du calcul sur les programmes de calcul***.

d) La notion de ***programme de calcul*** se construit aujourd'hui à l'école primaire et dans les premières années du collège : elle formalise l'idée de « faire un calcul », c'est-à-dire le fait d'opérer sur des nombres d'une manière déterminée, ***selon un certain programme***. C'est ainsi que, à propos des fonctions ***affines***, le programme de 3e précise :

> Pour des valeurs de *a* et *b* numériquement fixées, le processus de correspondance sera aussi explicité sous la forme « je multiplie par *a* puis j'ajoute *b* ».

La notion de programme ainsi construite, qui est un objet de la pratique mathématique, reste à ce stade un objet ***insuffisamment mathématisé***. Si on peut « exécuter un programme de calcul », on ne saurait guère se poser de problème à propos des programmes de calcul, énoncer des théorèmes les concernant, etc. Or c'est précisément tout cela que la mathématisation ***algébrique*** de la notion de programme de calcul va permettre de faire.

• Lorsque la notion d'expression algébrique est dûment introduite au collège comme mathématisant la notion de programme de calcul, en effet, un certain nombre de difficultés « traditionnelles » prennent un tout autre sens, quand elles ne disparaissent pas tout à fait.

• Ainsi la question « Que vaut $x + 3$? » devient-elle ***dénuée de sens*** : l'expression $x + 3$ est l'expression algébrique d'un programme de calcul (« Au nombre donné, ajouter 3 ») et n'a donc pas à « valoir » quelque chose.

• En revanche, on peut, de manière tout à fait légitime et pertinente, se demander si, par exemple, $x + 3$ et $3x$, « c'est pareil », c'est-à-dire s'il s'agit ou non de deux expressions algébriques, formellement distinctes, de programmes de calcul ***équivalents***. Non seulement cette question a un sens, mais en outre on dispose pour y répondre d'une technique permettant de trancher. En l'espèce, pour $x = 1$, le programme $x + 3$ « renvoie » 4, tandis que le programme $3x$ renvoie 3 ; par suite, $x+3 \neq 3x$.

• Même si la remarque suivante ne saurait être exploitée telle quelle au collège aujourd'hui, on pourra noter que les expressions $x + 3$ et $x - 2$, par exemple, qui ne définissent pas des programmes de calcul équivalents sur $\mathbb{N}$, sont pourtant équivalentes sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, où l'on a $x + 3 = x - 2$. Deux programmes de calcul ne sont donc pas équivalents dans l'absolu, mais relativement à un ***système de nombres*** donné.

e) Il convient de souligner que la définition de la notion d'expression algébrique comme formulation symbolique d'un programme de calcul « en mots » est celle que retiennent tous les ouvrages classiques d'algèbre élémentaire – même si l'expression « programme de calcul » n'y apparaît pas explicitement.

• Dans une *Algèbre* publiée en 1932 pour l'enseignement primaire supérieur, on lit ainsi :

> On appelle expression algébrique le résultat de une ou plusieurs opérations algébriques non encore effectuées et représentées par les signes conventionnels déjà définis.

➔ Les mêmes auteurs définissent ensuite une notion essentielle dans cette perspective, celle de ***valeur numérique*** d'une expression algébrique :

On appelle valeur numérique d'une expression algébrique, pour certaines valeurs attribuées aux lettres qui y figurent, le nombre que l'on obtient en remplaçant les lettres par leurs valeurs et en effectuant les calculs indiqués.

➔ Ils précisent alors le lien entre ***formule***, ***expression algébrique*** et ***valeur numérique*** d'une expression algébrique :

Chaque fois qu'on a une formule, le second membre est une expression algébrique et, pour calculer la valeur de la quantité fournie par cette formule, on calcule la valeur numérique de l'expression pour certaines valeurs des lettres. Ainsi, par exemple, l'aire S d'un cercle de rayon R est donnée par la formule $S = \pi R^2$ où $\pi = 3,1416$. $\pi R^2 = 3,1416R^2$ est une expression algébrique.

• Les auteurs de l'*Encyclopédie autodidactique Quillet* (1958) écriront semblablement :

Définition. – *On appelle expression algébrique un ensemble de lettres et de nombres réunis entre eux par des signes indiquant une suite d'opérations qu'il faut effectuer.*

Ex. : $3\,a\,b$, $\frac{x-y}{5}$, $3c\sqrt{a+b}$, $(a^2 + b)\,(a - b^2)$.

...

Valeur numérique d'une expression algébrique. Soit l'expression $3\,a\,b$. Connaissant les valeurs particulières $a = 2$, $b = 5$, on peut calculer l'expression $3\,a\,b$ en remplaçant les lettres par leur valeur. On a : $3\,a\,b = 3\times2\times5 = 30$. La valeur numérique de $3\,a\,b$ est 30.

• Dans ce contexte mathématique, le type de tâches consistant à déterminer la valeur numérique d'une expression algébrique donnée pour un jeu de valeurs donné occupe une place importante, du moins pour les commençants : ainsi l'*Encyclopédie Quillet* propose-t-elle à ses lecteurs de calculer par exemple la valeur numérique des expressions $3a + 2b$, $5a - 3(b + c)$, $2a^2b + 5ab^2$, etc., pour $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$.

• C'est ce que prévoit encore aujourd'hui le programme de 5^e^, où figure à titre de compétence exigible le type de tâches suivant, au cœur du TD2 :

Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques données.

• Il en va de même en classe de 4^e^, où l'on travaille plus directement encore sur le type de tâches indiqué, comme le précise cet extrait de la rubrique des « Compétences exigibles » :

Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques.

f) Quels sont les grands types de tâches de l'algèbre élémentaire ?

• Un premier type de problèmes est celui du passage de la formulation ***rhétorique*** (ou littéraire, « en mots », sous forme de ***règle***) d'un programme de calcul à la formulation ***symbolique*** (ou littérale), c'est-à-dire à l'expression algébrique de ce même programme de calcul.

• La résolution de ce type de problèmes est elle-même poussée en avant par ***le type de problèmes fondamental*** suivant :

Étant donné deux programmes de calcul P et Q, reconnaître si P et Q sont équivalents ou non sur un domaine numérique $\mathcal{D}$ donné, c'est-à-dire si l'on a : $P(x, y, ...) = Q(x, y, ...)$ pour tous $x, y, ... \in \mathcal{D}$.

C'est notamment ce type de problèmes qui justifie la mathématisation de la notion rhétorique de « règle » par la notion algébrique de « formule » et conduit à ***développer une théorie du calcul algébrique***.

➔ Supposons par exemple qu'on veuille comparer les deux programmes de calcul P et Q ci-après, dont la formulation, empruntée à un manuel d'algèbre ancien, se coule dans un langage daté :

Programme *P*. Étant donné deux entiers, prendre le quart de l'excès du premier sur le double du second, puis ajouter le double du second.

Programme de calcul *Q*. Étant donné deux entiers, ajouter au premier le sextuple du second, puis diviser par 4.

➔ L'exécution de ces programmes de calcul sur divers couples d'entiers suggère qu'ils sont équivalents : on a par exemple $P(7 ; 2) = (7 - 2 \times 2)/4 + 2 \times 2 = 4{,}75$, et $Q(7 ; 2) = (7 + 6 \times 2)/4 = 19/4 = 4{,}75$.

➔ Les « formules » ci-après sont respectivement l'expression algébrique de ces deux programmes de calcul : $P(x ; y) \equiv \frac{x-2y}{4} + 2y$; $Q(x ; y) \equiv \frac{x+6y}{4}$. Pour établir leur équivalence, on devra montrer que

$$\vdash_{\text{TAD}} \frac{x-2y}{4} + 2y = \frac{x+6y}{4}$$

ce qui suppose de créer une théorie algébrique adéquate, dans laquelle on puisse justifier la suite d'équivalences que voici (par exemple) : $\frac{x-2y}{4} + 2y = \frac{x-2y}{4} + \frac{8y}{4} = \frac{x+6y}{4}$.

➔ La TAD doit ici permettre d'établir les égalités algébriques (valant équivalence des programmes de calcul correspondants) $x = \frac{kx}{k}$ et $k(\ell x) = (k\ell)x$, puis $\frac{x}{k} + \frac{y}{k} = \frac{x+y}{k}$ et $(x - ky) + \ell z = x + (\ell - k)z$.

• Le type de tâches précédent – « étant donné deux programmes de calcul P et Q, reconnaître si P et Q sont équivalents ou non… » – est souvent réalisé en passant par l'intermédiaire de l'***écriture canonique*** d'une expression algébrique, écriture dans laquelle toute expression a une écriture unique, en sorte que la non-identité ***formelle*** des écritures canoniques implique la non-équivalence des programmes de calcul correspondant.

➔ Par exemple, dans le cas précédent on aurait pu établir d'une part que

$$\frac{x-2y}{4} + 2y = \frac{1}{4}x - \frac{2y}{4} + 2y = \frac{1}{4}x - \frac{y}{2} + \frac{4}{2}y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}y$$

et d'autre part que $\frac{x+6y}{4} = \frac{x}{4} + \frac{6y}{4} = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}y$, ce qui montre que les deux expressions « données » (en fait, ici, obtenues par « traduction » algébrique de programmes de calcul donnés « en mots ») ont la ***même écriture canonique*** et expriment donc bien des programmes de calcul équivalents.

➔ Dans l'usage dominant, l'injonction de rechercher l'écriture canonique d'une expression algébrique est souvent indiquée à travers l'idée – floue – de « simplification », sans que soit toujours définie de façon précise la notion d'écriture canonique.

g) Dans le cas de la recherche de l'écriture canonique d'une expression algébrique, on n'a pas à comparer deux expressions algébriques : à partir d'une expression algébrique seulement, on doit « produire » une seconde expression, égale à celle « donnée », satisfaisant certaines conditions. Il s'agit là d'un type de tâches qui se généralise : au lieu de rechercher une écriture « plus simple », on recherchera une écriture « plus adéquate », « mieux adaptée » à un certain travail mathématique où l'expression donnée se trouve « impliquée ».

• C'est par exemple ce à quoi invite le programme de 2^{de} en présentant comme exigible la maîtrise des types de tâches suivants :

> Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…).
>
> Modifier une expression, la développer, la réduire selon l'objectif poursuivi.

• Considérons ainsi le problème suivant : dans une classe de 2^{de}, les élèves doivent calculer l'image de 3 par la fonction $x \mapsto 2(x-1)^2 + 4$.

➔ Emportés par l'habitus scolaire de « réécriture canonique », certains élèves développent l'expression algébrique donnée, ce qui n'est sans doute pas la meilleure façon de faire.

➔ Sans doute la forme donnée par l'énoncé est-elle « mieux adaptée » au calcul demandé que la forme « développée », donnée par l'égalité algébrique $2(x-1)^2 + 4 = 2x^2 - 4x + 6$. Dans un univers moins « frileux » en matière de calcul, on pourrait aller plus loin, en écrivant de façon « volontariste » :

$$2(x-1)^2 + 4 = 2(x-1)(x-3) + 4(x-1) + 4 = 2(x-1)(x-3) + 4x.$$

On reviendra sur le problème didactique posé par l'identification (et la mise en place dans la classe) de la praxéologie mathématique permettant de produire de tels ***calculs « adaptatifs »***.

h) On a abordé brièvement jusqu'ici une question fondamentale : celle ***des raisons d'être de l'algèbre***. Pourquoi donc serait-il intéressant de « calculer sur les programmes de calcul », hormis bien sûr pour établir par déduction que deux programmes de calcul sont équivalents ? C'est là une question sur laquelle on reviendra…

2.2. C2i2e

a) On s'arrête d'abord sur la question suivante.

> Quid de la validation du C2i2e pour les stagiaires de l'enseignement privé ? (OL2, OS, 5^e & option 1^{re} L, 8)

• La circulaire n° 2006-147 du 5 septembre 2006 paru au BO n° 33 du 14 septembre 2006 précise :

À partir de l'année 2006-2007, tous les stagiaires de tous les IUFM entrent dans le processus de formation et de certification des compétences du C2i® niveau 2 "enseignant".

• La réponse à la question posée est ainsi, apparemment, dénuée d'ambiguïté…

b) Lors de la séance 8, les participants au Séminaire avaient à proposer par écrit « un spécimen ou des spécimens de types de tâches qui, selon eux, témoigneraient de la maîtrise » de la compétence suivante.

B.2.2. Concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de la classe.

• On revoit d'abord les indications, à propos de cette compétence, du document d'accompagnement du référentiel national.

B.2. « Conception, préparation, analyse, évaluation de contenus d'enseignement »

…

B.2.2. « Concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de la classe »

L'aptitude du stagiaire à concevoir des situations d'apprentissage mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné et au niveau de classe passe par la connaissance et la maîtrise des logiciels considérés d'une part, des démarches permises par les programmes et les capacités des élèves d'autre part. La mise en œuvre de démarches didactiques spécifiques à la discipline, au domaine enseigné et au public concerné constitue un des actes professionnels majeurs de l'enseignant. L'ensemble des temps de formation didactiques et pédagogiques y concourt.

a) *Repères*

Activités possibles du stagiaire

– Il est mis en situation de pratique des logiciels présentés.

– Il complète ses connaissances par une recherche et une pratique individuelle ou collective.

– Il conçoit des séances comprenant des situations d'apprentissage mettant en œuvre un des logiciels dont il a acquis la maîtrise.

– Il amorce une réflexion sur les apports liés à l'utilisation de ces logiciels spécialisés ; la préparation comme l'analyse de séquences et de séances en constitue le cadre.

Pistes pour l'évaluation

– Le stagiaire devra montrer qu'il est apte à mettre en relation les possibilités offertes par des logiciels généraux avec les objectifs d'apprentissage et la didactique de la discipline.

– Il devra également témoigner de sa connaissance de quelques logiciels spécialisés dans la discipline.

– Il devra enfin intégrer cette compétence dans la conception d'une séance.

– L'évaluation peut également être ponctuelle dans le cadre d'une observation de séance.

– Les temps d'analyse de pratiques en présentiel ou sur plate-forme de formation peuvent également constituer un cadre pour cette évaluation.

– Cette compétence peut être intégrée à une évaluation plus globale à l'occasion d'une activité collective relevant d'un projet.

b) *Balises*

• Les réponses rédigées lors de la séance 8 mentionnent majoritairement l'utilisation d'un logiciel de géométrie de dynamique pour simuler une expérience graphique relative à une propriété possible de l'espace sensible à deux dimensions.

➔ Les propriétés mentionnées sont les suivantes.

1. Propriétés conservées par la symétrie centrale (2 fois) [5e].
2. Somme des angles d'un triangle (2 fois) [5e].
3. Concours des médiatrices d'un triangle (2 fois) [5e].
4. Première propriété des milieux dans un triangle (2 fois) [4e].
5. Deuxième propriété des milieux dans un triangle (1 fois) [4e].
6. Propriété de Thalès (1 fois) [4e].
7. Droites remarquables d'un triangle (4 fois) [4e].
8. Concours des hauteurs d'un triangle (1 fois) [4e].
9. Position du point de concours des médianes sur chacune d'elles (2 fois) [4e].
10. Lien entre un triangle rectangle et le centre du cercle circonscrit (1 fois) [4e].
11. Lien entre un triangle rectangle et son cercle circonscrit (2 fois) [4e].
12. Conservation des longueurs par certaines transformations (1 fois) [toutes classes].
13. Relation entre angle inscrit et angle au centre interceptant le même arc (1 fois) [3e].
14. Propriétés des triangles isométriques (1 fois) [2de].
15. Propriétés des triangles semblables (2 fois) [2de].
16. Droite d'Euler (1 fois).

➔ Si certaines fiches ne proposent pas à proprement parler de « ***spécimens*** de types de tâches » (leurs auteurs se contentent de désigner des utilisations génériques de certains logiciels), quelques fiches proposent un scénario (ou un compte rendu) plus ou moins élaboré d'une simulation d'expérience graphique à l'aide de tel ou tel logiciel – sur la symétrie centrale, sur le concours des médiatrices d'un triangle, sur le 1er théorème des milieux, sur le 2e théorème des milieux, sur la position du point de concours des médianes (2 fois), sur les triangles semblables…

➔ En vérité, peu de fiches ont répondu de façon formelle à la ***consigne*** énoncée : celle-ci, en effet, demandait de désigner (à travers tel ou tel de leurs spécimens) des types de tâches ***pour le professeur*** qui « témoigneraient de la maîtrise » de celui-ci de la compétence B.2.2.

• Plusieurs fiches contiennent des références à l'emploi d'un ***grapheur*** ou d'un ***tableur***.

➔ Trois fiches évoquent le tracé de la courbe représentative d'une fonction (en 2de). Deux d'entre elles se réfèrent à l'utilisation de Géoplan « pour tracer une fonction représentant l'aire d'une figure en fonction de la position d'un point mobile », ce tracé étant motivé dans l'une des deux fiches par le souhait de déterminer le maximum de l'aire étudiée.

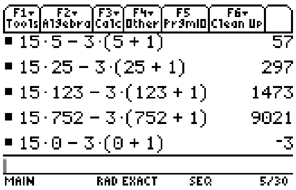
➔ Une fiche mentionne l'utilisation d'un tableur « pour le repérage dans le plan ». Deux autres fiches seulement évoquent l'utilisation de ce type de logiciel « pour vérifier une égalité algébrique » (ou « pour le calcul littéral »). Enfin, quatre fiches citent l'emploi d'un tableur en statistique, et cela dans des buts inégalement explicités.

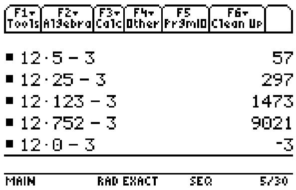
c) Avant même de tenter de « baliser » la compétence B.2.2 (en complétant sur ce point le document ***C2i2e – Repères & balises***), on s'arrêtera encore un peu sur l'utilisation d'un tableur en matière de ***travail algébrique***, en se situant dans la perspective ouverte par le TD2.

• On peut imaginer que, pour avancer dans la voie ouverte par l'AER qu'il a conçue, le professeur du TD2 envisage une seconde AER, dont l'objet est de répondre à l'unique question suivante :

> Examiner si les programmes de calcul P_1 et P_2 formulés ci-après sont ou ne sont pas équivalents :
>
> ***P*₁.** Multiplier le nombre donné par quinze puis retrancher au nombre obtenu le triple du successeur du nombre donné.
>
> ***P*₂.** Multiplier le nombre donné par douze puis retrancher 3 au nombre obtenu.

➔ La technique qui aura pu se mettre en place dans la classe comporte une première étape consistant à comparer P_1 et P_2 sur un ensemble fini de valeurs, et cela ***à la main*** ($P_1(1) = 1 \times 15 - 3 \times 2 = 9$, $P_2(1) = 12 \times 1 - 3 = 9$, etc.), puis ***à l'aide d'une calculatrice***, comme ci-après.





➔ La technique installée amène ensuite à approfondir la comparaison précédente à l'aide d'un tableur : ayant placé dans la colonne A les nombres 0, 1, 2, …, on place dans la colonne B (resp., C) la formule donnant P_1 (resp., P_2) :

	A	B	C
1	0	=15*A1-3*(A1+1)	
2	1		
3	2		
4	3		
5	4		
6	5		
7	6		
8	7		

	A	B	C
1	0	-3	=12*A1-3
2	1		
3	2		
4	3		
5	4		
6	5		
7	6		
8	7		

On obtient alors ceci.

	A	B	C
1	0	-3	-3
2	1	9	9
3	2	21	21
4	3	33	33
5	4	45	45
6	5	57	57
7	6	69	69
8	7	81	81

Il apparaît vraisemblable que $P_1 \equiv P_2$. On multiplie alors les expériences numériques, par exemple en assignant à chaque élève ou binôme d'élèves un ensemble de nombres sur lesquels tester l'identité présumée $P_1 \equiv P_2$.

➔ On peut alors passer à la recherche d'une preuve de l'équivalence ***par le calcul***, c'est-à-dire d'une preuve ***théorique***, ***par déduction***, ce qui comporte deux étapes :

– on écrit l'***expression algébrique*** (= littérale) des programmes P_1 et P_2 : $P_1(x) \equiv 15x - 3(x + 1)$; $P_2(x) \equiv 12x - 3$.

– on « calcule » les deux expressions pour se ramener à une même troisième, qui peut être ici la deuxième expression, celle de P_2, comme on le voit ci-après : $\mathbf{15}\boldsymbol{x} \mathbf{- 3(}\boldsymbol{x} \mathbf{+ 1)} = 15x - (3x + 3) = 15x - 3x - 3 = \mathbf{12}\boldsymbol{x} \mathbf{- 3}$.

• Le même professeur prévoit de prolonger le travail ainsi amorcé au moyen d'une troisième AER, dans laquelle on examine un procédé de ***calcul digital*** utilisé autrefois pour multiplier les entiers compris entre 5 et 10 (en supposant connus les produits $a \times b$ pour $0 \leq a, b < 5$) :

Soit à multiplier a et b ; on replie $a - 5$ doigts de la main gauche (par exemple) et $b - 5$ doigts de la main droite : le nombre de doigts repliés fournit le chiffre des dizaines du produit ab, tandis que le produit des nombres de doigts levés donne le chiffre des unités.

➔ Pour $a = 7$ et $b = 8$, on aura 2 doigts repliés à la main gauche et 3 à la main droite : le chiffre des dizaines est donc 5 ; le chiffre des unités est le produit des nombres de doigts levés, soit $3 \times 2 = 6$; on a ainsi $7 \times 8 = 56$.

➔ Pour $a = 6$ et $b = 9$, on aura un doigt replié à la main gauche et 4 à la main droite : le chiffre des dizaines est donc 5 ; le chiffre des unités est le produit des nombres de doigts levés, soit $1 \times 4 = 4$; on a ainsi $6 \times 9 = 54$.

• Le professeur envisage de faire vérifier la validité de ce procédé de calcul par la technique « classique », qui se décompose en l'exécution des tâches ci-après :

t_1. Formuler l'expression algébrique $P(a, b)$ du programme de calcul.

t_2. Vérifier par expérimentation numérique que l'on a : $P(a, b) \equiv ab$.

t_3. Établir l'identité précédente par le calcul, en mettant en évidence les règles de calcul algébrique justifiant les calculs effectués.

➔ La réalisation de la tâche t_1 conduit à : $P(a, b) \equiv 10[(a - 5) + (b - 5)] + [5 - (a - 5)][5 - (b - 5)]$.

➔ L'expérimentation numérique confirme que le programme de calcul P pourrait être équivalent au programme de calcul Q donné par $Q(a, b) \equiv a \times b$ (voir ci-après, où on a engendré les valeurs de a et de b « au hasard »).

D3 = =10*((A3-5)+(B3-5))+(5-(A3-5))*(5-(B3-5))

	A	B	C	D
1	***a***	***b***	***ab***	**10[(*a* – 5) + (*b* – 5)] + [5 – (*a* – 5)][5 – (*b* – 5)]**
2				
3	89	19	1691	1691
4	64	54	3456	3456
5	71	13	923	923
6	48	83	3984	3984
7	13	83	1079	1079
8	90	21	1890	1890
9	7	43	301	301
10	0	15	0	0
11	44	57	2508	2508
12	32	82	2624	2624
13	39	32	1248	1248
14	62	5	310	310
15	78	65	5070	5070
16	47	0	0	0
17	7	33	231	231
18	89	93	8277	8277
19	57	65	3705	3705
20	99	30	2970	2970
21				

➔ Le calcul demandé peut être conduit ainsi :

$$P(a, b) \equiv 10[(a - 5) + (b - 5)] + [5 - (a - 5)][5 - (b - 5)] \equiv 10(a + b - 10) + (10 - a)(10 - b)$$
$$\equiv 10a + 10b - 100 + (10 - a) \times 10 - (10 - a) \times b$$
$$\equiv 10a + 10b - 100 + 100 - 10a - (10b - ab) \equiv 10a + 10b - 100 + 100 - 10a - 10b + ab$$
$$\equiv ab.$$

➔ Ici, les égalités algébriques utiles (exprimant l'équivalence de programmes de calcul) sont par exemple les suivantes : $(x - z) + (y - z) = x + y - 2z$; $x - (y - x) = x - y + x = 2x - y$; $(x - y)z = xz - yz$. Le fait d'expliciter et de justifier ces égalités algébriques ***fait partie intégrante de l'apprentissage de l'algèbre élémentaire***, dont il constitue une étape cruciale et, si l'on peut dire, *sine qua non*.

d) L'opération Ordina 13 a suscité deux questions que l'on examine à la lumière des développements précédents.

1. Bénéficiant de l'opération « Ordina 13 », je souhaite utiliser durant l'année le logiciel en ligne Mathenpoche. Puis-je l'utiliser en tant qu'activités d'étude et de recherche ou dois-je forcément faire des AER « classiques » et utiliser Mathenpoche en complément ? (SR, CR, 4e, 8)

2. Doit-on systématiquement penser à utiliser les outils informatiques pour développer des AER, par exemple en géométrie ou en statistique ? Le système « Ordina 13 » impose-t-il un outil, avec un certain rendement d'utilisation, ou nous offre-t-il davantage de liberté et de souplesse dans notre pédagogie ? (JL, CR, 4e, 8)

• La première question appelle d'abord une précision : tout « geste d'étude », qu'il s'agisse de l'emploi d'un logiciel ou d'un rapporteur, doit s'inscrire dans le cadre d'une étude mathématique qui le motive et lui donne sa fonction dans le travail en cours de réalisation, lequel reste ***premier***. Il y a donc d'abord des AER, dans lesquelles se découpent en particulier des sous-activités de type expérimental ou de type déductif : c'est notamment en relation avec les premières que pourront intervenir des outils logiciels. À cet égard, s'il n'est pas à exclure d'utiliser certaines des configurations dynamiques disponibles en ligne sur le site « Mathenpoche » (ou autre), chacun se doit de ***concevoir et réaliser*** un enseignement authentique, tressé avec des AER enchaînées et motivées. Et on se gardera donc de substituer, à une création personnelle prenant en compte les besoins et la dynamique de la classe particulière à laquelle on s'adresse, un enseignement « en kit », plus ou moins énigmatique au plan didactique et fait de miettes de mathématiques, où l'on ferait défiler à la queue le leu des « activités » isolées, reliées au programme d'une classe donnée seulement formelle.

• La seconde question pousse en avant une opposition quelque peu fragile. S'il est vrai qu'il existe un risque de voir l'***organe*** (l'ordinateur et les logiciels disponibles) créer la ***fonction*** (le recours formel à des manipulations logicielles) – tel est au fond le problème soulevé ci-dessus à l'occasion de la première question –, il importe d'apprendre, collectivement ***et*** individuellement, à ***identifier*** et à ***exploiter*** les possibilités qu'offre la disponibilité d'un ordinateur muni de logiciels adéquats pour ***faire des mathématiques*** – et pour en conduire l'étude en classe.

• La seconde question renvoie implicitement à une compétence obligatoire du référentiel du C2i2e, que le document ***C2i2e – Repères & balises*** repère ainsi.

B.2. « Conception et préparation de contenus d'enseignement et de situations d'apprentissage »

B.2.1. « Identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE »

a) *Repères*

Activités possibles du stagiaire

– Afin d'être en mesure de déterminer la pertinence de l'usage des TICE selon les séances considérées, le stagiaire devra :

• repérer dans les programmes disciplinaires les temps d'apprentissage propices à cet usage dans la progression annuelle ;

• cerner le type d'activités adéquates ;

• justifier son choix par une argumentation didactique et pédagogique.

– Il préparera au cours de l'année quelques séances intégrant l'usage des TICE ; pour cela, il s'appuiera sur une démarche de recherche des ressources disponibles ou sur des ressources mises à sa disposition dans le cadre de la formation.

Pistes pour l'évaluation

– L'évaluateur cherchera à mesurer la capacité du stagiaire à identifier des situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE et à justifier ses choix :

– il peut s'appuyer sur l'analyse de fiches de préparation de séquences élaborées par le stagiaire ;

– il peut également effectuer une évaluation ponctuelle dans le cadre d'une observation de séance.

– Les temps d'analyse de pratiques en présentiel ou sur plate-forme de formation peuvent également constituer un cadre pour cette évaluation.

– Cette compétence peut être intégrée à une évaluation plus globale à l'occasion d'une activité collective relevant d'un projet.

b) *Balises*

• La première question elle-même renvoie à une autre compétence obligatoire, la compétence A.1.5, que le document d'accompagnement commente comme suit.

A.1. Maîtrise de l'environnement numérique professionnel

A.1.5. Se constituer et organiser des ressources en utilisant des sources professionnelles

Une source est considérée comme professionnelle quand elle a pour origine l'Institution, des organismes professionnels, des pairs, des communautés professionnelles, françaises ou étrangères. (cf. le glossaire)

Pistes pour la formation

– Les sources professionnelles prennent tout leur sens dans le cadre des activités disciplinaires et transversales. La recherche et l'organisation de ces sources doivent être mises en œuvre prioritairement dans ce cadre en association avec les formateurs documentalistes, notamment pour la méthodologie de recherche et d'organisation.

– La formation doit permettre d'identifier le statut des sources et leur qualité.

– La formation TIC pour sa part peut prendre en charge l'identification des ressources TIC générales, qu'elles soient institutionnelles ou professionnelles : sites institutionnels nationaux, académiques, départementaux, etc. ; sites de formation à distance, auto-formation aux outils, etc.

Activités possibles du stagiaire

Chaque temps de la formation peut être l'occasion de se constituer des ressources professionnelles. Le stagiaire pourra :

– se constituer une arborescence personnelle de ressources professionnelles dans un espace de stockage personnel ou collectif, comprenant des notes, des documents personnels ou collectés parmi des sources professionnelles ;

– construire une webographie dans le cadre de son mémoire professionnel ;

– travailler à la constitution de ces ressources autour d'un travail thématique individuel ou collectif dans une discipline ou une formation transversale ;

– constituer un dossier de marque-pages Internet (favoris) pertinent et organisé en sous-dossiers ;

– réaliser des documents hypertextes organisant des ressources professionnelles ;

– identifier le caractère professionnel des ressources.

➔ On notera cette préconisation : « La formation doit permettre d’identifier le statut des sources et leur qualité. » De fait, un tel travail, ***indispensable***, relève de la rubrique ***Les Archives du Métier***, sur laquelle on consultera le document présentant la formation et sa validation.

➔ Dans l’optique du C2i2e, une « webographie » ne saurait consister en une simple liste d’adresses électroniques : pour chaque référence, on doit y trouver aussi un commentaire développé sur le site lui-même (ses auteurs, son origine, ses objectifs déclarés ou implicites) et sur quelques-uns des usages supposés pertinents qu’on peut en faire dans la classe de mathématiques (ou dans les dispositifs de formation co-disciplinaires : TPE, etc.).

e) Pour la séance de ***travaux dirigés numéro 3***, le mardi 28 novembre de 9 h à 10 h 30, les participants appelés sont les 25 personnes dont les noms suivent (qui se muniront d’un ordinateur portable chaque fois que ce sera possible).

FLA – VAC – WB – FBA – JB – OB – MB – AC – KE – SF – MG1 – MG2 – SG – SH – IIP – SK – CL – FL – JL – SM2 – ALP – PP – CS1 – WT – FV

2.3. Autorité et abus de pouvoir

a) Lors de la séance 8, un compte rendu de recherche dans les *Archives du Séminaire* a été présenté en réponse à la question suivante : « Que nous disent les *Archives du Séminaire* à propos des ***punitions et sanctions*** au collège et au lycée ? » La présentation orale comportait une remarque concernant le rétablissement de la notion de « punition collective », pratique que proscrit le droit français en matière pénale (ce que la circulaire du 11 juillet 2000 avait rappelé).

• Cette « réhabilitation » voulue par le ministre d’alors, François Fillon, a été glissée dans un texte relatif à « l’organisation des procédures disciplinaires » – la circulaire n° 2004-176 du 19 octobre 2004 parue au BO n° 39 du 28 octobre 2004. On en reproduit ici les passages concernés.

II – Moyens d’action à la disposition des enseignants en matière disciplinaire

La circulaire n° 2000-105 du 11 juillet 2000 a précisé les grands principes juridiques qui s’appliquent aux punitions scolaires et aux sanctions disciplinaires à l’intérieur de l’établissement scolaire soumis, comme toute organisation, aux règles du droit.

Toutefois, le caractère spécifique de l’acte pédagogique et des missions des enseignants implique que l’autorité de ceux-ci soit respectée partout où elle s’exerce. Aussi est-il entendu que, lorsque son autorité est remise en cause par des actes fautifs, inadaptés, contrevenant aux règles fixées pour atteindre les objectifs assignés aux apprentissages scolaires, l’enseignant peut décider des punitions qu’il prendra pour assurer la poursuite de sa mission. Il en informe le chef d’établissement. La punition sera d’autant mieux suivie d’effets que les parents auront été avisés et convaincus des motifs de celle-ci.

S’il est utile de souligner le principe d’individualisation de la punition ou de la sanction, il faut rappeler qu’une punition peut être infligée pour sanctionner le comportement d’un groupe d’élèves identifiés qui, par exemple, perturbe le fonctionnement de la classe. Par ailleurs, dans le cadre de l’autonomie pédagogique du professeur, quand les circonstances l’exigent, celui-ci peut donner un travail supplémentaire à l’ensemble des élèves. Ce travail doit contribuer à trouver ou retrouver des conditions sereines d’enseignement en même temps qu’il satisfait aux exigences d’apprentissage.

• La circulaire précédente a suscité de vives réactions. C'est ainsi que divers organismes (CRAP-Cahiers pédagogiques, FCPE, FERC-CGT, Ligue de l'enseignement, Ligue des droits de l'Homme, etc.) ont à l'époque signé une pétition commençant ainsi.

> Par le biais d'une modification de circulaire qui commente la nouvelle composition des conseils de discipline, le ministre de l'Éducation nationale réintroduit subrepticement la possibilité d'infliger des punitions collectives.
> Certes, le ministre rappelle « qu'il est utile de souligner le principe d'individualisation de la punition ou de la sanction ». Mais c'est pour ajouter aussitôt dans le paragraphe intitulé « moyens d'action à la disposition des enseignants en matière disciplinaire », « qu'une punition peut être infligée pour sanctionner le comportement d'un groupe d'élèves identifiés qui, par exemple, perturbe le fonctionnement de la classe. Par ailleurs, dans le cadre de l'autonomie pédagogique du professeur, quand les circonstances l'exigent, celui-ci peut donner un travail supplémentaire à l'ensemble des élèves ».
> Ainsi, très clairement, « le travail supplémentaire » donné « à l'ensemble des élèves », est envisagé comme un moyen d'action en matière disciplinaire.
> Cette disposition, qui cherche un alibi un peu grossier dans « l'autonomie pédagogique du professeur », constitue un recul sans précédent, à la fois du point de vue de la justice, du point de vue de l'autorité de l'enseignant et du point de vue éducatif…

• La Fédération des conseils de parents d'élèves des écoles publiques (FCPE) a, de même, présenté une requête devant le Conseil d'État, lequel a finalement rejeté cette requête (le 8 mars 2006), donnant raison au ministre dans les termes reproduits ci-après (http://www.legifrance.gouv.fr/WAspad/UnDocument?base=JADE&nod=JGXAX2006X03X000000275551).

> Considérant qu'après avoir rappelé que les punitions scolaires ont un caractère individuel et personnel, le ministre a pu légalement prévoir, par la circulaire attaquée, afin d'assurer l'efficacité de l'enseignement, qu'une punition peut être infligée par un professeur à un groupe d'élèves précisément identifiés qui perturbent le bon fonctionnement de l'enseignement ou encore qu'un travail supplémentaire peut être donné à l'ensemble des élèves d'une classe quand la perturbation s'étend à l'ensemble de la classe et qu'une telle mesure apparaît nécessaire ; qu'ainsi, et en tout état de cause, la FEDERATION DES CONSEILS DE PARENTS D'ELEVES DES ECOLES PUBLIQUES n'est pas fondée à soutenir que les dispositions attaquées méconnaîtraient les articles 8 et 9 de la Déclaration des droits de l'homme et du citoyen, relatifs à la légalité et à la proportionnalité des peines, ainsi qu'à la présomption d'innocence ; …

• L'analyse de cette décision du Conseil d'État mériterait d'être approfondie au plan du droit, en distinguant droit et pédagogie (voir par exemple http://somni.blog.lemonde.fr/somni/) : tout ce qui est légal n'est pas pour autant pertinent au plan éducatif. C'est ainsi par exemple que, réagissant dès le 3 novembre 2004 du point de vue pédagogique et scolaire, le SNES publiait un communiqué dont on a reproduit ci-après les premiers paragraphes (http://www.snes.edu/snesactu/article.php3?id_article=1215).

> A l'occasion de la mise en conformité avec les décrets de 2004 des dispositions relatives aux procédures disciplinaires, le Ministère de l'Éducation Nationale a cru devoir revenir sur la question des punitions scolaires.
> Une fois de plus, une circulaire paraît au B.O. sans consultation préalable des organisations représentatives des personnels et des usagers de l'Ecole.
> Si le texte rappelle le principe d'individualisation de la punition ou de la sanction, auquel le SNES est fortement attaché, il contient des formulations ambiguës en matière de gestion de la classe. S'il n'est pas scandaleux qu'un enseignant puisse infliger une punition pour « sanctionner le comportement d'un groupe d'élèves identifiés » dès lors que chaque élève concerné a bien été clairement identifié (ce que ne précise pas le texte), la possibilité de « donner un travail supplémentaire à l'ensemble des élèves »

« quand les circonstances l'exigent » n'est pas sans poser problème. Le texte ouvre la porte à des interprétations multiples qui risquent d'aboutir à des abus. Pour le SNES il est hors de question que soient réhabilitées les punitions collectives.

b) On ne poursuivra pas plus loin l'examen de la situation créée par la circulaire Fillon d'octobre 2004. Mais on avancera dans la réflexion amorcée sur ***l'autorité du professeur*** et les ***abus de pouvoir*** (entendus au sens pédagogique, et non pas seulement au sens légal) qu'il peut, sciemment et surtout inconsciemment, être amené à perpétrer.

• Pour cela, on introduit d'abord une distinction terminologique qui permettra d'y voir un peu plus clair, sans pour autant en faire un absolu : la distinction entre ***prérogative*** et ***privilège***. Voici d'abord ce qu'indique le *Dictionnaire des synonymes et nuances* (Dictionnaires Le Robert-SEJER, Paris, 2005, p. 919) à ce propos.

Privilège et **prérogative** s'emploient l'un et l'autre pour un avantage ou un droit possédé par un individu ou un groupe. Le **privilège** est accordé par une autorité hors de la loi commune (…). Une **prérogative** est attachée exclusivement à certaines fonctions ou à certaines dignités (…).

Le *Dictionnaire culturel en langue française* (Dictionnaires Le Robert-SEJER, Paris, 2005) précise de même qu'une prérogative est un « avantage attaché à l'exercice d'une fonction » (*op. cit.*, p. 2031). Le privilège est un « avantage particulier accordé à un seul individu ou à une catégorie d'individus (…) avec faculté d'en jouir en dehors de la loi commune » (*ibid.*, p. 2086) : le privilège, en ce sens, confine au passe-droit.

• Pour exercer une autorité ***juste***, non abusive, on doit d'abord s'efforcer d'identifier ce qui ne saurait être que privilège (pour soi ou pour autrui), en vue de ***refuser de tels privilèges*** – à soi-même aussi bien qu'à autrui –, hormis au contraire lorsqu'ils apparaissent explicitement et dûment fondés.

➔ Un privilège typique de la relation pédagogique est celui que le professeur accorde à un élève en en faisant son « chouchou » (au féminin, sa chouchoute) ; ou, à l'inverse, en en faisant sa bête noire, voire son souffre-douleur (on parlera en ce cas d'un « triste privilège »).

➔ Il n'en existe pas moins des privilèges justifiés, qu'ils soient accordés de façon permanente ou pour un temps délimité : un élève présentant le « symptôme des jambes sans repos », par exemple, peut être autorisé à déambuler discrètement dans la classe en cas de crise.

➔ Le fait pour le professeur d'accorder un privilège fondé, en prenant acte d'une situation personnelle particulière, contribue à le doter d'une autorité reconnue comme juste au moins autant que peut y contribuer le fait de retirer un privilège qui n'est pas ou plus justifié ou de refuser d'accorder un privilège injustifié.

➔ On sera particulièrement attentif au précepte précédent, et notamment à l'exigence de résister à la pression – implicite, voire explicite – exercée par certains élèves, dans un monde largement « soi-iste » et plus ou moins anomique où de telles revendications fleurissent, pour bénéficier de privilèges infondés. Sous peine de faillir à l'exigence d'équité, on n'en restera pas moins ouvert aux situations d'exception, qui appellent un « correctif » dérogatoire approprié.

• Accorder ou refuser à tel élève tel « privilège » ne se justifie que s'il s'agit d'une ***prérogative de la fonction*** qu'exerce le professeur : s'il n'en était pas ainsi, l'octroi ou le refus prononcé relèverait d'un privilège ***personnel*** que l'on s'accorde, et participerait ainsi, en quelque façon, d'un abus de pouvoir.

➔ Pour éclairer ce principe, et pour se guider pratiquement, il conviendrait de répondre à deux questions :

– Dans quels types de situations exactement le professeur exerce-t-il sa fonction de professeur (en disposant donc légitimement des prérogatives attachées à celle-ci) ?

– Dans une situation où il exerce sa fonction de professeur, quelles sont les prérogatives du professeur ?

➔ Les réponses à ces questions ne sauraient être que collectivement élaborées, débattues, corrigées, etc. – elles ne peuvent dépendre de l'arbitraire de chacun. Pour avancer un peu sur cette voie, on observera quelques-unes des questions posées par des jeunes et certains des éléments de réponse qui leur sont apportés dans un ouvrage intitulé ***C'est quoi mes droits ?*** (J'ai Lu, Paris, 2004), dû à l'INJEP (l'Institut national de la Jeunesse et de l'Éducation populaire, établissement public du ministère de la Jeunesse, des Sports et de la Vie associative : voir http://www.injep.fr/) et « conçu à partir des questions les plus fréquemment posées sur le site Internet des droits des jeunes (www.droitsdesjeunes.gouv.fr) ». On reproduit ici une courte sélection de questions et réponses.

Questions

Question 1. Suis-je obligé d'assister à tous les cours de la semaine ?

Question 2. Je redouble ma 3^{e} et le proviseur dit qu'il n'a plus de place pour moi. Mon collège peut-il refuser de me reprendre ?

Question 3. Le principal de l'établissement m'a convoquée pour me dire que ma jupe était « trop moulante ». Est-il vrai que je ne peux pas m'habiller comme je veux au collège ?

Question 4. Mon professeur peut-il décider de m'infliger n'importe quelle punition, si je ne rends pas mon devoir ?

Question 5. Mon téléphone m'a été confisqué à l'école. Est-ce légal ?

Question 6. Je me suis moqué de mon professeur et l'ai insulté. Il m'a menacé de porter plainte et de m'envoyer en prison. Est-ce possible ?

Question 7. Quelqu'un a lancé une craie sur le prof, quand il avait le dos tourné, et personne ne s'est dénoncé. Nous avons tous eu une « punition collective ». Est-ce légal ?

Question 8. Est-ce que je peux passer au tribunal pour des vols commis au sein du lycée ?

Réponses

Réponse 1. Oui, l'école n'est pas à la carte ! L'obligation scolaire, c'est aussi l'obligation pour vous de respecter les heures de cours inscrites sur votre emploi du temps, d'y être présent et de participer à toutes les activités qui y sont liées (devoirs, exposés…), y compris pour les matières optionnelles, dès lors que vous êtes inscrit au cours. On parle d'« obligation d'assiduité ».

Réponse 2. Oui, c'est possible. S'il est vrai qu'en cas de redoublement vous devez, en principe, être repris par votre établissement d'origine, c'est sous réserve de ses capacités d'accueil. Or, le manque de place étant le lot de nombreux établissements, le proviseur *(sic)* n'hésitera pas à évoquer cette « impossibilité matérielle » pour refuser de reprendre un élève… un peu turbulent !

Réponse 3. Oui. Le règlement intérieur peut en effet consacrer un chapitre à la tenue vestimentaire et la réglementer en précisant, par exemple, que chaque élève doit adopter une tenue décente, propre et non provocante. Des discussions peuvent s'engager sur la notion de décence ou de correction, mais le fait d'enfreindre le règlement intérieur vous expose à des sanctions disciplinaires (elles-mêmes prévues au règlement intérieur).

Réponse 4. Non. Certes, vous avez l'obligation de rendre vos devoirs et de participer aux contrôles ; si vous ne vous soumettez pas à ces obligations, vous pouvez être puni, mais pas n'importe comment. D'une façon générale, seule les punitions et sanctions prévues dans le règlement intérieur de l'établissement (ou, à défaut, prévues par les textes de loi) peuvent vous être infligées. En cas de devoir non rendu, votre professeur peut demander à communiquer avec vos parents par le carnet de correspondance, vous donner une retenue, un devoir supplémentaire, voire vous exclure ponctuellement du cours. Ce sont des « punitions scolaires » prononcées immédiatement par l'enseignant, à la différence des sanctions disciplinaires qui punit des faits plus graves et relève, selon son importance, du chef d'établissement ou du conseil de discipline…

Réponse 5. Votre école ne peut pas interdire de façon générale et absolue la détention et l'utilisation d'un téléphone ou d'un baladeur. En revanche, le règlement intérieur peut parfaitement en réglementer l'usage et notamment l'interdire pendant les cours ou en permanence, sous peine de vous le confisquer.

Réponse 6. Oui. On parle d'outrage ou d'injure au personnel enseignant. Ce genre de comportement irrespectueux peut donner lieu non seulement à des sanctions disciplinaires au sein de l'établissement, mais aussi à une sanction pénale au tribunal ! Les menaces, les injures ou les insultes à l'égard des professeurs sont des infractions définies et sanctionnées dans le Code pénal. Votre professeur peut donc parfaitement porter plainte contre vous et vous encourez jusqu'à six mois d'emprisonnement.

Réponse 7. Depuis une circulaire datée de juillet 2000, qui pose les principaux directeurs en matière de sanctions disciplinaires, on ne peut plus « sanctionner » collectivement une classe (au nom du principe de l'individualisation des sanctions). Ainsi, punir de la même façon un groupe d'élèves, sans chercher à connaître la part de responsabilité de chacun, est illégal. Cela dit, il y a une nuance subtile entre les « punitions » et les « sanctions ». Les punitions sont considérées comme bénignes et sanctionnent des faits peu graves (…). On ne peut pas saisir le tribunal administratif pour une punition (…) ! En conséquence, les punitions collectives (mettre toute la classe en retenue ou lui donner un devoir supplémentaire, par exemple) demeurent indirectement autorisées, puisqu'il n'y a pas véritablement de recours possible devant le juge !

Vous pouvez, toutefois, tenter d'en discuter avec le conseiller principal d'éducation ou avec le principal de votre établissement. Vous pouvez aussi vous adresser au médiateur de l'Éducation nationale.

Réponse 8. Bien sûr ! Toute infraction commise par un élève, c'est-à-dire tout acte ou comportement prévu ou sanctionné par la loi – vol, agression, consommation ou vente de drogues – (…), peut être poursuivie par les autorités judiciaires. Les procédures pénales et disciplinaires sont totalement distinctes et ne peuvent pas s'influencer mutuellement.

c) Qu'un professeur exerce des prérogatives justes peut s'entendre en deux sens : elles peuvent être justes au sens de la justice, ou justes au sens de la justesse – didactique, s'entend. Le premier point commencera d'être exploré ci-après à l'aide du livre de Pierre Merle, *L'élève humilié. L'école : un espace de non-droit ?* (PUF, Paris, 2005).

• Une première façon de déroger à la justice consiste pour le professeur à s'accorder *motu proprio* des « prérogatives » incompatibles avec la loi et la jurisprudence, comme il en va dans le cas de ce professeur qui, dans une classe de 5^{e}, en 2002, fait inscrire sur le carnet de correspondance : « Deux oublis [de ses affaires] sont sanctionnés par un zéro. » (*op. cit.*, p. 117).

• Les questions et réponses ci-dessus rappellent en passant que les prérogatives du professeur sont articulées aux règles de vie et de travail prévalant ***dans l'établissement***. Mais il ne suffit pas de s'entendre entre soi pour parvenir à des règles justes, dont l'observance fonde respect et autorité : certaines décisions « collégiales » peuvent être arbitraires faute d'une

« supervision » adéquate, comme l'évoque ce passage du livre de Pierre Merle, à propos de l'interdiction de certaines pratiques vestimentaires ou corporelles (*ibid.*, p. 86-87).

> … à partir du moment où les pratiques vestimentaires des élèves ne mettent pas en cause leur sécurité, ne manifestent pas de façon ostensible une appartenance religieuse et ne troublent pas les activités d'enseignement et l'ordre public dans l'établissement, l'interdiction ne respecte pas le droit d'expression individuelle. La même remarque vaut pour le piercing, le port de la casquette, du béret ou de la minijupe. Pour celle-ci, reste à savoir à partir de quelle longueur les troubles aux activités d'enseignement pourraient être envisagées… Dans de trop nombreux règlements intérieurs sont présentes des interdictions que la législation et la jurisprudence actuelle condamnent. Ainsi, rien ne permet de refuser le piercing, d'autoriser les boucles d'oreilles pour les filles et de les interdire pour les garçons (Cordonnier, 2003).

• Pour ce qui est des prérogatives dépourvues de « justesse didactique », on se limitera ici à une observation de l'auteur déjà mis à contribution, à propos de l'usage de punir les élèves, à l'école primaire, avec des lignes à copier (*ibid.*, 119).

> Cette punition est pourtant tout à fait contestable d'un point de vue didactique. Dans le cadre de leur apprentissage, les écoliers sont souvent amenés à recopier quatre ou cinq fois les mots dont ils ont à apprendre l'orthographe. Cette modalités de mémorisation semble relativement efficace. Dès lors, punir un élève en utilisant la même méthode que celle utilisée pour apprendre en développant celle-ci jusqu'à l'abêtissement entraîne une confusion entre l'apprentissage et la punition.

2.4. Conseil de classe & orientation

a) Trois questions ont été formulées lors de la séance 8 à propos des bulletins trimestriels et du conseil de classe.

> 1. Comment préparer efficacement les conseils de classe en fonction du niveau de chaque élève ? (AB, OS, 3e, 8)
>
> 2. Le bulletin trimestriel s'adresse-t-il plutôt à l'élève ou à ses parents ? (YB, MJ, 4e, 8)
>
> 3. Dans la formation générale et commune, on a abordé les conseils de classe, mais je ne vois pas encore comment préparer le futur conseil de classe de ma classe. Quels sont les éléments essentiels à faire ressortir le jour de la réunion ? (ML, MJ, 2de, 8)

b) On trouvera des éléments de réponse à ces questions (sur lesquelles on reviendra) dans les notes du Séminaire 2005-2006, p. 156-158. Pour un abord plus approfondi de la question des conseils de classe, on se reportera avec profit au document intitulé ***Changer le conseil de classe*** mis en ligne sur la site de l'IUFM (rubrique *Documents* / *2nd degré*).

c) Les jugements portés sur un élève, éventuellement sous la forme de « conseils », ne découlent pas toujours *stricto sensu* des résultats scolaires obtenus – lesquels ne sont pas eux-mêmes toujours exempts de divers biais, liés à tel ou tel trait de la personne de l'élève. Fréquemment, divers stéréotypes influencent l'appréciation portée sur le ***travail*** de l'élève, en positif ou en négatif. Une gestion juste de la ***diversité des élèves*** suppose alors que, loin de reprendre à son compte de tels stéréotypes ***souvent non conscients*** (sur le genre, sur l'origine socioculturelle supposée, sur l'apparence physique, etc.), ***on travaille à s'en déprendre***, en commençant par les identifier.

• À titre de premier exemple, on s'arrête un instant sur un fait longtemps peu remarqué : le désavantage lié au fait, ***pour un garçon***, d'être de ***petite taille***. Ce phénomène a fait l'objet d’un important traitement médiatique il y a quelques années, à la suite de la parution en 2000, dans la revue spécialisée *Archives of Disease in Childhood*, d’un article intitulé “Does Height influence progression through primary school grades?”.

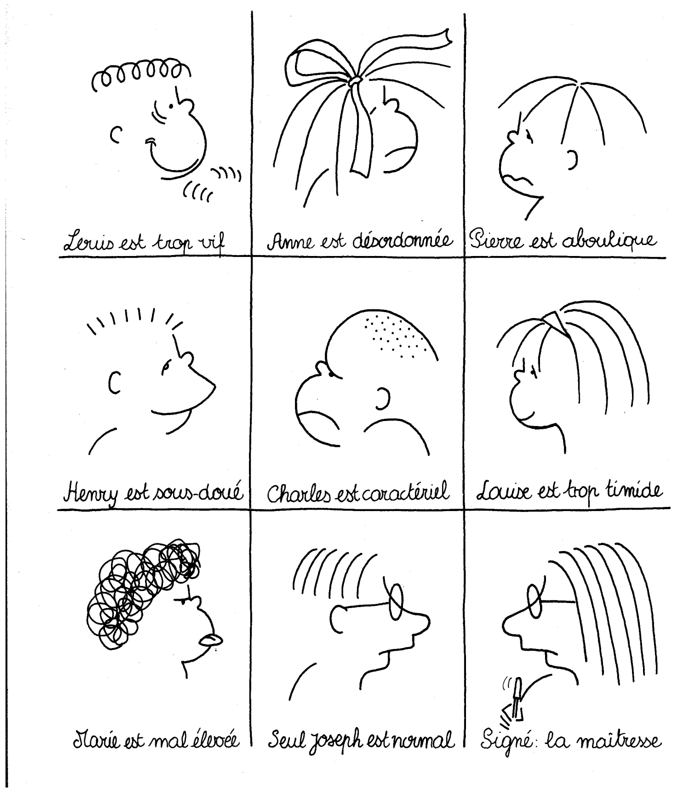
➔ Rendant compte de ce travail et de travaux analogues dans son livre récent intitulé *Le pouvoir des grands* (La Découverte, Paris, 2006), le sociologue Nicolas Herpin écrit ceci (*op. cit.*, p. 58).

> Les garçons de petite taille – et non les filles de petite taille – redoublent plus fréquemment. Ce résultat est obtenu en tenant compte du niveau économique de la famille, de la « race » des parents et de leurs diplômes. Dans chaque classe du parcours scolaire, les élèves les plus jeunes, quand l’analyse les regroupe, sont, en moyenne, plus grands que les élèves les plus âgés, les calculs étant faits sur deux groupes de même taille.

➔ Les auteurs de l’étude mentionnée proposent un mécanisme de formation du retard des plus petits en taille (*ibid.*).

> Le docteur Melissa Wake, qui a réalisé cette enquête, avance une explication portant sur la façon de juger des enseignants. Au moment du passage à la classe suivante, le seuil d’admission rassemble souvent plusieurs enfants *ex æquo*. Les garçons de petite taille sont traités comme s’ils étaient des enfants plus jeunes et donc manquant de maturité. Les enseignants les font prioritairement redoubler. Dans d’autres pays que la France, cette analyse a suscité beaucoup d’intérêt. Les psychologues de l’éducation américains et anglais n’ont critiqué ni les résultats empiriques ni l’interprétation avancée. Leurs propres observations cliniques les confirmaient pleinement pour leur propre pays.

• Sans plus approfondir l’analyse du phénomène (le mécanisme conjectural évoqué est-il le bon ?), insistons sur l’exigence d’un ***travail d’émancipation*** vis-à-vis de biais d’appréciation que le dessin ci-dessous (Francesco Tonucci, 1974) illustre malicieusement.



IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Travaux dirigés de didactique des mathématiques

➔ Séance 3 : mardi 28 novembre 2006 (9 h – 10 h 30)

Programme de la séance. 1. Un PER de statistique : l'entrée en matière // 2. Un PER de statistique : le démarrage

1. Un PER de statistique : l'entrée en matière

1.1. Questions de statistique

a) Un professeur a préparé pour sa classe de 3^e, où le domaine de la statistique n'a pas encore été abordé, un scénario d'AER, amorce d'un PER de statistique intitulé ***C'est petit ou c'est gros ? C'est beaucoup ou c'est pas beaucoup ?***, dont on reproduit ci-après le début.

Faire de la statistique en 3^e

C'est petit ou c'est gros ?

C'est beaucoup ou c'est pas beaucoup ?

1. L'objet de la statistique

1.1. Questions de statistique

En statistique, on s'efforce de répondre à des questions comme celles-ci :

• Un bébé qui pèse 3,4 kg à la naissance, c'est un gros bébé ?

• Un éléphant de deux tonnes, c'est un gros éléphant ou c'est un petit éléphant, ou c'est ni l'un ni l'autre ?

• Quand on dit qu'un joueur de foot a marqué beaucoup de buts dans une saison, ça veut dire qu'il en a marqué au moins combien ?

• Est-il exact que les trois derniers jours ont été exceptionnellement froids ?

• Cet article est-il cher pour ce que c'est ?

Question 1. Inventez une « question de statistique » sur le modèle des questions précédentes.

---

b) En binômes et par écrit, les participants proposent eux-mêmes une question de statistique (univariée) au sens où le professeur évoqué semble l'entendre ici.

• Les binômes présentent le fruit de leur travail, qui fait en partie l'objet d'un commentaire immédiat.

• Plusieurs commentaires peuvent être apportés.

➔ Le professeur amorce le travail sur la statistique par une présentation « discursive », « déclarative », qui ne saurait certainement pas se substituer à une « mise en situation », mais qui la prépare en indiquant le genre de questions que l'on est amené à se poser et à étudier dans le domaine en lequel la classe s'apprête ainsi à s'avancer ensuite. Il s'agit là d'un principe général : à l'instar des humains en général, les élèves ont besoin de paroles, de déclarations, d'éclaircissements préalables – qui ne sont que cela, sans doute, mais qui participent des « palabres terminables » utiles – voire indispensables – à la vie des sociétés.

➔ Les exemples de questions proposées par la professeur se réfèrent ***de façon floue*** à plusieurs des entités cardinales de la problématique statistique : on y évoque d'abord une ***population*** (celle des bébés, celle des éléphants, celles des footballeurs, etc.), un ***caractère*** ou ***variable*** plus ou moins clairement défini sur cette population (le poids d'un bébé, celui d'un éléphant, le nombre de buts marqués dans une saison par un footballeur, etc.) ; on s'y demande alors si telle valeur du caractère est « grande », ou à partir de quelle valeur on peut dire qu'une valeur du caractère est une grande valeur…

1.2. La notion d'étude statistique

a) Le scénario imaginé par le professeur se poursuit alors par l'explicitation de l'idée d'***étude statistique***, ainsi qu'on le verra ci-après.

1.2. Études statistiques

Pour répondre aux questions précédentes, on doit mener à bien, chaque fois, une *étude statistique* comportant plusieurs étapes.

L'objectif est toujours le même. Considérons la première question ci-dessus : « Un bébé qui pèse 3,4 kg à la naissance, c'est un gros bébé ? » Supposons qu'on ait relevé le poids à la naissance de tous les bébés nés en 2005 dans le département des Bouches-du-Rhône :

– si l'on trouvait que, par exemple, 47 % de ces bébés ont un poids inférieur ou égal à 3,4 kg, c'est-à-dire que 100 % – 47 % = 53 % ont un poids strictement supérieur à 3,4 kg, on pourra conclure que, par rapport à l'ensemble des naissances considérées, 3,4 kg *n'est pas* un poids très élevé ;

– si, au contraire, on trouvait que, par exemple, 78 % des bébés ont un poids inférieur ou égal à 3,4 kg, et donc que seulement 100 % – 78 % = 22 % des bébés ont un poids à la naissance strictement supérieur à 3,4 kg, on pourra conclure que 3,4 kg est un poids *assez élevé*.

Question 2. Précisez comment il faudrait faire pour savoir si un éléphant de deux tonnes, c'est un gros éléphant ou c'est un petit éléphant, ou c'est ni l'un ni l'autre.

---

b) En binômes et par écrit, les participants donnent en outre un bref commentaire libre du travail demandé aux élèves dans ce qui précède.

2. Un PER de statistique : le démarrage

2.1. Une première AER de statistique

a) Le professeur a rédigé le scénario d'une première AER. On en présente ci-dessous le scénario question par question : les binômes de participants élaborent des réponses qui sont mises en débat au fur et à mesure. On notera le soin apporté par le professeur à rédiger préalablement et complètement des réponses aux questions qu'il proposera aux élèves.

• La question 1

---

2. Un devoir en classe

Dans ce qui suit, on réalise une première étude statistique « simple ».

2.1. L'étude

Dans une classe de 3^{e} de 28 élèves a eu lieu un devoir surveillé. Les 28 notes attribuées sont reproduites ci-après :

15 ; 13 ; 11 ; 9 ; 4 ; 11 ; 13 ; 18 ; 9 ; 10 ; 14 ; 17 ; 13 ; 16 ; 11 ; 16 ; 12 ; 16 ; 9 ; 5 ; 13 ; 19 ; 16 ; 0 ; 9 ; 16 ; 11 ; 7.

On dira qu'une note de cette série est *satisfaisante* si elle est supérieure ou égale à au moins 50 % des notes, soit à 14 notes de la série au moins.

Il revient au même de dire qu'elle est inférieure strictement à au plus 50 % des notes de la série, c'est-à-dire à 14 notes au plus.

Question 1. Lors du devoir, quatre élèves ont obtenu la note 11. Cette note est-elle satisfaisante ? Comment faire pour le savoir ?

[**Réponse 1.** Un décompte à la main permet de constater que la note 11…

– … est supérieure ou égale à 13 notes, ce qui ne représente que $\frac{13}{28} = \frac{1300}{28}$ % ≈ 46,4 % des notes de la série ;

– … est strictement inférieure à 15 notes de la série, ce qui représente $\frac{15}{28} = \frac{1500}{28}$ % ≈ 53,6 % de ces notes.

En conséquence, la note 11 *n'est pas satisfaisante*.]

• La question 2

Question 2. Pour savoir si la note 11 est satisfaisante ou non dans la série des 28 notes observées, un élève a eu l'idée de ranger ces 28 notes par ordre croissant et de les numéroter. Comment le faire ? Comment cela permet-il de décider si la note 11 est satisfaisante ou pas ?

[**Réponse 2.** On peut saisir ces notes dans la colonne A d'un fichier du tableur, puis utiliser l'icône de tri croissant. On obtient alors ceci.

1	0
2	4
3	5
4	7
5	9
6	9
7	9
8	9
9	10
10	11

11	11
12	11
13	11
14	12
15	13
16	13
17	13
18	13
19	14
20	15
21	16
22	16
23	16
24	16
25	16
26	17
27	18
28	19

Pour que 11 soit une note satisfaisante, il faut et il suffit que la note numérotée 14 soit inférieure ou égale à 11. Ici, cette note est 12 : on retrouve donc que 11 n'est pas une note satisfaisante.]

• La question 3

Question 3. Préciser la plus petite note satisfaisante dans la série des 28 notes.

[Réponse 3. La plus petite note satisfaisante est celle qui a le numéro 14 : on a vu qu'il s'agit de la note 12.]

• La question 4

Question 4. On dit qu'une note est *excellente* si elle est supérieure ou égale à 90 % des notes au moins. Il revient au même de dire qu'elle est strictement inférieure à 10 % des notes de la série au plus. En utilisant à nouveau la série croissante et numérotée des 28 notes, déterminer les notes excellentes de la série.

[**Réponse 4.** On a : 90 % $\times$ 28 = 25,2. Une note est donc excellente si et seulement si elle est supérieure ou égale à la note numérotée 26. D'après le tableau obtenu, la note numérotée 26 est 17. Les notes excellentes de la série sont donc 17, 18 et 19.]

• La question 5

Question 5. On dit qu'une note est *remarquable* si elle est supérieure ou égale à au moins 70 % des notes. Il revient au même de dire qu'elle est strictement inférieure à au plus 30 % des notes de la série. Déterminer les notes remarquables de la série.

[**Réponse 5.** On a : 70 % × 28 = 19,6. Une note est donc remarquable si et seulement si elle est supérieure ou égale à la note numérotée 20. D'après le tableau, les notes remarquables sont donc les notes au moins égales à 15.]

• La question 6

2.2. Le bilan de l'étude

Question 6. Qu'a-t-on appris, au fond, dans ce qui précède ?

[**Réponse 6.** a) Étant donné une série statistique de longueur *n* et un pourcentage *k* %, on a appris à déterminer la plus petite valeur de cette série supérieure ou égale à au moins *k* % des valeurs de la série.
b) Pour cela, on a dû apprendre à mettre, à l'aide du Classeur, la série donnée sous la forme d'une série croissante.
c) Étant donné un pourcentage *k* %, on a calculé le premier entier supérieur ou égal *k* % × *n* : la plus petite valeur cherchée est celle qui a pour numéro cet entier.]

---

b) Les participants rédigent en binômes un bref commentaire libre sur l'AER précédente.

1.3. Une deuxième AER de statistique

a) On examine maintenant le scénario rédigé par le professeur d'une deuxième AER, prévue pour faire suite à l'AER précédente. De même que précédemment, on présente ce scénario question par question. De même encore, les binômes de participants élaborent des réponses qui sont mises en débat au fur et à mesure.

• La question 1

---

3. Une épreuve académique de mathématiques

3.1. L'étude

Une épreuve de mathématiques a été organisée dans une académie pour les classes de 3^{e} volontaires. Trente-deux classes se sont inscrites ; 794 élèves ont composé et ont reçu une note comprise entre 0 et 20. On trouvera ces notes dans le fichier 794 notes de mathématiques : elles y sont rangées sur une colonne, dans l'ordre alphabétique des noms des candidats (ces noms n'ont pas été reproduits). Par précaution, chacun commencera par créer une copie de ce fichier, copie dans laquelle se fera le travail demandé.

On dira que, par rapport à la population des élèves ayant participé à l'épreuve, une note est…

– … *satisfaisante* si elle est supérieure ou égale à au moins 50 % des notes, c'est-à-dire si elle est strictement inférieure à au plus 50 % des notes ;

– … *très satisfaisante* si elle est supérieure ou égale à au moins 60 % des notes, c'est-à-dire si elle est strictement inférieure à au plus 40 % des notes ;

– … *remarquable* si elle est supérieure ou égale à au moins 70 % des notes, c'est-à-dire si elle est strictement inférieure à au plus 30 % des notes ;

– … *très remarquable* si elle est supérieure ou égale à au moins 80 % des notes, c'est-à-dire si elle est strictement inférieure à au plus 20 % des notes ;

– … *excellente* si elle est supérieure ou égale à au moins 90 % des notes, c'est-à-dire si elle est strictement inférieure à au plus 10 % des notes.

Question 1. Lors de l'épreuve académique, un élève a obtenu la note 12. Cette note est-elle satisfaisante ? Est-elle très satisfaisante ?

[**Réponse 1.** On utilise la technique vue dans l'étude du devoir en classe, ci-dessus, pour ranger en une série croissante et numérotée les 794 notes. Cela fait, on procède comme on l'a vu jusqu'ici. On a : 50 % × 794 = 397. La note numérotée 397 est 12. La note 12 est donc satisfaisante. En fait, la note 12 est supérieure ou égale à 445 notes, soit à $\frac{445}{794} = \frac{44500}{794}$ % ≈ 56 % des notes : satisfaisante, cette note n'est donc pas *très* satisfaisante.]

• La question 2

Question 2. Quelle note minimale un élève devait-il obtenir pour que sa note soit…

a) … très satisfaisante ?
b) … remarquable ?
c) … très remarquable ?
d) … excellente ?

[**Réponse 2.** a) On a : 60 % × 794 = 476,4. La note numérotée 477 est 13. La note 13 est donc très satisfaisante. En fait, la note 13 est supérieure ou égale à 520 notes, ce qui représente un pourcentage de $\frac{520}{794} = \frac{52000}{794}$ % ≈ 65,5 %. La note 13 est donc très satisfaisante, sans être remarquable.

b) On a : 70 % × 794 = 555,8. La note numérotée 556 est 14. La note 14 est donc remarquable. En fait, la note 14 est supérieure ou égale à 584 notes, ce qui représente un pourcentage de $\frac{584}{794} = \frac{58400}{794}$ % ≈ 73 %. La note 14 est donc remarquable, sans être très remarquable.

c) On a : 80 % × 794 = 635,2. La note numérotée 636 est 15. La note 15 est donc très remarquable. En fait, la note 15 est supérieure ou égale à 640 notes, ce qui représente un pourcentage de $\frac{640}{794} = \frac{64000}{794}$ % ≈ 80,6 %. La note 15 est donc très remarquable, sans être excellente.

d) On a : 90 % × 794 = 714,6. La note numérotée 715 est 18. La note 18 est donc excellente. Elle est supérieure ou égale à 748 notes, ce qui représente un pourcentage de $\frac{748}{794} = \frac{74800}{794}$ % ≈ 94,2 %.]

• La question 3

3.2. Bilan de l'étude

Question 3. Qu'a-t-on appris de plus dans ce qui précède ?

[**Réponse.** On a amélioré notre maîtrise de la technique – mise au point dans la première étude statistique – permettant de déterminer la plus petite valeur d'une série statistique donnée qui est supérieure ou égale à au moins *k* % des valeurs de la série.]

b) La réflexion amorcée ici sera reprise et approfondie dans les séances à venir.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 10 : mardi 28 novembre 2006

➔ **Matin** : 0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions // 2. Observation & analyse

➔ **Après-midi** (explicitation) : 3. Les *Archives du Séminaire* // 4. Problématique et fonctionnement du Séminaire // 5. Recherches à venir dans les *Archives*

Matin

0. Questions de la semaine

Journée 10 (28 novembre 2006)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4e (et soutien en 5e)

Même si l'expression a déjà été employée en séminaire, je ne sais toujours pas ce que signifie « question cruciale ». Pourrait-on en avoir une définition exacte ?

1. Forum des questions

1.1. C2i2e

a) Deux questions de la semaine dernière appellent un commentaire. On les reproduit ci-après.

1. Pouvez-vous rappeler où on peut trouver la liste des items à valider pour le C2i2e ? (YB, MJ, 4e, 9)

2. Il reste 4 heures à effectuer des 12 heures de l'atelier d'informatique. Qu'est-il prévu de faire durant ces quatre heures ? Ne serait-il pas envisageable de travailler sur les 23 items à valider pour le C2i2e (ceux-ci étant délicats à décrypter !) ? Quand est-ce que cette demi-journée aura lieu ? (SF, CR, 5e, 9)

• Les notes de la séance 8 du Séminaire précisaient ceci.

Le « référentiel national » de compétences évoqué à la fin de la circulaire précédente est explicité dans la circulaire du 19 décembre 2005, antérieure, que l'on trouvera également dans le document intitulé ***C2i2e – Textes officiels*** : on va y venir.

• Pour trouver la circulaire mentionnée, il suffit donc de se reporter au document ***C2i2e – Textes officiels*** (http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2006-2007/documents_07.html) et de rechercher dans le document idoine « 19 décembre 2005 ».

• Les mêmes notes de la séance 8 indiquaient en outre ceci.

Un document ***spécifique*** pour la préparation et la validation du C2i2e dans la filière « Mathématiques », ***C2i2e – Repères & balises***, est en ligne sur le site de l'IUFM, à l'adresse http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2006-2007/ombilic.html.

➔ À propos de ce document, les notes précisaient ensuite ce que voici.

La section suivante a trait aux douze ***« compétences générales liées à l'exercice du métier »***. Ce volet A du référentiel ne fera l'objet de précisions complémentaires qu'après que le « module général », qui lui est normalement consacré dans la formation aux TICE prévue, aura eu lieu.

➔ Puis, à propos des compétences spécifiques, on pouvait lire ce commentaire.

La dernière section concerne les 15 ***« compétences nécessaires à l'intégration des TICE dans sa pratique »***. Pour chacune d'elles, on y présente d'abord, sous le titre ***Repères***, des extraits du ***document d'accompagnement*** relatifs à la compétence examinée. Vient alors une sous-section intitulée ***Balises*** qui se construira au fur et à mesure de l'avancée du travail collectif de formation. Dans sa version actuelle, le document ***C2i2e – Repères & balises***, ne présente de balises, à titre d'illustration, qu'à propos des trois premières compétences du volet B…

➔ Pour conclure :

1) les compétences « B », soit 15 sur 27, sont ***aussi*** explicitées dans le document ***C2i2e – Repères & balises*** ;

2) les compétences « A » sont mises en attente, même si le Séminaire s'est penché sur l'une d'elles – la compétence A.1.5 – lors de sa séance 9.

• Le référentiel comporte 27 compétences (et non pas 23) : 12 compétences A (dont 8 sont « obligatoires »), et 15 compétences B (dont 10 sont obligatoires). L'obtention du C2i2e suppose la validation des 18 (= 8 + 10) compétences obligatoires et de 5 au moins des 9 (= 4 + 5) compétences « non obligatoires ».

• Les 27 compétences ne sont pas simplement des « items délicats à décrypter » : les libellés proposés par le ministère renvoient à des praxéologies professorales qui restent ***largement à déterminer*** – ce qu'on a entrepris de faire et que l'on continuera à faire ***dans le Séminaire*** – même si ce travail n'est évidemment pas exclusif d'un travail de même sens en GFP ou dans l'atelier d'informatique.

b) Lors de la séance 8, nous nous étions arrêtés sur les compétences B.2.1 et B.2.2, que l'on rappelle ci-après.

B.2. « Conception et préparation de contenus d'enseignement et de situations d'apprentissage »

B.2.1. « Identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE »

B.2.2. « Concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de la classe »

• Le travail le plus avancé concernait la compétence B.2.2. Le travail accompli permettra d'enrichir le document ***C2i2e – Repères & balises*** des balises suivantes.

B.2. « Conception et préparation de contenus d'enseignement et de situations d'apprentissage »

…

B.2.2. « Concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de la classe »

a) *Repères*

…

b) *Balises*

• Cette compétence peut s'exprimer dans le travail de conception d'un scénario d'AER incluant la simulation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique d'une expérience graphique relative à une propriété géométrique que cette AER conduit à conjecturer et à mobiliser à titre d'outil de résolution du problème étudié.

• Cette compétence peut s'exprimer dans le travail de conception d'un scénario d'AER incluant la simulation à l'aide d'un tableur d'une expérience numérique relative à une propriété algébrique que cette AER conduit à conjecturer et à mobiliser à titre d'outil de résolution du problème étudié.

• …

• La maîtrise de la compétence B.2.1 – « Identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE » – devrait, quant à elle, permettre notamment de répondre à la question de la semaine suivante.

À quel moment d'un chapitre est-il plus profitable de faire une activité à l'ordinateur ? (YB, MJ, 4e, 9)

• Une réponse à la question précédente est, dans son principe, simple : on utilise « l'ordinateur » lorsque, ***du point de vue du travail mathématique*** entrepris, ce recours devient utile.

➔ Chaque thème mathématique à étudier appelle, de ce point de vue, un examen didactique approprié. Supposons ainsi qu'on veuille résoudre l'inéquation

$$6 + x - x^2 > 0.$$

Plusieurs voies d'étude peuvent être ouvertes : le document d'accompagnement du programme de 2de suggère par exemple une étude ***graphique***. Mais il est plus « élémentaire » de réaliser – et il est donc judicieux de ***commencer*** par réaliser – à l'aide d'un ***tableur*** une ***exploration numérique*** des valeurs de la fonction $x \mapsto 6 + x - x^2$.

➔ Avec le tableur Excel, on peut procéder ainsi (voir ci-après). On introduit deux paramètres, a (le point de départ de l'intervalle à explorer) et d (le pas de l'exploration) : sur les copies d'écran ci-dessous, on a pris d'abord $a = -3$ et $d = 0,5$ (à gauche), puis, pour mieux observer le comportement de l'expression étudiée autour de $x = 3$, $a = 2,95$ et $d = 0,005$. Plus généralement, on modifiant (dans les cellules A2 et A4, respectivement) les valeurs de a et d, on obtient le recalcul automatique des valeurs apparaissant dans les cellules A8-A24 et C8-C24.

	A	B	C
1	**a**		
2	-3		
3	**d**		
4	0,5		
5			
6	**x**		**6 + x - x^2**
7			
8	-3		-6
9	-2,5		-2,75
10	-2		0
11	-1,5		2,25
12	-1		4
13	-0,5		5,25
14	0		6
15	0,5		6,25
16	1		6
17	1,5		5,25
18	2		4
19	2,5		2,25
20	3		0
21	3,5		-2,75
22	4		-6
23	4,5		-9,75
24	5		-14

	A	B	C
1	**a**		
2	2,95		
3	**d**		
4	0,005		
5			
6	**x**		**6 + x - x^2**
7			
8	2,95		0,2475
9	2,955		0,222975
10	2,96		0,1984
11	2,965		0,173775
12	2,97		0,1491
13	2,975		0,124375
14	2,98		0,0996
15	2,985		0,074775
16	2,99		0,0499
17	2,995		0,024975
18	3		0
19	3,005		-0,025025
20	3,01		-0,0501
21	3,015		-0,075225
22	3,02		-0,1004
23	3,025		-0,125625
24	3,03		-0,1509

Les copies d'écran ci-après montrent comment il est possible d'opérer pour obtenir le contenu des colonnes A et C ci-dessus.

A8 = =A2

	A	B	C
1	**a**		
2	2,5		
3	**d**		
4	0,2		
5			
6	**x**		**6 + x - x^2**
7			
8	2,5		2,25
9	2,7		1,41
10	2,9		0,49

A9 = =A8+$A$4

	A	B	C
1	**a**		
2	2,5		
3	**d**		
4	0,2		
5			
6	**x**		**6 + x - x^2**
7			
8	2,5		2,25
9	2,7		1,41
10	2,9		0,49

C8 = =6+A8-A8^2

	A	B	C
1	**a**		
2	2,5		
3	**d**		
4	0,2		
5			
6	**x**		**6 + x - x^2**
7			
8	2,5		2,25
9	2,7		1,41
10	2,9		0,49

➔ L'exploration numérique permet de parvenir à cette conclusion à confirmer : l'expression étudiée s'annule en $x = –2$ et en $x = 3$; elle est négative « avant » –2, positive entre –2 et 3, et à nouveau négative au-delà de 3. Bien entendu, le montage expérimental réalisé est utilisable pour ***vérifier*** (et non pour découvrir) tout autre fait numérique que la poursuite de l'étude pourrait suggérer (à tort, ou à raison).

➔ C'est ainsi que, pour examiner ***algébriquement*** le fait que l'on aurait $6 + x – x^2 < 0$ pour $x > 3$, on peut poser $x = 3 + u$, où $u > 0$; il vient alors

$$6 + x – x^2 = 6 + 3 + u – (9 + 6u + u^2) = – (5u + u^2),$$

ce qui permet de conclure !

➔ On peut alors ***revenir au tableur*** (voir ci-après) pour s'assurer que l'on a bien l'égalité algébrique obtenue

$$6 + x - x^2 = -(5(x-3) + (x-3)^2).$$

	A	B	C	D
1	x	6 + x - x^2	5(x - 3) + (x - 3)^2	Contrôle
2				
3	9	-66	66	0
4	-32	-1050	1050	0
5	21	-414	414	0
6	33	-1050	1050	0
7	16	-234	234	0
8	-38	-1476	1476	0
9	-42	-1800	1800	0
10	35	-1184	1184	0
11	-41	-1716	1716	0
12	57	-3186	3186	0
13	95	-8924	8924	0
14	-39	-1554	1554	0
15	80	-6314	6314	0

• On notera que cette esquisse de scénario touche à une autre compétence du référentiel, la compétence B.2.3, dont on reproduit ci-après la formulation officielle – et sur laquelle nous reviendrons.

B.2. « Conception et préparation de contenus d'enseignement et de situations d'apprentissage »

…

B.2.3. « Intégrer des outils et des ressources dans une séquence d'enseignement, en opérant des choix entre les supports et médias utilisables et leurs modalités d'utilisation »

• On peut maintenant tenter de placer une balise sur la voie menant à la validation de la compétence B.2.1.

B.2. « Conception et préparation de contenus d'enseignement et de situations d'apprentissage »

B.2.1. « Identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE »

a) *Repères*

…

b) *Balises*

• À propos d'un thème mathématique à enseigner, cette compétence peut s'exprimer par le repérage et l'ébauche de diverses études expérimentales conduites à l'aide de logiciels disponibles et prenant place à l'intérieur d'un scénario d'organisation didactique relative à ce thème.

• …

1.2. Autorité et abus de pouvoir

a) On s'arrête un instant sur la question suivante.

Dans le séminaire de cette matinée [le mardi 21 novembre], on évoquait, dans le cadre des sanctions et punitions, le fait d'identifier le groupe d'élève qui commet une faute et de punir chacun d'eux en fonction de la gravité de leur acte. Mais quelle doit être la démarche d'un professeur qui aurait clairement identifié le groupe d'élèves concernés si certains d'entre eux nient leur manquement aux règles ? Peut-on utiliser la classe comme témoin pour faire avouer leur faute ? (WT, MJ, 3^e^, 9)

b) Avant d'y venir, on « repasse » toutefois quelques-unes des considérations faites jusqu'ici, et cela en se penchant sur un passage d'un article du sociologue François Dubet intitulé ***Une juste obéissance***, paru dans un ouvrage rassemblant des éléments de réponse à la question ***Quelle autorité ?*** – laquelle constitue le titre de l'ouvrage (sous la direction d'Antoine Garapon et Sylvie Perdriolle, Hachette Littératures, Paris, 2003). L'extrait est le suivant (*op. cit.*, p. 175-176).

> Le problème essentiel est de passer d'une légitimité « objective », allant de soi, à une légitimité démocratique, à une légitimité négociée, produite par les acteurs. Cette affirmation, qui ne pose pas *a priori* de problèmes dans l'ordre politique, ne peut pas être prise pour argent comptant dans l'espace scolaire qui met en présence des acteurs inégaux.
> C'est pour cette raison que tout un registre de la loi, celui que l'on peut appeler la civilité et la définition de l'ordre et de la déviance, ne peut pas être négocié. Mieux vaut appeler un règlement intérieur par son nom plutôt que de laisser croire qu'il est objet d'une négociation continue. Dans ce cas, en quoi l'autorité qui en découle est-elle démocratique et légitime ? Il faut d'abord mettre l'école dans la situation de produire une loi objective juste et connue. Des éléments de droit doivent être enseignés à l'école mais, surtout, il importe que cette loi soit réciproque, que les adultes s'y plient de la même manière que les élèves. Or, cela est loin d'être le cas, les règles attachées à l'exactitude, à la politesse, à l'organisation des files d'attente... sont loin d'être universelles à l'école. Plus exactement, l'élève qui les enfreint risque d'être puni, l'adulte, lui, ne se voit guère rappelé à l'ordre par sa hiérarchie. Les cas ont beau être rares, ils délégitiment ce registre de l'ordre. Plus encore, dans notre système scolaire chaque enseignant a la liberté de faire sa propre règle disciplinaire, brisant ainsi toute représentation d'un ordre objectif légitime…

c) Dans le type de situations évoqué par la question reproduite plus haut – celle d'une ***punition*** décidée par le professeur –, il importe bien entendu de tenter de parvenir à une décision ***juste***. Or ici le problème de la ***justesse*** dans l'attribution de la « faute » risque fort de faire obstacle à l'exigence de ***justice*** dans le prononcé de la « peine ». Cette situation, toutefois, n'est guère différente – dans son principe – de toutes celles dans lesquelles les éléments de preuve à l'appui de la réalité de la commission du fait fautif ne sont pas incontestables. Dès lors, nonobstant les protestations de certains d'entre eux, il n'apparaît pas illégitime de prononcer une punition appropriée à l'encontre de chacun des élèves dûment identifiés. Toutefois, dans le cas où la sincérité apparente des protestations d'un élève réputé fautif paraît peu douteuse, un entretien particulier devra lui être accordé, avec éventuellement une fonction d'appel de la décision prise à son endroit.

d) On complète maintenant, sur un point non négligeable, les acquis du travail accompli jusqu'ici, et cela en fouillant un peu l'origine du mot ***autorité***, ou plutôt, d'abord, celui du mot ***auteur*** (auquel il est évidemment lié).

• Le *Dictionnaire historique de la langue française* (Dictionnaires Le Robert, Paris, 1993) précise que le mot ***auteur*** est « un emprunt au latin *auctor* "instigateur", spécialement "conseiller", en droit "garant d'une vente". Le mot est dérivé du verbe *augere* "faire croître" (→ augmenter) et a lui-même pour dérivé *auctoritas* (→ autorité). Le sens initial du latin […] serait religieux, "celui qui fait croître", puis social, "celui qui fonde et établit"… ».

• S'agissant maintenant du mot ***autorité***, la même source précise qu'il est un « emprunt ancien (1119, *auctorité*) au latin *auctoritas*, dérivé de *auctor*, désignant le fait d'être *auctor*, c'est-à-dire fondateur, instigateur, conseiller, garant, vendeur, possesseur (toutes valeurs propres au latin) et aussi auteur, responsable d'une œuvre… ».

• Retenons de cela que l'autorité serait corrélative de la capacité ***à fonder, à créer, à garantir, à augmenter*** la bonne marche de l'institution où elle s'exerce.

e) Dans une telle perspective, les auteurs d'un texte au titre significatif (*L'autorisation ou les mouvements de l'autorité*) également recueilli dans l'ouvrage déjà cité, Jacques Pain et Alain Vulbeau, soulignent (*op. cit.*, p. 140) que « l'autorité n'est plus seulement une donnée instituée qui précède le dispositif, la structure ou l'établissement, il s'agit d'une construction, provisoire et instable, résultat d'une mise en œuvre collective ».

• Tout cela conduit à réfléchir sur ***le partage de l'autorité*** – du fait de la « co-construction » négociée de cette autorité – entre professeurs et élèves (ou autres membres de la « communauté éducative »). L'autorité démocratique suppose que soit reconnue une autorité à ceux-là mêmes qui, dans une situation institutionnellement asymétrique, occupent une position soumise à l'autorité attachée à l'exercice de certaines fonctions – celle de professeur pour l'élève, de chef d'établissement pour le professeur, etc. L'autorité accordée au professeur par ses élèves ***dépend ainsi de l'autorité reconnue à ceux-ci***, du fait non seulement de leur statut mais aussi et surtout de leurs « œuvres » : leur reconnaissance de l'autorité du professeur aura d'autant plus de force qu'eux-mêmes se verront crédités d'une autorité d'élève elle-même mieux reconnue.

• C'est dans une telle perspective que l'on s'arrêtera alors sur la question suivante.

> Peut-on destituer un élève de sa « fonction » de délégué de classe, s'il y a des raisons pour cela ? (MD, CR, 4^e & demi-5^e, 9)

➔ Dans la mesure où l'autorité n'est pas accordée du seul fait de la fonction, mais se mesure ***à la valeur des œuvres*** que cette fonction conduit celui qui l'assume à « produire », rien n'est gagné d'avance, qu'il s'agisse de l'élève ou du professeur. Ainsi en va-t-il, bien sûr, avec les élèves délégués de classe.

➔ Pour aller plus loin sur ce sujet, on se réfère ici à l'édition 2006 de l'ouvrage *Délégué Flash* dû à Damien Durand, publié par le CRDP de Grenoble. On y lit d'abord ceci (*op. cit.*, p. 122).

> Il serait facile d'énumérer les devoirs d'un délégué : loyauté, prise en considération des avis du groupe de classe (et non des opinions personnelles du délégué), esprit d'initiative, persévérance dans les entreprises, absence d'esprit de clan, désintéressement, objectivité, respect des autres lors des démarches, etc. Une prise de conscience des devoirs des délégués doit s'opérer avant l'élection, par une campagne de sensibilisation des élèves au rôle et à l'importance des délégués et pendant l'exercice de ce mandat. […] Les élèves, qui ont élu les délégués, perçoivent fort bien les qualités dont ceux-ci font preuve et les devoirs dont ils s'acquittent par la suite. L'expérience montre qu'une classe sait faire observer à ses délégués leurs insuffisances dans ces domaines… Dans certains cas, le groupe des mandants peut amener un délégué à abandonner ses fonctions parce qu'il n'a pas rempli le contrat moral qu'il avait accepté lorsqu'il s'était présenté…

➔ Qu'en est-il au cas où le délégué faillit gravement à sa charge ? Le même auteur indique ceci (*ibid.*, p. 125).

> Après son élection, une sanction disciplinaire n'entraîne pas [la] déchéance [du] délégué de classe. En revanche, au conseil de discipline, un délégué des élèves ne peut plus siéger s'il a fait l'objet d'une exclusion temporaire de l'établissement. Il est alors remplacé par son suppléant.

➔ En fait, le statut de délégué rend ce dernier, pour le meilleur et pour le pire, relativement indéboulonnable, comme le suggère ce développement relatif à la notion de « vote de confiance » (*ibid.*, p. 126).

> Si, dans les mois qui suivent les élections en classe, des élèves estiment que le système des délégués ne fonctionne pas correctement, ils peuvent proposer l'organisation d'un *« vote de confiance »*. Un vote est alors organisé, si la majorité des élèves demandent cette procédure. Seuls les noms des délégués élus, avec leurs suppléants, figurent sur les bulletins de vote. Le *« vote de confiance »* peut leur être favorable (majorité de bulletins non barrés). Dans le cas contraire, ils sont invités à en tirer les conséquences (démission). Toutefois, en l'état actuel des textes officiels, cette démission ne peut pas leur être imposée.

La situation n'est pas simple…

2. Observation & analyse

2.1. Un compte rendu d'observation dans une séance en 5^{e}

a) On revient ici au compte rendu intitulé ***Avec des nombres relatifs***, qui résume en quelques pages une séance dans une autre classe de 5^{e}.

b) Lors d'un travail précédent conduit à partir de l'enregistrement vidéo du début de la séance, on avait souligné que ***l'entrée en classe*** semblait n'être régie par aucune règle claire, qui énonce ce qui est requis et ce qui est prohibé et qui, de ce fait, permette à chacun de se déterminer dans son comportement propre (en étant tenu pour responsable d'une éventuelle transgression de la règle).

2.2. *Topos* des élèves et agitation dans la classe

a) La gestion d'une séance en classe est, toutes choses égales par ailleurs, déterminée principalement par le contenu de l'activité proposée à la classe, et plus précisément encore par le *topos* que l'organisation de l'étude offre aux élèves. Pour le dire en peu de mots, lorsque ce *topos* se réduit à peu de chose, ou simplement se trouve confusément délimité, engendrant ainsi une incertitude inhibitrice pour les élèves, ou encore lorsque, étant donné son état « historique », la classe ne peut venir occuper réellement le *topos* que le professeur lui a préparé, l'agitation anomique de la classe a toutes chances de croître…

b) Dans le cas de la séance observée, on peut noter tout d'abord une ferme insistance sur une certaine gestion matérielle des documents manipulés par les élèves.

• C'est ainsi que le compte rendu comporte d'abord ce passage.

> P : « Où est-ce qu'on place l'activité ». Des élèves : « Avant le cours ! » P : « Le cours sur quoi ? » Les élèves : « Les nombres relatifs. » P refuse cette réponse criée : « J'ai interrogé quelqu'un ! » Puis il chapitre un élève qui n'a pas encore sorti ses affaires. L'élève interrogé, enfin, répond : « Avant le cours sur les nombres relatifs, après l'activité n^{o} 1. »

• On retrouve cette insistance vers la fin de la séance, à propos du devoir de calcul mental remis aux élèves.

Il est 16 h 18. P revient à son bureau. « Tout le monde a noté les devoirs pour jeudi ? » Bruits. Il enchaîne : « Je rends le calcul mental. » Il le fait, en demandant : « Où est-ce qu'on va le mettre ? » Une élève : « Dans les "Travaux numériques". » P approuve ; une autre élève précise : « Dans les "Exercices". » P : « Oui. »

c) Le soin que prend le professeur de ces aspects de la vie de la classe au travail contraste alors avec le négligé relatif de la gestion de l'AER proposée à la classe, ce qui conduit à un *topos* de l'élève ***faiblement défini***. À cela fait écho le comportement de certains élèves qui, ayant à répondre, le font avec une grande prudence, en restant à la surface des choses.

• Au lancement de l'activité, ainsi, la demande faite aux élèves par le professeur – « Qui explique ce qu'il y a dans le tableau ? » – appelle une réponse apparemment d'un type non familier à la classe, et pour cela non évidente (sans doute le professeur ne s'est-il pas demandé ***avant*** comment il y répondrait lui-même : sur cette situation, voir le TD3 ci-dessus) ; en sorte que tel élève, après avoir débité de prudentes banalités (il y a trois colonnes…), tente *motu proprio* de s'avancer vers une zone plus sûre pour lui (répondre à la question posée dans l'énoncé) – mouvement que le professeur arrête aussitôt, maintenant ainsi l'incertitude sur ce qui est attendu des élèves.

Le second élève indique qu'il y a trois colonnes. Il les décrit sommairement, puis veut enchaîner en décrivant ce qu'il convient de faire. P l'interrompt : « Je ne te demande pas ça… »

• Plus loin, on aura de même cet échange où la prudente retenue de l'élève – qui ne cherche guère à s'engager… – est éclatante !

P : « Il a gagné ou il a perdu des pièces ? » Un élève : « Il en a gagné et il en a perdu ! »

d) Le ***problème*** proposé par le problème est *a priori* clairement posé : on veut savoir si le joueur évoqué dans l'énoncé (dont il n'est pas clair s'il s'agit de Jérôme ou du héros du jeu vidéo) a gagné ou perdu des pièces d'or à la fin de la semaine, et combien. La formulation adoptée – en termes de gains et de pertes – pousse en avant une technique « arithmétique » (et non pas « algébrique ») consistant à calculer d'une part la somme des gains, d'autre part la somme des pertes. Telle est bien, semble-t-il, la stratégie à laquelle se sont d'emblée ralliés nombre d'élèves.

• C'est au demeurant la seule manière de faire qui fera l'objet d'une explicitation collective, et cela encore de façon très limitée. Comme le montre le tableau des gains (ci-après), dont l'exploitation aurait pu constituer une occasion *fonctionnelle* de calcul mental (7 et 7, 14 ; 14 et 6, 20 ; et 30, et 5, 55), les gains se montent à 55 pièces d'or.

Gagne 10	
	Gagne 7
Gagne 10	Gagne 5
Gagne 10	
Gagne 7	
	Gagne 6

• La même technique aurait permis de contrôler collectivement le nombre de pièces perdues, au nombre de 54.

	Perd 3
Perd 11	
Perd 8	Perd 7
	Perd 15
	Perd 7
Perd 3	

• Une autre technique arithmétique, « par compensation », aurait pu être tentée. En considérant par exemple la première colonne (les premières parties jouées jour après jour) puis la seconde colonne (les secondes parties de chaque jour), on peut obtenir successivement ceci.

Gagne 10						
Perd 11		Perd 1				
Perd 8						
Gagne 10	→	Gagne 2	→	Gagne 1	→	
Gagne 10		Gagne 10		Gagne 14		Gagne 15
Gagne 7		Gagne 4				
Perd 3						

Perd 3						
Gagne 7						
Perd 7						
Gagne 5	→		→		→	
Perd 15		Perd 10				
Perd 7		Perd 10		Perd 20		Perd 14
Gagne 6		Gagne 6		Gagne 6		

• Bien entendu, on aurait pu travailler de même façon sur l'ensemble des 14 parties (voir ci-après), etc.

~~Gagne 10~~	~~Perd 3~~
Perd 11	Gagne 7
Perd 8	~~Perd 7~~
Gagne 10	Gagne 5
Gagne 10	Perd 15
~~Gagne 7~~	~~Perd 7~~
Perd 3	Gagne 6

e) Ces « jeux arithmétiques » épuisés, quelque chose devait se passer pour que la classe en arrive à une stratégie de calcul « algébrique », c'est-à-dire de calcul avec des ***nombres relatifs***. Or là encore les élèves sont laissés hors du coup.

• On notera d'abord que, paradoxalement, la phase arithmétique reste inachevée, et cela de façon sans doute involontaire. La seconde stratégie de calcul proposée par certains élèves (calculer le gain ou la perte à l'issue de chacune des journées) est en effet « oubliée » par le professeur, celui-ci passant hâtivement à la phase « algébrique » qu'il a prévue, laquelle inclut justement… le calcul algébrique du résultat quotidien.

P lance une nouvelle consigne : il faut faire un tableau. Il s'aperçoit alors qu'il n'a pas corrigé la deuxième proposition. Mais il continue en précisant le tableau à faire : une ligne par jour…

• Ce passage n'est en aucune façon motivé : elle est une pure injonction du professeur. Ce qui est demandé à la classe, c'est de « recoder » le tableau d'origine, en remplaçant « Gagne *n* » par « + *n* » et « Perd *n* » par « – *n* », en même temps que la seconde stratégie de calcul (par journée) est subrepticement validée, comme on l'a dit.

Journée	1re partie	2de partie	Résultats
Lundi	+ 10	– 3	+ 7
Mardi	– 11	+ 7	– 4

f) Là s'arrête le travail sur le problème proposé. L'essentiel de l'AER reste à venir, alors même que, dans la dernière partie de la séance, le professeur va multiplier les rubriques secondaires, dont la présence *ici* n'est pas toujours des plus pertinentes – comme il en va avec le devoir de calcul mental, dont la remise aux élèves suscite une agitation prévisible, ou encore avec le retour à « l'exercice 29 page 52 qu'on n'avait pas fini de corriger… ». La désorganisation didactique observée va de pair avec des manifestations de désengagement des élèves qui peuvent aller jusqu'à la contestation ouverte, comme le montre encore ce passage du compte rendu.

P : « Eh bien, pour la prochaine fois, vous me complétez le tableau. » Protestations des élèves : « On a contrôle ! » P demande à un élève son cahier de textes pour vérifier. Des élèves contestent cette procédure : le cahier de textes ne révèle rien. Les élèves se récrient ! L'un d'eux précise : « On a contrôle de leçon… Une poésie, en anglais. » P : « Vous me racontez des histoires ! Comment voulez-vous que j'aie confiance en vous ? » Des élèves : « Demandez à la prof ! »

Après-midi

Séance d'explicitation

3. Les *Archives du Séminaire*

3.1. Géométrie dans l'espace en 2de

Le trinôme constitué de *CL*, *CS2* et *FV* rend compte des éléments de réponse que recèlent les *Archives du Séminaire* à la question ci-après.

> Que nous disent les *Archives du Séminaire* à propos de ***la géométrie dans l'espace en classe de 2de*** ?

3.2. Enseigner les relatifs

Un autre compte rendu de recherche dans les *Archives*, présenté par *FLA*, *AEO* et *OL1*, a trait à la question suivante.

> Que recèlent les *Archives du Séminaire* à propos de ***l'enseignement des nombres relatifs*** au collège ?

3.3. Effet Pygmalion, effets de contexte

Un troisième compte rendu de recherche est proposé par *SK* et *CS1* à propos de l'interrogation que voici.

> Que nous disent les *Archives du Séminaire* à propos de ***l'effet Pygmalion*** et plus généralement des « effets de contexte » dans la gestion des apprentissages ?

4. Problématique et fonctionnement du Séminaire

4.1. Le questionnaire du 17 octobre

Les réponses aux quatre questions proposées sont en ligne depuis le 1er novembre. On se limite ici à quelques remarques fondamentales.

4.2. Trop de travail ?

a) Quelques réponses (reproduites ci-après) se font l'écho de ce qui serait un excès de travail pesant sur les participants au Séminaire.

> Les documents du séminaire ou les archives sont très nombreux. Il est difficile de tous les travailler sans compter le travail qu'il faudra faire pour le SPA ou pour les mémoires dans les mois à venir tout en élaborant une préparation très importante pour notre classe en responsabilité. // Chaque séance de séminaire comprend environ 20 à 30 pages. // La densité des documents (archives du séminaire, questions de la semaine) prend beaucoup de temps de travail. // La densité des documents issus de l'ensemble de la formation. Ces derniers demandent un temps de travail important qu'il est difficile de coordonner avec le reste du travail à fournir. // L'accumulation du SPA, de la FGC et du travail de préparation du Séminaire et du GFP rend la préparation des cours et les corrections de devoirs difficiles, ou inversement. // Le travail assez volumineux m'empêche pour le moment de préparer les

cours bien en avance, ce qui se ressent en classe avec un grand manque d'aisance. // Le travail demandé est énorme (sans le SPA j'avais déjà du mal à faire tout le travail demandé… là, je m'en sors très difficilement). // Actuellement, le volume horaire de la formation IUFM atteint 13 heures par semaine. En rajoutant 6 heures de cours et 4 heures de SPA par semaine, cela ne laisse absolument pas le temps de préparer sereinement son cours et de travailler sa formation. Je trouve cela très dommage. // Longueur de la journée (difficulté à rester concentrée aussi longtemps, ce qui est dommage).

b) L'effort demandé est en effet important. Il est lié à plusieurs facteurs, dont l'un des plus évidents est le caractère resserré sur quelques pauvres mois de la formation dispensée. Mais le véritable motif de ***l'intensité de l'engagement formatif*** demandé tient à l'importance de cette deuxième année d'IUFM dans ***l'ensemble de la carrière***. On ne peut à moyen terme – à long terme, on peut toujours rêver ! – espérer une formation continue qui compenserait même en partie les lacunes éventuelles de la formation initiale – où, aujourd'hui encore, ***l'essentiel se joue***. Cela dit, il peut exister, dans la gestion temporelle ***personnelle*** de la charge de travail, des améliorations à mettre en œuvre : on les examinera préférentiellement dans le cadre du GFP.

4.3. Trop théorique ?

a) Quelques répondants évoquent (ci-après) le caractère censé être trop « théorique » de certaines parties de la formation dispensée.

Formation trop théorique pour le premier mois ; dans l'immédiat, une formation rapide plus concrète (construire un cours, gérer la classe…) aurait été la bienvenue. // Je trouve que les formations sont trop formelles, trop théoriques ; ce n'est pas assez axé sur notre réalité de classe. Pas assez de discussions entre les formateurs et nous. // Le vocabulaire utilisé pendant le séminaire est dur à assimiler, ce qui nuit à la bonne compréhension de celui-ci. // Le vocabulaire, les notations utilisées pour l'analyse du métier sont présentés comme indispensables, incontournables. Il me semblerait plus honnête de les présenter clairement comme une possibilité d'analyser les choses parmi d'autres, l'important étant surtout de prendre du recul et d'analyser, quel que soit le moyen. // L'enseignement didactique est trop abstrait, on n'a pas encore l'expérience pour visualiser de quoi il est question. Ça paraît très compliqué et inaccessible autant dans le vocabulaire que dans la longueur des phrases. // Pour le moment, j'ai beaucoup de mal à mettre en relation ce que j'apprends pendant le Séminaire sur l'organisation d'un cours et ce que je fais avec ma classe car ce n'est pas assez concret. // La formation est un peu théorique. // Parfois en « décalage » avec la réalité. // Certains points de la formation sont présentés de manière parfois trop théorique, même si souvent des exemples concrets viennent étayer cette théorie. // La formation est parfois un peu « abstraite » (même pour des mathématiques…) et *loin* des situations rencontrées en classe (stage en responsabilité). // Le travail demandé est parfois très théorique et j'ai parfois du mal à faire le lien avec le travail de terrain. // Pas assez de discussions dans le séminaire.

b) Le supposé « théoricisme » de la formation est d'abord un piège tendu par la représentation sociale dominante du métier de professeur, qui fait de ce dernier un métier « simple », peu qualifié – et que, par exemple, les élèves sont loin de plébisciter, comme le montre de façon oblique le tableau ci-après, extrait d'une très intéressante étude due à Bernard Convert, intitulée *Les impasses de la démocratisation scolaire. Sur une prétendue crise des vocations scientifiques* (Raisons d'agir, Paris, 2006, p. 64), et fruit d'une enquête dont l'objet n'était certes pas d'apprécier l'attractivité des métiers de l'enseignement.

	Ça m'intéresserait
Chercheur	62,9
Médecin	57,6
Ingénieur en informatique	43,9
Avocat	37,7

Développeur multimédia	35,3
Journaliste	35,0
Professeur de sciences en lycée	33,0
Cadre commercial	30,1
Responsable de communication	29,4
Ingénieur de production	29,1
Expert financier	18,9
Commissaire de police	18,6

• L'auteur fait de ce tableau la présentation suivante (*op. cit.*, p. 63) :

Dans notre enquête, les élèves se voyaient proposer douze professions pour lesquelles ils devaient choisir parmi les « opinions » suivantes : « Ça m'intéresserait mais je crains que ce ne soit trop difficile pour moi », « Ça m'intéresserait et je pense que c'est possible pour moi », « Ça ne m'intéresse pas ». Si l'on regroupe les « Ça m'intéresserait… », c'est-à-dire si l'on ne prend en compte que l'intérêt de la profession elle-même compte non tenu de la difficulté présumée d'y parvenir, on observe que deux professions sont nettement boudées : expert financier et commissaire de police, avec moins de 20 % d'élèves « intéressés » ; entre 20 % et 45 % d'élèves intéressés, des professions à contenu scientifique (ingénieur en informatique, professeur de sciences en lycée) côtoient des professions de la communication – avocat, journaliste, responsable de communication. Mais au-dessus de 50 % d'élèves intéressés on ne trouve plus que deux professions : chercheur et médecin.

• Il complète sa présentation par une note qui confirme les résultats exposés (*ibid.*, p. 90).

Il est à noter qu'une enquête menée en parallèle en Italie (par Teresa Longo et Sergio Canis) sur un échantillon représentatif de lycéens de toutes sections (classiques, scientifiques et techniques) fait apparaître un classement sensiblement équivalent, avec les trois mêmes professions les plus citées (*mi piacerebbe*) : *medico* (55,8), *ricercatore* (54,6), *ingegnere* (48,2).

c) Le travail de ***formation*** initiale des professionnels de l'enseignement des mathématiques est indissociablement un travail d'élévation de la ***qualification*** du métier, lequel doit accéder au statut de ***profession*** (on le classe aujourd'hui parmi les « semi-professions », avec les infirmières et les travailleurs sociaux). Dans cette ascension, qui n'est pas ici le fruit d'un simple corporatisme, mais du souci « républicain » de mettre le corps des professionnels de l'enseignement à la hauteur des difficiles problèmes de la formation de tous les citoyens, la création et la diffusion de technologies et de théories – sans lesquelles les techniques requises se dégradent en recettes – constituent le véritable « nerf de la guerre ». Pour reprendre une formule du psychosociologue Kurt Lewin (dans *A dynamic theory of personality*, New York, 1935), en effet, *there is nothing so practical as a good theory*. Chacun doit donc mettre son énergie à « faire le lien avec le travail de terrain », lequel est là d'abord pour permettre de comprendre et d'exploiter le travail « théorique » réalisé sur les questions de la profession étudiées dans le cadre de la formation *stricto sensu*.

4.4. Trop tardif ?

a) Des participants regrettent le caractère « tardif » de certaines réponses apportées par la formation.

Certaines questions qui se sont posées en début d'année, qui, faute de temps, n'ont pu être étudiées à ce moment-là, malgré leur caractère « urgent » (prise en main de la classe, par exemple). // La « remise à plus tard de la suite » qui, quoique nécessaire, reste frustrante. // Il est dommage de ne pas aborder les questions de comment construire une activité, une synthèse avant nos premières heures, le contenu d'une séance étant très important. // On ne peut pas aller aussi loin que je le souhaiterais sur des problèmes rencontrés. Il y a parfois des thèmes dont j'aimerais parler plus longuement. // La réponse aux difficultés ne sont pas ou peu données en temps voulu. // Certaines choses fort intéressantes comme par exemple la gestion du point de vue « discipline », « gestion de la parole », etc., abordées en FGC, viennent trop tard, c'est-à-dire après les premiers contacts avec les élèves. // Ce qui me semble plutôt négatif est le fait que l'on découvre ce que vous préconisez de faire tardivement (par exemple sur les AER, etc.). Mais cela, si j'ai bien compris, est dû au fonctionnement de l'Éducation nationale.

b) De même que la théorie et la technologie utiles au professeur de mathématiques ne sont pas de simples opinions que l'on pourrait échanger aimablement, chacun gardant par ailleurs son quant-à-soi, de même une praxéologie professorale de quelque valeur – quel que soit le ou les types de tâches qu'elle prend en charge – ne saurait se construire en un jour… Soyons clairs : ceux qui le prétendraient méritent certainement d'être affublés du nom de charlatans – ou, pour retrouver partiellement l'étymologie de ce mot, de « crieurs de marché » ! La conclusion est claire et nette : rien de ce qui, dans la pratique professionnelle, se construit presque toujours sous la pression de l'urgence ne saurait être tenu pour un acquis ***définitif***. Tout doit toujours être regardé comme provisoire, questionnable, à déconstruire et à reconstruire en fonction des avancées de la formation – et de la science didactique. Jusqu'à la dernière séance, il y a aura ainsi « des choses à apprendre », et donc des « réponses » installées ***à reconsidérer***. S'il en était autrement, la formation ne mériterait pas son nom.

5. Recherches à venir dans les *Archives*

5.1. Enseigner les fonctions

a) Une recherche a pour objet la question ci-après.

Que contiennent les *Archives du Séminaire* à propos de ***l'enseignement des fonctions***, notamment ***en classe de 2^de^*** ?

b) Cette recherche a été confiée à *KE* et *RH*.

5.2. Calculer avec les unités

a) Une deuxième recherche est relative à la question que voici.

Que disent les *Archives du Séminaire* à propos du ***calcul incluant les unités*** ?

b) Le compte rendu de la recherche s'efforcera de répondre à la question de la semaine ci-après.

On m'a dit que la notation

$$\begin{cases} \text{AB} = 6 - 3 = 3 \\ \text{Donc la longueur AB égale 3 cm} \end{cases}$$

était fausse car AB est une grandeur et 6 – 3 et 3 sont des nombres. Quelle doit donc être la bonne présentation ? (AB, OS, 3^{e}, 9)

c) Cette recherche sera conduite par le trinôme constitué de *JB*, *TB* et *AP*.

5.3. La médiane ?

a) Une troisième recherche portera sur la question ci-après.

Que recèlent les *Archives du Séminaire* à propos de la définition et du calcul de la ***médiane d'une série statistique*** ?

b) Le compte rendu de la recherche répondra notamment à la question suivante.

Une élève m'a dit que son professeur de 3e avait dit que la médiane d'une série statistique d'effectif total pair était n'importe quel nombre de l'intervalle médian. Pour moi, la médiane était le centre de l'intervalle médian. J'ai cherché dans plusieurs livres et j'ai trouvé les deux définitions. Y a-t-il une convention ? (ML, MJ, 2de, 9)

c) Cette recherche est confiée à *VD* et *SG*.

5.4. Prochaine séance d'explicitation

Les comptes rendus des recherches prévues ci-dessus seront présentés lors de la prochaine séance d'explicitation, le ***mardi 9 janvier***.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 11 : mardi 5 décembre 2006

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques // 2. Forum des questions // 3. Évaluation & développement

0. Questions de la semaine

Journée 11 (5 décembre 2006)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4e (et soutien en 5e)

J'ai attaqué le chapitre sur les translations en 4e. Je ne sais pas comment introduire les propriétés de conservation sans que ce soit pénible et que ce soit une liste de propriétés.

1. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques

1.1. *Le temps de l'étude* : suite

a) Les participants au Séminaire avaient à relire la dernière section de la notice *Le temps de l'étude*, intitulée ***Transitions didactiques et reprises d'étude***.

b) On en examine d'abord les deux premières sous-sections.

4. Transitions didactiques et reprises d'étude

4.1. La situation dominée des élèves par rapport à l'avancée de l'étude les porte à être vigilants : ils attendent en particulier du professeur ***qu'il fasse avancer le temps didactique*** ; et, s'il est vrai qu'ils s'entendent souvent à freiner cette avancée – en « traînant les pieds », en faisant de la résistance d'une manière ou d'une autre –, le professeur se méprendrait, au risque d'essuyer bientôt de vives critiques, voire de perdre une partie de sa légitimité, s'il succombait à la tentation de se rendre à ce type de sollicitations, alors que les élèves attendent de lui qu'il avance ***en dépit même des ralentissements qu'ils cherchent à lui imposer***.

4.2. Une telle attente est à l'évidence antinomique de la pratique des ***révisions systématiques***. Longtemps, il est vrai, les programmes officiels ont prescrit la révision – augmentée de compléments – d'une partie du programme de la classe précédente avant d'aborder le « programme particulier à la classe ». Tout aussi officiellement, pourtant, de telles révisions sont aujourd'hui ***proscrites***. « Il convient, énonçait ainsi d'emblée l'ancien programme de 6e, de faire fonctionner, à propos de nouvelles situations et autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision, les notions et "outils" mathématiques antérieurement étudiés. » L'injonction est reprise dans l'*Introduction générale pour le collège* qui ouvre la brochure présentant le nouveau programme de mathématiques du cycle central, où on lit [19. Voir le document *Mathématiques en 5e et 4e*, p. 7.] : « Il convient de faire fonctionner les notions et “outils” mathématiques étudiés au cours des années précédentes dans de nouvelles situations, autrement qu’en reprise ayant un caractère de révision. En sixième, particulièrement, les élèves doivent avoir conscience que leurs connaissances évoluent par rapport à celles acquises à l’école primaire. » Ignorant sur ce point les instructions officielles, nombre de professeurs débutants semblent enclins à commencer l’année par des révisions systématiques, qu’on a vu parfois se prolonger jusqu’aux premières vacances scolaires de l’année ! Plusieurs facteurs concourent sans doute à nourrir ces errements : souci de « rassembler » la classe (par exemple lorsqu’il s’agit d’une 2de, formée d’élèves qui, provenant de différents collèges, tendent à constituer au sein de la classe autant de « clans » qui s’ignorent, voire se combattent), mais aussi désir plus ou moins inconscient de captation des élèves, à qui le professeur, fût-ce à son insu, signifie ainsi que « la vie commence avec lui » (ce que certains élèves peuvent vivre d’ailleurs comme une forme subtile d’agression narcissique). À cela il faut ajouter que la pratique des révisions permet au professeur novice de différer le moment où il devra affronter, au double plan psychologique et technique, la difficile tâche consistant à ***créer du temps didactique*** : dans les révisions, en effet, de même par exemple que dans les leçons particulières (qui constituent fréquemment la seule expérience de direction d’étude du professeur novice), on travaille sur du temps didactique ***créé par d’autres***, et on n’a donc pas véritablement à créer du temps didactique *ex nihilo*. Par contraste, la fonction chronogène qu’assume normalement le professeur ayant la responsabilité d’une classe apparaît alors comme extrêmement exigeante : elle appelle un effort didactique et psychologique non négligeable.

c) La sous-section suivante vise à éclairer certaines ambiguïtés autour de la notion de révision, en introduisant l’idée plus fondamentale de ***reprise didactique***.

4.3. Le problème des révisions surgit notamment lorsque, dans une classe donnée, le programme comporte un thème θ ***déjà en partie étudié*** dans les classes précédentes, c’est-à-dire lorsqu’il y a ***reprise de l’étude*** du thème θ, celui-ci apparaissant donc à nouveau comme un ***enjeu didactique***. Dans un tel cas, la stratégie officiellement préconisée, qui, de manière plus ou moins subreptice, permet la poursuite de l’***apprentissage*** du thème θ par son activation dans le cadre de l’étude de thèmes θ_1, θ_2, ..., θ_n ***nouvellement étudiés***, cesse d’être appropriée puisqu’elle suppose précisément que θ n’est ***plus*** un enjeu didactique. Or les situations de ***reprise d’étude*** sont aujourd’hui fréquentes dans le curriculum secondaire, dans la mesure notamment où les programmes sont conçus dans une perspective progressive, l’étude d’un thème introduit dans une classe se poursuivant en général dans la classe suivante, voire au-delà. Dans un tel cas, la mise en évidence de ce qu’il y a de ***nouveau*** dans l’étude du thème θ, c’est-à-dire de ce qui constitue véritablement l’enjeu didactique autour duquel le travail va se développer dans la classe constitue ***un élément crucial de la direction d’étude***. Deux principes s’imposent notamment au professeur à cet égard. Tout d’abord, il doit se garder de reprendre *ab initio* l’étude du thème θ et s’efforcer au contraire de faire apparaître ce qui, de θ, est réellement neuf, et se trouve donc ***à étudier***, par rapport à ce qui est ***ancien*** et ne saurait plus être légitimement étudié dans ***cette*** classe : objectivement, en effet, du temps didactique a été dépensé dans la classe précédente sur le thème θ, et le redoublement de cette dépense dans la classe, ***sans acquis nouveau***, ou du moins sans que cette reprise soit présentée comme un ***rappel*** visant la remémoration collective de faits déjà rencontrés, constitue alors, aux yeux des élèves, un gaspillage de temps – sentiment qui s’exprime le plus souvent par une certaine inattention, un brouhaha persistant, voire des propos implicitement ou explicitement protestataires : « L’an dernier c’est pas comme ça qu’on faisait ! », « M’sieur, on l’a déjà fait ! », etc. Ensuite, il convient de faire que les élèves qui ne maîtriseraient pas l’***ancien*** de manière satisfaisante puissent se mettre à jour sur ces parties du thème qui ne peuvent plus légitimement recevoir le statut d’enjeu didactique dans le travail de la classe. Si la ***responsabilité didactique*** de l’élève vis-à-vis de ses propres apprentissages est, ici comme en d’autres circonstances, pleinement engagée, le professeur n’est pas pour autant dégagé de toute responsabilité : il lui incombe de prendre sa part dans la gestion de cette reprise d’étude. Lorsque les élèves arrivent dans la classe, le thème θ ne leur est pas inconnu : le problème didactique posé au professeur est alors celui, non du ***recommencement***, mais ***de la reprise et de la poursuite*** de l’étude du thème.

1.2. *Le temps de l'étude* : fin

a) Comment concevoir et mener à bien une reprise didactique, telle qu'il en existe tant dans le passage d'une classe à une autre ? Tel est le problème abordé dans les quatre sous-sections ci-après.

4.4. Le premier souci à cet égard doit être de ***repérer le tracé de la « frontière »*** entre les classes successives relativement au thème considéré. À titre d'illustration, on prendra ici pour thème θ étudié dans la classe, mais ayant déjà été étudié dans les classes antérieures, le thème des ***inéquations du premier degré à une inconnue*** en classe de 2^de^. Le programme de 3^e^ prescrit l'étude des inéquations ou des systèmes d'inéquations à une inconnue et à coefficients numériques, en précisant toutefois que « l'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier degré de la même variable est, elle, hors programme ». En 2^de^, en revanche, le programme parle d'utiliser « un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction » : la frontière passe ici ***entre premier degré et degrés supérieurs***. Le professeur est alors confronté à un problème didactique non trivial, celui de l'articulation de l'étude qu'il doit impulser dans la classe avec le travail déjà réalisé dans la classe précédente sur le thème étudié. Le scénario consistant à tout reprendre *ab ovo* ne saurait évidemment être retenu : dans le cas des inéquations, un tel scénario conduirait en effet, par exemple, à partir d'inéquations telle $2x < 6$, pour arriver, après divers intermédiaires, à des inéquations du type $5 + 6x > 0$, pratique qui, lorsqu'elle n'est pas repoussée par les élèves ainsi qu'on l'a dit, est propre à leur instiller le goût légèrement pervers des répétitions vécues passivement.

4.5. Le problème didactique que le professeur doit chercher à résoudre comporte alors deux difficultés. Tout d'abord, il lui faut explorer et identifier, avec les élèves, leurs ***besoins d'étude*** – leurs besoins ***didactiques*** – relativement au thème considéré. Ensuite, une fois ces besoins didactiques reconnus par le professeur comme par les élèves, il devra concevoir et animer le travail permettant de les satisfaire, et cela en évitant bien entendu la reprise générale de l'étude du thème considéré. La détermination des besoins didactiques des élèves relativement à un thème d'étude peut se faire par la technique du ***test d'entrée dans l'étude du thème*** – test qui constitue le pendant des classiques ***devoirs de contrôle*** (« interrogations écrites », « devoirs surveillés », etc.), lesquels portent généralement sur des types de problèmes récemment étudiés et constituent des tests ***de sortie*** de l'étude des thèmes figurant au programme du contrôle [20. On se gardera, en revanche, d'utiliser tout au long de l'année les résultats d'évaluations, nationales ou non, réalisées en début d'année – ce qui reviendrait, *volens nolens*, à regarder l'élève comme ***figé dans un état quasiment indépassable***. Il est donc inapproprié de vouloir faire l'économie de tests d'entrée thématiques successifs en prétendant juger de la compétence ***actuelle*** de l'élève (au mois de février par exemple) sur un sujet d'étude donné à partir d'une performance ***passée*** (réalisée au mois de septembre par exemple) sur un sujet d'étude voisin, comme si sa contre-performance éventuelle en début d'année disait la vérité de l'élève et scellait son destin mathématique pour une période indéfinie.]. Un test d'entrée peut prendre la forme d'une épreuve de 15 à 20 minutes, phase de travail ***individuel écrit*** suivie d'une phase de travail ***collectif*** en classe, immédiatement, ou lors de la séance suivante. La phase de travail individuel écrit apparaît ***indispensable*** pour que l'élève puisse apprécier par lui-même sa capacité – ou son incapacité – à s'affronter avec succès aux types de tâches mathématiques proposés. Ce travail écrit peut faire l'objet d'une double évaluation. L'évaluation réalisée ***par l'élève***, qui appréciera ainsi sa capacité à résoudre les problèmes des types proposés, pourra être consignée sur la copie, au moment où le professeur met un terme à la session de travail individuel écrit, et être exprimée sur une échelle en quelques points (par exemple : très faible, insuffisant, moyen, satisfaisant, très satisfaisant). L'évaluation réalisée ***par le professeur*** pourra, quant à elle, se traduire par une note chiffrée, dont le poids dans la série des notes attribuées à l'élève devra cependant rester ***très limité***.

4.6. Le test d'entrée doit permettre à l'élève et au professeur d'apprécier la maîtrise réelle qui est celle de l'élève sur les types de problèmes situés ***à la frontière*** entre l'une et l'autre classes. D'une manière générale, la principale difficulté de fabrication d'un tel test est liée à la contrainte de temps : parce qu'il doit ***relancer*** l'étude, et non l'arrêter durablement, un test d'entrée, on l'a dit, doit être ***bref***. Cette exigence conduit à renoncer à représenter, dans l'échantillon de tâches mathématiques proposées, l'***ensemble*** des types de tâches qui ont pu être rencontrées dans les classes précédentes, et à s'en tenir à ***quelques*** spécimens de difficulté graduée. S'agissant du thème des inéquations du premier degré à une inconnue et de la classe de seconde, on pourra ainsi envisager le test ci-après.

Résoudre les inéquations et systèmes d'inéquations suivants, en représentant chaque fois l'ensemble des solutions sur une droite graduée : a) $-5x - 2 < 0$; b) $1 - 4x > -5x$; c) $\frac{12x + 7}{5} > x - 1$; d) $\begin{cases} 2x - 8 < 5x + 13 \\ 4x - 23 \leq 10 + x \end{cases}$

Le test d'entrée proposé en exemple rappelle en outre que la gradation dans la difficulté ne saurait partir du niveau de difficulté ***le plus faible***, ainsi qu'on le ferait avec des commençants « absolus » : l'inéquation $3x + 4 > 10$, et même encore l'inéquation $3x + 6 > 10$, n'a ***en principe*** pas sa place dans un test d'entrée à proposer en 2de. Inversement, on devra en général renoncer à faire figurer les problèmes les plus mangeurs de temps, comme le sont généralement les problèmes de ***modélisation*** par exemple.

4.7. Un test d'entrée n'est qu'un élément de ***l'organisation d'ensemble*** de l'entrée dans l'étude du thème. Censé permettre la détection – et l'auto-détection – des élèves présentant un ***déficit net*** sur le thème considéré, il ne vise pas à contrôler les élèves sur ***l'ensemble*** des points sensibles du thème. En fait, le test doit simplement éclairer le professeur (et les élèves) sur l'action à engager, laquelle peut consister : 1) à ne rien faire de plus, et à aborder ***sans attendre*** l'étude de ce qui est vraiment nouveau ; 2) à proposer à ***certains*** élèves, supposés en petit nombre et pour lesquels la chose semble s'imposer, un ***travail personnel adapté***, et ne reprendre l'étude ***collective*** du thème que quelques jours plus tard ; 3) à diriger en classe entière, ou, de manière plus ciblée, dans un cadre approprié (en module, s'il s'agit d'une 2de, par exemple), un ***travail transitionnel spécifique*** sur le thème à étudier. Dans les deux derniers cas évoqués, les types de problèmes laissés volontairement de côté lors du test d'entrée pourront être spécialement travaillés : ainsi en ira-t-il, s'agissant du thème des inéquations en 2de, avec les problèmes de modélisation algébrique élémentaire. Dans le deuxième cas, on notera que, même aidé, le travail personnel demandé à l'élève suppose de sa part une certaine ***autonomie didactique***, en même temps qu'il engage clairement sa ***responsabilité didactique et citoyenne***, l'élève devant en effet s'efforcer de ***ne pas retarder trop l'avancée du temps didactique*** dans la classe. Le délai de quelques jours entre le travail d'évaluation et de bilan, d'une part, et la poursuite collective de l'étude, d'autre part, assume à cet égard une fonction clairement symbolique, en ce qu'il manifeste que la classe ***attend*** les élèves en retard, et en même temps que cette attente ne saurait se prolonger indûment.

b) La fin de la notice pénètre plus avant dans le détail d'une organisation possible des reprises d'étude, tout en rappelant certains principes fondamentaux de la conduite des apprentissages. On laissera les participants au Séminaire la méditer.

4.8. L'organisation propice au travail personnel adapté suppose un dispositif approprié, et trois scénarios peuvent à cet égard être par exemple envisagés : 1) le professeur fournit aux élèves concernés une ou plusieurs ***feuilles de travail*** qu'il a préparées dans ce but et qui seront le support du travail personnel demandé ; 2) il peut aussi remplacer une telle production spécifique par un ***choix d'exercices*** que l'élève ira découvrir dans un ou plusieurs ouvrages à consulter au CDI (on préfèrera pour cela des ouvrages simples et concis, qui marquent assez nettement une situation de transition par rapport à la classe précédente) ; 3) il peut enfin diriger les élèves concernés vers un dispositif de travail approprié, fonctionnant comme un ***« atelier de mise à jour »*** [21. En classe de seconde, ce dispositif peut être identifié aux séances d'***aide individualisée*** (AI).].

4.9. Dans le cas où le professeur décide de diriger un travail transitionnel spécifique pour ***l'ensemble*** de la classe, les élèves pourront, dans le cadre des ***modules***, avoir à mener à bien soit un travail ***de développement***, réservés aux élèves les plus déficitaires, soit un travail ***de mise au point***, pour les élèves ayant une maîtrise du thème jugée suffisante. La cohésion didactique de la classe peut alors être assurée, par exemple, d'une part en utilisant dans le travail de mise au point le même matériel que celui utilisé dans le travail de développement, mais en moindre quantité et augmenté de quelques exercices simples de modélisation, d'autre part en demandant aux élèves engagés dans un travail de développement, éventuellement groupés en binômes pour certains d'entre eux, de remettre, dans la semaine qui suit, un travail écrit présentant la solution des exercices complémentaires étudiés en « mise au point », devoir pour lequel chacun des élèves ou des binômes reçoit l'aide de l'un des élèves ayant participé au travail de mise au point.

4.10. Un tel travail transitionnel spécifique portera sur les types de problèmes situés à la frontière avec la classe précédente et aura prioritairement pour objet de travailler et de « faire travailler » la technique standard correspondante mise en place dans cette classe, si une telle technique canonique existe ; ou, dans le cas contraire, de rassembler la classe autour d'une technique dont il apparaît que, à un titre ou un autre, ***elle a un avenir*** dans la suite de l'étude. Dans tous les cas, on s'efforcera d'enrichir la technique travaillée de variantes diverses qui fourniront notamment des moyens d'***anticipation*** et de ***contrôle***, en vue d'aller collectivement vers une meilleure maîtrise des types de problèmes considérés. La transition didactique faite, la classe pourra s'attaquer à ce qu'il y a de vraiment nouveau dans le programme de l'année, en prenant appui sur la technique travaillée jusque-là, et en essayant alors d'en étendre la portée aux cas nouvellement rencontrés. Pour résoudre l'inéquation

$$(3x–1)(x+1)(2x+1) > 0,$$

on peut par exemple écrire l'expression donnée sous la forme suivante :

$$6[x – (–1)][x – (– 1/2)][x – 1/3].$$

Cette forme algébrique fait apparaître immédiatement les valeurs de x où l'expression change de signe (à savoir –1, –1/2, 1/3) ; comme, pour $x = 1$, l'expression figurant au premier membre est positive, on peut conclure aussitôt qu'on a

$$S =]–1 ; –1/2[\cup]1/3 ; +\infty[.$$

Cette technique fait l'économie du tableau de signes, qui n'est nullement indispensable au plan ***technique*** [22. L'actuel programme de 2de regarde toutefois comme une « capacité attendue » le fait de savoir « utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction ». Un tel tableau n'est vraiment utile que lors de la phase ***de découverte et d'exploration*** du phénomène mathématique essentiel – le changement de signe de l'expression examinée lorsqu'on franchit une des « valeurs critiques », telles –1, –1/2, 1/3 dans le cas précédent.].

4.11. L'obligation de créer du temps didactique ne doit pas conduire à oublier que l'étude est un moyen au service d'une fin : ***l'apprentissage***. Si le temps didactique impulsé par le professeur fixe un cadre collectif de progrès, c'est bien le travail des élèves qui peut faire que les ***temps de l'apprentissage*** apparaissent globalement ***en phase*** avec l'avancée officielle de l'étude, dont le professeur reste le garant. À cet égard, l'exigence contractuelle d'un temps didactique séquentiel et irréversible ne doit pas être plaquée mécaniquement sur les processus effectifs d'apprentissage, qui se développent au contraire ***dans un décalage nécessaire avec l'actualité didactique officielle***, et où triomphent ***travail d'après-coup*** et ***retours en arrière***. Les dynamiques cognitives individuelles se cachent souvent derrière un certain immobilisme apparent ; l'apprentissage se réalise bien rarement « en temps didactique réel », et le professeur ne saurait donc se contenter d'être l'ordonnateur du temps didactique officiel. Il est tout autant un ***aide à l'étude*** qui, à travers divers dispositifs didactiques (modules, soutien, etc.), contribue de manière décisive à favoriser la mise en accord du temps individuel de chaque « apprenant » avec le temps collectif de l'étude.

1.3. Une nouvelle notice : *Questions & réponses*

a) Une nouvelle notice est diffusée : ***Questions & réponses***.

b) Pour la séance 12 (le mardi 12 décembre), les participants prendront contact avec les deux premières sections de cette notice : ***Activités humaines et questionnements***, et ***Création de connaissances et déni de problématicité***.

2. Forum des questions

2.1. Statistique

a) Le travail sur la statistique et son enseignement avait été amorcé lors de la séance 6 (le mardi 17 octobre), avec renvoi à des développements figurant dans les *Archives du Séminaire*. Le TD3 a permis de revenir sur cette grande question d'enseignement.

b) Le TD3 était tout entier consacré à examiner le scénario d'un début de PER en statistique. On en résume d'abord les principaux enseignements.

• Une question de statistique univariée met en jeu de façon plus ou moins implicite et plus ou moins floue deux entités : 1) tout d'abord, une ***population*** Ω (celle des bébés, celle des éléphants, celles des footballeurs, etc.) ; 2) ensuite, un ***caractère*** ou ***variable*** X relatif aux ***individus*** composant cette population, application de Ω dans (une partie de) ℝ (le poids d'un bébé, celui d'un éléphant, le nombre de buts marqués dans une saison par un footballeur, etc.).

• Cela fait, une question de statistique soulève alors, d'une manière ou d'une autre, le problème de situer une certaine valeur x^* par rapport à la ***distribution*** de la variable X, c'est-à-dire à déterminer les nombres $k \in [0 ; 100]$ tels que x^* soit supérieur ou égal à au moins k % des valeurs de X sur Ω, ou, ce qui revient au même, tels que x^* soit inférieur strictement à au plus $(100 - k)$ % des valeurs de X sur Ω.

c) Les participants à la séance de travaux dirigés ont eu à proposer de telles questions. On les reproduit ci-dessous en les commentant si la chose paraît utile.

« Le 28 novembre 2006, il fait 18 ºC. Est-ce une journée chaude ? » // « Le budget de notre mariage est de 15 000 €. Est-ce un mariage cher ? » // « Est-ce qu'il a beaucoup plu cette année ? » // « Combien faut-il avoir tourné de films pour être un bon acteur ? » // « 1500 €, c'est un bon salaire ? » // « Mathieu a 12 ans et court le 100 mètres en 16 secondes. Est-ce qu'il court vite ? » // « Est-ce qu'à 45 ans on est vieux ? » // « Une tomate de 40 g, est-ce une grosse tomate ? » // « Est-ce qu'un professeur gagne beaucoup ? » // « Un salarié gagne 2000 € par mois. A-t-il un bon salaire ? » // « Trois enfants dans une famille, est-ce beaucoup ? » // « Marseille est-elle une grande ville ? »

d) Le PER envisagé lors du TD3 a été conçu pour une classe de 3^e^. On complète les notations ci-dessus en faisant une lecture collective commentée (ci-après) des extraits ci-après du programme de 3^e^ et de son document d'accompagnement, qui concernent la statistique.

La statistique en 3^e^ : programme

Contenus 1

Caractéristiques de position d'une série statistique

Compétences exigibles 1

Une série statistique étant donnée (sous forme de liste ou de tableau, ou par une représentation graphique), proposer une valeur médiane de cette série et en donner la signification.

Commentaires 1

Il s'agit essentiellement d'une part, de faire acquérir aux élèves les premiers outils de comparaison de séries statistiques, d'autre part de les habituer à avoir une attitude de lecteurs responsables face aux informations de nature statistique.
On repère, en utilisant effectifs ou fréquences cumulées, à partir de quelle valeur du caractère on peut être assuré que la moitié de l'effectif est englobée. Les exemples ne devront soulever aucune difficulté au sujet de la détermination de la valeur de la médiane.

Contenus 2

Approche de caractéristiques de dispersion d'une série statistique

Compétences exigibles 2

Une série statistique étant donnée, déterminer son étendue ou celle d'une partie donnée de cette série.

Commentaires 2

L'étude des séries statistiques ayant même moyenne permettra l'approche de la notion de dispersion avant toute introduction d'indice de dispersion.

On introduira l'étendue de la série ou de la partie de la série obtenue après élimination de valeurs extrêmes.

On pourra ainsi aborder la comparaison de deux séries en calculant quelques caractéristiques de position et de dispersion, ou en interprétant des représentations graphiques données.

Contenus 3

Initiation à l'utilisation de tableurs-grapheurs en statistique

Compétences exigibles 3

∅

Commentaires 3

Les tableurs que l'on peut utiliser sur tous les types d'ordinateurs permettent, notamment en liaison avec l'enseignement de la technologie, d'appliquer de manière rapide à des données statistiques les traitements étudiés.

Accompagnement du programme de 3^e^ (extrait)

En classe de 3^e^, il s'agit d'aider les élèves à franchir une nouvelle étape dans le développement de leur autonomie de jugement à propos d'informations qui peuvent être nombreuses. Dans le cas d'un regroupement en classes, les choix effectués peuvent avoir des effets sur les résultats numériques ou les représentations graphiques et leurs interprétations.

En classe de 4^e^, on a pu observer que « la moyenne d'une population dont les éléments sont rangés par ordre croissant ne sépare pas ceux-ci, en général, en deux parties de même effectif », ce qui justifie l'introduction de la médiane en classe de 3^e^. Les élèves disposent alors de deux indicateurs de la tendance centrale d'une population, leur position relative pouvant faire l'objet d'une interprétation dans des situations appropriées.

La nécessité de distinguer deux séries statistiques de même tendance centrale justifie l'intérêt de la notion de dispersion. Dans ce premier contact, le programme se limite à l'étendue d'une série statistique ou à l'étendue d'une partie donnée de celle-ci ; cela permet, sans difficulté technique, de familiariser les élèves avec une démarche habituelle en statistique : procéder à une synthèse de l'information sous la forme de nombres mesurant respectivement la position et la dispersion de la série étudiée.

e) Pour la prochaine séance du Séminaire, ***chacun reprendra les notes relatives à la séance de TD3***, et cela tant du point de vue de la ***statistique*** que du point de vue des ***TICE***.

2.2. C2i2e

a) On commence par deux questions formulées lors de la séance précédente.

1. Peut-on mettre des documents réalisés avec le logiciel Déclic (Ordina 13) dans le portfolio ? (WB, MJ, 4^e^, 10)

2. Concernant la validation du C2i2e des redoublants, que deviennent les items validés l'année dernière ? (AG, CR, 2^de^, 10)

• Il est en effet possible de déposer dans le portfolio des documents utilisant le logiciel Déclic (voir http://emmanuel.ostenne.free.fr/declic/index_.htm).

• D'une façon générale, les participants au Séminaire devront signaler les logiciels mis en jeu dans les documents qu'ils comptent insérer dans leur portfolio.

• La question des stagiaires redoublants avait été évoquée lors de la séance 8 du Séminaire : les compétences validées en 2005-2006 leur demeurent acquises.

b) Lors de la séance 10, le lien entre l'esquisse présentée d'étude de l'inéquation $6 + x - x^2 > 0$ et la compétence B.2.3 avait été noté.

• Rappelons que, dans le référentiel national des compétences du C2i2e, cette compétence fait l'objet du libellé suivant.

> **B.2. « Conception et préparation de contenus d'enseignement et de situations d'apprentissage »**
>
> …
>
> B.2.3. « Intégrer des outils et des ressources dans une séquence d'enseignement, en opérant des choix entre les supports et médias utilisables et leurs modalités d'utilisation »

• Le travail accompli jusqu'ici conduit à augmenter le document ***C2i2e – Repères & balises*** de la balise ci-après.

> **B.2. « Conception et préparation de contenus d'enseignement et de situations d'apprentissage »**
>
> **…**
>
> B.2.3. « Intégrer des outils et des ressources dans une séquence d'enseignement, en opérant des choix entre les supports et médias utilisables et leurs modalités d'utilisation »
>
> a) *Repères*
>
> …
>
> b) *Balises*
>
> • Cette compétence peut s'exprimer dans la conception d'un scénario d'AER incluant de façon articulée une exploration numérique à l'aide d'un tableur puis une étude à l'aide du calcul algébrique (à la main) pour confirmer le résultat suggéré par le tableur, travail algébrique dont certaines étapes cruciales sont à leur tour éventuellement contrôlées numériquement à l'aide du tableur.
>
> • …

2.3. Systèmes de nombres

a) La question des ***systèmes de nombres*** ($\mathbb{N}$, $\mathbb{D}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}$, etc.) a été évoquée lors de la séance 10 à l'occasion d'un compte rendu de recherche visant à répondre à la question « Que recèlent les *Archives du Séminaire* à propos de ***l'enseignement des nombres relatifs*** au collège ? ». Avant de revenir à cette question, on s'arrête sur une question de la semaine formulée lors de cette même séance.

> Lors d'une AER sur la comparaison des nombres en écriture fractionnaire, il s'agissait, à un moment, de comparer les nombres $\frac{13}{8}$ et $\frac{15}{7}$. Un élève propose une solution : « J'ai dit que $\frac{15}{7} > 2$ et $\frac{13}{8} < 2$, donc $\frac{13}{8} < \frac{15}{7}$. » Je lui demande alors comment il a trouvé l'entier 2. Il n'arrive pas à l'expliquer clairement. J'explique alors au tableau que, effectivement, $\frac{15}{7} > \frac{14}{7}$, or $\frac{14}{7} = 2$, donc $\frac{15}{7} = 2$. Une élève ne comprend pas et me demande « d'où sort la fraction $\frac{14}{7}$ ». Je lui réponds qu'elle sait déjà comparer des fractions

qui ont le même dénominateur, donc il faut essayer de se ramener à cette situation, en traitant d'abord $\frac{15}{7}$ puis $\frac{13}{8}$; $\frac{15}{7}$ a pour dénominateur 7, donc je pense à la fraction $\frac{14}{7}$, qui a le même dénominateur. L'élève paraissait dubitative et pas très convaincue. Comment faire pour rendre les techniques de résolution des différents types de tâches rencontrés « naturelles » et montrer aux élèves que telle ou telle technique est la mieux adaptée ? (OL1, OS, 5^e, 10)

• La réponse à la question posée (« Comment faire pour rendre les techniques de résolution des différents types de tâches rencontrés "naturelles" et montrer aux élèves que telle ou telle technique est la mieux adaptée ? ») est, dans son principe, simple (mais radicale) : elle ne tient pas au fait de bien « expliquer » mais à l'exigence de faire entrer les élèves dans une AER ***où le problème se pose***, et soit alors étudié sans qu'une solution toute faite soit proposée par le professeur, comme c'est le cas dans l'épisode rapporté dans la question.

• On notera en effet que, dans cet épisode de classe, c'est le professeur qui « fait » l'AER en lieu et place des élèves – dont le *topos* se réduit alors à tenter de comprendre ce que « fait » le professeur. Au demeurant, dans ce travail d'étude et de recherche du professeur, l'emploi implicite d'un couple crucial question/réponse (*Q*. Comment comparer deux fractions ? *R*. En se ramenant à comparer deux fractions ayant même dénominateur) joue un rôle essentiel, que le professeur « explique » aux élèves (« Je lui réponds qu'elle sait déjà comparer des fractions qui ont le même dénominateur, donc il faut essayer de se ramener à cette situation. »)

• Noter qu'une autre technique aurait été possible, que les élèves auraient peut-être proposée si la recherche d'une réponse à la question « Comment trouver un entier séparant les deux fractions à comparer » leur avait été confiée : il suffit en effet d'observer sur sa calculatrice que l'on a $\frac{13}{8}$ = 1,625 et $\frac{15}{7}$ = 2,1428571…, ce qui permet par exemple d'avancer que $\frac{13}{8} < 1{,}7$ et $\frac{15}{7} > 2$ avant de conclure.

• Cette première technique peut ***dans certains cas*** être simplifiée en la technique avancée par le professeur – car si, par exemple, on doit comparer les nombres $\frac{13}{8}$ et $\frac{14}{9}$, le décimal séparateur sera moins facile à trouver…

➔ On a ici $\frac{13}{8}$ = 1,625 et $\frac{14}{9}$ = 1,555… : les deux nombres sont séparés par 1,6.

➔ La technique du professeur peut certes être « travaillée » pour continuer à servir. Si l'on n'a ***aucune*** idée sur l'ordre des deux fractions étudiées, force est d'abord de tenter d'établir par exemple que l'on aurait $\frac{13}{8} > \frac{14}{9}$; pour ce faire, on peut tenter de minorer $\frac{13}{8}$ par une fraction à valeur décimale. On a d'abord $\frac{13}{8} = \frac{130}{80} > \frac{128}{80} = \frac{64}{40} = \frac{32}{20} = \frac{16}{10} = 1{,}6$ puis $\frac{14}{9} = \frac{140}{90} < \frac{141}{90} = \frac{47}{30} < \frac{48}{30} = \frac{16}{10} = 1{,}6$. Cette fois, la tentative a réussi !

➔ Mais on voit que la technique évoquée a une moindre ***portée*** qu'une technique « avec la calculatrice », laquelle ne saurait être écartée à ce stade.

• Notons encore qu'une autre technique consistait ici, plus « naturellement » encore peut-être, à observer que l'on passe de $\frac{13}{8}$ à $\frac{15}{7}$ en augmentant le numérateur et en diminuant le dénominateur, en sorte qu'on a $\frac{13}{8} < \frac{15}{8} < \frac{15}{7}$. Cette conclusion suppose qu'on dispose du résultat technologique idoine sur la comparaison des fractions ayant ***même numérateur***.

• Que dit le programme sur ce sujet ? Ceci.

Contenus

Ordre

Compétences

Comparer deux nombres en écriture fractionnaire dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes et dans le cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre.

Exemples d'activités, commentaires

En classe de sixième, la simplification a été abordée et est donc utilisée en classe de cinquième. C'est l'occasion d'envisager la notion de fraction irréductible, mais aucune compétence n'est exigible à ce sujet.

Différents cas peuvent être envisagés :

– dénominateurs égaux
– numérateurs égaux
– dénominateurs et numérateurs différents dans des exemples simples (la généralisation est faite en classe de quatrième).

Différentes procédures sont mises en œuvre dans ce dernier cas :
– comparaison à un même entier (exemple : comparer $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{4}$ à 1) ;
– mise au même dénominateur (dans des cas accessibles par le calcul mental);
– calcul des quotients approchés.
La systématisation de la réduction au même dénominateur est traitée en classe de quatrième.

On voit qu'il prévoit ***une pluralité de techniques*** à faire émerger et à mettre en œuvre. Dans le cas examiné plus haut, la réduction au même dénominateur était en principe « accessible au calcul mental », et on aurait donc pu voir des élèves proposer ceci :

$$\frac{13}{8} = \frac{13 \times 7}{8 \times 7} = \frac{91}{8 \times 7}\,;\ \frac{15}{7} = \frac{15 \times 8}{7 \times 8} = \frac{120}{8 \times 7}\,;\ \text{donc } \frac{13}{8} < \frac{15}{7}.$$

b) Ce qui précède appelle plusieurs commentaires. Le premier sera très pratique, en lien avec la question que voici.

À quelle fréquence doit-on faire du calcul mental en 5^e ? (FLA, OS, 5^e, 10)

• On peut évidemment organiser des phases de travail dévolues exclusivement au calcul mental ; mais l'exemple qui précède (comme celui croisé lors de la séance 10, à propos des relatifs en 5^e) illustre bien une autre manière de procéder, qui consiste à pratiquer le calcul mental ***de façon fonctionnelle***, « en situation », c'est-à-dire dans le cadre d'AER qui ne sont pas « de calcul mental » *stricto sensu*.

• C'est ainsi que, passer, comme on l'a fait plus haut, de $\frac{130}{80}$ à $\frac{128}{80}$ puis successivement à $\frac{64}{40}$, $\frac{32}{20}$ et $\frac{16}{10}$ relève du calcul mental, de même que relève du calcul mental le petit travail consistant à passer de $\frac{140}{90}$ à $\frac{141}{90}$ puis, successivement, à $\frac{47}{30}$, $\frac{48}{30}$ et $\frac{16}{10}$… On aura noté aussi la référence du programme (ci-dessus) au calcul mental à propos de la « réduction au même dénominateur ».

• On s’efforcera donc d’identifier les « bonnes occasions » de faire du calcul mental « fonctionnel », dans le cadre d’un projet mathématique plus vaste ; et ce n’est qu’à titre de complément qu’on aménagera des phases de travail de pur calcul mental.

c) La seconde remarque a trait à la ***justification*** des calculs – et donc à la théorie « numérique » disponible (en construction), ou théorie des nombres disponible (TND). On s’en tient ci-après à l’organisation mathématique qui devrait être mise en place, sans évoquer en rien les AER ou PER utiles pour cela.

• On s’arrête en l’espèce à la théorie des fractions d’entiers naturels (ou de décimaux positifs). Le programme de 6^{e} – l’ancien comme le nouveau – indique sobrement ceci, que l’on va expliciter.

> À l’école élémentaire, l’écriture fractionnaire est introduite en référence au partage d’une « unité ».
> Les activités en sixième s’articulent autour de trois idées fondamentales :
> – le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre (solution du problème évoqué au 2.1) ;
> – le produit de $\frac{a}{b}$ par b est égal à a ;
> – le nombre $\frac{a}{b}$ peut être approché par un décimal.

• L’idée fondamentale est la suivante : quand on connaît seulement les décimaux (positifs), on s’aperçoit que l’on « manque de nombres » pour ***mesurer***. On sait par exemple couper en trois segments de même longueur un segment de longueur donnée – disons de mesure 2 par rapport à une certaine unité. Quelle est alors la mesure de chacun des trois sous-segments ? Appelons-la x ; on a donc $3x = 2$. On s’aperçoit alors qu’***il n’existe pas de décimal*** dont le produit par 3 donne 2 : même si ce décimal avait un grand nombre de décimales, sa dernière décimale non nulle, n, multipliée par 3, devrait donner un multiple de 10, pour que s’inscrive un zéro dans le produit :

$$\begin{array}{rr} & 0{,}\bullet\bullet\bullet\ldots\bullet\bullet n \\ \times & 3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Or aucun des produits $3 \times n$ où $n = 1, 2, \ldots, 9$, n’est un multiple de 10.

• On admet alors qu’il existe un (nouveau) ***nombre*** – forcément non décimal – qui vérifie $3x = 2$. Ou plutôt on suppose que, ***pour tout couple de nombres connus a et b*** (supposés non nuls), il existe un nombre x tel que $bx = a$. Par sa définition, x apparaît comme un nombre ***fractionnaire***, en ce sens qu’il mesure une « fraction » de la longueur du segment – et plus généralement une fraction de la ***grandeur*** considérée.

• Le fait qu’il s’agisse de ***nombres*** doit être entendu ainsi : on ***suppose*** – c’est une sorte de ***« pari mathématique pascalien »*** – que ces nombres nouveaux appartiennent à un ***système de nombres*** ayant les propriétés essentielles des systèmes de nombres déjà connus : ils s’additionnent (respectivement, ils se multiplient) et leur addition (resp., leur multiplication) est commutative ; la multiplication est distributive par rapport à l’addition, etc. Pour le dire dans des termes « modernes », on suppose que ces nouveaux nombres appartiennent (avec les anciens nombres) à un ***(demi-)anneau unitaire, commutatif, intègre et ordonné***.

➔ L'une des premières conséquences de ce qui précède est la suivante : pour tout couple (a, b) de nombres connus, il existe un ***unique*** nombre x tel que $bx = a$. Si, en effet, x' est un nombre tel que $bx' = a$, on a $bx = bx'$ et donc $x = x'$. Cette propriété d'unicité justifie la notation usuelle de l'unique nombre x tel que $bx = a$, à savoir $x = \frac{a}{b}$, ainsi que la formulation selon laquelle « $\frac{a}{b}$ est par définition le nombre qui, multiplié par b, donne a ».

➔ De ce qui précède on déduit par exemple ceci : soit $x = \frac{6}{3}$; comme $2 \times 3 = 6$, on a $x = 2$, c'est-à-dire $\frac{6}{3} = 2$. Plus généralement, s'il existe un décimal q tel que $bq = a$, on a $\frac{a}{b} = q$. Le nombre $\frac{a}{b}$ est donc une généralisation de la notion de ***quotient*** décimal de a par b : d'où le fait qu'on désigne aussi la ***fraction*** $\frac{a}{b}$ sous le nom de ***quotient***.

➔ C'est le même théorème d'unicité qui permet d'établir que, pour des nombres a, b, k non nuls, on a

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}.$$

Posons en effet $x = \frac{ka}{kb}$; on a $(kb)x = ka$, soit $k(bx) = ka$, et donc $bx = a$, ce qui signifie que $x = \frac{a}{b}$, CQFD.

➔ Considérons deux quotients $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. Comment s'exprime leur ***produit*** ? Il n'est pas certain *a priori* que ce nombre produit soit lui-même un « quotient ». Posons $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$; on cherche à identifier le « nombre » $z = xy$. Or on a ceci : $(db)z = (db)(xy) = ((db)x)y = (d(bx))y = (da)y = (ad)y = a(dy) = ac$. On a ainsi $db(z) = ac$, et donc… $xy = z = \frac{ac}{bd}$.

➔ Le cas du nombre z ***somme*** de $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ se traite semblablement. On a : $(db)z = (db)(x + y) = (db)x + (db)y = d(bx) + b(dy) = da + bc = ad + bc$. On a ainsi : $x + y = z = \frac{ad + bc}{bd}$.

• Les problèmes d'***ordre*** dont nous sommes partis – comparer $\frac{13}{8}$ et $\frac{15}{7}$, etc. – se traitent à l'avenant, en tenant compte de la compatibilité (supposée) de l'addition et de la multiplication par rapport à l'ordre.

➔ On a en particulier ceci : si $a < c$, alors $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$. Posons en effet $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{b}$; si l'on avait $x \geq y$, on aurait aussi $bx \geq by$, soit $a \geq c$, en contradiction avec l'hypothèse que $a < c$.

➔ Supposons que l'on ait $a = bq + r$; alors on a $b\left(q + \frac{r}{b}\right) = bq + b\frac{r}{b} = bq + r = a$ si bien que $q + \frac{r}{b} = \frac{a}{b}$. On a ainsi $\frac{13}{8} = \frac{8+5}{8} = 1 + \frac{5}{8}$ et $\frac{15}{7} = \frac{7+8}{7} = 1 + \frac{8}{7}$, si bien que la comparaison de $\frac{13}{8}$ et de $\frac{15}{7}$ est ramenée à celle de $\frac{5}{8}$ et $\frac{8}{7}$, qui sont séparés par 1, etc.

d) Ce qui précède rappelle que l'hypothèse fondamentale, c'est que ce qu'on a appelé « les nombres » suivent les lois communes aux nombres connus – les décimaux (positifs). Le fait de postuler l'existence de ces nombres est, on l'a dit, fondé sur le fait qu'ils sont nécessaires pour mesurer des longueurs qui nous paraissent assurément exister. Mais cela ne conduit-il à aucune contradiction « cachée » ?

• Ce type de questionnement a conduit les mathématiciens du XIX^e^ siècle à montrer que tel « système de nombres » supposé, par exemple le système des nombres complexes $\mathbb{C}$, était ***libre de contradiction*** en montrant que ***s'il était contradictoire, il en irait de même d'un ensemble de nombres réputé pourtant non contradictoire.*** C'est ce schéma démonstratif qui permet d'établir la ***consistance relative*** du système de nombres considéré : « consistance » est synonyme de « non-contradiction », et la dire « relative » renvoie au fait qu'on ne démontre pas la non-contradiction de $\mathbb{C}$ mais le fait que $\mathbb{C}$ est non contradictoire ***dès lors que*** $\mathbb{R}$ l'est.

• C'est ce que fait, en 1837, William Rowan Hamilton (1805-1865) en montrant que, ***si*** le système des nombres réels $\mathbb{R}$ est non contradictoire, ***alors*** il en est ***de même*** de $\mathbb{C}$. Pour cela, il observe que $\mathbb{C}$ peut se définir à partir du système $\mathbb{R}$ d'une manière aujourd'hui bien connue :

$$\begin{cases} \mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d) \\ (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \\ \text{si } c^2 + d^2 > 0 \text{ alors } \dfrac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) \end{cases}$$

• C'est de la même façon que, dans les années 1860, Weierstrass montrera, en exploitant l'idée de Hamilton (que, à propos des complexes, Gauss prétendit avoir eue dès 1831), que, si $\mathbb{N}$ est consistant, alors il en est de même de $\mathbb{Z}$, puis de $\mathbb{Q}$. (La démonstration analogue pour $\mathbb{R}$ fit au cours du siècle l'objet de travaux plus difficiles, mais finalement convergents, de Cantor, Dedekind, Méray, etc.)

• Le projet de développer un système de nombres qui seraient l'analogue pour l'espace ***à trois dimensions*** de ce que les complexes sont pour le ***plan*** se révéla en revanche ***impossible***. Hamilton, qui y travailla sans succès « au moins quinze ans », dut finalement reconnaître que, s'il était facile de définir sur $\mathbb{R}^3$ une structure ***additive*** convenable, il n'était pas possible d'y définir une ***multiplication***. Il prit conscience du même mouvement que, pour dépasser cette impossibilité, il fallait accepter, d'abord de ***passer de*** $\mathbb{R}^3$ ***à*** $\mathbb{R}^4$, ensuite de renoncer à la ***commutativité*** de la multiplication. Ainsi créa-t-il les ***quaternions***, comme il le raconte dans le passage suivant (cité *in* Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972, p. 779) :

> Tomorrow will be the fifteenth birthday of the Quaternions. They started into life, or light, full grown, on the 16th of October, 1843, as I was walking with Lady Hamilton to Dublin, and came up to Brougham Bridge. That is to say, I then and there felt the galvanic circuit of thought closed, and the sparks which fell from it were the fundamental equations between I, J, K ; *exactly such* as I have used

them ever since. I pulled out, on the spot, a pocketbook, which still exists, and made an entry, on which, *at the very moment*, I felt that it might be worth my while to expend the labour of at least ten (or it might be fifteen) years to come. But then it is fair to say that this was because I felt a *problem* to have been at that moment *solved*, an intellectual *want relieved*, which has *haunted* me for at least *fifteen years* before.

• Le passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ oblige à l'abandon de ***l'ordre*** – au sens où $\mathbb{C}$ ne peut être muni d'un ordre compatible avec sa structure de corps. Le passage de $\mathbb{C}$ au corps (gauche) des quaternions **H** conduit, on l'a dit, à abandonner en outre la ***commutativité*** (de la multiplication). Peut-on trouver des sur-« corps » de **H** ? Dans leur livre *A Comprehensive Textbook of Classical Mathematics. A Contemporary Interpretation* (Springer-Verlag, New York, 1970), H. B. Griffiths et P. J. Hilton, répondent ceci (*op. cit.*, p. 404).

The answer is that we can go further embed **H** in the so-called 'algebra of Cayley numbers', which is a two-dimensional vector space over **H**, and hence an eight-dimensional vector space over $\mathbb{R}$ (it is sometimes called the algebra of **octonions**). However, in this algebra we even have to abandon the associative law of multiplication, as well as the commutative law. But we do retain the condition that there shall be no divisors of zero; indeed, the algebra (like H, $\mathbb{C}$, and $\mathbb{R}$) admits a multiplicative function ϕ to $\mathbb{R}^+$ which is zero only on the zero element. It has very recently been proved that the *only* algebras over $\mathbb{R}$ admitting such a function ϕ are vector spaces of dimension 1, 2, 4 or 8 over $\mathbb{R}$, so we certainly cannot go beyond the octonions. But this recent theorem (due to Professor J. F. Adams of Manchester University) required for its proof some of the most sophisticated apparatus of modern algebraic topology; no wonder it had defied the best efforts of mathematicians for many years.

• Dès 1877, Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) avait démontré que les seuls espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$ qui puissent être munis d'une multiplication associative, sans diviseurs de zéro, qui leur donne une structure d'algèbre réelle étaient $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et **H**. Ce résultat démontrait notamment que la tentative de Hamilton pour faire de $\mathbb{R}^3$ un corps de « nombres » était vouée à l'échec…

e) L'introduction des nombres ***négatifs*** suivra le même schéma, à ceci près que le ***besoin*** de nombres négatifs n'est pas lié à la ***mesure***, mais au ***« confort de calcul »*** : pour tout nombre connu a, on suppose qu'il existe un nombre, a^*, tel que $a + a^* = 0$.

• Avant d'y revenir, on laissera les participants au Séminaire examiner les principales conséquences de cette introduction, où l'égalité $a + a^* = 0$ est l'analogue de l'égalité $b \times \frac{a}{b} = a$ pour les fractions.

• On se contentera, pour le moment, d'un seul exemple. Soit à calculer la somme

$$(78355 + 188) – 189.$$

Si l'on ne connaît que les nombres positifs, on devra procéder ainsi : (78355 + 188) – 189 = 78543 – 189 = 8354. Si, en revanche, on use – en grand débutant… – des nombres négatifs, on pourra d'abord noter que

$$1+ (188 – 189) = (1 + 188) – 189 = 0$$

soit que $188 – 189 = 1^*$, et « calculer » alors ainsi :

$$(78355 + 188) – 189 = 78355 + (188 – 189) = 78355 + 1^* =$$
$$(78354 + 1) + 1^* = 78354 + (1 + 1^*) = 78354.$$

2.4. Autorité, discipline, abus de pouvoir

a) On fera une pause dans le travail engagé sur la notion d'autorité en évoquant ce qui est au fond l'autorité, non d'une personne, mais d'une ***institution***, notion à propos de laquelle nombre de considérations concernant l'autorité d'une ***personne*** peuvent être reprises : beaucoup d'institutions manquent d'autorité, etc. Nous le ferons à travers la lecture commentée d'un texte publié dans la revue américaine *The New Yorker* du 4 septembre 2006, sous la signature d'un de ses collaborateurs réguliers, Malcolm Gladwell (voir son site à l'adresse http://gladwell.typepad.com/gladwellcom/).

b) Avant cela, toutefois, on notera ceci. Le nouveau programme du cycle central du collège est précédé d'un texte intitulé *Introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques* ; ce texte, qu'on ne saurait résumer ici, et qui comporte par exemple une sous-section intitulée *Place des TICE dans l'enseignement*, comporte aussi une sous-section intitulée *Utilisation d'outils de travail en langue étrangère*. On en prend rapidement connaissance.

Utilisation d'outils de travail en langue étrangère

Dans toutes les disciplines scientifiques, il est souhaitable de mettre à la disposition des élèves des outils (textes, modes d'emploi, images légendées, cartes, sites…) rédigés dans la ou les langues étudiées par la classe dans la mesure où ces outils de travail font appel à un vocabulaire et à des structures linguistiques adaptées au niveau des élèves.

L'utilisation d'un tel outil en dehors du cours de langue met à profit les compétences en langue vivante et les développe en augmentant la durée pendant laquelle la langue étrangère est partie prenante de l'activité intellectuelle de l'élève.

Une telle procédure motive les élèves pour les enseignements linguistiques en illustrant leur intérêt pratique. La présence de la langue dans d'autres enseignements ouvre l'horizon culturel.

Cette utilisation d'outils ne requiert pas la maîtrise de la langue concernée par les enseignants des autres disciplines. Il ne leur est aucunement demandé de prendre en charge une partie de l'enseignement de langue vivante.

En début d'année, le professeur de langue vivante et les professeurs de disciplines scientifiques sélectionnent les outils qui leur paraissent pertinents, tant au plan disciplinaire que linguistique.

Les élèves acquièrent en cours de langue le vocabulaire et les structures nécessaires pour avoir de chaque outil une compréhension suffisante à la poursuite des activités avec un professeur d'autre discipline, sans assistance linguistique de ce dernier.

Après utilisation de l'outil dans une discipline qui poursuit ses objectifs propres, le professeur de langue vivante peut demander à la classe diverses formes de comptes rendus, oraux ou écrits, de l'activité réalisée et utiliser celle-ci à nouveau en fonction de ses objectifs d'apprentissage linguistique.

c) Cela entendu, voici maintenant le texte mentionné plus haut, que la couverture du numéro de la revue annonce sous le titre *The Cost of Zero Tolerance*.

NO MERCY

In 1925, a young American physicist was doing graduate work at Cambridge University, in England. He was depressed. He was fighting with his mother and had just broken up with his girlfriend. His strength was in theoretical physics, but he was being forced to sit in a laboratory making thin films of beryllium. In the fall of that year, he dosed an apple with noxious chemicals from the lab and put it on the desk of his tutor, Patrick Blackett. Blackett, luckily, didn't eat the apple. But school officials found out what happened, and arrived at a punishment: the student was to be put on probation and ordered to go to London for regular sessions with a psychiatrist.

Probation? These days, we routinely suspend or expel high-school students for doing infinitely less harmful things, like fighting or drinking or taking drugs–that is, for doing the kinds of things that teen-agers do. This past summer, Rhett Bomar, the starting quarterback [*quart-arrière*] for the University of Oklahoma Sooners, was cut from the team when he was found to have been "over-paid" (receiving wages for more hours than he worked, with the apparent complicity of his boss) at his job at a car dealership. Even in Oklahoma, people seemed to think that kicking someone off a football team for having cut a few corners on his job made perfect sense. This is the age of zero tolerance. Rules are rules. Students have to be held accountable for their actions. Institutions must signal their expectations firmly and unambiguously: every school principal and every college president, these days, reads from exactly the same script. What, then, of a student who gives his teacher a poisoned apple? Surely he ought to be expelled from school and sent before a judge.

Suppose you cared about the student, though, and had some idea of his situation and his potential. Would you feel the same way? You might. Trying to poison your tutor is no small infraction. Then again, you might decide, as the dons at Cambridge clearly did, that what had happened called for a measure of leniency. They knew that the student had never done anything like this before, and that he wasn't well. And they knew that to file charges would almost certainly ruin his career. Cambridge wasn't sure that the benefits of enforcing the law, in this case, were greater than the benefits of allowing the offender an unimpeded future.

Schools, historically, have been home to this kind of discretionary justice. You let the principal or the teacher decide what to do about cheating because you know that every case of cheating is different–and, more to the point, that every cheater is different. Jimmy is incorrigible, and needs the shock of expulsion. But Bobby just needs a talking to [*un « savon »*], because he's a decent kid, and Mary and Jane cheated because the teacher foolishly stepped out of the classroom in the middle of the test, and the temptation was simply too much. A Tennessee study found that after zero-tolerance programs were adopted by the state's public schools the frequency of targeted offenses soared: the firm and unambiguous punishments weren't deterring bad behavior at all. Is that really a surprise? If you're a teen-ager, the announcement that an act will be sternly punished doesn't always sink in, and it isn't always obvious when you're doing the thing you aren't supposed to be doing. Why? Because you're a teen-ager.

Somewhere along the way–perhaps in response to Columbine–we forgot the value of discretion in disciplining the young. "U1timately, they have to make right decisions," the Oklahoma football coach, Bob Stoops, said of his players, after jettisoning his quarterback. "When they do not, the consequences are serious." Open and shut: he sounded as if he were talking about a senior executive of Enron, rather than a college sophomore [*un étudiant de 2ᵉ année*] whose primary obligation at Oklahoma was to throw a football in the direction of young men in helmets. You might think that if the University of Oklahoma was so touchy about its quarterback being "overpaid" it ought to have kept closer track of his work habits with an on-campus job. But making a fetish of personal accountability conveniently removes the need for institutional accountability. (We court-martial the grunts [*« troufions »*] who abuse prisoners, not the commanding officers who let the abuse happen.) To acknowledge that the causes of our actions are complex and muddy seems permissive, and permissiveness is the hallmark of an ideology now firmly in disgrace. That conservative patron saint Whittaker Chambers once defined liberalism as Christ without the Crucifixion. But punishment without the possibility of redemption is worse: it is the crucifixion without Christ.

As for the student whose career Cambridge saved? He left at the end of the academic year and went to study at the University of Göttingen, where he made important contributions to quantum theory. Later, after a brilliant academic career, he was entrusted with leading one of the most critical and morally charged projects in the history of science. His name was Robert Oppenheimer.

– Malcolm Gladwell

• Plusieurs points de ce texte très riche (et polémique) mériteraient d’être commentés. Un premier point concerne la distinction entre la « faute » et la « peine », et, conséquemment, la ***non-automaticité*** de cette dernière une fois la faute reconnue : le prononcé de la peine doit en effet intégrer pleinement le principe de l’individualisation de la sanction, selon lequel la sanction reste, dans une certaine mesure, à la « discrétion » de l'instance qui prononce la peine. Soulignons que, pour épargner au fautif une sanction regardée à tort comme automatique, et que l'on tiendrait en tel ou tel cas pour excessive, peut-être aussi pour s'épargner la difficulté de prononcer cette sanction (ou d'y concourir), on peut être conduit, du fait de la confusion entre faute et sanction, qui va de pair avec l'adhésion spontanée au postulat illégitime de l'automaticité de la sanction, à nier en quelque façon la faute elle-même – en refusant de la voir, en la minimisant, etc. On veillera sur ce point à ne pas se duper soi-même (ni à duper autrui) : si faute il y a, elle doit être reconnue, sinon publiée ; à charge pour l'instance concernée de prononcer la punition ou la sanction qu'appelle la faute commise à la lumière du principe d'individualisation de la sanction.

• On soulignera encore l'observation selon laquelle *"making a fetish of personal accountability conveniently removes the need for institutional accountability"* : fétichiser la responsabilité personnelle, c'est presque toujours oublier la responsabilité des institutions elles-mêmes, qui, trop fréquemment, laissent se créer des conditions propices à la commission de la faute. Ainsi en va-t-il, typiquement, avec l'exemple de Mary et Jane, qui n'ont pu succomber à la tentation de tricher que parce que le professeur *"foolishly stepped out of the classroom in the middle of the test, and the temptation was simply too much"* : la légèreté du comportement du professeur, agent de l'institution scolaire, est ici la première cause du comportement fautif des élèves, et constitue en elle-même une faute.

3. Évaluation & développement

3.1. Un floraison de questions

a) De nombreuses questions ont été formulées lors des dernières séances sur des difficultés liées au travail de développement qui incombe aux participants, soit dans le cadre de leur stage en responsabilité, soit dans le cadre de leur TER. On place ici à titre de pierres de touche les deux questions suivantes, auxquelles on s'efforcera de répondre au moins partiellement.

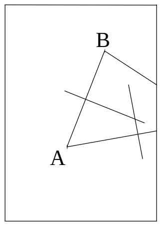
1. Quels sont les aspects particuliers qu'il faut mettre en valeur et étudier dans notre compte rendu d'observation pour notre mémoire ? (SH, CR, 4^{e}, 9)

2. Le 21 novembre, c'est-à-dire aujourd'hui, on doit remettre au tuteur un compte rendu d'observation d'une séance observée en SPA, celui-ci pouvant être utilisé comme support du TER. Par la suite, un sujet de développement devra être proposé. Je ne comprends pas bien ce qu'on attend de nous. Serait-il possible d'avoir des éléments concrets sur ce TER, de manière à être plus efficaces dès le départ et notamment dans la recherche du sujet de développement ? (SF, CR, 5^{e}, 9)

b) Prenons d'abord pour exemple le compte rendu d'observation d'une séance de 5^{e} intitulé *Avec des nombres relatifs*. L'analyse réalisée sommairement lors de la séance 10 (voir les notes de cette séance) montre que plusieurs aspects de l'organisation de l'étude et de la gestion de la classe sont sans doute loin d'être optimaux. Tel est le verdict global de l'***évaluation*** à laquelle on peut procéder. Ce verdict pousse à soulever un problème de ***développement*** : comment modifier « ce qui fait cette séance » pour parvenir à une introduction des relatifs en 5^{e} souscrivant mieux aux exigences didactiques de convivialité et d'apprentissage que l'on n'a cessé de travailler jusqu'ici ? Tel est le problème de développement que l'on pourrait se poser dans le cadre d'un TER qui prendrait pour séance observée, analysée, évaluée, ladite séance en 5^{e}. On notera que des germes d'un tel travail de développement apparaissent dans les notes de la séance 10, que chacun est invité à revisiter pour son propre compte dans cette perspective.

3.2. Conception d'AER et questions cruciales

a) Considérons maintenant la question que voici.

> En SPA, je suis intervenue en classe de 5e sur les médiatrices d'un triangle, et plus spécifiquement sur leur « concours ». J'ai proposé le travail suivant aux élèves. Est-ce une véritable AER ?
>
> ABC est un triangle, le point C est hors du cadre.
> Les médiatrices des segments [AB] et [AC] sont déjà tracées.
>
> 
>
>
> Tracer la partie de la médiatrice du segment [BC] qui est dans le cadre sans sortir de ce dernier.
>
> (AMJ, CR, 2de, 9)

b) Avant de l'examiner, on s'arrête un instant sur une autre question, liée à la précédente.

> J'ai entendu dire « la concourance » des médiatrices… Doit-on dire la « la concourance » ou « le concours » ?… (AMJ, CR, 2de, 9)

• On doit dire « le concours » : « la concourance », c'est un horrible barbarisme ; mais il est vrai que ce sont les barbares qui défont et refont les civilisations.

• Bien qu'on puisse avoir le sentiment d'ériger un barrage contre le Pacifique, tentons de rétablir les choses calmement. Voici d'abord un bref extrait du *Dictionnaire historique de la langue française* :

> **Concours** n. m. est emprunté (1360-1370), avec francisation d'après *cours*, au latin *concursus* « affluence vers un même point », « rencontre », « prétentions rivales » et, dans le langage juridique médiéval, « aide » (déb. VIIIe s.). Ce sens médiéval, repris le premier, a disparu dès l'ancien français sous la double concurrence de *secours* et de *recours*. ♦ Le mot a conformé ses sens à ceux du verbe [concourir] : il n'a pas gardé la valeur spatiale « rencontre de plusieurs personnes en un même endroit » (1572), s'appliquant exclusivement à des choses (XVIe s.), notamment en géométrie (1753), et avec une extension temporelle (1835, *concours de circonstances*). ◊ La notion de rencontre a donné deux extensions divergentes en parlant de personnes : « action de coopérer » (1644) et « action d'entrer en compétition pour obtenir qqch. » (1660), d'où « examen scolaire » et « épreuve sportive », lorsque la sélection se fait par ordre d'excellence, et non pas selon un critère extérieur (cf. *examen*).

• Une personne peut me prêter son concours. Mais si je participe à un concours (par exemple de danse acrobatique – tout est permis !), je serai en *concurrence* avec d'autres *concurrents* – mots qui dérivent aussi du latin *concursus*.

• Le néologisme « concourance », quand il n'est pas l'effet d'une simple gourance, résulte, semble-t-il, de l'incapacité d'un nombre croissant de personnes à entendre le mot de *concours* dans certains de ses usages – dans « concours de droites » par exemple, sans parler de l'archaïque « Il y eut un grand concours de peuple ! »… Un jour viendra peut-être où l'on parlera sans vergogne de la « semblabilité » de triangles semblables – dont, jusqu'à présent, on se plaît à mentionner la *similitude*. En attendant, il est vrai qu'il existe désormais, sur Internet, des sites mathématiques où – *horribile dictu !* – le barbare « concourance » entre en… concurrence avec le gentil « concours » – deux droites concourent en un point P, c'est là leur point de concours, etc.

c) Revenons à la question posée.

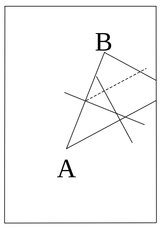
• On note d'abord qu'il s'agit là d'un fragment d'auto-compte rendu d'une séance réalisée lors du SPA : ce qu'on dira ci-après se fonde sur ce qui est exprimé dans la question, et sur cela seulement. Il est clair pourtant qu'un compte rendu « standard » – du type de ceux des deux séances en 5e étudiées jusqu'ici – permettrait peut-être d'éclairer davantage l'interrogation formulée. D'une façon générale, et pour répondre à la première des deux questions « tests », un compte rendu d'observation n'est pas une réalité prédéterminée : elle dépend des besoins de l'analyse, de l'évaluation et du développement – en sorte qu'on peut, lorsque c'est utile *et possible*, retoucher un compte rendu d'observation pour y intégrer des éléments d'information écartés de la version disponible jusque-là.

• Ce qui a été proposé était-il « une véritable AER » ? Pour les raisons qu'on vient de rappeler, on peut dire certaines choses, mais on ne peut sans doute pas répondre de façon univoque à la question ainsi soulevée. Ce qui est certain, c'est que l'on y considérait un ***problème*** tout à fait susceptible d'être ***l'enjeu et le point de départ*** d'une AER, à savoir le problème de tracer, sur la feuille évoquée par l'énoncé, la partie visible de la médiatrice du côté [BC] d'un triangle ABC parfaitement déterminé, mais dont l'extrémité C est « inaccessible ».

• Si cette extrémité était accessible, la tâche à accomplir serait ***routinière***, puisqu'elle pourrait s'effectuer par la technique classique consistant à déterminer au compas deux points équidistants de B et de C. Du fait que C est hors de la feuille, cette tâche devient ***problématique*** : la technique classique est, apparemment, « bloquée » : de là le ***problème*** – qui pourrait engendrer une AER « véritable »…

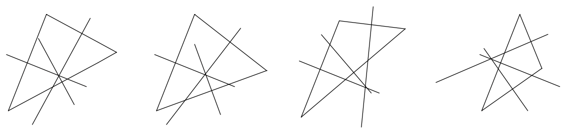
• Pour qu'il y ait AER, il est nécessaire que la classe reconnaisse l'existence d'un problème, fasse sien ce problème – c'est la ***dévolution*** du problème – et, enfin, s'engage dans son étude – même si cette étude ne devait pas aboutir complètement.

• L'amorce de l'engagement didactique recherché est certainement la question cruciale que voici : « Comment déterminer la médiatrice d'un segment [BC] ? » Une réponse a été évoquée : par la connaissance de deux points de cette droite. Cette réponse écartée une autre réponse peut être avancée : la médiatrice, comme toute droite, est déterminée par un point et une direction. Ici, on connaît la direction –perpendiculaire à (BC). Il suffit donc de connaître ***un*** point de ladite médiatrice. Quel point tenter de déterminer ? Une réponse est classique : le milieu de [BC]. Mais comment déterminer le milieu d'un segment dont une extrémité est inaccessible ?



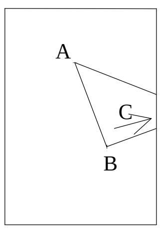
• Il n'est nullement impossible que surgisse des profondeurs de la classe l'idée que le milieu de [BC] pourrait bien s'obtenir comme le montre la figure ci-contre. Il n'y a pas de raison de rejeter cette idée, qui pourra être validée par une simulation d’expérience graphique à l’aide d’un logiciel de géométrie. Son étude complète, toutefois, sera rejetée, pour une raison que le professeur portera à la connaissance de la classe : il s’agit là d’une propriété, ou du moins d’un théorème, dont l’étude est réservée à la classe de 4^{e}.

• On se retrouve alors avec la question cruciale « Quel point “remarquable” d’une médiatrice (autre que le milieu du segment dont elle est la médiatrice) peut-on construire ? » On est là en principe devant l’inconnu. La technique classique – elle date des mathématiciens grecs antiques – dans un tel cas est celle dite de l’analyse-synthèse : selon la formule consacrée, l’***analyse*** consiste à « supposer le problème résolu », c’est-à-dire ici à étudier la figure obtenue quand on y place la troisième médiatrice. Dans les conditions prévalant aujourd’hui en matière de ressources d’étude, on procèdera ici à une simulation qui permette de voir rapidement ce fait crucial : la troisième médiatrice passerait par le point de concours (eh oui) des deux autres.



• Il n’est pas question encore de tenter de faire de ce « fait spatial » un théorème de la TGD : on ne s’y risquera que s’il s’agit bien là d’un fait spatial qui ***permet de résoudre le problème proposé***. Ici, c’est bien le cas : il suffit de tracer la perpendiculaire à (BC) passant par le point de concours des deux médiatrices données pour obtenir le tracé demandé. Dès lors, la résolution mathématique complète du problème étudié supposera qu’il soit établi que son « ingrédient technologique clé » est bien déductible dans la TGD : les trois médiatrices d’un triangle concourent.

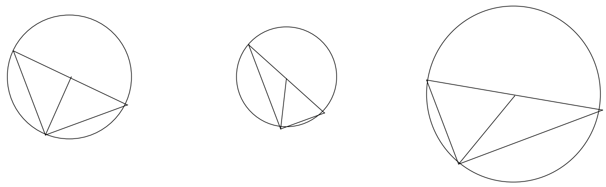
d) La question suivante ressemble à la précédente.

> Je souhaitais présenter l’AER constituée de l’exercice ci-dessous pour l’étude du thème « Triangle rectangle et cercle », afin de faire émerger la propriété : « Si un triangle est rectangle, alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l’hypoténuse. »
>
> Sans effectuer de tracé en dehors du cadre, construire avec une règle et un compas le milieu du segment [AC] (l’angle $\widehat{ABC}$ est droit).
>
> 
>
>
> Cependant, j’ai du mal à constituer la séance. Quelles sont les questions cruciales ? Serait-il judicieux d’ajouter une partie du cercle circonscrit au triangle ABC ? (KE, MJ, 4^{e}, 9)

• Le « fait spatial » qu’il s’agit ici de faire surgir comme clé de la résolution d’un certain problème graphique est donc celui-ci : « Si un triangle est rectangle, alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l’hypoténuse. » De quel problème s’agit-il ? Le choix proposé dans la question paraît erroné : « construire le milieu du segment [AC] ». Il y a ici une inversion à pratiquer : le problème à poser est le problème de tracer la partie du cercle circonscrit visible sur la feuille – c’est en tentant de le faire que l’on tombera sur le problème de construire le milieu de [AC].

• Comment en effet déterminer un cercle ? Une réponse possible est celle-ci : si l’on connaît trois points du cercle, on prend l’intersection de deux médiatrices, qui fournit le centre, etc. Cette réponse étant ici bloquée, on peut revenir à la réponse plus essentielle : en déterminant son centre et un de ses points. Ici, il s’agirait donc de déterminer le centre – sans l’obtenir comme point de concours de médiatrices !

• C’est là que, selon le précepte de l’analyse-synthèse consistant à « supposer le problème résolu », on est amené à étudier la figure formée par un triangle rectangle et son cercle circonscrit, pour tenter de mettre en évidence un fait spatial crucial. On obtient ceci.



➔ L’expérimentation réalisée conduit à conjecturer que le centre du cercle circonscrit se trouve au milieu de l’hypoténuse. Mais cela permet-il de conclure ?

➔ Si l’on suppose que la classe de 4^{e} concernée dispose du premier théorème des milieux, l’affaire est faite, du moins si le milieu de [AC] est sur la feuille ! S’il n’en est pas ainsi, le problème proposé conduira donc à rencontrer – dans une situation où elle apparaît « fonctionnelle » – la propriété de l’espace qu’énonce ce théorème…

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 12 : mardi 12 décembre 2006

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques // 2. Forum des questions

0. Questions de la semaine

Journée 12 (12 décembre 2006)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4e (et soutien en 5e)

Comment se déroule un conseil de discipline ? Il s'agit d'un élève de ma classe auquel je n'ai rien à reprocher sur son comportement en cours de mathématiques – il est attentif et il travaille.

1. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques

1.1. *Le temps de l'étude*, encore !

a) Plusieurs questions de la semaine conduisent à revenir brièvement sur des problèmes évoqués dans la notice *Le temps de l'étude*. On examine d'abord les deux questions ci-après.

1. Lors du passage d'un grand thème à un autre, certains élèves ont émis le souhait de rester sur le premier thème (géométrie) alors que d'autres préféraient passer au second (numérique). Il semble donc que l'alternance des thèmes dans la même séance ne convienne pas à tous les élèves. Comment leur rendre cette transition plus naturelle ? (RH, MJ, 4e, 10)

2. Quand on mène deux thèmes de front, peut-on passer de l'un à l'autre dans une même séance, ou est-ce trop perturbant pour les élèves ? Un contrôle peut-il porter sur les deux thèmes ? (OB, OS, 5e, 11)

3. Parfois une séance d'AER s'avère trop longue et la partie « leçon » reste pour la prochaine séance. Devrait-on calibrer les AER pour pouvoir noter la partie du cours correspondante dans la même séance ? Et y inclure des exercices éventuellement ? Il semblerait que les élèves « préfèrent » alterner activité, leçon, exercices, plutôt que de consacrer plus de temps à une activité un peu complexe (par exemple une démonstration) ou une partie délicate de la leçon… (MD, CR, 4e & demi-5e, 11)

• Le fait d'adopter ce qu'on peut appeler une ***programmation géminée*** (« géminer » vient du latin *geminare* « doubler », « mettre deux choses ensemble » : ce verbe est dérivé de *geminus* « jumeau », « double ») répond en effet à une préconisation de la formation que l'on trouve notamment dans la notice *Le temps de l'étude* dans le passage suivant.

2.7. Les opérations précédentes ne donnent pas encore une programmation annuelle : il reste à mettre en bijection les « blocs » et les unités de temps, c'est-à-dire à élaborer un ***calendrier de l'étude***. Pour cela, on doit décider si l'on procède par enseignement d'un bloc après l'autre, ou – ce qu'on peut recommander – si l'on opte pour l'étude en parallèle de ***deux blocs*** appartenant à deux secteurs différents (voire à deux domaines différents), avec toutefois un ***décalage*** temporel entre les deux (en gros, il convient d'avoir dépassé les principales difficultés du premier pour lancer l'étude du second).

• Les deux premières questions examinées font état de difficultés apparues dans le cadre d'une telle gémination du calendrier de l'étude : à chaque instant ou presque, la classe évoquée a deux fers au feu, parce qu'on y a mis deux thèmes d'études « au travail ». Les difficultés signalées sont alors le symptôme de ce fait indépassable que « l'art » ***vital*** de programmer l'étude (tout au long d'une séquence intervacances, d'une semaine, ou d'une seule séance) est un art ***délicat***, sur lequel on ne fera ci-après que quelques remarques simples.

➔ L'un des intérêts essentiels d'une programmation géminée, où, à chaque instant, l'étude d'un thème ***majeur*** se combine avec celle d'un thème ***mineur***, est d'offrir à la classe la possibilité de passer d'un paysage de travail à un autre, d'une montée thématique exigeante sur un chemin escarpé, menant à un col qui n'est pas encore en vue, à la descente vers la vallée, quand les sensations s'allègent, ou simplement au tranquille cheminement sur un plateau d'où la vallée par instants se découvre… Ou, à l'inverse, de faire succéder à un cheminement nécessaire mais un peu terne l'excitation d'une entreprise moins certaine. C'est évidemment sur ce « clavier » que le professeur doit apprendre à jouer – en assumant de frapper parfois une fausse note.

➔ Le passage d'une scène d'étude à une autre peut se réaliser, au cours d'une semaine, sur des séances distinctes, voire sur des jours distincts de la semaine – par forcément en « spécialisant » de façon figée les séances ou les jours, mais en informant la classe, au fur et à mesure, des thèmes dont l'étude sera amorcée ou poursuivie dans la ou les séances à venir. Cela noté, la gémination thématique ***au sein d'une même séance*** reste le moyen d'une exploitation didactique fine des possibilités offertes par un double « cours d'étude » – en même temps qu'elle est le lieu où, en effet, les difficultés deviennent le plus visible.

➔ L'idéal dans cette gestion fine de l'étude serait de parvenir à ne passer du thème majeur (en ascension) au thème mineur (en descente) qu'en ces moments où le groupe-classe ressentira ce changement comme bienvenu, parce que semblable à une récréation qui permet à l'ankylose qui gagne de se dissiper : il y a ainsi tout un art de la ***scansion didactique*** à construire et à maîtriser. Par contraste, la rupture imposée brutalement à une activité stabilisée localement au plan de l'action comme au plan psychologique se heurte généralement à une attitude de persévération praxéologique qui tend à conserver la dynamique cognitive et relationnelle installée : on semble ne pas vouloir sortir du tunnel d'action dans lequel on était pris, et on n'en sortira qu'avec retard.

➔ Pour diminuer cet « effet de gel », sans doute convient-il de diminuer l'immotivation, pour l'élève, de changements apparemment imposés par le seul bon vouloir du professeur… Cela exige d'aider l'élève à passer du défilé de sujets d'étude qui se succèdent sans se chevaucher à une ***économie didactique*** plus complexe, à la gestion de laquelle le professeur associe la classe, l'effort demandé visant à lui permettre d'accéder aux niveaux, non seulement des ***thèmes*** d'études – qui constituent son horizon habituel –, mais aussi des ***secteurs*** et des ***domaines*** dont ils relèvent. En d'autres termes, la programmation élaborée par le professeur doit être adéquatement ***justifiée*** pour les élèves, ce qui rejoint une autre préconisation explicitée dans la notice *Le temps de l'étude*, et que l'on reproduit ici.

Dans tous les cas, le programme doit jouir d'une ***forte publicité au sein de la classe***, par affichage lorsque c'est possible, et, dans tous les cas, par diffusion aux élèves d'une version adaptée servant de support à ***un repérage collectif régulier*** de l'avancée de l'étude, repérage permettant à la classe de situer le ***travail accompli*** et ***celui qui reste à accomplir***, et contribuant par là à relancer dans la classe le pacte d'instruction.

• La troisième question ci-dessus pose autrement le même problème – au niveau intrathématique et non plus au plan interthématique. La réponse est en essence la même, et elle est donc double :

– les scansions imprimées au travail de la classe, les renvois, les reprises, les relances, etc., doivent se modeler sur la « respiration » de la classe telle que le professeur s'efforce de la percevoir ;

– l'économie didactique qui détermine ces scansions (et que celles-ci sont censées servir) doit être suffisamment explicitée pour que les changements imprimés ne soient pas seulement subis, mais « agis » par la classe elle-même.

b) On considère pour terminer – provisoirement – la question que voici.

Peut-on faire un « petit » chapitre au milieu d'un « grand » pour faire une pause ? Par exemple, faire un bout du chapitre sur les fonctions, puis sur la statistique, puis revenir sur les fonctions ? (MG1, CR, 2de, 11)

La notice *Le temps de l'étude* apporte à ce propos des indications – reproduites ci-après – que l'on pourra méditer.

Bien entendu, il est possible de couper en deux sous-blocs un bloc ***trop substantiel***, pour l'étudier en deux ***périodes séparées de quelques semaines***, ce qui exige une gestion soignée des traces écrites. Il en va ainsi notamment lorsque les relations de ***dépendance mathématique*** entre les divers éléments que le choix d'une progression déterminée fait se succéder font que, lors de l'étude d'un thème θ, certains outils mathématiques nécessaires à un traitement « complet » du thème ne soient pas encore disponibles : lors de l'étude du thème θ' qui mettra en place ces outils, on reviendra donc sur les types de problèmes associés à θ que l'on avait provisoirement laissés de côté. Plus généralement, il conviendra d'intégrer dans le travail de programmation de l'étude le traitement des relations ***interthématiques***, voire ***intersectorielles***, que la structure explicite du programme tendrait à occulter.

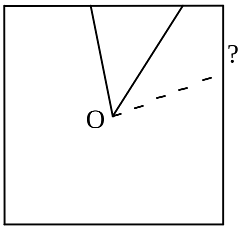
1.2. Une nouvelle notice : *Questions & réponses*

a) Une nouvelle notice a été diffusée : ***Questions & réponses***. On en examine ci-après les deux premières sections.

1. Activités humaines et questionnements

1.1. L'activité d'une personne ou d'un groupe de personnes les conduit presque inévitablement à s'interroger sur les objets, les conditions et les contraintes de leur activité, dès lors notamment que ces objets, conditions ou contraintes semblent ***faire obstacle à l'activité envisagée***.

1.2. D'une manière plus formelle, on peut dire que c'est dans le cadre d'une certaine tâche ✓ (tâche « coche ») qu'elle doit accomplir à l'intérieur d'une certaine institution I qu'une personne x va rencontrer certaines difficultés qui la conduiront à soulever – en général au sein d'un collectif *X* – une ou plusieurs ***questions*** *Q*. Pour ne prendre qu'un exemple très simple, imaginons que, lors d'un goûter d'enfants (✓), l'un (*x*) des adultes responsables (*X*) veuille découper un gâteau « carré » en parts d'égal volume (tâche *t*), alors même qu'il a déjà découpé une part (voir la figure).



La question Q qui s'impose est ici : comment déterminer un découpage adéquat ?

1.3. Derrière la question soulevée, une ***tâche d'étude et de recherche*** se profile : celle consistant à apporter une ***réponse*** R à la question Q posée. Étymologiquement, question renvoie tout à la fois à une demande de renseignement et à la tâche consistant à rechercher ce renseignement, à la ***quête*** de l'information demandée. Ce double sens solidaire, que l'on gardera présent à l'esprit, ainsi que le caractère ***social*** de toute « question » – une question se partage en général avec d'autres –, sont inscrits dans l'histoire du mot, comme l'indique le *Dictionnaire historique de la langue française* dans le passage suivant :

QUESTION n.f. est emprunté (v. 1119) au latin *quaestio* [...]. Le mot, qui désigne la recherche en général, s'est spécialisé en droit au sens d'« enquête », « interrogatoire », plus spécialement « enquête avec torture », et dans la langue philosophique « interrogation », discussion. [...]. Le mot, sans reprendre le sens général du latin, réservé en français à *quête* et à *recherche*, a été emprunté pour désigner une demande faite en vue d'une information, d'un éclaircissement. Avant la fin du XII[e] s., *question* désigne un point qui prête à discussion, soulève un débat théorique ou pratique (v. 1190).

Une question, c'est ainsi (en français) une demande d'information, d'éclaircissement, mais c'est aussi (en latin) l'action entreprise – l'enquête, la recherche, la « quête » – en vue d'apporter une réponse R à la question Q posée.

b) On examine maintenant la deuxième section de la notice.

2. Création de connaissances et déni de problématicité

2.1. La ***situation du monde*** évoquée ci-dessus – le gâteau à découper – relève d'un type de situations qu'on notera de manière générique $\boldsymbol{s} = \{ \sigma ; ✓ ; x, x', x'', ... \}$ et dans lesquelles un collectif de personnes, x, x', x'', etc., doit réaliser une tâche ✓ à propos d'un système σ : en l'espèce, σ est un groupe d'enfants et ✓ consiste à organiser et à gérer un goûter pour ces enfants. Ce que l'on pourra énoncer ainsi :

***Tâche* ✓$_0$.** Trois parents d'élèves x, x', x'' ont organisé un goûter pour des enfants.

À cet exemple initial, ajoutons quatre nouveaux exemples, qui fourniront un petit matériel à l'analyse à conduire :

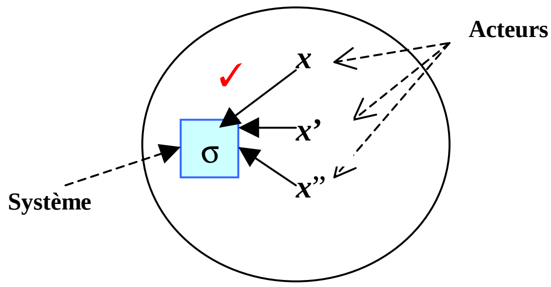
***Tâche* ✓$_1$.** Un paysan, x, doit expédier un lot de 250 œufs dans des boîtes pouvant contenir chacune 6 œufs.

***Tâche* ✓$_2$.** Trois vacanciers, x, x', x'', doivent se partager la somme de 172 € qui, à l'issue de leurs vacances, reste dans la caisse commune créée pour faire face aux frais quotidiens collectifs et dans laquelle ils ont versé en tout, respectivement, 380 €, 420 €, 440 €.

***Tâche* ✓$_3$.** L'intendant d'un lycée, x, doit fabriquer une jauge pour la cuve à mazout de l'établissement, laquelle est une cuve cylindrique de 3 m de long et de 1,20 m de diamètre, reposant sur sa longueur, et comportant une ouverture sur sa partie supérieure.

***Tâche* ✓$_4$.** Un étudiant en mathématiques, x, doit rédiger un mémoire sur la découverte des quaternions par William Rowan Hamilton (1805-1865).

Dans chaque cas, la situation du monde peut être schématisée comme ci-après.



2.2. Il se peut bien sûr que la tâche ✓ soit, pour les acteurs de la situation *s*, une tâche ***routinière***, qui « ne leur pose pas de problème ». Mais il se peut aussi que, dans l'accomplissement de ✓, surgisse une sous-tâche *t* ***problématique pour eux***, ainsi qu'on l'a imaginé dans le cas du gâteau et comme on peut l'envisager pour les tâches prises pour exemples ci-dessus :

Tâche t_0. L'un des parents, *x*, a coupé une portion d'un gâteau carré et se demande comment découper encore quatre portions d'égal volume.

Tâche t_1. Le paysan *x* se demande combien de boîtes il doit se procurer.

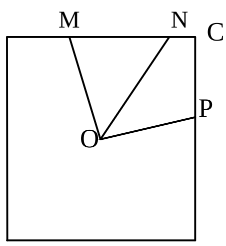
Tâche t_2. Les vacanciers *x*, *x*', *x*" se demandent comment ils doivent se partager la somme restante de façon que chacun d'eux ait contribué également aux frais collectifs.

Tâche t_3. L'intendant *x* se demande comment il doit graduer la baguette pour obtenir, par simple lecture, le volume de mazout contenu dans la cuve.

Tâche t_4. Ayant trouvé dans sa documentation l'indication, donnée par Hamilton lui-même, que cette découverte eut lieu très précisément le 16 octobre 1843 – après plus de quinze années de recherches infructueuses –, l'étudiant *x* se demande quel jour de la semaine tombait le 16 octobre 1843.

2.3. Une telle situation de problématicité est une ***condition nécessaire de création de connaissances*** – de ces connaissances, exactement, qui permettront d'accomplir la tâche problématique *t* (et, du même coup, quelques-unes des tâches, *t*', *t*", etc., du même ***type*** que *t*). Dans le cas du gâteau carré à découper de manière équitable (t_0), on découvrira ainsi le petit théorème de géométrie suivant :

θ_0. Pour que deux parts de gâteaux, telles MON et NOP sur le schéma ci-contre, aient même surface (et donc même volume), il faut et il suffit qu'elles aient des bords extérieurs ***de même longueur***, soit ici que l'on ait MN = NC + CP.



Si *a* est la longueur du côté du carré et si le bord extérieur de la portion a pour longueur ℓ, l'aire de la portion sera en effet égale à $\frac{1}{4}a \times \ell$, que le bord du morceau de gâteau ***comporte ou non un coin***.

2.4. Par contraste, le fait que ce résultat – mathématiquement trivial – de géométrie élémentaire soit de fait fort peu diffusé dans la culture mathématique courante – le lecteur de ces lignes le connaissait-il ? – suggère que, socialement, on tend à gérer au jugé l'élément de problématicité envisagé ici : pour découper le gâteau, l'adulte *x* décidera vraisemblablement de procéder par à-peu-près, en utilisant ensuite son autorité d'adulte pour imposer sa manière de faire à des enfants qui pourraient en contester la justesse et, du même coup, en mettre en cause la relative injustice ! D'une manière très générale, la plupart des situations de problématicité font ainsi l'objet d'un ***déni***. Plus exactement, il semble fréquent que, après avoir, dans un premier temps, reconnu fugitivement une certaine problématicité à telle tâche *t* rencontrée dans une situation du monde donnée, les acteurs de la situation en viennent, dans un deuxième temps, à ***nier*** cette problématicité entraperçue, en renonçant à accomplir *t*, ou, plus souvent peut-être, en l'accomplissant « à peu près ». C'est ainsi que, dans les autres situations précédemment invoquées, l'attitude des acteurs pourra être la suivante.

✂t_1. Le paysan décide de se procurer une quantité de boîtes estimée au jugé supérieure à celle strictement nécessaire, avec l'idée de conserver les boîtes non utilisées en vue d'un usage ultérieur.

✂t_2. Les vacanciers décident, dans un flou généreux et opportun (« Mais non ! Toi tu as payé la pizza l'autre jour, et ça on l'a pas compté... »), que telle répartition, déterminée « à l'intuition », est *grosso modo* acceptable, et s'en tenir là.

✂t_3. L'intendant décide, faute de mieux, de construire une graduation proportionnelle à la hauteur du mazout dans la cuve, et, après quelques déboires (la jauge ainsi graduée surévalue la quantité de mazout lorsque celle-ci est presque épuisée, par exemple), se contente de minorer (ou de majorer), au jugé, le volume résultant de ses « mesures ».

✂t_4. L'étudiant décide que l'indication qu'il recherchait (le jour de la semaine où tombait le 16 octobre 1843) est un détail inutile, ridicule, qui n'apporte rien, etc.

Dans de tels cas, sans doute nombreux, il n'y a pas même ***problématisation*** de la situation, dont la problématicité potentielle n'est pas reconnue. À plus forte raison, la situation ne saurait être, en ce cas, à l'origine de la création de ***connaissances nouvelles*** pour les acteurs de la situation.

2. Forum des questions

2.1. Statistique

a) On partira de la question que voici.

Pour résumer une série statistique, je compte choisir 1) les diagrammes en barres pour des séries qualitatives ; 2) les diagrammes en bâtons pour des séries quantitatives discrètes ; 3) les histogrammes pour des séries quantitatives continues. Je ne compte pas utiliser les diagrammes circulaires, que les élèves ont déjà utilisés au collège. Devrais-je le faire ? Le cas échéant, pour résumer quel type de séries statistiques ? (PP, MJ, 2de, 11)

• Les rédacteurs du programme de 2de ont pris soin de faire figurer une présentation abrégée des programmes de statistique des classes précédentes : on la reproduit ci-après.

SIXIÈME

Exemples conduisant à lire et établir des relevés statistiques sous forme de tableaux ou de représentations graphiques, éventuellement en utilisant un ordinateur.

CINQUIÈME

Lecture, interprétation, représentations graphiques de séries statistiques.
Diagrammes à barres, diagrammes circulaires.
Classes, effectifs.
Fréquences.

QUATRIÈME

Effectifs cumulés, fréquences cumulées.
Moyennes pondérées.
Initiation à l'usage des tableurs-grapheurs.
Valeur approchée de la moyenne d'une série statistique regroupée en classes d'intervalles.

TROISIÈME

Caractéristiques de position d'une série statistique.
Approche de caractéristiques de dispersion d'une série statistique.
Initiation à l'utilisation des tableurs-grapheurs en statistique.

• Le document d'accompagnement rappelle d'un mot ce que montre le synopsis précédent.

Au collège, les élèves se sont familiarisés avec les phénomènes variables et ont appris des éléments du langage graphique (représentations diverses, « camemberts », diagrammes en bâtons) qui permettent de visualiser un série de données expérimentales…

• En revanche, le même texte est très discret à propos du travail sur ce « langage graphique » appris au collège, qu'on se gardera donc de retravailler de façon systématique et formelle, et qu'on « entretiendra » simplement à l'occasion de l'emploi ***fonctionnellement justifié*** de certains éléments de ce langage. C'est là l'esprit de ce que le document d'accompagnement précise, non pas même à propos des aspects ***graphiques*** éventuels du travail statistique, mais à propos de ses aspects ***numériques***.

La statistique donne lieu à de nombreuses activités numériques et favorise la maîtrise du calcul ; cependant, de tels calculs ne doivent être demandés que dans la mesure où ils permettent aux élèves de mieux comprendre la spécificité de la série statistique en jeu.

• Les diagrammes circulaires (« camemberts ») ne doivent donc, *a priori*, pas être davantage exclus ou cultivés que les diagrammes en bâtons et autres histogrammes. Mais il y a plus, et qui exige la reprise de certaines notions cardinales de statistique.

b) En statistique univariée, on part d'une question Q, que l'on précise en définissant un caractère X sur une population Ω à propos duquel on étudiera la question Q. On s'attarde ici sur la « nature » de X.

• Il arrive que les « valeurs » prises par X soient des « qualités », comme le fait, pour un individu dans la population des élèves d'une classe, d'être un garçon ou une fille ; ou, pour un étudiant de 1[re] année de sociologie, d'avoir un bac littéraire, ou économique et social, ou scientifique, ou technologique, ou « autre » (y compris une « équivalence ») – on aurait ici un caractère à cinq « modalités ». Un tel caractère est dit souvent ***qualitatif*** ou ***catégorique*** (parce qu'il désigne la catégorie à laquelle appartient l'individu ω d'un certain point de vue).

➔ Dans un tel cas, on peut toujours « étiqueter » les modalités du caractère par des nombres, transformant ainsi X en une application de Ω dans $\Re \subset \mathbb{R}$. Mais les valeurs numériques attribuées ne sont alors que des ***numéros***. On posera par exemple que, si $\omega \in \Omega$ est un garçon, alors $X(\omega) = 1$, tandis que si ω est une fille, alors $X(\omega) = 2$. Mais on aurait pu prendre aussi bien pour « numéros » 0 et 1, etc.

➔ On regarde parfois X comme « mesurant » une certaine « grandeur » attachée aux individus $\omega \in \Omega$. Mais si X est une « mesure » de cette espèce de grandeur (sur Ω), dans le cas d'une variable catégorique, $X^* = f\circ X$ en est une autre, dès lors simplement que f est une ***bijection*** de $\Re$, puisque f se contente d'assigner d'autres étiquettes, d'autres « noms » (numériques) aux catégories en question. On dit en conséquence que X prend ses valeurs sur une ***échelle nominale***, à savoir $\Re$ muni de son groupe de bijections.

➔ Un indicateur statistique, $\varphi(X)$, doit alors vérifier : $\varphi(f\circ X) = f(\varphi(X))$, pour toute bijection f de $\Re$. Prenons par exemple $\varphi(X) = \overline{X}$; si une classe Ω comporte 14 garçons et 18 filles, par exemple, et si l'on assigne le numéro (ou le « nom ») 1 aux garçons et 2 aux filles, on aura

$$\overline{X} = \frac{14 + 2 \times 18}{32} = 1{,}5625.$$

Si, en revanche, prenant $f(x) = x - 1$ si x est entier et $f(x) = x$ sinon, on assigne le numéro 0 aux garçons et 1 aux filles, on aura

$$\overline{f\circ X} = \frac{18}{32} = 0{,}5625 \neq f(1{,}5625).$$

La moyenne n'est donc pas, ici, un indicateur de tendance centrale « permis ».

➔ L'indicateur de tendance centrale usuellement considéré est, dans ce cas, le ***mode***. Il est facile de voir que l'on a bien, en ce cas, la relation de compatibilité $\varphi(f\circ X) = f(\varphi(X))$. Dans l'exemple examiné, on a ainsi $\varphi(X) = 2$ et $\varphi(f\circ X) = 1 = f(2)$.

➔ Plusieurs indicateurs de dispersion peuvent être envisagés au niveau nominal (« qualitatif »). Le ***rapport de variation***, qui correspond à la probabilité qu'une valeur observée prise au hasard parmi les N n'appartienne pas à la classe modale, est donné par

$$\delta = 1 - \frac{n^*}{N}$$

où $N = \sum n_i$ est l'***effectif total*** et $n^* = \max(n_i)$ est l'effectif de la ***classe modale*** : pour k modalités ($1 \leq i \leq k$), lorsque n^* varie de 1 (dispersion maximale) à N (dispersion minimale), δ décroît de $\frac{N-1}{N}$ à 0. L'***indice de diversité***, qui correspond à la probabilité que deux valeurs observées prises au hasard parmi les N ne relèvent pas de la même modalité x_i, vaut

$$\delta = 1 - \sum \left(\frac{n_i}{N}\right)^2.$$

Il décroît jusqu'à 0 à partir d'un maximum $\leq \frac{k-1}{k}$. Dans l'exemple considéré plus haut, le rapport de variation vaut $1 - \frac{18}{32} = 0{,}4375$, tandis que l'indice de diversité est égal à $1 - \frac{14^2 + 18^2}{32^2} = 0{,}4921875$.

• On distingue ordinairement quatre « niveaux de mesure » (dont le dernier est celui des « grandeurs mesurables » au sens usuel du terme : masse, longueur, etc.). Au-dessus du premier niveau, celui des échelles nominales, se trouve le niveau des échelles ***ordinales***. Ici, on suppose que cela a un sens de dire que $X(\omega) < X(\omega')$, où $\omega, \omega' \in \Omega$. En d'autres termes, l'***ordre*** de $\mathfrak{R}$ prend un sens vis-à-vis du caractère X considéré.

➔ Un indicateur statistique, $\varphi(X)$, doit alors vérifier : $\varphi(f\circ X) = f(\varphi(X))$, pour toute fonction f ***strictement monotone*** de $\mathfrak{R}$ dans $\mathfrak{R}$, c'est-à-dire pour toute f appartenant à ce qu'on appelle parfois le groupe ***isotone*** de $\mathfrak{R}$.

➔ À nouveau, la ***moyenne n'est pas*** un indicateur de tendance centrale ***permis***. Supposons que l'on attribue à des élèves un des « niveaux » de résultats scolaires suivants :

$$\text{faible} \prec \text{médiocre} \prec \text{moyen} \prec \text{bon} \prec \text{excellent}.$$

On peut par exemple « étiqueter » ces modalités en leur assignant respectivement les nombres 1, 2, 3, 4, 5, dans cet ordre. Dans une classe Ω, on a observé les résultats suivants :

Niveau de résultats (X)	Effectif
1	4
2	7
3	12
4	8
5	1

On a : $\overline{X} = \dfrac{1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 12 + 4 \times 8 + 5 \times 1}{32}$ = 2,84375. Prenons pour f une fonction affine par morceaux, strictement croissante, compatible avec le ré-étiquetage correspondant au tableau suivant.

Niveau de résultats ($f \circ X$)	Effectif
1	4
2	7
5	12
9	8
10	1

Cette fois, il vient : $\overline{f \circ X} = \dfrac{1 \times 4 + 2 \times 7 + 5 \times 12 + 9 \times 8 + 10 \times 1}{32}$ = 5. Or on a : $f(2{,}84375) = 2 + 3 \times 0{,}84375 = 4{,}53125 \neq 5$.

➔ En revanche, la ***médiane*** (définie comme la première valeur telle qu'au moins 50 % des valeurs observées lui soit inférieures ou égales) est, ***dès le niveau ordinal***, un indicateur ***permis***. Examinons ainsi les fréquences cumulées correspondant aux deux tableaux précédents.

Niveau de résultats (X)	Effectifs cumulés	Fréquences cumulées
1	4	12,5 %
2	11	34,375 %
3	23	71,875 %
4	31	96,875 %
5	32	100 %

Niveau de résultats ($f \circ X$)	Effectifs cumulés	Fréquences cumulées
1	4	12,5 %
2	11	34,375 %
5	23	71,875 %
9	31	96,875 %
10	32	100 %

La plus petite valeur de X qui soit supérieure ou égale à 50 % au moins des valeurs observées est 3 ; la plus petite valeur de $f \circ X$ qui soit supérieure ou égale à 50 % au moins des valeurs observées est 5. Et on a bien $f(3) = 5$.

➔ Les indicateurs de dispersion sont, à ce niveau, les mêmes qu'au niveau nominal. Notons que, si les ***quartiles*** (et en général les quantiles) sont bien définis au niveau ordinal, ***l'écart interquartile***, c'est-à-dire la différence entre le troisième et le premier quartiles, ***ne l'est pas***.

• Le troisième niveau est celui des échelles dites ***d'intervalles***. Dans un tel cas, on suppose que le caractère étudié est défini à une transformation ***affine strictement croissante*** près : si X est un tel caractère, $X^* = f \circ X$ en est un autre, f étant de la forme $f(x) = ax + b$, avec $a > 0$.

➔ Le cas emblématique est celui de la température d'un corps : on connaît les échelles de température que sont les échelles Fahrenheit et Celsius, qui s'échangent par les relations affines $t_F = 1{,}8\ t_C + 32$ et $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$. D'une façon générale, si l'on écrit $f(x) = a(x - c)$, le choix de c correspond au choix du ***zéro*** sur l'échelle, tandis que a correspond à l'***unité*** choisie. L'usage en France est de parler, à propos de ce que « mesure » X, d'une espèce de grandeur « repérable » mais non « mesurable ». On va voir que, ***du point de vue de la statistique***, il n'y a guère de raison de faire une distinction tranchée entre ces deux types de grandeurs et les grandeurs au sens usuel du terme – les grandeurs « mesurables ».

➔ Supposons quatre valeurs x_1, x_2, x_1', $x_2' \in \Re$ telles que $x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$. Soit f une fonction affine strictement croissante ; posons $f(x) = ax + b$. On a alors :

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) = a(x_2' - x_1') = f(x_2') - f(x_1').$$

On voit ainsi que les « intervalles » sont variables (leur longueur est multipliée par a) mais ***l'égalité*** des longueurs des intervalles est un invariant : de là découle la dénomination d'échelle ***d'intervalles***.

➔ L'indicateur de tendance centrale est ici la ***médiane***, à laquelle vient s'ajouter la ***moyenne*** (l'indicateur de dispersion associé étant l'***écart type***) : médiane et moyenne vérifient en effet l'égalité $\varphi(f \circ X) = f(\varphi(X))$, pour toute fonction affine strictement croissante f.

➔ La propriété notée $\varphi(f \circ X) = f(\varphi(X))$ s'écrit en l'espèce $\varphi(aX + b) = a\varphi(X) + b$. Elle est appelée, traditionnellement, ***« propriété de linéarité »***. On ne s'en étonnera pas. L'expression « fonction ***linéaire*** » a été longtemps utilisée, en français, pour désigner toute fonction de la forme $x \mapsto ax + b$ et donc pour désigner ce que nous nommons, lorsque $b \neq 0$, une fonction ***affine***. Les auteurs d'un manuel de 3^e publié en 1940 écrivaient ainsi ce qui suit.

> **63. Théorème. –** ***La fonction y = ax + b est représentée graphiquement par une droite parallèle à la droite y = ax et coupant l'axe* Oy *au point d'ordonnée b.***
>
> C'est pourquoi la fonction $y = ax + b$ est aussi appelée *fonction linéaire*.

L'emploi de l'adjectif *linéaire* pour « affine » reste usuel en anglais : on dira par exemple qu'une température T_E *« depends linearly on the ambient temperature* T_A *»*. Il existe en outre un vestige de cette pratique dans le passage suivant du programme de 2^de, où « non-linéarité » signifie « non-affinité » :

> Exemples de non-linéarité. En particulier, on fera remarquer que les fonctions carré, inverse, … ne sont pas linéaires.

Dans le cas de la « linéarité de la moyenne », l'usage du mot « linéarité » relève de cette tradition lexicale ancienne. Mais il serait maladroit de le remplacer par « affinité » ! Lorsque, en effet, une série statistique s'écrit sous la forme $(\lambda x_i + \mu)_i$, on peut poser $y_i = 1$ pour tout i ; comme, alors, on a $\overline{(y_i)_i} = 1$, il vient : $\overline{(\lambda x_i + \mu)_i} = \overline{(\lambda x_i + \mu y_i)_i} = \lambda\overline{(x_i)_i} + \mu\overline{(y_i)_i} = \lambda\overline{(x_i)_i} + \mu$.

• Le quatrième niveau de mesure fait retrouver la notion usuelle de « grandeurs mesurables ».

➔ Cette fois, le caractère X est défini à une transformation ***linéaire*** près, définie par $f(x) = ax$, avec $a > 0$. On suppose donc qu'il existe, en quelque sorte, un « zéro absolu » : seule l'unité de mesure est laissée au choix de l'utilisateur.

➔ Les échelles correspondantes sont dites échelles ***de rapport***, pour cette raison que le rapport des valeurs est conservé, puisqu'on a :

$$\frac{f(x')}{f(x)} = \frac{ax'}{ax} = \frac{x'}{x}.$$

C'est uniquement dans ce cas-là que l'on peut dire que « ω' a un X ***deux*** fois plus gros que celui de ω » – alors qu'on ne peut pas dire, par exemple, que la température d'aujourd'hui est le double de celle d'il y a dix jours…

➔ Les notions de mode, de médiane, de moyenne sont définies à ce niveau. Mais elles l'étaient déjà au niveau précédent : il est donc peu judicieux, on l'a dit, de distinguer fortement entre grandeurs « mesurables » et grandeurs « repérables ». Appelant ***quantitatifs*** les caractères définis au niveau des échelles ***de rapports***, certains parlent à propos de ceux relevant du niveau des échelles ***d'intervalles*** de caractères « pseudo-quantitatifs », ce qui est déjà un peu plus juste, au double sens de ce terme.

➔ Ce qui devient disponible (parce que « permis ») à ce niveau est le ***coefficient de variation***, quotient de l'écart type par la moyenne :

$$CV(X) = \frac{s(X)}{\bar{X}}.$$

Pour $a > 0$, on a en effet : $CV(aX) = \dfrac{s(aX)}{a\bar{X}} = \dfrac{as(X)}{a\bar{X}} = \dfrac{s(X)}{\bar{X}} = CV(X)$.

c) Revenons à la question posée : à quoi servent les diagrammes circulaires ? Pour illustrer quels types de séries statistiques sont-ils utiles ?

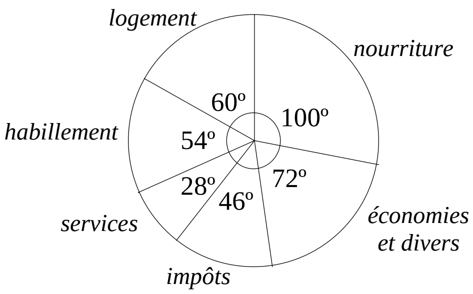
• On reprendra simplement, ici, un développement proposé par un ouvrage un peu ancien mais toujours pertinent (Louis Guerber & Paul-Louis Hennequin, *Initiation à la statistique*, APMEP, Paris, 1967, p. 38-39).

I.11. Graphiques circulaires ou à secteurs circulaires

Dans toutes les représentations précédentes, la variable x était ordonnée. Pour des notes ou des tailles, on sait définir un ordre croissant (ou décroissant) ; pour des dates, il y a aussi un ordre naturel. Pour d'autres variables, aucun ordre ne s'impose. C'est ainsi que pour la répartition du budget d'une famille suivant les secteurs : nourriture, logement, habillement, services, impôts, économies et divers, on peut placer ces divers secteurs dans un ordre arbitraire et construire un diagramme cartésien. Ce qu'on souhaite, c'est obtenir une vision rapide et globale de l'importance relative de ces secteurs.
On appelle *graphique circulaire* un graphique dont le support est un disque, découpé en secteurs dont les surfaces sont proportionnelles aux variables à figurer ; il suffit pour cela de prendre des angles au centre proportionnels à ces variables.
Exemple: représenter par un graphique circulaire le budget d'une famille qui se décompose en (unité: 1 F).

Nourriture	5000	Services	1400
Logement	3000	Impôts	2300
Habillement	2700	Économies et divers	3600

Nous attribuons au total qui s'élève à 18 000 la totalité de la surface d'un disque soit, en degrés, 360º. On est ainsi conduit à représenter 100 par 2º d'où les angles au centre attribués aux divers secteurs :



Remarque

Dans l'exemple précédent, nous avons obtenu un total tel que le montant de 100 F correspondait exactement à 2º. Si la variable est mesurée en jours d'une année (par exemple répartition en jours ensoleillés, jours avec pluie, jours avec neige, etc.) on aura avantage à prendre sensiblement 1º pour l jour, soit 30º pour 1 mois. Si les résultats sont fournis en pourcentages, on observera que 100 % correspondent au disque entier, soit à 400 grades et, par suite, 1 % sera représenté par 4 grades.

• La place allouée aux « camemberts » en 2de dépend évidemment de l'importance qu'y prend l'étude de la statistique des caractères ***nominaux***. Qu'en est-il donc ?

➔ Le programme précise d'emblée ceci.

En seconde le travail sera centré sur :

– la réflexion conduisant au choix de résumés numériques d'une série statistique quantitative ;

– la notion de fluctuation d'échantillonnage…

– la simulation…

On voit donc que ***l'essentiel***, en 2de, relève des niveaux supérieurs au niveau nominal (celui des variables « qualitatives »), et a trait, donc, aux variables « ordinales » au moins. Le sort des diagrammes circulaires s'ensuit.

➔ On notera encore que, dans la perspective précédente, le programme apporte une précision intéressante, que l'on reproduit ici.

Définition de la distribution des fréquences d'une série prenant un petit nombre de valeurs et de la fréquence d'un événement.

Il s'agit là, en principe, de variables ***quantitatives*** (au sens large), dont on suppose donc que, sur la population correspondant à la série statistique, elles prennent « un petit nombre de valeurs » : la précision apportée ne signifie donc nullement qu'il s'agirait de variables « catégoriques ».

• D'une façon plus générale, il convient d'être attentif au contenu véritable du programme, sous peine de perdre un temps précieux dans des activités douteuses. Le document d’accompagnement tente de le faire entendre aussi clairement qu’il est possible dans le passage ci-après, en explicitant types de tâche à exclure et types de tâche qu’il est, au contraire, impératif de travailler.

> Estimer la moyenne de séries de données quantitatives en les regroupant par classe n’est plus une pratique utile en statistique depuis que des ordinateurs calculent la moyenne de milliers de données en une fraction de seconde ; par contre savoir calculer une moyenne à partir de moyennes des sous-groupes ou comprendre la linéarité de la moyenne peut donner lieu à des exercices pertinents au regard de la pratique de la statistique. Calculer simplement, à partir de la moyenne, la moyenne élaguée d’une ou plusieurs valeurs extrêmes montre l’influence d’éventuelles valeurs aberrantes.

2.2. C2i2e

a) On considère la question que voici.

> Lors d’une séance de TICE effectuée avec ma classe sur l’utilisation du tableur et les fractions, j’ai pu constater leur non-maîtrise de l’outil informatique. Pourtant, ils ont déjà utilisé le tableur en classe de 5^{e} et je pensais pouvoir m’appuyer un peu sur ces bases. Faut-il tout reprendre depuis le début ? Et comment gérer les grandes hétérogénéités de connaissance de l’outil informatique ? (RH, MJ, 4^{e}, 11)

• L’hétérogénéité invoquée est sans doute en partie liée à la diversité quelque peu anomique des pratiques effectives dans les classes – en l’espèce, dans les classes technologie, en 5^{e}, et l’an dernier pour ce qui est des actuels élèves de 4^{e}. Dans un cadre professionnel stabilisé (et non dans le cadre d’un passage, fût-il d’une année entière, dans l’établissement), une concertation avec les professeurs concernés, visant à faire évoluer la situation constatée serait certainement de mise…

• Une évolution est en principe en cours, puisque l’emploi du tableur a été inscrit dans le programme ***de mathématiques*** « toiletté » de la classe de 5^{e}, en vigueur depuis la rentrée 2006.

➔ On notera que, de façon significative, ce texte mentionne l’emploi du tableur « en situation », sans en faire un objet d’étude en soi, et en tout cas au-delà des besoins suscités à cet égard par son emploi comme ***outil d’étude*** dans le travail mathématique. C’est ainsi que, à propos du thème de la ***proportionnalité***, sous la rubrique « Exemples d’activités, commentaires », on lit ceci.

> L’utilisation répétée du coefficient de proportionnalité est l’occasion d’exploiter certaines fonctions de la calculatrice (opérateurs constants, mémoire) ou d’un tableur *[B2i]*.

➔ De même, à propos du thème « Tableau de données, représentations graphiques de données », et sous la rubrique déjà mentionnée, on lit encore ce qui suit, qui ramène d’abord à une question précédemment travaillée.

> Le choix de la représentation est lié à la nature de la situation étudiée. Pour les données relatives à un caractère qualitatif trois types de représentations graphiques sont utilisés : le diagramme en tuyaux d’orgue, le diagramme en bandes (ou diagramme linéaire), le diagramme à secteurs (circulaires ou semi-circulaires). Pour les données à caractère quantitatif discret (ou à valeurs discontinues) le diagramme utilisé est le diagramme en bâtons ; pour les données à caractère continu, un histogramme est utilisé (en se limitant au cas de classes d’égale amplitude).
>
> L’utilisation d’un tableur permet d’enrichir ce travail en le prolongeant à des situations plus complexes que celles qui peuvent être traitées « à la main » *[B2i]*.

➔ En écho à cette manière de parler du tableur, le programme de 4e « toiletté » comporte d'ailleurs la notation suivante, toute centrée sur ***l'usage*** du tableur, non sur son étude en soi et pour soi : « Les tableurs-grapheurs, dont l'usage a été introduit dès la classe de cinquième… »

• La problématique précédente pousse en avant une stratégie générale : dans l'emploi d'un outil informatique, on construira et on mettra en place les praxéologies utiles, sans en rabattre sur l'exigence technologico-théorique, mais sans prétendre pour autant atteindre à une maîtrise illusoirement « complète » de l'outil. C'est, en d'autres termes, non dénués de toute ambiguïté, ce qu'énonce cet autre passage d'un texte déjà cité lors de la séance 11, l'*Introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques*.

> Selon les classes, si les pré-requis de certains élèves sont insuffisants, les activités qu'il convient de leur proposer tiennent compte de la nécessité de compléter leurs compétences dans les usages des technologies de l'information et de la communication.

b) L'exigence de « compléter les compétences » des élèves doit être regardée d'abord comme un problème ***collectif***, que le professeur s'efforce de résoudre avec ***la classe***. Mais avant cela même, le professeur doit ***déterminer les praxéologies*** dont la maîtrise par les élèves leur apportera ce « complément » de compétences utiles.

• Dans le cadre évoqué par la question au point de départ de ce développement (l'usage du tableur en classe de mathématiques) comme en d'autres cas, on peut scinder le problème de la « complétion » en deux composantes duales l'une de l'autre :

1) comment, avec tel outil logiciel (tel tableur, etc.), est-il possible d'effectuer tel type de tâches reconnu ?

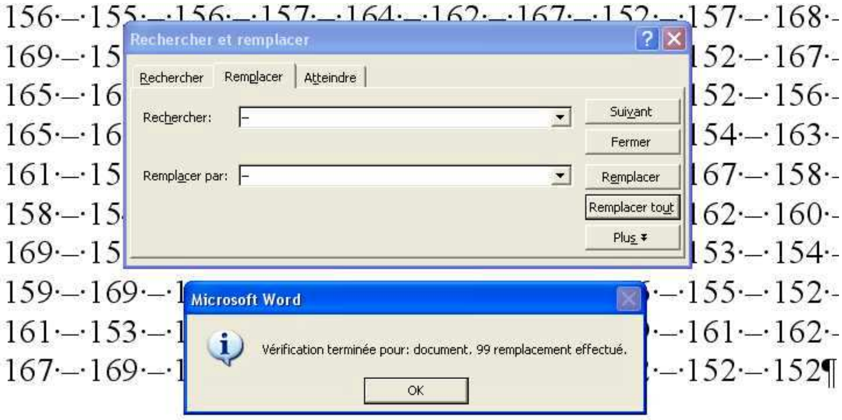
2) quels types de tâches didactiquement utiles peut-on réaliser avec tel outil logiciel, qu'on ne songerait peut-être pas à envisager sans son secours ?

• Nous reviendrons ultérieurement sur ces questions à propos du tableur proprement dit. À titre d'exemple, on va utiliser ici certaines des ressources « de type tableur » offertes par le logiciel Word 97, et cela, en l'espèce, pour étudier la série statistique suivante (des tailles d'élèves en centimètres), dont les valeurs sont séparées par un tiret (le signe –).

> 156 – 155 – 156 – 157 – 164 – 162 – 167 – 152 – 157 –
> 168 – 169 – 156 – 167 – 157 – 165 – 159 – 159 – 160 –
> 152 – 167 – 165 – 165 – 158 – 167 – 152 – 156 – 152 –
> 155 – 152 – 156 – 165 – 163 – 153 – 166 – 155 – 158 –
> 162 – 166 – 154 – 163 – 161 – 158 – 156 – 159 – 162 –
> 159 – 156 – 164 – 167 – 158 – 158 – 154 – 164 – 161 –
> 157 – 153 – 154 – 165 – 162 – 160 – 169 – 152 – 160 –
> 156 – 158 – 161 – 162 – 161 – 153 – 154 – 159 – 169 –
> 161 – 157 – 155 – 152 – 152 – 156 – 155 – 152 – 161 –
> 153 – 169 – 153 – 152 – 167 – 157 – 159 – 161 – 162 –
> 167 – 169 – 157 – 159 – 165 – 156 – 153 – 152 – 152 –
> 152

➔ Il est d'abord facile, sur les données précédentes, de déterminer l'effectif de la série : il y a 11 lignes comportant chacune 9 valeurs, plus une ligne ne comportant qu'une valeur : $11 \times 9 + 1 = 100$.

➔ Le logiciel utilisé permet une autre technique : on colle la série de valeurs dans un fichier vierge, et on demande de remplacer partout le tiret par lui-même : si n est l'effectif de la série, le logiciel va afficher $n - 1$ remplacements.



➔ La même technique permet de connaître l'***effectif*** de chacune des valeurs obtenues : en faisant remplacer 152 par 152, on trouve que l'effectif correspondant est de 13. Plus généralement, on obtient le tableau suivant.

Valeurs	Effectifs
152	13
153	6
154	4
155	5
156	10
157	7
158	6
159	7
160	3
161	7
162	6
163	2
164	4
165	6
166	2
167	7
168	1
169	5

➔ On peut calculer au fur et à mesure les effectifs ***cumulés*** (croissants), qui permettront de déterminer les valeurs « cruciales » de la série.

Valeurs	Effectifs	Effectifs cumulés croissants
152	13	13
153	6	19
154	4	23
155	5	28
156	10	38
157	7	45

158	6	51
159	7	58
160	3	61
161	7	68
162	6	74
163	2	76
164	3	79
165	6	85
166	2	87
167	7	94
168	1	95
169	5	100

➔ On peut alors dresser le tableau suivant (par exemple).

k	Plus petite valeur supérieure ou égale à au moins *k* % des valeurs de la série
25	155
50	158
75	163
95	168
100	169

On notera que la médiane, entendue au sens de la convention adoptée en 2^de^ (moyenne des valeurs figurant aux 50^e^ et 51^e^ rangs) est ici 158.

➔ On peut tirer d'autres enseignements encore du tableau précédent. Par exemple, pour n'être strictement dépassé en taille que par au plus 10 % des élèves, il faut ici mesurer au moins 1,67 m ; et, lorsqu'on mesure 1,67 m, on est en fait de taille strictement inférieure à seulement 6 % des élèves de la série. Ce type de questions motive le calcul des effectifs cumulés ***décroissants***, comme ci-après.

Valeurs	Effectifs	Effectifs cumulés décroissants
152	13	87
153	6	81
154	4	77
155	5	72
156	10	62
157	7	55
158	6	49
159	7	42
160	3	39
161	7	32
162	6	26
163	2	24
164	3	21
165	6	15
166	2	13
167	7	6
168	1	5

169	5	0

La plus petite taille qui n’est strictement dépassée que par au plus 20 % des tailles est 1,65 m – taille qui, en fait, n’est dépassée que par 15 % des tailles.

➔ On peut encore vouloir – pourquoi pas ? – calculer la ***moyenne*** de la série examinée…

① Pour cela, on commence par transformer la présentation de la série des données en y remplaçant (automatiquement) le tiret par un point-virgule :

156 ; 155 ; 156 ; 157 ; …

② On peut alors utiliser (en choisissant **Tableau**, puis **Formule…**) la fonction MOYENNE() ou, si l’effectif de la série est trop grand pour donner lieu à un calcul d’une seule traite (comme ici), la fonction SOMME() : on insère alors la sous-série dans la parenthèse, et on en obtient ainsi la somme.

On a ici : $\sum$ { 156 ; 155 ; 156 ; 157 } = 624.

③ En réduisant la taille de la police de caractères, on peut par exemple présenter la série sur cinq lignes (voir ci-après), dont on calcule alors successivement les sommes partielles, avant de calculer la somme des sommes partielles obtenues.

156 ;155 ;156 ;157 ;164 ;162 ;167 ;152 ;157 ;168 ;169 ;156 ;167 ;157 ;165 ;159 ;159 ;160 ;152 ;167 ;165 ;165 ;158

;167 ;152 ;156 ;152 ;155 ;152 ;156 ;165 ;163 ;153 ;166 ;155 ;158 ;162 ;166 ;154 ;163 ;161 ;158 ; 156 ;159 ;162 ;159

;156 ;164 ;167 ;158 ;158 ;154 ;164 ;161 ;157 ;153 ;154 ;165 ;162 ;160 ;169 ;152 ;160 ;156 ;158 ;161 ;162 ;161 ;153

;154 ;159 ;169 ;161 ;157 ;155 ;152 ;152 ;156 ;155 ;152 ;161 ;153 ;169 ;153 ;152 ;167 ;157 ;159 ;161 ;162 ;167 ;169

;157 ;159 ;165 ;156 ;153 ;152 ;152 ;152

Les sommes partielles par ligne sont ici les suivantes : 3693 ; 3650 ; 3665 ; 3652 ; 1246. La somme totale est calculée de même : 15906. La moyenne est, ici, égale à 159,06.

2.3. Systèmes de nombres & grandeurs

a) Avant de poursuivre l’étude engagée, on s’arrête sur la question suivante.

> La technologie associée à l’addition des fractions au collège est-elle le groupe $\mathbb{Q}$ ou bien la volonté de faire de $\mathbb{Q}$ un groupe ? La théorie est-elle la théorie des groupes ? (AC, OS, 2de, 11)

• Pour répondre à une telle question – en écartant d’emblée l’idée que la technologie en question serait « la volonté de faire de $\mathbb{Q}$ un groupe »… –, il faut revenir sur les notions de technologie et de théorie. Considérons un certain bloc pratico-technique $[T ; \tau]$; « sa » technologie θ n’a rien d’absolu, d’universel, d’intrinsèque : elle dépend au moins de l'***institution*** dans laquelle on observe le bloc $[T\,;\,\tau]$; elle dépend même de la ***personne*** qui « active » la technique τ pour accomplir une ou plusieurs tâches $t_i \in T$. On peut ainsi se proposer de déterminer – par l'observation au sens large – ce qu'est ***véritablement*** la technologie de $[T\,;\,\tau]$ par exemple dans telle classe de 4^e ou dans telle classe de 2^{de} : on trouvera alors, généralement, un « mixte » technologique, avec parfois de « vrais morceaux de mathématiques » mêlés à des ingrédients divers et autres adjuvants pédagogiques…

• Ce qu'on a explicité dans la séance 11 à propos des nombres fractionnaires, c'est précisément la technologie et la théorie des opérations sur les fractions, non en telle ou telle classe déterminée, mais dans cette institution tutélaire – qui, en la matière, apparaît démunie devant la rétivité des institutions-classes qu'elle est censée régir… – que constituent les programmes, ou, pour le dire dans des termes « savants », le ***curriculum officiel*** – par opposition au curriculum ***réel***, et au curriculum ***caché*** (*hidden curriculum*), dont l'habitat sont la classe et l'établissement. Rappelons les éléments principaux d'une praxéologie des nombres fractionnaires, telle qu'il conviendrait de l'implanter dans les classes de mathématiques des collèges.

➔ La ***théorie*** se résume ici à un « principe » : il existe des ***nombres*** pour mesurer toutes les grandeurs possibles. (Dire qu'il s'agit de nombres, on l'a dit, signifie ***à ce niveau*** qu'ils forment ensemble un demi-anneau unitaire, commutatif, intègre et ordonné.) En particulier, pour tout nombre-mesure a, et pour tout entier b, il existe un nombre x unique tel que $bx = a$, nombre que l'on note par définition $x = \frac{a}{b}$, etc.

➔ La ***technologie*** se déduit toute de cette théorie : c'est ainsi qu'on a le résultat technologique $a \times \frac{b}{c} = \frac{b}{c} \times a$ parce que la multiplication ***supposée*** est commutative et on a l'égalité $a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$ parce que si l'on pose $x = a \times \frac{b}{c}$, on a

$$cx = c \times \left(a \times \frac{b}{c}\right) = a \times \left(c \times \frac{b}{c}\right) = a \times b = ab$$

ce qui montre que $x = \frac{ab}{c}$, soit que $a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$.

• Le fait que l'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres connus, muni de l'addition des nombres, forme un demi-groupe commutatif apparaît ici comme une formulation « moderne » d'une ***partie*** du principe théorique posé plus haut.

➔ Dans les mathématiques « modernes », on se soucie d'établir que ce principe est libre de contradiction, et cela, comme on le dit traditionnellement – non sans ambiguïté – en « construisant » le système de nombres dont l'emploi est souhaité. Répétons que l'on n'a ainsi qu'une preuve de non-contradiction ***relative*** : ***si*** le demi-anneau des entiers naturels $\mathbb{N}$ est libre de contradiction, ***alors*** il en est de même de $\mathbb{D}_+$. Malheureusement, la consistance de $\mathbb{N}$, ou plutôt des ***axiomes de Peano*** qui définissent cette structure, pose question, comme le souligne l'article de *Wikipedia* intitulé ***Peano axioms*** (v. http://en.wikipedia.org/wiki/Peano_axioms, ainsi que la discussion subséquente).

Most mathematicians assume that Peano arithmetic is consistent, although this relies on either intuition or on accepting Gentzen's proof. However, early forms of naïve set theory also intuitively looked consistent, before the inconsistencies were discovered.

➔ Dans l'enseignement secondaire, comme il en fut au long des siècles, on laissera ces difficiles questions de côté : la confiance, ici, s'impose…

b) On poursuivra avec cette seconde question portant sur les nombres fractionnaires.

> En classe de 4e, dans le chapitre consacré au calcul en écriture fractionnaire, faut-il consacrer du temps (et réaliser une AER spécifique) pour l'introduction de la multiplication, ou peut-on s'appuyer sur les connaissances de 5e et dire que « c'est pareil », en utilisant en plus la règle des signes ?… (JL, CR, 4e, 11)

• Il est utile, ici, de rappeler d'abord un principe essentiel. ***L'exigence didactique*** que condense le schéma

AER / Synthèse / Exercices & problèmes

ne doit pas d'abord être entendue en un sens ***« pédagogique »***. L'AER à concevoir et à faire vivre dans la classe n'est pas davantage une obligation formelle et ritualisée – « avant de passer au cours *(sic)*, il faut les faire travailler un peu… ». L'exigence didactique est presque toute entière d'origine ***épistémologique*** : l'AER ou la courte succession d'AER proposée doit « forcer » – de façon plus ou moins sous-déterminée, certes – l'émergence de telle praxéologie mathématique (dont certains éléments sont tenus pour emblématiques par la tradition d'enseignement, en sorte que l'usage identifie cette praxéologie à ces ingrédients caractéristiques).

• S'agissant de la multiplication des fractions en 4e, quel est le problème ? On peut l'énoncer ainsi.

> Soit deux nombres fractionnaires, $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$; quel est le nombre produit, $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$? Par exemple que vaut le produit $\frac{2}{3}\times\frac{1}{7}$?

➔ On peut attaquer le problème par plusieurs voies, y compris la voie « culturelle » : la réponse existe-t-elle dans la culture ? Sa présence est ainsi évoquée – douloureusement… – dans la question suivante.

> Les calculatrices permettent de donner des fractions simplifiées. Que répondre à un élève qui dit : « Ça ne sert à rien de savoir le faire puisque la calculatrice le fait » ? (SM2, MJ, 4e, 11)

① En utilisant ici une calculatrice en ligne sur laquelle on reviendra, on obtient en effet ceci.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7} \rightarrow \frac{2}{21}$$

② Ce résultat ne règle pas tout : ne serait-il pas approché ? Ne serait-il pas trompeur ? On peut d'abord le vérifier à l'aide de la calculatrice « ordinaire », qui donne ici :

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{7} = 0{,}0952380952380952380952380952380952380952380095$$

$$\frac{2}{21} = 0{,}095238095238095238095238095238095238095238095\ldots$$

③ Bien entendu, on peut poursuivre l'enquête culturelle dans le manuel de la classe. On y trouvera peut-être que l'on aurait en général :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Bien entendu aussi, on vérifiera que, pour les fractions $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ et $\frac{c}{d} = \frac{1}{7}$ on a bien

$$\frac{ac}{bd} = \frac{2 \times 1}{3 \times 7} = \frac{2}{21}.$$

➔ Rien ne dit pourtant à ce stade que la « formule » trouvée dans les manuels ne serait pas une formule approximative, simplifiée, qui marche sans doute dans beaucoup de cas – notamment ceux que, à l'instar de celui des fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{7}$, on aura pris soin de « vérifier » des trois manières évoquées ici. Rien, surtout, n'explique ***pourquoi*** elle marche ! Et c'est par cette interrogation technologique que devra se poursuivre l'étude amorcée jusque-là.

① Comment déterminer le nombre $\frac{2}{3} \times \frac{1}{7}$? L'enquête culturelle conduit à penser que ce pourrait être un autre nombre fractionnaire, c'est-à-dire la solution d'une équation de la forme $ax = b$. L'idée cruciale est de prendre pour a le produit $21 = 3 \times 7$, afin de « chasser les dénominateurs » (l'expression est consacrée).

② On a alors : $21x = 21 \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{7}\right) = (7 \times 3) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{7}\right) = 7 \times \left(3 \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{7} = 7 \times 2 \times \frac{1}{7}$

$$= 2 \times \left(7 \times \frac{1}{7}\right) = 2 \times 1 = 2.$$

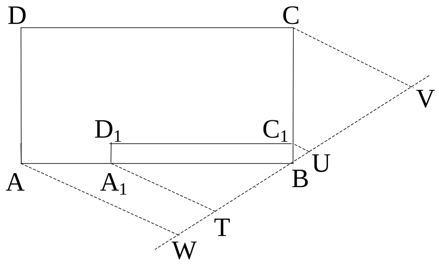
③ On peut alors tenter de passer à l'usage de ***lettres*** pour assurer la « traçabilité » du résultat : dans le calcul précédent, 21 est mis pour bd, $\frac{2}{3}$ pour $\frac{a}{b}$, $\frac{1}{7}$ pour $\frac{c}{d}$; on peut alors écrire le calcul « général » qui ***explique*** la formule $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$:

$$(bd)x = (bd)\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) = d \times \left(b \times \frac{a}{b}\right) \times \frac{c}{d} = a \times \left(d \times \frac{c}{d}\right) = a \times c = ac.$$

On a donc bien : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = x = \frac{ac}{bd}$.

• Ce qui précède prouve seulement un certain « fait numérique », à savoir que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (pourvu que ces expressions soient définies). Il reste à savoir si ce résultat est compatible avec l'usage des nombres fractionnaires pour mesurer – ce pourquoi ils sont introduits !

➔ Considérons un segment [AB] de longueur 2 et un segment [BC] de longueur 1 (par rapport à une certaine unité de longueur u), avec $(AB) \perp (BC)$. Considérons ensuite des sous-segments $[A_1B]$ et $[BC_1]$ respectivement de longueur $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{7}$ (voir ci-après).



Le rectangle ABCD a une aire de mesure $2 \times 1 = 2$ par rapport à l'unité u^2. La mesure de l'aire du rectangle $A_1BC_1D_1$ est-elle égale à $\frac{2}{3} \times \frac{1}{7}$? Soit a la mesure de la moitié de l'aire du rectangle $A_1BC_1D_1$: on ignore à ce stade si a est un nombre fractionnaire ou un nouveau nombre, d'un type encore inconnu. D'après le principe d'additivité de la « théorie » naïve des aires acceptée dans l'institution collège, on a (avec des notations évidentes)

$$\mathcal{A}(A_1BC_1D_1) = 2a \ ; \ \mathcal{A}(ABCD) = (3a) \times 7 = 21a.$$

Comme $\mathcal{A}(ABCD) = 2$, il vient $21a = 2$, égalité qui montre que a est un nombre fractionnaire et est égal à $\frac{2}{21}$.

➔ On laissera les participants au Séminaire examiner le cas général, celui d'un produit $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, puis la généralisation au cas où $a, b, c, d \in \mathbb{D}^*_+$.

c) On amorce maintenant l'étude de la notion de ***grandeur*** avec la question que voici.

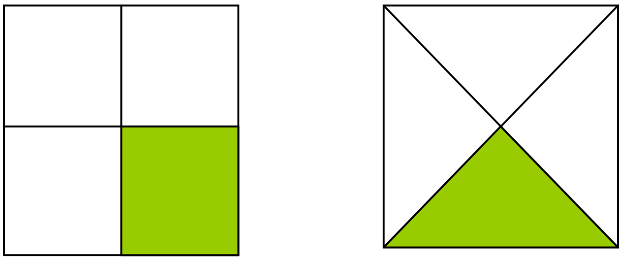
« $\frac{3}{4}$ d'une tarte », « $\frac{3}{4}$ de la grandeur d'une tarte » : la plupart des manuels adoptent la première formulation. Toutefois j'ai lu dans les archives que la deuxième formulation était correcte. Le problème, c'est que, habitués à la formulation des livres, les élèves ont du mal avec la deuxième formulation. Comment leur expliquer la différence entre les deux formulations ? (AEO, OS, 4e, 11)

• Il convient d'abord de reprendre ici attentivement ce que contiennent les *Archives du Séminaire* sur ce sujet : on a reproduit ci-dessous un long développement des notes du Séminaire de l'année 2002-2003.

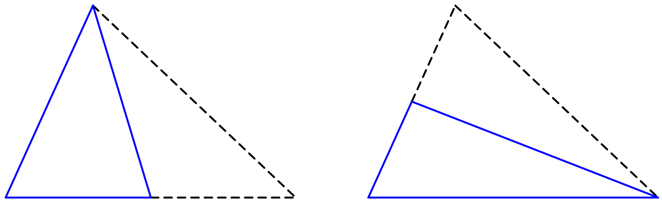
6. Dans l'enseignement actuel, des conceptions erronées et des pratiques fautives ont proliféré à la faveur de l'oubli du concept de grandeur, au fondement de l'enseignement ancien. Les développements qui suivent ont pour objet d'aider à rétablir une conceptualisation saine en ce domaine.

• La première ***erreur*** consiste à parler des trois quarts (par exemple) d'un ***objet*** matériel – tarte, groupe de personnes, etc. Le « corollaire » de cette manière de penser les choses est qu'on dira alors que parler de ***cinq quarts*** d'une tarte « n'a pas de sens ». Or les mathématiciens se sont rendu compte très tôt que cette manière de considérer les choses était ***incohérente*** : on ne peut définir les « trois quarts » (ou les « deux tiers », etc.) d'une tarte ; on peut seulement parler des trois quarts d'une certaine ***grandeur*** attachée à la tarte, par exemple les trois quarts du ***poids*** de la tarte. À partir de ce moment-là, le problème des fractions supérieures à l'unité tombe : on peut aussi bien parler des ***sept quarts du poids*** de la tarte !

• Pourquoi tout cela ? Considérons d'abord, simplement, un carré (ou, si l'on veut, un ***champ*** carré, ou une ***tarte*** carrée). Ce que l'on serait tenté d'appeler « le » quart du carré ***n'est pas défini de manière univoque***, comme le montrent les figures ci-après.



Ces « portions » du carré ont même aire, à savoir « le quart de ***l'aire*** du carré », seule notion véritablement définie, alors que « ***le*** quart du carré » ne l'est pas. Si, par exemple, par rapport à une certaine unité *u*, le carré ci-dessus a des côtés de mesure 10, le quart de son aire, mesuré avec l'unité d'aire u^2, vaut $\frac{10^2}{4} = 25$. Si l'on examine maintenant, non pas la grandeur « aire » mais la grandeur « périmètre », on voit que les deux « portions » de carré sont de ***grandeurs inégales*** : le périmètre de la première est égal à 20 *u*, le périmètre de la seconde à $10(1+\sqrt{2})$ *u*. Le prétendu « quart » du carré n'est ainsi un quart ***que par rapport à l'aire, non par rapport au périmètre***. Il en va de même si l'on prétend prendre « la » moitié du triangle ci-après.



• Telle est la raison pour laquelle les mathématiciens ont introduit la notion de ***grandeur*** (poids, masses, volume, aire, longueur, puissance, etc.), question à laquelle le document d'accompagnement du programme de 3^e^ consacre un long développement dont on se limitera ici à examiner l'extrait suivant :

Les élèves ont eu l'occasion de prendre conscience petit à petit, au long du collège, de la nature de l'activité mathématique et des mathématiques, en particulier avec la construction de modèles de certaines situations, notamment celles de la proportionnalité. Ils acquièrent également des techniques élémentaires de traitement et de résolution, qui ont des utilisations très diverses au quotidien, dans les autres disciplines et dans la vie du citoyen.
Lors de ces traitements, on opère parfois sur une seule grandeur, parfois on privilégie la relation entre des grandeurs. Un problème peut concerner des grandeurs de même nature, voire une seule grandeur, ou des grandeurs de natures différentes ; ces caractéristiques, ainsi que la nature des relations entre les grandeurs en cause, induisent une difficulté plus ou moins grande lors de la résolution et déterminent souvent le choix de telle ou telle procédure par les élèves. On a ainsi l'occasion de travailler avec des grandeurs et des unités de différents types ; il peut s'agir de grandeurs « simples » (objets de mesures directes) et unités « simples », de grandeurs et unités produits (passagers × km, kWh,…), quotients (m/s, km/h, …), ou encore de grandeurs et unités « composées » ($m^3 \times s^{-1}$, …). Cependant, certains traitements conduisent à utiliser des nombres sans dimension ; ils correspondent à des relations de type échelle, agrandissement, pourcentage, fréquence… et concernent une seule grandeur ou des grandeurs de même nature.

• Répétons-le : une tarte n'est pas une grandeur ; son volume, son poids, l'aire de sa surface, oui. On ne peut considérer « la » moitié ou « les » trois quarts d'une tarte ou de quelque autre objet que ce soit, car de tels « sous-objets » ***ne sont pas définis***.

– À cet égard, nombre d'énoncés proposés dans les manuels sont ***doublement fautifs***, tels les suivants :

« Dites, pour chacun des dessins ci-dessous, quelle fraction du cercle a été peinte en rouge »

« Quelle fraction de tarte reste-t-il ? Quelle fraction de tarte a-t-on déjà mangée ? »

« L’aire d’un champ est de 6394 m^2. On vend les 3/4 du champ. Quelle est l’aire de la partie vendue ? »

Non seulement, on parle ici d’objets non définis, mais on se réfère à travers eux à des grandeurs dont la ***nature*** n’est pas claire, ***n’étaient les conventions de l’usage scolaire*** : en pratique, ainsi, on peut fort bien préférer la « moitié supérieure » d’un gâteau (ou, plus encore, d’un gratin…) à sa « moitié inférieure », même si le faire savoir est contraire aux règles de la civilité. En revanche, les choses s’éclairent dès qu’on parle de fractions ***de grandeurs***, et non de fractions ***d’objets***, comme il en va dans l’énoncé suivant :

Un brocanteur avait acheté un meuble 380 F. Il le revend et son bénéfice est les 2/5 du prix d’achat. Quel a été, en francs, son bénéfice ? Quel a été le prix de vente ?

– Les remarques précédentes montrent qu’une ***« théorie » des grandeurs*** est nécessaire : elle seule fournit des entités sur lesquelles on puisse opérer comme d’aucuns rêvent vainement d’opérer ***sur les objets eux-mêmes***. Il convient donc d’assumer le ***détour par les grandeurs*** dans le trajet qui conduit des ***objets*** aux ***mesures***.

– C’est ce que l’on faisait autrefois au collège, ainsi que le montre l’extrait ci-après d’une arithmétique pour les classes de 4^e et 3^e due à Anna et Élie Cartan (1934) : on y voit en effet que c’est, non une pièce de ruban, mais sa ***longueur***, non un champ, mais sa ***surface***, non le contenu d’un tonneau de vin, mais la ***quantité*** correspondante de vin que l’on peut diviser « en un nombre absolument quelconque de parties égales », ces parties étant des parties (« aliquotes ») de ***grandeurs*** (la grandeur h est une partie aliquote de la grandeur g s’il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g = n\,h$), et non des parties (« concrètes ») d’un ruban, d’un champ, ou du contenu d’un tonneau.

I. — PARTIE ALIQUOTE D’UNE GRANDEUR

103. — Grandeurs divisibles ou continues. — Il existe, parmi les grandeurs, certaines d’entre elles qui peuvent être divisées, au moins par la pensée, en un nombre absolument quelconque de parties égales, par exemple : la longueur d’une pièce de ruban, la surface d’un champ, la quantité de vin contenue dans un tonneau, etc.

De telles grandeurs sont dites *divisibles* ou *continues*.

104. — Définition : ***Une grandeur continue est dite une partie aliquote d'une autre grandeur de même espèce, si la première grandeur est contenue un nombre entier de fois dans la seconde.***

Dans la figure 10, la longueur CD, contenue 3 fois dans AB, est une partie aliquote de AB.

On dit aussi que AB est un *multiple* de CD :

$$AB = 3CD$$

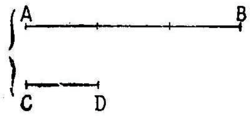
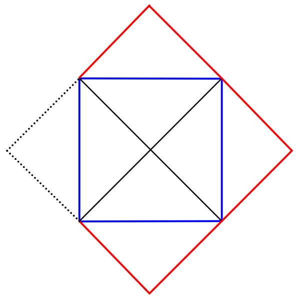


Fig. 10.

On dit encore que le nombre entier 3 *mesure* la longueur AB quand on prend CD pour unité.

– L’analyse qui précède conduit à enrichir le complexe de types de tâches qu’il convient d’explorer en classe : on pourra non seulement demander aux élèves de préciser une partie d’un carré dont l’aire (ou le périmètre) soit le quart de l’aire (ou du périmètre) d’un carré donné, ou de s’assurer que telle partie d’un carré, qui a même aire que la partie restante, n’a pas le même périmètre, mais on pourra aussi leur demander de préciser une région du plan, carrée ou non, dont l'aire soit par exemple les sept quarts de l'aire d'un carré donné (voir ci-après), etc.



• Notons qu'on ne doit pas plus parler des trois quarts « d'une tarte » que des trois quarts « de ***la*** grandeur d'une tarte » : une tarte n'a pas ***une*** grandeur ; plusieurs grandeurs lui sont attachées… Pour expliciter ce point, on reproduit maintenant un passage des notes du Séminaire de l'année 2000-2001.

E. Objets, grandeurs, mesures

– L'introduction mathématique au monde qui nous entoure suppose, au collège mais aussi au lycée, prise de contact et familiarisation avec l'univers des grandeurs. À cet égard, il est essentiel de rappeler qu'un ***même*** objet est le support de ***plusieurs*** grandeurs d'espèces différentes, usuelles ou non, dont la considération a ses raisons d'être. C'est ce que rappelle l'extrait suivant d'une brochure consacrée autrefois par l'APMEP aux mots « Grandeur » et « mesure » (*Mots*, tome VI, Paris, APMEP, 1982) :

« À propos d'un même objet, plusieurs grandeurs peuvent être envisagées. Le type de manipulation à laquelle on soumet cet objet permet de préciser la grandeur dont il s'agit, ce qui conduit à un vocabulaire approprié :
pour une feuille de papier : la longueur de son bord, ou périmètre, et l'aire de sa surface ; on suit le bord du bout du doigt, on balaie la surface de la paume de la main ;
pour une portion de route, sa longueur s'il s'agit de la parcourir, son aire s'il s'agit de la goudronner, [...] sa pente s'il s'agit d'y faire passer de lourds convois [...]. »

– L'abord de la notion de grandeur à partir du langage ordinaire recèle en conséquence quelques pièges qu'il convient de bien repérer. Considérons les deux cas suivants (*ibid.*) :

« “Ce récipient est plus grand que cet autre” : s'agit-il de sa hauteur, de sa plus grande dimension horizontale, de son volume intérieur ou capacité, de son volume extérieur ?
“La planète Saturne est grosse comme 95 Terres” : s'agit-il de volumes, de diamètres, de masses ? »

Dans ce dernier cas, bien sûr, des données allogènes permettent de trancher (*ibid.*) :

« Le diamètre équatorial de Saturne, anneaux exclus, est 9,4 fois celui de la Terre : son volume est 745 fois celui de la Terre (et non $9{,}4^3$ [≈ 831], car elle est sensiblement plus aplatie que la Terre). Sa masse est 95 fois celle de la Terre. Les mots “grosse comme” signifiaient donc : “lourde comme”. »

• On a vu (dans la notice *Première rentrée des classes*) que les programmes des classes de 6^{e} et de 5^{e} sont désormais scindés en quatre domaines d'études », dont un nouveau qui a nouvellement conquis son droit de cité à ce niveau : le domaine des ***Grandeurs et mesures***.

➔ L'***Introduction générale pour le collège*** des programmes de mathématiques présente ainsi ce domaine.

■ **grandeurs et mesure**

– se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aires, volumes, durées) ;

– connaître et utiliser les périmètres, aires et volumes des figures planes et des solides étudiés ;

– calculer avec les unités relatives aux grandeurs étudiées et avec les unités de quelques grandeurs quotients et grandeurs produits.

Ces programmes sont construits de manière à permettre une acquisition et un approfondissement progressifs des notions sur toute la durée du collège. Leur mise en œuvre est enrichie par l'emploi des instruments actuels de calcul, de dessin et de traitement (calculatrices, ordinateurs).

➔ Notons en outre ce commentaire relatif à l'étude du thème de la proportionnalité en 6^{e} :

Les problèmes à proposer (qui relèvent aussi bien de la proportionnalité que de la non-proportionnalité) se situent dans le cadre des grandeurs (quantités, mesures). L'étude de la proportionnalité dans le cadre purement numérique relève du programme de la classe de cinquième.

➔ Le même programme comporte une courte présentation du domaine, que l'on examine à son tour : on y notera la remarque concernant la question du calcul « avec unités », déjà mentionnée plus haut, et sur laquelle on reviendra.

4. Grandeurs et mesures

En continuité avec le travail effectué à l'école élémentaire, cette rubrique s'appuie sur la résolution de problèmes souvent empruntés à la vie courante. Elle permet d'aborder l'histoire des sciences, d'assurer des liens avec les autres disciplines, en particulier la technologie et les sciences de la vie et de la Terre, de réinvestir les connaissances acquises en mathématiques, mais aussi d'en construire de nouvelles. Par exemple, le recours aux longueurs et aux aires permet d'enrichir le travail sur les nombres non entiers et les opérations étudiées en classe de sixième. Il est important que les élèves disposent de références concrètes pour certaines grandeurs et soient capables d'estimer une mesure (ordre de grandeur). L'utilisation d'unités dans les calculs sur les grandeurs est légitime. Elle est de nature à en faciliter le contrôle et à en soutenir le sens. À travers les activités sur les longueurs, les aires et les volumes, les élèves peuvent élaborer et utiliser un premier répertoire de formules.

➔ On poursuivra l'examen des programmes à cet égard ; mais on retiendra dès maintenant deux exigences que les dernières décennies avaient regrettablement méconnues (et auxquelles la culture professorale reste, à ce jour, encore trop étrangère) :

1) prendre soin de distinguer les ***objets*** ou ***systèmes*** (mathématiques ou extramathématiques) étudiés et les grandeurs qui leur sont « attachées » – selon l'expression adoptée dans les futurs anciens programmes de collège comme dans les nouveaux, où on lit par exemple : « en classe de quatrième, la représentation d'objets géométriques usuels du plan et de l'espace, le calcul de grandeurs attachées à des objets, demeurent des objectifs majeurs » ;

2) intégrer les unités dans les calculs ($2\text{ cm} \times 3\text{ cm} = 6\text{ cm}^2$), hormis lorsque la surcharge scripturale serait pénalisante, et surtout éviter d'écrire des horreurs du type $2 \times 3 = 6\text{ cm}^2$…

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 13 : mardi 19 décembre 2006

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques // 2. Observation & analyse // 3. Problématique et fonctionnement du Séminaire

0. Questions de la semaine

> Journée 13 (19 décembre 2006)
> Tuteur : [MJ, CR, OS]
>
> Mathilde Peyron
> Classe : 4e (et soutien en 5e)
>
> Lors du cours sur le calcul littéral en 4e, peut-on utiliser l'identité $k(a + b) = ka + kb$ dans le sens inverse, c'est-à-dire $ka + kb = k(a + b)$, bien que les factorisations dans leur généralité ne soient pas au programme ?

1. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques

1.1. *Questions & réponses* : la notion de problème

a) La notion de *problème* – comme réalité publique, collectivement prise en charge – est essentielle dans l'ensemble du travail qu'un professeur se doit d'accomplir – avec les élèves ou loin d'eux.

b) Le professeur de mathématiques, en particulier, doit avoir des lumières sur la tradition pluriséculaire de « lancer » des problèmes de mathématiques, avec l'idée que se forme autour d'eux une communauté de curiosité – donc ni ethnique, ni religieuse, par exemple – où l'on se met en quête d'une solution.

c) Voici donc la section visée – qui conduit à retrouver l'importance des problèmes *dans la classe même*, et donc l'importance des *AER* entendues comme activités d'étude de problèmes, génératrices de la culture mathématique de la classe.

> **3. La notion de problème et sa place dans la culture**
>
> 3.1. Lorsque l'élément de problématicité rencontré n'est pas « refoulé », lorsque, au contraire, on en reconnaît la problématicité en lui donnant d'une façon ou d'une autre un caractère ***public*** au sein d'un certain collectif *X*, on dira que la question rencontrée – comment, par exemple, découper un gâteau carré en parts égales ? – prend le statut de ***problème*** [1. Le problème du gâteau carré apparaît par exemple dans l'ouvrage classique de H. S. M . Coxeter, *Introduction to Geometry* (John Wiley, New

York, 1969), sous la forme suivante : *Can a square cake be cut into nine slices so that everyone gets the same amount of cake and the same amount of icing?* Les problèmes liés aux tâches t_1, t_2, t_3, t_4 sont commentés plus avant dans la notice *Vers une nouvelle épistémologie scolaire*].

3.2. Depuis toujours, en particulier, ***l'aventure mathématique*** repose sur la possibilité offerte à ses membres par une ***communauté*** aux contours flous et toujours redessinés, celle des « mathématiciens », de poser, devant leurs pairs, des problèmes nouveaux (ou que l'on croit tels), en vue de susciter intérêt pour le problème proposé, émulation pour le résoudre et attention à l'endroit des éléments de solution proposés.

3.3. Pour désigner ce que longtemps on a appelé, tout simplement, une ***question de mathématiques***, le mot de ***problème*** ne s'est en vérité imposé en français que depuis le début du XVII^e siècle. Le mot dérive, par le latin ***problema***, qui désigne une question à résoudre, d'un mot grec signifiant « ce que l'on a devant soi, et spécialement un obstacle, une tâche, un sujet de controverse, une question à résoudre » [2. *Dictionnaire historique de la langue française* (Le Robert, 1993)]. Le grec ***problêma*** est en effet formé à partir de ***pro***, « devant », et ***ballein***, « lancer » : l'idée essentielle est celle d'une difficulté, d'un défi – intellectuel, par exemple – que l'on ***lance*** (*ballein*) devant soi (*pro*), ***au sein d'une communauté***.

3.4. Il s'agit là très exactement de ce que fait quotidiennement le professeur de mathématiques dans cette communauté *X* de « mathématiciens » qu'est – ou devrait être – une classe de mathématiques. Mais ce type de situations – une communauté au sein de laquelle quelqu'un « lance un problème » – n'est nullement propre à l'École. Longtemps, ainsi, l'usage a existé de proposer des problèmes de mathématiques ***par voie d'affiche***, pratique qui fut par exemple à l'origine d'un épisode important dans la vie de René Descartes (1596-1650), ainsi que le raconte son premier biographe, Adrien Baillet, dans sa *Vie de Monsieur Descartes* (1692) :

> [En 1618] il arriva qu'un inconnu fit afficher, par les rues de Breda, un problème de mathématiques pour le proposer aux savants, et en demander la solution. M. Descartes, voyant le concours des passants qui s'arrêtaient devant l'affiche conçue en flamand, pria le premier qui se trouva auprès de lui de vouloir lui dire en latin ou en français la substance de ce qu'elle contenait. L'homme, à qui le hasard le fit adresser, voulut bien lui donner cette satisfaction en latin ; mais ce fut à condition qu'il s'obligerait à lui donner de son côté la solution du problème qu'il jugeait en lui-même très difficile. M. Descartes accepta la proposition d'un air si résolu, que cet homme, qui n'attendait rien de semblable d'un jeune cadet de l'armée, lui donna son nom par écrit avec le lieu de sa demeure, afin qu'il pût lui porter la solution du problème quand il l'aurait trouvée. M. Descartes connut par son billet qu'il s'appelait Isaac Beeckman, et qu'il était principal du collège de Dordrecht. Il ne fut pas plutôt retourné chez lui que, s'étant mis à examiner le problème de l'homme inconnu sur les règles de sa méthode, il en trouva la solution avec autant de facilité et de promptitude que Viète en avait apporté pour résoudre le fameux problème qu'Adrien Romain avait proposé autrefois à tous les mathématiciens de la terre.

La comparaison avec un épisode plus ancien montre la pérennité de l'usage : Adrien Romain, ou plutôt Adriaan van Roomen (1561-1615), avait en effet lancé en 1593, à Anvers, un défi à tous les mathématiciens du monde, défi auquel François Viète (1540-1603) répondit dans un écrit intitulé sobrement *Ad problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, responsum* (Paris, 1595). L'historien Morris Kline fait de cet épisode le bref récit suivant [3. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Oxford University Press, New York, 1972), p. 240. Pour une analyse fouillée du problème de Romain et de la solution de Viète, voir Herman H. Goldstine, *A Historical Numerical Analysis From the 16^th^ through the 19^th^ Century* (Springer-Verlag, New York, 1977), p. 33 et suiv.] :

> The problem was to solve an equation of the forty-fifth degree in x. Henry IV of France sent for Vieta, who recognized that the problem amounted to this: Given the chord of an arc, to find the chord of the forty-fifth degree of that arc. This is equivalent to expressing $\sin 45A$ in terms of $\sin A$ and finding $\sin A$. If $x = \sin A$ then the algebraic equation is of the forty-fifth degree in x. Vieta knew the problem could be solved by breaking the equation up into a fifth-degree equation and two third-degree equations; these he solved quickly. He gave the 23 positive roots but ignored the negative ones.

3.5. L'usage de « mettre au concours » des questions de mathématiques s'est maintenu jusqu'à nos jours, quoique dans des formes autres que celle de l'affichage public. Les problèmes de recherche et le contrôle de leur originalité sont aujourd'hui le fait des communautés savantes internationales, et leur publicité se fait à travers revues scientifiques, séminaires, colloques et congrès [4. La pratique du « défi » mathématique n'est évidemment pas à l'abri de l'erreur quant à l'originalité du problème proposé. C'est ainsi que, en 1880, à l'instigation de deux des meilleurs mathématiciens français du temps, Charles Hermite (1822-1901) et Camille Jordan (1838-1922), l'Académie des sciences proposa un problème de théorie des nombres qui, en fait, avait été résolu quelque quatorze ans plus tôt par le mathématicien britannique Henry John Stephen Smith (1826-1883)]. Il existe en outre, en retrait par rapport au front de la recherche, tout une activité proposée aux mathématiciens les plus divers, du spécialiste jusqu'au professeur de l'enseignement secondaire, dans nombre de revues professionnelles. Ainsi en va-t-il par exemple de l'*American Mathematical Monthly* ou du *Mathematics Magazine* aux États-Unis, de *Quadrature*, *Tangente* ou du *Bulletin de l'APMEP* en France, et de bien d'autres revues encore, qui proposent régulièrement une rubrique de problèmes à leurs lecteurs.

3.6. La pratique immémoriale que le mot de problème symbolise existe sans doute insuffisamment dans la culture scolaire d'aujourd'hui, du moins ***hors de la classe***, et cette situation d'enfermement ne laisse pas d'avoir des conséquences négatives sur l'image de l'enseignement des mathématiques dès lors que la résolution de problèmes, au reste plus ou moins stéréotypés, apparaît comme une singularité du cours de mathématiques et de rares autres. Dans une visée de désenclavement, diverses initiatives – dans la classe, dans l'établissement, et au-delà – ont toutefois été prises au cours des décennies passées, comme en témoigne le regain d'intérêt actuel pour les ***compétitions mathématiques***, dont la multiplication récente est remarquable : par delà le célèbre ***concours général***, créé en 1744 et classiquement réservé à une élite peu nombreuse, existent aujourd'hui diverses compétitions de masse, internationales comme les *Olympiades internationales de mathématiques* (organisées à partir de 1959), nationales tels le *Kangourou des collèges* et le *Kangourou des lycées* (créés en Australie dès 1976) ou les *Mathématiques sans frontières*, avec, selon le cas, possibilité de participer à titre individuel ou en équipe [5. Voir Pierre Legrand, *Les maths en collège et en lycée* (Hachette, Paris, 1997), p. 78-85].

3.7. Dans cette perspective, mais à l'échelon de l'***établissement*** (ou d'un groupement d'établissements), on peut envisager de proposer aux élèves d'un même niveau de classe un ***problème du mois*** (par exemple), avec une récompense (plus ou moins symbolique) pour les auteurs des meilleures solutions [6. On pourra pour cela s'inspirer du calendrier mensuel de problèmes – un problème par jour ! – proposé par la revue *The Mathematics Teacher* du *National Council of Teachers of Mathematics* états-unien]. Mais l'essentiel, pourtant, n'est pas là : c'est ***dans la classe***, qui doit redevenir la terre d'élection des plus fortes aventures intellectuelles, et non dans ses à-côtés, que les problèmes de mathématiques ***cruciaux*** –qui font avancer le temps didactique – doivent être « lancés ».

1.2. Problématiser le monde

a) La section suivante insiste sur le rôle irremplaçable, en toute société, des professeurs et des formateurs – entre autres – dans le travail de *problématisation*, condition indépassable de l'élaboration de connaissances aptes à aider chacun à vivre mieux avec les autres et avec soi.

b) Les analyses qui suivent sont essentielles pour le professeur, auquel « une longue expérience » ne saurait suffire ! On crée en effet très peu de connaissances à partir de la *simple pratique*, fût-elle poursuivie *sur une très longue période*. Trop souvent, en effet, selon le principe du déni de problématicité, le « professionnel » s'efforce spontanément de s'adapter aux contraintes objectives des situations professionnelles rencontrées, et cela *en minimisant son changement cognitif*. D'où l'importance des dispositifs du type « Questions de la semaine », valables tant *en formation initiale et continue* qu'en formation *de formateurs* ou… *dans la classe*, pour la formation *des élèves*.

4. Formation et problématisation du monde

4.1. Les exemples examinés plus haut suggèrent que, lorsqu'une situation du monde relève de l'activité ***privée***, sa capacité à engendrer des problèmes – et donc, à terme, des connaissances – dépend fortement des acteurs de la situation : ***les différences entre personnes jouent alors à plein***. Telle situation qui, pour telle personne, sera le point de départ d'une véritable ***enquête épistémologique***, et, en conséquence, de tout un ***apprentissage***, n'éveillera chez d'autres aucune forme d'interrogation ! La pratique ***ordinaire*** des situations du monde n'a ainsi, en elle-même, qu'une capacité fort limitée à engendrer des connaissances : ***les savoirs n'émergent pas spontanément des pratiques***.

4.2. C'est ce dernier constat qui fonde en grande partie le travail du professeur et, plus généralement, de tout formateur : pour que des connaissances se créent pour la personne *x*, le formateur *y* doit, contre la croyance toujours résurgente en une facile autodidaxie, ***forcer*** *x* et ses compagnons d'étude à reconnaître, à assumer, à affronter la problématicité des situations du monde que *y* leur aura imposé de rencontrer. De là ***le rôle irremplaçable des professeurs et des formateurs de tous types*** dans la diffusion sociale (et en particulier scolaire) des connaissances : nul ne saurait être de manière exclusive et durable son propre formateur.

4.3. L'exigence précédente ne signifie pourtant nullement que ce soit au professeur seul de poser, *motu proprio*, toutes les questions à étudier : il lui appartient au contraire d'aider les élèves à formuler, sinon les grandes questions fondatrices du curriculum, du moins certaines des questions en lesquelles se déploie leur étude, et cela, plus largement, afin de leur permettre d'acquérir une vraie capacité à assumer la ***fonction de problématisation*** essentielle en tout abord critique, scientifique ou citoyen, du monde. Si, selon le contexte de formation (selon que l'on est « en classe » ou « en TPE » par exemple), les élèves, travaillant sous la direction du professeur, peuvent ou non concourir à faire émerger les tâches ✓ génératrices de l'étude, en revanche il leur écherra toujours d'identifier, sous la houlette du professeur, la ou les tâches problématiques *t* « enchâssées » dans les tâches ✓, de formuler la ou les questions *Q* appelées par les éléments de problématicité ainsi recensés (« Comment accomplir les tâches du type de *t* ? »), et, au-delà, d'expliciter les questions ***cruciales*** organisant l'étude de la ou des questions *Q*.

4.4. S'agissant du problème du gâteau carré, par exemple, une question cruciale *Q*' sera : « De quoi dépend *a priori* l'aire d'un "morceau" comportant un coin comme ONCP ? » Une réponse *R*' ayant été formulée et validée (« L'aire dépend *a priori* de la longueur *a* du côté du carré et des longueurs ℓ_1 = NC et ℓ_2 = CP »), une seconde question, *Q*", pourra émerger : « Comment calculer l'aire du morceau ONCP en fonction de *a*, de ℓ_1 et de ℓ_2 ? ». Et ainsi de suite. Par contraste on proscrira autant que possible la rhétorique des énoncés scolaires de « problèmes » qui refusent à l'élève toute rôle dans le travail de problématisation en le cantonnant dans la posture d'***aide-mathématicien***, comme l'illustre l'exemple suivant (où l'on se réfère à la figure déjà mentionnée, et auquel la troisième question donne tout de même une touche sainement inhabituelle) :

Le carré ci-dessus représente un gâteau que l'on souhaite découper en plusieurs morceaux.

1. On considère le « morceau » OMN. On pose ℓ = MN. Montrer que l'on a : aire de OMN = $\frac{1}{4} a \times \ell$.

2. On considère le « morceau » ONCP. On pose ℓ_1 = NC et ℓ_2 = CP.

a) En écrivant que l'aire de ONCP est égale à la somme des aires des triangles ONC et OCP, montrer que l'on a : aire de ONCP = $\frac{1}{4} a \times (\ell_1 + \ell_2)$.

b) Sous quelle condition (exprimée à l'aide de ℓ, ℓ_1 et ℓ_2) les morceaux OMN et ONCP ont-ils même aire ?

3. Déduire de ce qui précède une manière pratique de découper un gâteau carré afin d'obtenir des parts égales.

4.5. D'une manière générale, tout effort de formation suppose, de la part des personnes en formation, une activité régulière et soutenue de problématisation de cette partie du monde social ou naturel sur laquelle porte la formation. Cette exigence s'impose formellement tant au collégien qu'au lycéen ou à l'étudiant et vaut plus sûrement encore – ainsi que pour tout adulte en formation – pour le professeur en formation initiale ou continue. Dans tous ces cas, il semble indispensable de fixer un temps ***commun*** dévolu à la formulation écrite systématique, par chacun des membres du groupe de formation – y compris dans une classe de collège ou de lycée –, de ce qui aura pris pour elle ou lui l'apparence de ***questions vives*** au cours de la période passée. Un tel dispositif est le lieu d'un moment important de formation personnelle, qui donne à chacun l'occasion de se centrer mentalement sur l'expérience vécue des jours précédents : sauf à fuir la réalité, on ne peut manquer – au double plan de l'action et de la pensée de l'action – d'y repérer certaines difficultés effectivement rencontrées ou simplement anticipées à partir des situations du monde traversées.

1.3. Vivre dans la compagnie d'une question

a) Le chercheur, le citoyen, le professionnel de tel ou tel métier – métiers de l'enseignement et de la formation notamment – ont à vivre avec des problèmes *ouverts*, ou mal résolus, voire fréquemment *mal posés*. Il importe que les difficultés rencontrées soient identifiées et « travaillées » pour atteindre au statut de « problèmes de la profession », c'est-à-dire de problèmes *lancés à la profession*, et, dans le meilleur des cas, pris en charge par elle.

b) En s'efforçant de situer ainsi les problèmes rencontrés, on s'efforcera surtout d'apporter aux questions Q posées des réponses $R^{\heartsuit}$ qui seront *au cœur* de l'exercice du métier, du moins pendant *un certain temps*, jusqu'à ce qu'une révision – avec déconstruction et reconstruction subséquente – apparaisse souhaitable, voire indispensable : la réponse $R^{\heartsuit}$ sera alors redevenue une réponse $R^{\lozenge}$ parmi d'autres.

c) À l'habitus d'immédiateté aujourd'hui privilégié par l'école – problème posé, problème résolu –, on apprendra à substituer une culture du compagnonnage de longue durée avec un problème, tant pour soi que pour les élèves, à assumer un temps où la question posée est reconnue comme un problème *ouvert*, attendant une réponse qui n'émergera peut-être que tardivement, dans un processus où l'incertitude prévaut longuement.

5. Le temps de questionner, le temps de répondre

5.1. Le rituel des « questions vives de la période » – semaine ou quinzaine, par exemple – ne trouve pas sa fin en lui-même : il est bien entendu l'occasion pour chacun d'apporter son écot à l'effort ***collectif*** de formation. En faisant connaître la difficulté qui lui paraît la plus prégnante dans son expérience de formation récente, chacun contribue solidairement à nourrir et à réguler la dynamique partagée de la formation : faire connaître les difficultés que l'auto-analyse de sa pratique et de sa pensée met au jour est ainsi un ***devoir*** à l'endroit des formateurs comme du groupe en formation tout entier.

5.2. Cette contribution de chacun à la formation de tous ne saurait être annulée parce que, entre le temps où l'on a rencontré telle difficulté et le temps de sa formulation écrite, la question soulevée aurait été « réglée ». Pour deux raisons. D'une part, si l'on peut imaginer un instant qu'elle a été « réglée » pour le proposant, cette difficulté ne l'est sans doute pas pour chacun des membres du collectif en formation : oublier ce fait, ce serait, si peu que ce soit, s'enfermer dans un ***individualisme*** régressif (« ***ma*** question, la réponse à **ma** question, pour ***moi*** »), que tout éducateur doit aujourd'hui avoir à cœur de combattre ***en lui et autour de lui*** ; ce serait surtout oublier qu'une difficulté rencontrée dans l'exercice du métier doit être regardée comme un ***problème de la profession***, que l'on doit contribuer à faire reconnaître par la profession. D'autre part, en ce qui concerne plus particulièrement les professeurs en formation, ce serait se méprendre lourdement de croire qu'une question professionnelle, même d'apparence anodine, puisse faire l'objet d'une réponse définitive, qui embrasse ***l'ensemble*** des situations concrètes où cette difficulté pourra surgir : de fait, sa résurgence ultérieure ne manquera pas en général de faire apparaître la fragilité du « règlement » allégué ! La première vertu professionnelle, par-delà l'humilité qui en constitue la condition de possibilité, est le courage de tenir toute « réponse », même durement construite, pour ***provisoire***, révisable, promise à être un jour éventuellement proche ***déconstruite*** et ***reconstruite***.

5.3. Formellement, le travail du groupe de formation consistera donc à formuler des questions Q, à prendre connaissance collectivement de ces questions, puis à se lancer de manière concertée dans la construction de réponses R à certaines de ces questions au moins. Plusieurs exigences doivent à cet égard être soulignées. Tout d'abord, quelle que soit la question Q, on rencontre fréquemment autour de soi – voire « en soi » – des réponses toutes faites, $R^{\lozenge}$, souvent « estampillées » [7. De là la notation $R^{\lozenge}$ utilisée, que l'on lira « R poinçon »] par une institution I parfois influente et quelquefois même dominante, réponses qu'il convient de ***déconstruire*** afin même de ***reconstruire*** une réponse propre, que l'on pourra noter $R^{\heartsuit}$, sans bien sûr exclure la possibilité que cette reconstruction reprenne à l'identique, comme optimale, l'une des réponses $R^{\lozenge}$ disponibles dans la culture. Même si, en effet, on croit disposer de « bonnes » réponses R, il est nécessaire de ***réexaminer régulièrement ces réponses*** pour apprécier leur écart à l'optimum local, étant donné les conditions changeantes sous lesquelles le professionnel doit exercer son métier : tel est d'ailleurs le but de la formation « continue », ***qui ne vise donc pas seulement*** à aider à construire *ab ovo* des réponses à des ***questions nouvellement apparues*** mais qui a d'abord pour objet de relancer l'étude de questions anciennement « réglées » – parfois au prix d'un pur déni de problématicité ! On notera en passant que la différence la plus sensible entre professeurs débutants et professeurs « confirmés » tient a priori à ceci que, pour ces derniers, ***beaucoup plus*** de réponses R existent d'ores et déjà, ce qui rend normalement ***plus lourd*** le travail de déconstruction critique à opérer. Mais ce travail n'est pas moins ***fondamental*** pour un débutant qui, en dépit de son absence préalable de pratique, a pu absorber comme allant de soi ***une foule de réponses toutes faites***, parfois ***en fort décalage*** avec l'optimum, à des questions qu'il n'a jusque-là réellement ni rencontrées ni, à plus forte raison, ***étudiées***.

5.4. Une autre exigence cardinale mérite un commentaire spécifique : elle concerne la ***durée*** dans laquelle il convient d'inscrire l'étude de toute question, professionnelle ou autre. Contre l'habitus que tend à engendrer en chacun de nous une certaine culture scolaire – dont la vertu de ***patience*** n'est pas le fort, mais qu'il convient précisément de travailler à faire évoluer sur ce point –, la construction d'une réponse R à une question Q ne saurait être quasi « instantanée » : elle suppose une suite d'ébauches de réponse R_1, R_2, …, plusieurs fois reprises, « démontées », enrichies, élaborées à nouveaux frais, et qui, dans le meilleur des cas, ***sembleront « converger »*** vers une réponse « définitive » quoique hypothétique, R_∞. L'effort de formation requis tant des élèves que de leurs professeurs doit à cet égard s'inscrire en faux contre ***l'habitus d'immédiateté***, qui, intenable par nature, tend en outre à réduire *a priori* toute réponse espérée à un simple « truc » qui devrait se concevoir, s'énoncer et être mis en œuvre « simplement », « sans grands mots », « sans faire de chichis », selon les canons de toute épistémologie populiste, comme si les questions qui font la substance d'un cours de mathématiques ou du métier de professeur de mathématiques étaient tout en surface, comme dénuées de profondeur.

5.5. On notera enfin une conséquence de la non-immédiateté de la construction des réponses espérées : des activités d'étude et de recherche que l'attaque d'une question Q détermine, il est nécessaire de se donner des ***comptes rendus*** « complets », du moins non expurgés des éléments qui, pour le ou les rédacteurs, ***ne feraient pas sens immédiatement*** et dont, en vérité, plusieurs ne pourront porter fruit que ***dans la durée***, moyennant un patient travail de « rumination ». La chose vaut, concrètement, aussi bien dans un séminaire de formation de professeurs que dans une classe de collège ou de lycée – dont le professeur doit, de concert avec les élèves, gérer la ***mémoire didactique*** à l'aide notamment de ***bilans d'activités***.

1.4. Discipline professionnelle & formation

a) La *discipline professionnelle* que la profession doit construire et dans laquelle chaque professionnel doit se situer inclut en particulier une *discipline de formation*.

b) L'un des objets essentiels de la construction de cette discipline de formation est de contribuer au *développement de la profession*. Cette contribution doit dépasser les travaux de microdéveloppement auquel un professeur est tenu par le quotidien de la conduite de l'étude en classe. Elle doit s'élargir chaque année à des réalisations de *minidéveloppement*, en équipe, dont le TER demandé cette année est un premier spécimen d'un *geste professionnel important*.

c) La notion de *discipline* employée ici est précieuse : aucune activité humaine ne peut se poursuivre si, à terme, elle n'est pas réglée par une certaine discipline, c'est-à-dire par un ensemble de règles praxéologiques que l'on pourra analyser, évaluer, développer – en les simplifiant sur certains points, en les enrichissant à d'autres points de vue, en tout cas en les faisant évoluer.

d) La discipline exigée du professionnel de l'enseignement des mathématiques implique notamment le fait de se frotter de façon disciplinée à de multiples disciplines de connaissance, parmi lesquelles sans doute les mathématiques se taillent la part du lion – les mathématiques sont *le premier outil didactique* du professeur de mathématiques –, mais où le recours pertinent et maîtrisé à d'autres disciplines (physique, biologie, informatique, histoire, droit, psychologie, sociologie, etc.) apparaît fréquemment incontournable.

6. Discipline professionnelle & discipline de formation

6.1. Constamment, le professionnel de l'enseignement des mathématiques est confronté à des ***questions d'enseignement*** Q auxquelles il devra apporter, bon gré mal gré, une ébauche de ***réponse*** R, et cela en ***observant*** les réponses $R^{\Diamond}$ existantes, en les ***analysant***, en les ***évaluant***, en vue de ***développer*** la réponse $R^{\heartsuit}$ souhaitée, dont il assurera alors la ***mise en œuvre*** et (donc) la ***« publication »***.

6.2. De manière générale, tout professionnel qui n'est pas un pur exécutant est ***confronté régulièrement*** à l'exigence de développer, seul ou au sein d'un ***collectif*** de travail, des produits satisfaisant des ***spécifications*** choisies, notamment, pour affronter les ***conditions d'emploi*** qui lui sont imposées. S'agissant du professeur, l'exigence est celle de « développer » des ***produits didactiques***, telle une activité d'étude et de recherche (AER), satisfaisant des contraintes données. Semblable exigence se présente au professeur de manière récurrente au cours d'une année scolaire, relativement à une classe donnée : c'est en vérité ***chaque semaine*** que, « préparant son cours », il doit ainsi se livrer à des tâches de ***microdéveloppement***.

6.3. Le métier qu'il exerce pose notamment à tout professeur une foule de questions Q_T du type « Comment accomplir les tâches du type T ? », où T est un certain type de tâches – « didactiques » ou non. Un professeur débutant devrait idéalement pouvoir répondre ***à toutes ces questions*** $\boldsymbol{Q_T}$ ***à la fois*** [8. Dans le séminaire de didactique des mathématiques, la rubrique des « questions de la semaine » assume la fonction – sur laquelle on ne saurait trop insister – d'aider à faire émerger, chez les participants au séminaire, des questions ayant leur origine dans les difficultés de leur pratique enseignante effective ou de leur pensée de cette pratique, premier geste sans lequel on ne peut espérer engager le travail de déconstruction / reconstruction requis par la formation visée]. De fait, sauf à différer l'accomplissement des tâches du type T, il doit, *volens nolens*, apporter ***de fait*** des réponses « personnelles » $\mathfrak{R}_T$, réponses de première prise que, étudiant à nouveaux frais les questions Q_T, l'élève professeur devra accepter de ***déconstruire*** – en assumant, donc, de devoir y renoncer – pour les ***reconstruire*** ensuite à l'aide notamment des matériaux apportés par la formation à travers ses différents dispositifs.

6.4. Une réponse R est une réalité ***qui se construit*** et dont la construction, dans nombre de cas, demande ***un temps considérable***, contrairement à ce que peut laisser croire l'épistémologie scolaire traditionnelle où la plupart des questions soulevées reçoivent réponse dans les minutes qui suivent [9. Il n'en va pas ainsi, bien entendu, s'agissant des IDD et TPE : le temps d'un IDD ne doit pas être inférieur à 12 ou 13 semaines ; celui dévolu au TPE est d'environ 15 semaines. Voir la notice *Vers une nouvelle épistémologie scolaire*]. Il convient donc qu'un professeur apprenne à vivre avec un grand nombre de ***questions ouvertes*** et de réponses ***partielles***, ***insuffisantes***, qu'il lui faudra ***critiquer*** et ***déconstruire*** même lorsqu'il aura fini par s'y habituer – ce qui est sans doute le plus difficile mais ***le plus essentiel***. Cette ***discipline de formation***, qui s'impose en vérité à chacun, débutant ou chevronné, suppose notamment de se frotter, de manière plus ou moins approfondie, à une multiplicité de disciplines de connaissance. La liste de ces disciplines, avec lesquelles le professionnel doit nouer un commerce approprié sous le contrôle de la didactique [10. La didactique est la science de la diffusion – scolaire et non scolaire – des praxéologies] est *a priori* ouverte : elle comporte certainement de l'histoire, du droit, de la psychologie sociale, de la sociologie, etc. Pour le professeur de mathématiques, bien sûr, l'une des ressources essentielles se trouvent, à côté des disciplines auxquelles sa discipline est scolairement affine (physique et chimie, biologie, technologie, etc.), dans les ***mathématiques*** elles-mêmes, lesquelles apportent régulièrement au professeur, par certains de leurs développements, une intelligibilité propre et des ressources spécifiques quant à l'enseignement des thèmes mathématiques dont l'étude est prescrite par le programme de la classe. En ce sens, le professeur de mathématiques n'a jamais fini d'étudier des mathématiques – même si, en trop de cas, il doit ***commencer*** à étudier des disciplines dont il croyait naïvement pouvoir faire l'économie !

6.5. La ***discipline professionnelle*** intègre ainsi l'exigence de se soumettre de façon continuée à une ***discipline de formation*** rigoureuse. Cette discipline gagne à aller au-delà des pratiques de microdéveloppement déjà mentionnées : ***chaque année***, le bon professionnel doit, pour améliorer significativement la qualité de son enseignement, se mesurer à un petit nombre d'objectifs de

minidéveloppement – même s'il s'engage par ailleurs, en général ***en équipe***, dans un travail de ***macrodéveloppement***. Au lieu donc de consacrer ***quelques heures*** à un tel travail, ainsi qu'il en va usuellement en matière de microdéveloppement, il mobilisera alors ***quelques dizaines d'heures*** à la résolution d'un problème d'***ingénierie didactique*** sur lequel il souhaite progresser. C'est notamment dans ce registre du minidéveloppement que se situe le travail présenté dans le ***mémoire professionnel*** réalisé au cours de la deuxième année d'IUFM : ce travail relève donc d'un type de tâches ***qui s'intègre normalement, chaque année, au travail du professeur***. D'une manière globale, le travail d'étude et de recherche à réaliser est ainsi un ***geste professionnel*** appelé à être ***reproduit année après année*** – et non un geste « terminal » qu'on accomplirait une fois et une seule dans sa vie professionnelle.

2. Observation & analyse

2.1. Une séance en classe de 2de

a) On entame ici l'analyse d'une séance en classe de 2de à propos des fonctions. On dispose pour cela tout d'abord d'un compte rendu écrit intitulé *À propos des fonctions*, ensuite d'une vidéo de la séance.

b) Observée en février 2006, cette séance est la seconde partie d'une session de travail de deux heures, coupée par une pause brève. Lors de la première heure (non observée), la classe a réalisé un travail de *synthèse* à propos de la propriété de *croissance* d'une fonction.

c) Dans ce qui suit, on effectue un premier examen, linéaire, du compte rendu d'observation. Une lecture silencieuse préalable permet de se convaincre de la qualité du travail réalisé par la professeure observée : celle-ci conduit avec assurance une classe « disciplinée », et cela au double sens du terme, c'est-à-dire *tout à la fois* du point de vue de la *civilité* et du point de vue *de l'activité mathématique* elle-même, l'un n'étant guère séparable de l'autre (une « discipline » de fer pour ne rien en faire du point de vue mathématique serait d'un piètre intérêt).

2.2. Relancer le travail

a) Le démarrage de la séance est décrit ainsi dans le compte rendu.

Les élèves entrent en classe silencieusement, quelques secondes avant 10 h 10. Tout le monde est en place. P : « On reprend… On était en train de faire la synthèse sur la variation de *f*. On vient de faire la synthèse sur *f* croissante. Je vous demande de réfléchir à ce qu'on va mettre sur *f* décroissante. »

---

b) On notera que le langage utilisé ici est quelque peu familier. Là en effet où la professeure parle de « synthèse sur la variation de *f* », il conviendrait de parler de la « synthèse relative à la *notion* de variation d'une fonction ». D'une façon générale, un professeur doit veiller à ne pas employer un langage trop familier, qui peut produire une « érosion » des concepts. Même si cela donne parfois un langage « bétonné », il faut être attentif à ne pas simplifier exagérément le propos par des *implicites* trop nombreux, qui diminuent les possibilités de compréhension et finissent par crypter le discours.

c) On ignore comment s'est passé le travail de synthèse sur la notion de *croissance*. Il est sûr toutefois que le travail de synthèse relatif à la notion de *dé*croissance va bénéficier de ce travail préalable. La chose est parfaitement normale : c'est le contraire qui serait anormal, à moins bien sûr que les deux cas – croissance, décroissance – ne soient fortement hétérogènes et supposent donc des traitements très différents.

d) La consigne par laquelle la professeure lance le travail – « Je vous demande de réfléchir à ce qu'on va mettre sur f décroissante » – empiète un peu sur ce que serait le *topos* « idéal » des élèves, lequel supposerait une consigne « antécédente », du type « Je vous demande de réfléchir à ce qu'on va mettre dans la synthèse, et en particulier à ce par quoi on pourrait commencer » – demande appelant de la part des élèves la suggestion de donner d'abord une définition de la notion de fonction décroissante. Cela noté, la construction de la synthèse est toutefois conduite selon un principe de collaboration poussée avec les élèves – et non d'élaboration unilatérale de la part de la professeure.

2.3. Quelle définition ?

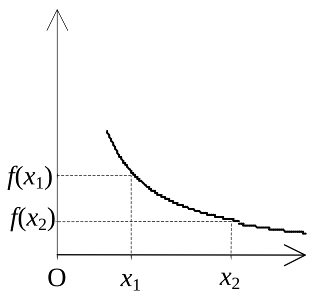
a) Le compte rendu décrit de la façon suivante le premier travail effectué.

Silence profond. Il est 10 h 11. P attend. Puis : « Avez-vous une définition à proposer ? » Silence. « Qui se lance ? » Elle sollicite un élève : « Je t'écoute. » L'élève s'exprime à voix basse. Après un échange, P écrit :

> Une fonction est décroissante sur un intervalle I
> si pour tous nombres réels x_1 et x_2 de I tels que
> $x_1 < x_2$

P s'interrompt et interroge : « On a quoi ? » Silence. P relance. Une élève, sollicitée, répond enfin : « $f(x_1) \geq f(x_2)$. » P demande : « Tout le monde est d'accord avec ça ? » Des élèves évoquent l'inégalité contraire : $f(x_1) \leq f(x_2)$. P : « Quand x_1 devient x_2, il augmente ; que fait l'image ? » Un élève : « Elle diminue. » La conclusion est finalement mise par écrit :

> Une fonction est décroissante sur un intervalle I
> si pour tous nombres réels x_1 et x_2 de I tels que
> $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \geq f(x_2)$



En réponse à une demande d'une élève, P explicite les deux situations envisagées : quand f est croissante et que x augmente, alors y augmente ; quand f est décroissante et que x augmente, alors y diminue. Puis elle dessine au tableau un schéma illustratif (ci-contre), avant de poursuivre : « Autrement dit ? » Elle sollicite la classe : « Qu'est-ce qu'on peut dire ? Comment on avait formulé ça pour les fonctions croissantes ? » Silence. Un élève s'enhardit : « Elles conservent l'ordre. » P approuve : « Et les fonctions décroissantes ? » Une élève : « Elles renversent l'ordre. » P reprend oralement son affirmation, puis l'écrit :

> Une fonction décroissante
> renverse l'ordre (des nombres et leurs images
> sont rangés dans l'ordre inverse)

---

b) Rappelons qu'une synthèse « raconte l'histoire à l'envers ». Dans la chronique mathématique de la classe, il a dû y avoir un temps où la notion de croissance (par exemple) a surgi comment expliquant tel ou tel phénomène observé ; où cette notion ne pouvait être énoncée encore qu'avec des mots approximatifs – par exemple par des formulations (non définitives) du type « Plus c'est haut là, plus là aussi c'est haut », etc. Ici, l'observateur arrive après la bataille. La classe est dans un moment didactique plus serein (qui contraste avec d'autres moments, celui de la première rencontre, notamment), exigeant sans doute moins d'énergie et de combativité mathématiques.

c) La formulation de la définition que la professeure inscrit au tableau est décrite comme issue d'un dialogue avec une élève, dont la réponse fait l'objet d'une brève mise en débat de la part de quelques élèves. Tout cela, qui pourrait être factice, fruit insipide du décodage par les élèves des attentes de la professeure, apparaît ici authentique – le dialogue est un vrai dialogue, où l'on ne perçoit guère de simples réponses de convenance.

d) Cela noté, toutefois, deux points doivent être soulignés à propos de la formulation mise au tableau (« Une fonction est décroissante sur un intervalle I si pour tous nombres réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \geq f(x_2)$ »). Tout d'abord, il est peu douteux que la professeure prête ici ses mots – et son orthographe – aux élèves : il n'y a là une production *de la classe* que fortement relayée par la professeure ! Ensuite et surtout, cette formulation est sans doute trop solitaire : pour convaincre les élèves du fait que, si « $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \geq f(x_2)$ », la professeure recourt spontanément à une formulation *en mots*, sous la forme d'une question à laquelle répond une élève (« "Quand x_1 devient x_2, il augmente ; que fait l'image ?" Un élève : "Elle diminue." »). Une fois la définition écrite au tableau, elle doit encore la défendre en explicitant « les deux situations envisagées : quand f est croissante et que x augmente, alors y augmente ; quand f est décroissante et que x augmente, alors y diminue. » Manifestement, les formulations verbales employées ici constituent une *transition indispensable* entre, d'une part, les formulations hypothétiques évoquées plus haut (« Plus là ça monte, et plus là ça baisse »), et, d'autre part, la formulation « formelle » jetée au tableau (« Une fonction est décroissante sur un intervalle I si pour tous nombres réels x_1 et x_2… »). Sans doute aurait-il fallu d'abord consigner par écrit dans la synthèse de telles formulations intermédiaires (« Quand f est décroissante et que x augmente, alors y diminue ») et ne poser qu'alors le problème de leur traduction en langue mathématique formelle. Le fait que la professeure ne l'ait pas fait peut s'expliquer de diverses manières – peut-être, par exemple, parce qu'elle regarderait ces formulations comme de simples commentaires, que l'on peut toujours mobiliser à l'oral, mais qui n'appellent pas une mise par écrit. Mais on retiendra surtout de cela la difficulté qu'un professeur éprouve généralement à *résister à la pression de la culture dans laquelle il a reçu mission de faire entrer les élèves*, alors pourtant qu'il conviendrait de différer et de réguler cette entrée dans la culture mathématique, afin d'assurer aux élèves de meilleures conditions d'intelligibilité de découvertes toujours renouvelées.

e) La fin du passage du compte rendu examiné ici a trait à l'effet d'une fonction sur l'ordre. Il ne va pas de soi *a priori*, on l'a déjà noté, que le phénomène s'énonce, *mutatis mutandis*, de façon homologue au phénomène examiné dans la première période de travail à propos des fonctions *croissantes*. On dispose ici de peu de détails : une élève propose une formulation (une fonction décroissante renverse l'ordre) que la professeure reprend par écrit sans changement. Le vocabulaire employé est en fait exactement celui du programme de 2de (qui offre ce commentaire : « On soulignera le fait qu'une fonction croissante conserve l'ordre, tandis qu'une fonction décroissante renverse l'ordre… »), ce qui peut laisser penser que le travail préalable à la synthèse a eu un effet de mise en cohérence du vocabulaire – le programme de 3e énonçant, lui, que les nombres *ab* et *ac* « sont dans le même ordre que *b* et *c* si *a* est strictement positif, dans l'ordre inverse si *a* est strictement négatif ». On notera surtout que, cette fois, la professeure explicite la formulation employée, en écrivant que les images de nombres par une fonction décroissante « sont rangées dans l'ordre inverse) ». On soulignera enfin que le contenu de la synthèse n'est pas le fait de la professeure seulement : la classe joue son rôle dans sa constitution, comme en témoigne l'échange entre la professeure, un élève – qui, précise le compte rendu, « s'enhardit » à prendre la parole sur le point examiné – et une élève qui propose la formulation que retiendra finalement la professeure.

f) On notera encore que, par rapport à un certain vocabulaire (non employé dans ce séminaire, sauf exceptions), la synthèse observée constitue « la leçon » (ou, comme disent les textes officiels, « le cours proprement dit »). Elle *n'est pas* préparatoire à une « leçon » qui serait encore à venir ; elle *est* la « leçon » même. La « leçon du professeur » d'antan, où le professeur dictait en regardant ailleurs, disparaît ici pour faire place éventuellement, plus tard, au « travail »de la synthèse (lequel participe du « travail de l'organisation mathématique »). Une manière d'accomplir ce travail consisterait par exemple à demander aux élèves d'examiner les pages de tel manuel (celui de la classe, ou un autre, proposé par le professeur) sur le sujet étudié, afin de confronter la « leçon » du manuel à la synthèse élaborée par la classe, pour y repérer d'éventuels « oublis », des anomalies, voire des erreurs, etc., et, en fin de compte, pour *évaluer* la synthèse due à la classe, avec pour conséquence un travail complémentaire de *développement* (qui peut consister, en certains cas, en une simple *retouche* de la synthèse réalisée).

2.4. Aspects graphiques

a) La suite du compte rendu montre alors la classe s'affairant sur la synthèse des propriétés *graphiques* des fonctions décroissantes. La transition vers ces aspects graphiques est conduite *motu proprio* par la professeure, après cependant un semblant de relance du dialogue autour des contenus à faire figurer dans la synthèse. Bien entendu, ces aspects, on l'a dit, ont été présents de façon insistante, quoiqu'un peu implicite, depuis le début de la synthèse ; ce que la professeure s'autorise donc à imposer sans plus de façon, c'est le fait que la classe leur consacre *maintenant* un développement propre au sein de la synthèse. Elle lance l'opération, en s'arrêtant bientôt pour chercher la participation des élèves.

P : « Des questions ? » La classe reste silencieuse. Il est 10 h 19. P : « Au niveau des remarques comme tout à l'heure, qu'est-ce qu'on a à dire ? Une fonction décroissante… » Elle écrit :

> Remarques
> • graphiquement, une fonction décroissante
> est représentée par une courbe qui « descend »
> • si pour tous x_1, x_2 de I
> tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) > f(x_2)$

P : « Qu'est-ce qu'on peut dire ? » Elle sollicite une élève, qui dit n'avoir pas fini de recopier. P insiste : « Je voudrais que tu termines la phrase. L'élève se lance : « Alors la fonction *f* est strictement décroissante. » P approuve et écrit :

> Remarques
> • graphiquement, une fonction décroissante
> est représentée par une courbe qui « descend »
> • si pour tous x_1, x_2 de I

tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) > f(x_2)$
alors la fonction *f* est strictement décroissante

Il est 10 h 22. Les élèves recopient.

---

b) On notera que l'élève sollicitée pour répondre, et qui rejette d'abord cette sollicitation au motif qu'elle n'a pas fini « de recopier », n'est pas pour autant dispensée de répondre. La professeure insiste et obtient de l'élève la réponse attendue. Il y a là une double exigence à souligner dans la gestion de classe. Tout d'abord, l'élève est interpellée non dans sa singularité personnelle, mais en tant que citoyenne de la classe – en tant, donc, que « singulier universel ». Elle *doit* répondre, fût-ce pour dire son ignorance. Ensuite, cette interaction sert à chacun de pierre de touche : chaque élève peut – silencieusement – confronter son point de vue à la réponse de l'élève interrogée, avant de valider ou au contraire de remettre en question sa propre ébauche de réponse devant la réaction de la professeure. Une telle interaction duelle dans la classe ne se limite ainsi nullement à sa partie visible : elle constitue un dispositif didactique important, que l'on doit se garder de rabattre sur les seuls protagonistes « officiels » de l'échange – l'élève interrogé, le professeur. Il en sera d'autant moins ainsi que, loin de valider ou d'invalider immédiatement la réponse reçue de l'élève, le professeur la mettra en débat dans la classe, en alternant aléatoirement au fil des échanges les formulations employées, demandant tantôt « Qui est d'accord ? », tantôt « Qui n'est pas d'accord ? », de façon à ne pas induire une réponse plutôt qu'une autre.

c) « Les élèves recopient » : notons, là encore, le caractère tranquille de l'activité de la classe en cet instant. Recopier appelle sans doute une certaine attention ; mais cela peut avantageusement prendre place pendant les « petites heures » de la semaine – le vendredi de 15 h à 16 h, par exemple.

2.5. Tableau de variation(s)

a) Contrairement à l'épisode précédent, le sujet de l'épisode que rapporte ensuite le compte rendu écrit est en apparence proposé par une élève : la synthèse va maintenant porter sur ce qui concerne le *tableau de variation* d'une fonction.

Il est 10 h 22. Les élèves recopient. P : « Ensuite, de quoi est-ce qu'on peut parler ? » Une élève : « Du tableau de variation. » P écrit :

3) Tableau de variation

P : « Qu'est-ce que c'est, le tableau de variation ? » Silence absolu. P : « À quoi ça sert ? Comment on le construit ? » Elle échange avec un élève, puis écrit :

Un tableau de variation indique le sens
de variation d'une fonction sur son ensemble
de définition

Elle enchaîne, en commentant le tableau qu'elle construit :

x	
$f(x)$	

P interroge la classe à propos des variations de *x* : « De quelle valeur à quelle valeur ? » Les élèves : « Ensemble de définition de la fonction. » P complète le tableau :

x	ensemble de définition
f(*x*)	sens de variation

---

b) Le premier point à souligner est sans doute celui-ci : bien qu'elle soit formulée par la professeure, la question des raisons de dresser un « tableau de variation » est réellement posée. Ou plutôt, après une question de *structure* (« Qu'est-ce que c'est, le tableau de variation ? »), la professeure passe à une question de *fonction*, interrogeant la classe sur les raisons d'être de la structure (« À quoi ça sert ? »), avant de soulever une question « mixte » (« Comment on le construit ? »).

c) L'échange à ce propos se fait avec un élève ; même si le contenu de l'échange n'est pas entendu de chacun, le fait que de cet échange puisse découler ce que la professeure écrit alors au tableau (« Un tableau de variation indique le sens de variation d'une fonction sur son ensemble de définition ») permet à la professeure (à l'instar du fait de demander à un élève d'aller au tableau) de « sentir » la classe, de demeurer en contact organique avec elle, de ne pas laisser croître la distance entre son discours et son faire, d'une part, et le vécu des élèves, d'autre part. C'est là un type de dispositifs discrètement mais réellement essentiels à une bonne convivialité didactique dans la classe.

d) On notera que les raisons d'être avancées sont fort courtes : que le tableau de variation montre… le sens de variation ne dit pas pourquoi il serait utile de représenter par un *tableau* l'information obtenue à cet égard. Pourquoi ne pas dire tout simplement, par exemple, que, « sur l'intervalle [–10 ; 4], la fonction étudiée, qui vaut 2 en *x* = –10, croît strictement jusqu'à *x* = –5 (où *f* prend la valeur 21) et qu'ensuite elle décroît strictement jusqu'à *x* = 4 (où elle prend la valeur 12) » ? Les travaux historiques et anthropologiques consacrées à la question de l'usage des tables ou tableaux montrent qu'il s'agit là d'outils qui ne peuvent apparaître que dans un contexte d'usage de l'écriture – et non dans les sociétés où l'oralité serait primaire. Le passage du petit *discours* précédent au *tableau* ci-après ne saurait donc être considéré comme spontané.

x	–10		–5		4
f(*x*)	2	↗	21	↘	12

Ce passage mériterait ainsi d'être davantage travaillé dans la classe, à partir par exemple de la question « Comment faire connaître à peu de frais, autrement que par un discours explicite, les variations d'une fonction sur un intervalle ? »…

e) On doit ajouter encore que l'objet « tableau de variation » ne se situe pas dans le même registre que l'objet « fonction » ou l'objet « fraction » par exemple. Alors en effet que ces derniers ont, dans le programme, le statut d'*objets d'étude*, c'est-à-dire d'objets mathématiques à étudier, le tableau de variation est seulement un *outil d'étude*, qu'on n'étudiera que dans la mesure où il le faut afin de s'en servir adéquatement pour étudier autre chose – ici, une fonction. Alors qu'il existe une « théorie des fonctions », il n'existe pas de « théorie des tableaux de variation » : on dit parfois d'un tel objet qu'il est

« paramathématique », et non pas à strictement parler mathématique – il s'agit d'un outil didactique qui vient s'intégrer, en fin de compte, à l'organisation mathématique elle-même. (Bien entendu, il existe toujours, dans un enseignement, le risque de « sur-mathématiser » un objet paramathématique, en en conduisant l'étude mathématique bien au-delà de ce qui serait utile.) Historiquement, la notion de tableau de variation semble être le fruit d'un besoin ressenti dans l'enseignement secondaire, dont la satisfaction a pu passer au fil du temps par diverses étapes, avec des formes de tableau qui, en même temps qu'un code d'écriture et de lecture de ces tableaux se mettait en place, ont convergé peu à peu vers une forme aujourd'hui plus ou moins bien partagée. Sa « recréation » en classe doit évidemment mettre en avant au moins certains des besoins qui l'ont historiquement engendrée.

f) Deux questions peuvent être soulevées à propos du vocabulaire et des notations employées par la professeure. La première question se présente comme un problème d'orthographe : doit-on écrire « tableau de variation » ou « tableau de variation*s* » ? Doit-on parler de *la* variation d'une fonction sur un intervalle ou *des* variations d'une fonction sur un intervalle ? Il semble qu'il y ait là une difficulté liée plus largement à l'emploi du mot « variation » en français, où s'observe une certaine instabilité dans l'usage du singulier et du pluriel, avec sans doute une préférence « moderne » pour le pluriel. Les occurrences de « variation » dans l'actuel programme de 2$^{\text{de}}$ (et son document d'accompagnement) sont ainsi les suivantes.

PROGRAMME

Capacités attendues

Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe.

Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation.

Commentaires

S'il s'agit des courbes, on distinguera celles pour lesquelles, par convention, l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique.

Capacités attendues

Établir le sens de variation et représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$.

THÉMES D'ÉTUDE

Calcul et fonctions

– Étude détaillée d'un exemple concret de fonction (tarifs téléphoniques, montant de l'impôt en fonction du revenu) : lecture de texte, représentation graphique, variations.

– Construction, prévision des variations de la somme ou différence de fonctions données par leurs représentations graphiques (on pourra se servir de la demi-somme, plus facile à construire, pour prévoir les variations de la somme).

– Fonction affine par morceaux conforme à un tableau de variation ou un tableau de valeurs et problèmes d'interpolation linéaire.

DOCUMENT D'ACCOMPAGNEMENT

Le programme rassemble sous un titre unique un bilan sur les ensembles de nombres, les problèmes de calcul numérique et algébrique et l'étude des fonctions. C'est une invitation forte à chaque enseignant pour qu'il construise son cours en faisant interagir ces divers éléments : calcul numérique ou littéral et recherche d'images, résolution d'équations par le calcul ou dans un environnement graphique, de façon approchée ou exacte, ordre entre les nombres et variations de fonctions, etc.

À propos de fonction définie par une courbe, il importe que les élèves sachent lire de façon critique l'information contenue dans la courbe (lectures approchées d'images et d'antécédents, ou lectures exactes dans certains cas précisés par le graphique, variations, etc.) ; on pourra convenir ici que l'information sur les variations est exhaustive et on montrera la nécessité d'une telle convention à l'aide de courbes tracées avec un grapheur à partir d'une formule (des changements de fenêtre peuvent modifier l'allure de la courbe : mais il ne s'agit plus là de fonction définie par une courbe).

On portera une attention particulière à la maîtrise de la notation $f(x)$, où le parenthésage va à l'encontre de certaines notations du calcul algébrique. Quant à la compréhension de la notation f, c'est un objectif à plus long terme : il est approché en seconde par l'accumulation d'exemples nombreux et variés, par l'étude des variations d'une fonction (avec la prise en compte de tout un ensemble de valeurs) et par l'étude des premières fonctions de référence.

Ce constat pourra conduire à choisir de parler *des* variations d'une fonction sur un intervalle, et à dresser son tableau de variations sur cet intervalle. (La logique voudrait alors qu'on parlât, à l'instar de certains auteurs, du « sens *des* variations » de la fonction sur l'intervalle.) On se rappellera en tout cas que, à un niveau d'étude plus élevé, certes, on définit *la* variation (totale) d'une fonction f sur un intervalle compact I comme étant la borne supérieure $V_I(f)$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ des sommes $\sum_{i=0}^{n-1} |f(c_{i+1}) - f(c_i)|$, où $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ parcourt l'ensemble des subdivisions de I. Si $V_I(f) \in \mathbb{R}$, on dit que f est *à variation bornée* ; et on démontre alors qu'elle peut s'écrire comme la différence de deux fonctions… croissantes.

g) La seconde question concerne un choix de notation : doit-on, dans un tableau de variations, écrire $f(x)$ ou f, tout court ? La réponse à cette question se nourrit de deux ordres de considérations. À l'oral, on dira par exemple que « lorsque x augmente entre –10 et –5, $f(x)$ augmente ». Ici, c'est bien la valeur variable $f(x)$ qui augmente : la fonction f, elle, *n'augmente pas !* Cela justifie que l'on écrive $f(x)$ dans la seconde ligne du tableau de variations, du moins si on lit le tableau (voir ci-après) comme on vient de le faire –en disant par exemple que, « lorsque x augmente (ou croît) entre –10 et 5, $f(x)$ diminue (ou décroît) ».

x	–10		–5		4
$f(x)$	2	↗	21	↘	12

Bien entendu, on pourra lire aussi ce tableau en disant que « sur l'intervalle [–10 ; –5], la fonction f est croissante », etc. Cela justifiera alors qu'on écrive f, et non pas $f(x)$, dans la seconde ligne du tableau. Mais il y a là une difficulté dont il faut être bien conscient. Dire que « lorsque x augmente entre –10 et –5, $f(x)$ augmente » ne suppose pas encore le *concept* de fonction, mais seulement, si l'on peut dire, celui de « lien fonctionnel » (entre x et $y = f(x)$) qui, à une valeur x, associe une valeur $f(x)$, sans qu'on puisse encore attribuer de propriétés à cette « association ». C'est ainsi que, au collège, à un nombre $x \geq 0$ est associée sa racine carrée $\sqrt{x}$, sans qu'on dise rien encore sur la *fonction* « racine carrée » : ce n'est que plus tard qu'on verra qu'on peut définir une telle fonction de façon à ce qu'elle soit continue, dérivable, etc. (La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ si la troisième décimale dans le développement propre de x est paire, $= -\sqrt{x}$ sinon, vérifie par exemple $f(5) = \sqrt{5}$, mais $\lim_{x \to 5_-} f(x) = -\sqrt{5}$: elle n'est donc pas continue ; et il est facile de voir qu'elle n'est ni croissante, puisqu'on a par exemple $f(1{,}234) > f(1{,}235)$, ni décroissante, puisque par exemple $f(1{,}234) < f(1{,}236)$.) De la même façon, on associait autrefois à un nombre $x > 0$ son logarithme (décimal), $\log x$: chaque réel strictement positif avait ainsi *son* (nombre) logarithme, sans que soit considérée pour autant une *fonction* « logarithme » ! Bien entendu, ce qui doit advenir au lycée, c'est bien *ce* *concept de fonction*, qui fait des simples « associations » évoquées jusqu'ici *des entités mathématiques de plein droit*, jouissant (ou non) de certaines propriétés, croissance, continuité, dérivabilité, convexité, etc. Mais c'est là pour le professeur un problème didactique qu'il ne peut espérer résoudre par magie en substituant f à $f(x)$ avec un joli mouvement du mention pour signifier que cela seul est rigoureux. On a vu plus haut, au reste, une mise en garde du document d'accompagnement du programme de 2[de] qui rejoint cette remarque essentielle : on la reproduit à nouveau.

> Quant à la compréhension de la notation f, c'est un objectif à plus long terme : il est approché en seconde par l'accumulation d'exemples nombreux et variés, par l'étude des variations d'une fonction (avec la prise en compte de tout un ensemble de valeurs) et par l'étude des premières fonctions de référence.

2.6. Fin de la synthèse

a) La synthèse va prendre fin – provisoirement. La technologie et la technique de construction d'un tableau de variations semble « bien connue » dans la classe : l'échange se déroule, apparemment, de la meilleure façon possible.

P : « Comment on remplit ce tableau ? » Un élève répond ; P note au tableau :

• On indique les valeurs de x pour lesquelles
la fonction change de sens
•

P s'arrête : « Et ensuite qu'est-ce qu'on fait ? Une fois qu'on a trouvé les valeurs ? » Une élève répond. « Très bien », dit P, qui écrit :

• On indique par une flèche ↗
que la fonction est croissante

et par ↘ que la fonction est décroissante

---

b) Il se peut, certes, que les élèves – la classe – ne fasse que reprendre, *ne varietur*, des formulations déjà pratiquement figées. Mais on notera alors qu'il n'est pas indésirable que la synthèse s'achève ainsi dans un climat de connivence mathématique entre la professeure et les élèves.

2.7. S'exercer ?

a) La classe passe alors à un temps *d'exercices*, phase du travail qui peut toujours réserver des surprises. Il se peut en effet que, alors même qu'on croyait être « au point » après la synthèse, on découvre que « ça accroche encore », et cela soit parce que les techniques et les formulations technologiques à manier accrochent *entre les mains de certains élèves* (ou peut-être de tous ou presque), soit parce *qu'elles accrochent tout court* – comme une poêle accroche.

Il est 10 h 28. La classe est toujours profondément silencieuse ; les élèves notent. P relance l'action : « On va faire quelques exercices maintenant pour appliquer ce qu'on vient de voir.

Vous prenez votre livre page 97. Vous classerez ça dans la partie “Exercices”. » Léger brouhaha. Les élèves ouvrent leur manuel. P a écrit :

Exercice 49 p 97

P : « Allez ! Exercice 49 page 97. Il y a un certain nombre de questions. On vous demande le tableau de variation de *f*, de *g*… Allez, chacun fait son travail ! » Puis, s’adressant à un élève : « Tu n’as pas de livre, toi ? » Elle reprend la consigne : « Vous cherchez, vous faites le tableau de variation de *f*, de *g*. » Il s’agit d’établir le tableau de variation à partir de la donnée de la courbe et de certaines valeurs de *f*.

Il est 10 h 31. La classe travaille en silence. P, à une élève qui l’interroge : « Oui, un tableau avec des flèches, c’est un tableau de variation. » Plusieurs élèves, tour à tour, sollicitent P. Certains travaillent à deux, en échangeant à voix basse. P vient dire à une élève de travailler seule : « Suis les étapes, ça te permet d’organiser ta pensée : tu fais le tableau, etc. »

Il est 10 h 35. P circule, s’arrête, prodigue des conseils. Elle examine le travail d’une élève, semble l’approuver ; finalement, elle propose à l’élève d’aller au tableau, mais celle-ci ne réagit pas. P s’arrête alors auprès d’une autre élève pour qui elle explicite les tâches demandées – déterminer l’image de – 1 par la fonction *f*, etc. Puis elle revient à la charge auprès de la première élève, qui va enfin au tableau, où elle dresse le tableau suivant :

x	-1		2		5		7
$f(x)$	10	$\searrow$	-6	$\nearrow$	10	$\searrow$	-4

L’élève s’en retourne aussitôt à sa place, sans avoir prononcé un mot. P qui circulait dans la classe la renvoie au tableau pour qu’elle « explique » ce qu’exprime le tableau : ça décroît de –1 à 2, etc. P interroge la classe : « Qui a trouvé ça ? » Une élève s’exclame à voix basse qu’elle s’est trompée. P n’y prête pas attention et envoie un nouvel élève au tableau.

x	$-\infty$		2		7
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	10	$\searrow$	2

Cela fait, l’élève se signale à P, qui circulait dans la classe – et qui lui demande d’« expliquer ». L’élève s’exécute avec l’aide de P, qui lui fait effacer l’indication « –∞ », car, dit-elle, « on sait qu’elle croît, mais à partir de quoi, on ne sait pas ».

---

b) On doit noter que le passage de la synthèse aux exercices va de pair avec le passage d’un travail *collectif* à un travail momentanément tout *personnel* – un fait sur lequel la professeure insiste, par exemple en s’inquiétant de ce que tel élève n’a pas avec lui son manuel, mais aussi bien par des exhortations tout à fait explicites : « Allez, chacun fait son travail ! » (Un peu plus tard, de même, la professeure indiquera à un élève : « Suis les étapes, ça te permet d’organiser ta pensée : tu fais le tableau, etc. ») Chacun des élèves est fermement invité à accomplir la tâche demandée – dont on ne connaît pas le détail, mais dont le *type* est précisé par le compte rendu : « Il s’agit d’établir le tableau de variation à partir de la donnée de la courbe et de certaines valeurs de *f*. »

c) La question d’une élève à propos du tableau de variations, que révèle la réponse apportée par la professeure (« Oui, un tableau avec des flèches, c’est un tableau de variation »), rappelle que la familiarisation avec les objets composant un paysage nouveau n'est pas instantanée : par leurs doutes, leurs incertitudes, les élèves en train d'apprendre, de découvrir, ramènent le professeur à une vision « de surface » qu'il pouvait croire dépassée. Notons à cet égard que l'injonction adressée à une élève et que l'on a commentée déjà – « Suis les étapes, ça te permet d'organiser ta pensée : tu fais le tableau, etc. » – suppose que la technique à mettre en œuvre, quoique encore mal maîtrisée, on vient de le voir, soit à la portée de l'élève travaillant en autonomie didactique, ce à quoi la professeure renvoie explicitement les élèves.

d) On soulignera à nouveau, positivement, l'attitude de la professeure qui, très calmement, ne cède pas sur ses demandes, comme il en va avec cette élève qui d'abord décline l'invitation à aller au tableau, avant d'y consentir devant l'insistance de la professeure. Cette insistance va bien au-delà de la simple obéissance à un ordre abstrait – aller au tableau. Elle a pour objet le contenu du travail mathématique lui-même : ce travail suppose, dans le contexte du travail de la classe, la production d'un commentaire, à laquelle l'élève réticente ne coupera pas. Le compte rendu est certes peu explicite sur le contenu du commentaire ; mais si on le suit à la lettre (« ça décroît de –1 à 2, etc. »), on voit que, à ce moment de la vie de la classe, ce qui augmente (ou diminue) n'est pas encore clairement nommé. *Ça* décroît, dit l'élève, non corrigée par la professeure. Ce qui décroît, est-ce $f(x)$? Est-ce f ? De quoi parle-t-on et comment le dire ? Le voile jeté sur l'affaire, la métaphore cinématique usitée sont des preuves de plus que quelque chose est encore en construction dont les contours ne sont pas stabilisés. (Lorsque plus tard on dira, en première, « la dérivée de f est négative, donc "ça" décroît », on sera placés dans un autre cadre, qui, ici, n'est pas complètement constitué ni à plus forte raison institué.)

e) L'exigence « disciplinaire » affirmée par la professeure à l'endroit de l'élève qu'elle a contrainte à revenir au tableau porte ses fruits dans l'interaction avec l'élève suivant, appelé pour traiter le cas de la fonction g de l'« exercice ». Celui-ci recherche en effet de lui-même l'attention de la professeure, afin de lui présenter son commentaire du tableau qu'il vient de dresser silencieusement. On voit ainsi comment le « travail » de la professeure aboutit ici à *déplacer un peu* la frontière du *topos* des élèves, lesquels feraient valoir spontanément, sinon, leur prétendue illégitimité (intéressée) à produire un commentaire, forme de « production » qui, dans les contrats didactiques courants, relève semble-t-il exclusivement du *topos* du professeur.

f) La rectification portant sur l'indication du comportement à l'infini de g est imposée par la professeure. On peut supposer que celle-ci a découvert le problème *hic et nunc*, en examinant le tableau dressé par l'élève. Instruite par cette expérience, elle pourra à l'avenir soit éviter que ce genre de situations ne se reproduise (en neutralisant le phénomène par un remaniement approprié de l'énoncé), ce qu'elle aurait dû faire ici peut-être, soit conduire avec la classe une interaction mieux partagée – c'est elle, ici, qui à la fois identifie l'anomalie et l'« explique ».

2.8. Retour à la synthèse

a) L'épisode de classe qui suit va donner lieu à un phénomène qui mérite amplement d'être souligné : le travail sur un *nouveau* type de tâches va amener à reprendre et enrichir la synthèse réalisée jusque-là.

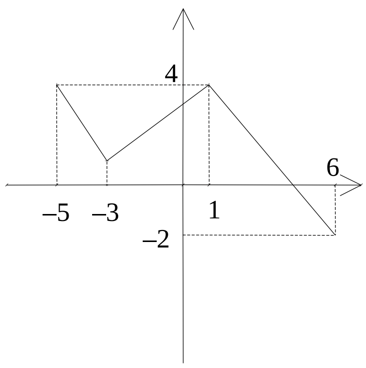
P lance alors la classe sur un autre type de tâches : à partir du tableau de variation, « essayer de retrouver la courbe » ; elle écrit :

Exercice 53 p 98

P fait lire l'énoncé par un élève : il s'agit de construire « trois courbes possibles » correspondant à un tableau de variation donné. P : « Qu'en pensez-vous ? Il y en a qu'une de possible ? » Un élève : entre les points indiqués, on sait seulement qu'elle descend ou qu'elle monte. P : « Prenez le tableau de variation de l'exercice ; vous construisez une courbe qui corresponde au tableau de variation. »

Il est 10 h 44. P explique l'exercice précédent (« Quand x passe de –1 à 2, que fait la fonction ? ») à l'élève qu'elle avait incitée à travailler seule. Les bruissements de travail augmentent un peu. P : « Alors, vous avez fait les courbes ? » Il est 10 h 46.

P circule, commente, questionne, répond. Elle va au tableau, appelle un élève : « Tu viens faire une proposition de courbe, s'il te plaît ? » L'élève s'exécute ; il efface le tableau, puis dessine un repère. L'élève revient à sa place prendre la feuille sur laquelle il a travaillé mais qu'il n'avait pas prise avec lui. Il retourne au tableau à nouveau et dessine alors la courbe suivante.



P souligne le choix de relier les points par des segments ; elle appelle un autre élève qui vient au tableau et « lisse » la courbe. Des élèves disent que « c'est pareil » ; P le conteste. Elle ajoute : « On devrait rajouter ça dans la synthèse. À la suite du tableau de variation, qu'est-ce qu'on va écrire ? Qu'est-ce qu'on vient de découvrir ? » Elle écrit sa réponse :

Un tableau de variation
représente plusieurs fonctions possibles

Une élève : « Madame, c'est un autre point, ça ? » P répond que oui, et rajoute le petit rond qu'elle avait omis :

• Un tableau de variation
représente plusieurs fonctions possibles

P relance : « Si on a un tableau de variation et on veut tracer une courbe possible, qu'est-ce qu'on fait ? » Des élèves : « On trace un repère… » Elle l'écrit :

– On trace un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$)

P : « Ensuite ? » Elle répond elle-même :

– on place les points de coordonnées (x, $f(x)$)
donnés dans le tableau

P : « Ensuite… » Elle répond oralement puis écrit :

– on trace une courbe possible en suivant
le sens de variation

b) Plusieurs « symptômes » montrent que la classe vit ici un moment de première rencontre avec le type de tâches dont un spécimen est proposé par le manuel à titre d'exercice : un tableau de variations étant donné, « essayer de retrouver la courbe », en traçant (en l'espèce) « trois courbes possibles », c'est-à-dire compatibles avec le tableau de variations proposé. La professeure engage un échange préliminaire qui, *a priori*, ressemble à une question avec « réponse téléphonée ». On pourrait donc s'attendre à ce que les élèves, en chœur, répondent en écho à la question : non, il n'y a pas qu'une courbe possible ! À suivre le compte rendu, ce n'est pas ce qui se passe. Le seul élève dont la réaction soit rapportée se montre prudent, non concluant : entre les points indiqués, dit-il, on sait seulement que la courbe descend ou qu'elle monte. (Notez ici la différence de langage : l'élève parle d'une chose qui descend ou qui monte, non qui croît ou décroît : la frontière entre *topos* de l'élève et *topos* du professeur s'inscrit dans la langue, avant que le professeur n'engage là-dessus un processus réglé de convergence, par le moyen de rectifications – sans commentaire appuyé – à l'oral d'abord, d'annotations sans frais sur les travaux écrits ensuite, enfin d'une pénalisation prévue dans le barème.) La professeure, alors, n'insiste pas ; elle renvoie chacun à *son* travail, selon un schéma d'organisation didactique déjà rencontré et commenté : « Prenez le tableau de variation de l'exercice ; vous construisez une courbe qui corresponde au tableau de variation. »

c) Elle presse les élèves d'avancer, toujours dans une large autonomie didactique : « Alors, vous avez fait les courbes ? » Bientôt, toutefois, la classe se rassemble à nouveau, autour de l'élève appelé au tableau. L'invitation formulée par la professeure – « Tu viens faire une proposition de courbe, s'il te plaît ? » – appelle un commentaire. La professeure y indique presque à son insu, peut-on penser, que, contrairement à ce qui se passe dans l'immense majorité des situations rencontrées jusqu'ici par les élèves, où il n'y a qu'*une* réponse, il y en a ici *plusieurs*, et que la courbe « apportée » par l'élève n'est qu'une parmi d'autres possibles. (La formulation adoptée pourrait, certes, s'entendre autrement ; mais il n'est pas habituel qu'un professeur invite un élève à aller au tableau pour résoudre une équation du premier degré en lui demandant de venir « faire une proposition de solution »…) La classe est invitée ainsi à entrer dans une situation d'*indétermination*.

d) Plusieurs indices suggèrent que, en vérité, la classe vit ici un moment de *première rencontre* avec le type de tâches concerné et que, en outre, cette rencontre n'a pas été préparée autant qu'elle aurait dû l'être : en découvrant la « proposition » de l'élève, la professeure comprend qu'elle doit prendre les choses en main… Cette proposition n'est pourtant en rien anormale : les élèves n'ont jusque-là été habitués qu'au tracé de « courbes » faites de *segments de droites*. Se guidant sur le contrat, ils peuvent légitimement suspecter que c'est *cela* qui est attendu. Le lissage de la « courbe » par un autre élève – qui, après l'épisode vécu par son prédécesseur, se sent alors *autorisé* à agir ainsi – n'en rencontre pas moins une résistance de la part de certains élèves épris de passé, pour qui le nouveau qu'on leur montre serait « pareil » à ce qui était… À cela, la professeure va alors s'opposer sans pourtant disposer d'arguments évidents.

e) Le retour à la synthèse est en effet, pour la professeure, une façon de reprendre les rênes de la classe. Face à la résistance rencontrée, elle va plus loin en disant qu'on a là un phénomène – nié par certains – qui mérite une inscription expresse dans la synthèse (« On devrait rajouter ça dans la synthèse… »). Elle lance elle-même le travail de formulation impromptu, avant de tenter de revenir vers la classe pour y chercher un appui et une complicité – que lui fournit opportunément cette élève qui demande si « c'est un autre point, ça ». L'ébauche de technique inscrite dans la synthèse clôt la reprise en main professorale par ces mots qui confirment sans l’argumenter le point de vue contesté par quelques élèves : « on trace une courbe possible en suivant le sens de variation »… Ce qui est *au principe* de la résistance rencontrée (la clause du contrat didactique selon laquelle chaque question a, en mathématiques, une réponse unique) n’en est pas pour autant entamé, ce qui peut faire craindre d’autres déconvenues, à propos par exemple des systèmes d’équations non cramériens.

2.9. Finir la séance

a) Le temps court. L’épisode précédent a bousculé la planification prévue – où un nouvel exercice devait succéder à celui que l’on vient de quitter. D’où l’indication que l’on se contentera de commencer l’étude de cet exercice, à charge pour les élèves de la terminer hors classe « pour vendredi ».

P : « On va poursuivre avec l’exercice 54, on va juste le commencer, vous finirez pour vendredi. On a un tableau de variation, on vous donne quelques informations supplémentaires… »

Il est 10 h 56. Des élèves s’enquièrent de ce qu’il en est du DM. P : « Non, la semaine prochaine, vous avez un devoir commun jeudi, je ne vous donne pas de DM. Des élèves : « Ah ! » Elle écrit :

> Exercice 54 p 98

P : « Vous avez des informations supplémentaires dont il faut tenir compte. » L’élève qu’elle avait aidée l’interroge à nouveau. P lui répond par une question : « L’image de 0 est 3, qu’est-ce que ça veut dire ? » Une autre élève l’appelle à l’aide : « Madame ! Je comprends pas ! » P se rend auprès d’elle mais elle s’adresse bientôt à la classe tout entière : « Alors, tout le monde s’arrête et écoute ! » Elle questionne : « Qu’est-ce qu’on commence par faire ? Un élève : « Placer les points ! » P : « Oui, mais on vous dit : l’image de 0 est 3 »… » Un dialogue s’amorce, que P interrompt : « Arrêtez. Prenez vos cahiers de textes. » Elle écrit :

> Vendredi 10/02
> Exercice 54 p 98 à finir
> Exercice 56 p 98

P, à un élève qui dit ne pas avoir son cahier de textes : « Tu le mets sur une feuille. » Une élève demande s’il y aura un DS la semaine prochaine. P rappelle qu’il y a un devoir commun. La sonnerie retentit. Il est 11 h 03. Les élèves sortent peu à peu. Une élève qui n’avait pas fait ses exercices est appelée au bureau, où P la réprimande sans élever la voix. La séance est finie.

---

b) L’exercice proposé introduit une certaine nouveauté : il semble que l’on dispose d’« informations supplémentaires » suffisamment « nouvelles » pour qu’une élève s’autorise à dire qu’elle ne comprend pas. On notera que, jusqu’à l’ultime instant, la professeure s’efforce de maintenir la classe au travail sur l’exercice proposé – en dégageant toutefois un temps clairement désigné pour préciser le programme de travail des élèves. La notation du compte rendu relative à la réprimande de l’élève en toute fin de séance est à méditer : l’élève n’échappe pas à un rappel de la règle, ce à quoi la professeure procède pourtant en conservant une équanimité de bon aloi.

3. Problématique et fonctionnement du Séminaire

3.1. Un questionnaire d'évaluation

a) Ce questionnaire est identique à celui passé le 17 octobre dernier. Il comporte les quatre questions suivantes.

Question 1a. Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous paraît plutôt *positif*.

Question 1b. Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt *négatif*.

Question 2a. Indiquez *un* aspect de votre travail personnel dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît plutôt *positif*.

Question 2b. Indiquez *un* aspect de votre travail personnel dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt *négatif*.

b) Chaque participant remplit individuellement la fiche qui lui a été distribuée. Les formulations recueillies seront mises en ligne le plus rapidement possible.

3.2. La journée de rentrée

a) Cette séance était la dernière de l'année civile ; elle est aussi la première de la seconde moitié de la formation. La journée de rentrée, ***le mardi 9 janvier***, aura la structure suivante : demi-classe de 9 h à 10 h 30 ; classe entière de 10 h 45 à 12 h 15 puis de 17 h 15 à 18 h 45.

b) La demi-classe appelée à réaliser le TD4 de 9 h à 10 h 30 a la composition suivante :

VAC – AB – YB – TB – MBP – MD – VD – AEO – AG – SG – RH – AMJ – ML – OL1 – OL2 – SM1 – JN – SP – CAR – BR – SR – CS2 – JS – PV

c) Chacune des participants pressentis se munira, dans toute la mesure du possible, d'un ordinateur portable (avec carte Wi-fi).

Bonnes vacances!

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Travaux dirigés de didactique des mathématiques

➔ Séance 4 : mardi 9 janvier 2007 (9 h – 10 h 30)

Programme de la séance. 1. La même calculatrice pour tous // 2. Calculatrices, mode d'emploi // 3. D'autres calculatrices encore

1. La même calculatrice pour tous

1.1. Une diversité rédhibitoire ?

a) Il est usuel de constater – pour s'en plaindre – la diversité des modèles de calculatrice dont dispose les élèves d'une *même* classe. Ainsi en va-t-il dans les deux questions suivantes.

> 1. Comment gérer l'hétérogénéité des calculatrices dans une classe ? Par exemple lors de l'utilisation avec les puissances ou encore la racine carrée, les touches sont différentes suivant les calculatrices. N'ayant pas de séance en demi-groupe, je dois aborder ces questions en classe entière. (SM2, MJ, 4e, 8)
>
> 2. Pour les études de fonctions, j'ai voulu faire manipuler la calculatrice aux élèves. Je me suis rendu compte qu'ils l'utilisent mal et savent très peu de chose sur les réglages. Mais entre les modèles TI et Casio, il est difficile pour moi d'expliquer à chacun comment faire. J'y ai finalement passé beaucoup de temps pour une efficacité douteuse. Comment pourrais-je faire à l'avenir ? (CS1, CR, 1re STL, 11)

b) En contraste avec ces points de vue certes bien compréhensibles, l'ancien programme de 5e contenait le commentaire suivant.

> Le fait que les calculatrices n'aient pas toutes les mêmes principes de fonctionnement est une occasion à saisir. En effet, l'activité consistant à répertorier leurs diverses modalités de fonctionnement, et à les mettre en œuvre, est hautement formatrice.

c) Dans ce qui suit, on illustrera ce commentaire en même temps qu'on examinera une solution possible au problème de la multiplicité des modèles de calculatrice dans une classe.

1.2. Un exemple : la calculatrice Microsoft

a) On se réfère ici d'abord au système d'exploitation *(operating system)* Windows XP (à propos duquel on pourra se reporter à la page http://fr.wikipedia.org/wiki/Windows_XP).

b) Ce système d'exploitation intègre une calculatrice qu'on peut activer en suivant le chemin que voici :

Tous les programmes ⇨ Accessoires ⇨ Calculatrice.

Cette calculatrice existe en deux modes, qu'on peut sélectionner en cliquant sur **Affichage** : « standard » ou « scientifique ». On choisit ici le mode standard.

c) Le ***type de tâches*** supposé ***problématique*** à ce stade pour les élèves que l'on vise à former et sur lequel on travaillera ici est le suivant : ***découvrir un modèle de calculatrice et en dresser un mode d'emploi*** (à domaine extensible), en même temps qu'on tentera d'en repérer les « avantages » et les « inconvénients » relativement aux usages qu'on souhaite en faire.

d) L'un des avantages de la calculatrice Microsoft est ainsi de permettre de ***copier*** et de ***coller*** les nombres sur lesquels on désire effectuer des opérations, et de copier et de coller les résultats qu'elle affiche. Supposons qu'on veuille calculer le produit

$$12{,}3456789 \times 2{,}34567891$$

supposé donné dans un fichier Word. On copie le facteur 12,3456789 et on le colle dans la calculatrice, puis on multiplie (×), ensuite on copie le second facteur, 2,34567891, on le colle dans la calculatrice, et on appuie sur la touche = avant de copier le résultat et de le coller dans le fichier Word ; on obtient ceci :

$$12{,}3456789 \times 2{,}34567891 = 28{,}958998625361999.$$

(On notera que, si l'on récrit le produit 12,3456789 × 2,34567891 sous la forme

$$12{,}3456789 * 2{,}34567891$$

on peut le coller directement, d'un coup, dans la calculatrice et cliquer alors sur la touche =.)

• Ces allers et retours entre la calculatrice et un fichier Word permettent de travailler dans ce type de fichier en vue notamment de conserver des ***traces écrites*** appropriées des travaux numériques effectués à l'aide de la calculatrice.

• Si l'on souhaite vérifier les résultats obtenus (qui pourraient être entachés d'erreurs soit parce qu'il y aurait un *bug* dans la calculatrice, soit parce que l'opérateur n'en maîtrise pas encore bien le fonctionnement), on peut alors utiliser les moyens de calcul (trop ignorés) du traitement de texte Word 97. En l'espèce (voir la séance 12 du Séminaire), on obtient pour valeur du produit 28,95899863, ce qui constitue bien une ***confirmation*** du résultat déjà obtenu. (Bien entendu, on peut aussi bien, pour cela, utiliser une calculatrice matérielle avec laquelle on aurait déjà une certaine familiarité.)

• En relation avec l'avantage précédent, on doit souligner la possibilité de ***dénombrer de façon sûre*** les chiffres affichés par la calculatrice. Si l'on travaille avec Word 97, on pourra utiliser les statistiques fournies par ce logiciel (**Outils** ⇨ **Statistiques…** ⇨ **Caractères**) : on trouve ainsi que l'écriture 28,958998625361999 comporte 18 caractères, et donc 17 chiffres, dont 15 décimales. Si l'on ne dispose pas de cette ressource logicielle de dénombrement, on peut coller l'écriture du nombre dans un fichier de brouillon vierge, y remplacer chaque caractère par (par exemple) un trait d'union (-), puis faire dénombrer les traits d'union à l'aide de la fonction de remplacement. On notera que, pour effectuer le remplacement indiqué, on dispose en Word 97 de la possibilité de faire remplacer « Tout caractère » (^?), ou « Tout chiffre » (^#), ou « Toute lettre » (^$) par le symbole choisi, ici un trait d'union.

• En utilisant un dénominateur b donnant à la fraction irréductible a/b une période de « grande » longueur, on peut explorer certaines limites éventuelles de la calculatrice. Ainsi, la période correspondant à $b = 59$ étant de longueur 58 (il s'agit du plus petit entier n tel que 10^n est congru à 1 modulo b), la calculatrice donne, pour 57/59,

0,98305084745762711864406779661017

et, pour 60/59,

1,0169491525423728813559322033898

En retranchant à ce dernier résultat 1,01 et en multipliant par 1000, on obtient

6,9491525423728813559322033898305,

ce qui permet d'avoir pour valeur décimale approchée de 60/59 le nombre

1,0169491525423728813559322033898305.

(Le dernier chiffre n'est pas sûr car il peut résulter d'un arrondi.) En recommençant, on obtient

1,01694915254237288135593220338983050847.

En itérant par tranches plus grandes, il vient successivement

1,01694915254237288135593220338983050847457627119

1,0169491525423728813559322033898305084745762711864406779661

1,016949152542372881355932203389830508474576271186440677966101694 92

Ce dernier résultat permet de vérifier (par un dénombrement effectué comme indiqué plus haut) que la période est bien de longueur 58 :

1,**016949**152542372881355932203389830508474576271186440677966**10169492**

e) Il peut bien sûr y avoir divers inconvénients, qui dépendent (de même que les avantages !) des ***emplois*** que l'on souhaitera faire de la calculatrice.

• L'article de l'encyclopédie *Wikipedia* intitulé "Microsoft Calculator" (que l'on trouvera à l'adresse http://en.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Calculator) rappelle par exemple ceci.

> The version of Calculator shipped with Windows 3.0 and Windows 3.1 suffered from a bug causing it to display completely wrong results for certain classes of calculations. The most typical example was the 1–1.1 operation, which would lead to a long number sequence approximating the expected result, -0.1, such as -0.095645564564564... One of the most joked about calculation is 3.11–3.1, results in 0.00. This leads to the joke "Q: What is the difference between 3.11 and 3.1? A: Nothing!" (In this case, "3.11" and "3.1" imply the version numbers of Windows.)

• Dans le cas examiné jusqu'ici, d'autres inconvénients peuvent être levés aisément, en passant au mode « scientifique » de la calculatrice, ce qui augmente énormément les possibilités de calcul.

• Bien entendu, là encore, on peut trouver diverses limitations. Voici le tableau ainsi brossé par l'article de *Wikipedia* déjà cité.

Microsoft Calculator is a calculation application for Microsoft Windows.

The relatively small sized program (112 kilobytes in Windows XP) is bundled with most versions of Microsoft Windows…

Calculator, despite its simple interface and small size, can perform all of the functions of most four-function or scientific calculators. By default, the application is in the **Standard** mode, and functions as a four-function calculator. By selecting **View**, then **Scientific**, more advanced functions are available, including logarithms, numerical base conversions, some logical operators, radian, degree and gradians support as well as simple single-variable statistical functions.

However, it offers no support for user-defined functions or complex numbers, no storage variables for intermediate results (other than the classic accumulator memory of pocket calculators), no automated polar-cartesian coordinates conversion and lack of support for two-variables statistics, making it hard or impractical to use with many common simple engineering, physics or even high school tasks, despite its seemingly many functions.

2. Calculatrices, mode d'emploi

2.1. Un PER au collège : amorce

a) À propos de diverses calculatrices dont…

– … la calculatrice Microsoft en mode standard (ci-après, à gauche),

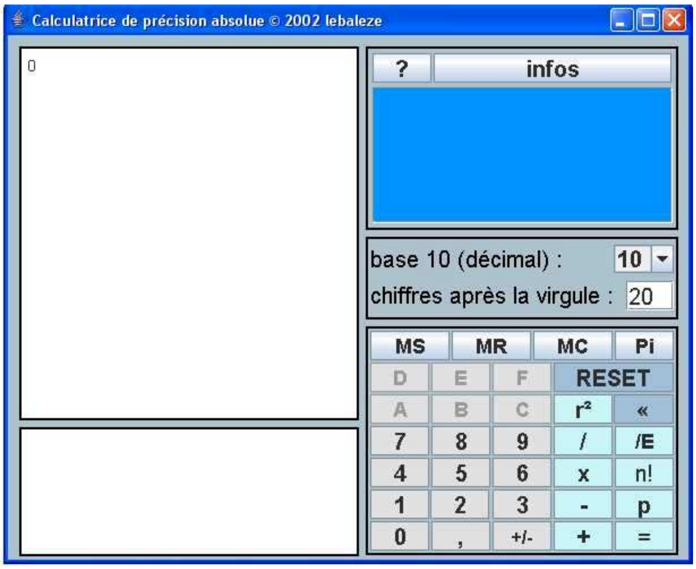
– … et la calculatrice ci-après à droite, qu'on pourra télécharger à l'adresse

http://blaisefacy.free.fr/zonefw/logiciels/CalculatriceW.exe

et sur laquelle on aura quelques informations à l'adresse

http://www.linformatique.org/49-la-calculatrice-de-precision-absolue.htm,

on envisage, dans le cadre d'un ***parcours d'étude et de recherche*** (PER), de faire travailler une classe de 4^e sur l'élaboration de ***modes d'emploi*** de diverses calculatrices.



b) À terme, chaque mode d'emploi proposé devrait indiquer…

1) ***l'usage*** de chaque élément de la calculatrice, avec des ***exemples illustratifs*** ;

2) pour un ensemble de ***type de tâches*** de calcul à préciser sous la forme de ***programmes de calcul***, une ou plusieurs ***techniques*** de calcul utilisant la calculatrice, mises en œuvre sur un ou plusieurs ***spécimens*** de chaque type de tâches.

c) Chaque binôme de participants établit ***par écrit*** une liste de ***programmes de calcul*** donnés sous forme littérale, depuis le plus simple ($a + b$) jusqu'à des programmes de calcul dont l'expression littérale utilise notamment des ***parenthèses***. Pour chacun de ces programmes de calcul, on précise par écrit…

– … soit une technique de calcul à l'aide des calculatrices mentionnées plus haut,

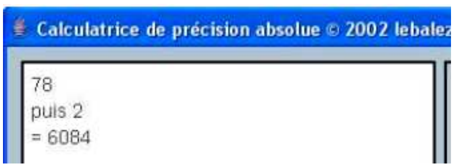
– … soit que la chose est impossible ou inappropriée avec l'une ou l'autre des calculatrices (ou les deux).

2.2. Repérages pour un mode d'emploi

a) En écho à la consigne précédente, on ébauche un inventaire de programmes de calcul, en commençant par les programmes à ***une*** variable décimale positive, à savoir $–a$, a^2 et $\sqrt{a}$.

• L'exécution du premier programme, $–a$, se voit dédier une touche spécifique dans les deux calculatrices : la touche +/–.

• Le programme a^2 n'a pas de touche dédiée dans les calculatrices examinées. Toutefois, dans la calculatrice de précision absolue, il existe une touche « Puissance » (p), qui permet d'exécuter de façon générale le programme a^b (voir plus loin ; et ci-après, pour le calcul de 78^2 – qui peut, au reste, se faire « de tête »).



Avec la calculatrice Microsoft (comme avec d'autres calculatrices), on peut utiliser l'équivalence de programmes $a^2 \equiv a \times a$. Mais l'exécution du programme $a \times a$ peut présenter une difficulté : si l'écriture du décimal a est de longueur importante, une erreur de ***report*** est toujours possible. Dans ce cas, on peut commencer par saisir a,

– soit copier l'écriture de a et, après avoir cliqué sur la touche $\times$, la coller, avant de cliquer enfin sur la touche = ;

– soit placer le nombre a en mémoire (touche MS : "Memory Store key"), cliquer sur la touche $\times$, rappeler la valeur placée en mémoire (touche MR : Memory Recall key"), avant de cliquer sur =.

• Le programme $\sqrt{a}$ se voit dédier une touche spéciale dans les deux cas : « Rac » pour la calculatrice Microsoft, et (de façon un peu ambiguë) « r^2 » pour la calculatrice de précision absolue.

b) On examine maintenant les programmes de calcul à ***deux*** variables décimales (ou entières) :

$$a + b \ ; \ a - b \ ; \ a \times b \ ; \ \frac{a}{b} \ ; \ a^b.$$

• Les trois premiers programmes ne posent en principe de problème que si la valeur de a ou b ou le résultat du calcul à exécuter excèdent la capacité d'affichage de la calculatrice. Par exemple, pour

$$123456789123456789 \times 456789123457789123$$

la calculatrice Microsoft affiche

$$5{,}6393718488616940596929269164706\text{e+}34$$

soit encore

$$5{,}6393718488616940596929269164706 \times 10^{34}.$$

ou

$$56393718488616940596929269164706000.$$

La dernière décimale affichée, un zéro, n'est pas la bonne : elle devrait être un 7 (car $9 \times 3 = 27$). La calculatrice de précision absolue, elle, donne la valeur exacte (en lui demandant par exemple 50 décimales) :

$$56393718488616940596929269164706047.$$

(Bien entendu, en passant au mode scientifique, il serait facile, comme on l'a vu, de « faire parler » la calculatrice Microsoft pour « récupérer » les trois derniers chiffres, 047.)

• Lorsque les décimaux a ou b sont négatifs, on utilise la touche +/– déjà rencontrée : on pourra exécuter ainsi le programme $a \times (-b)$, ou le programme $-a + b$, etc. Dans tous ces cas, on pourra d'abord remplacer l'exécution du programme donné par celle d'un programme équivalent, en utilisant des équivalences idoines, telles que

$$a \times (-b) \equiv -(a \times b),\ -a + b \equiv b - a, \text{ etc.}$$

• Comme les programmes précédents, le programme de calcul $\frac{a}{b}$ pose le problème de la taille des écritures décimales. Mais d'autres problèmes s'ajoutent du fait que, si a et b sont décimaux, il n'en est pas toujours ainsi de $\frac{a}{b}$: dans le cas où $\frac{a}{b} \notin \mathbb{D}$, la calculatrice ne donne qu'une valeur décimale approchée du rationnel $\frac{a}{b}$. En outre si la longueur de la période est assez grande, on ne voit pas apparaître cette période : si c'est bien sûr parfois le cas, comme dans l'exemple suivant,

$$\frac{9}{13} =_{\text{calcM}} 0{,}\underline{692307}\ \underline{692307}\ \underline{692307}\ \underline{692307}\ \underline{692307}\ 69,$$

où la période est clairement apparente, on a aussi

$$\frac{48}{47} =_{\text{calcM}} 1{,}0212765957446808510638297872\,34,$$

où la période n'est pas apparente. On peut montrer – voir plus loin – qu'elle est ici de longueur 46, en sorte que la calculatrice de précision permet de la mettre en évidence. On a ainsi :

$$\frac{48}{47} =_{\text{calcW}} 1{,}\mathbf{0212765}957446808510638297872340425531914893617\mathbf{0212765}95744\ldots$$

• Peut-on obtenir la forme ***réduite*** de la fraction $\frac{a}{b}$? On peut « essayer » des diviseurs apparents ou conjecturés. Mais l'emploi des calculatrices examinées apparaît ici plutôt ***inapproprié***. Bien entendu, on peut utiliser l'algorithme d'Euclide (étudié en 3^{e}), dont l'exécution est facilitée, sur la calculatrice de précision absolue, par la possibilité d'effectuer une division euclidienne. Prenons ainsi

$$a = 17 \times 23 = 391 \text{ et } b = 37 \times 23 = 851.$$

On a $\frac{391}{851} = 0{,}459\ 459\ 459\ldots$ Dans la division de 851 par 391, la calculatrice de précision absolue donne pour reste 69 ; de même elle donne 46 pour reste dans la division de 391 par 69 ; enfin elle donne 23 dans la division de 69 par 46, et bien sûr 0 dans la division de 46 par 23 : le PGCD de 391 et 851 est donc 23, et l'on a ainsi

$$\frac{391}{851} = \frac{391 \div 23}{851 \div 23} = \frac{17}{37}.$$

(On peut vérifier que $\frac{17}{37} = 0{,}459\ 459\ 459\ 459\ldots$) Bien que, en version standard, elle ne permette pas de façon immédiate le calcul du reste dans la division euclidienne de a par b, la calculatrice Microsoft permet aussi, bien entendu, l'exécution de l'algorithme d'Euclide. L'égalité

$$\frac{851}{391} =_{\text{calcM}} 2{,}1764705882352941176470588235294$$

montre que le quotient est 2, si bien que le reste est

$$851 - 2 \times 391.$$

Mais on arrive là à un programme de calcul à ***trois*** variables décimales, $a - b \times c$, sur lequel on revient un peu plus loin.

• Le programme a^b peut, dans le cas où $b \in \mathbb{Z}$, être exécuté grâce à la touche p de la calculatrice de précision absolue (on notera que cette touche est inopérante si b est un décimal non entier). S'agissant de la calculatrice Microsoft, les remarques faites plus haut à propos du programme de calcul a^2 peuvent être reconduites ici : pour calculer 678^5, par exemple, on saisit 678, on le met en mémoire (MS) et on itère 4 fois la double opération consistant à cliquer sur la touche × puis à cliquer sur la touche MR, avant de cliquer sur la touche = ; on obtient ici

$$678^5 = 143267759542368,$$

valeur que l'on peut contrôler à l'aide de la calculatrice de précision absolue.

c) Passons aux programmes de calcul à ***trois*** variables. Un tel programme de calcul s'écrit sous la forme

$$(\pm a \heartsuit \pm b) \clubsuit \pm c \text{ ou } \pm a \heartsuit (\pm b \clubsuit \pm c).$$

On a ainsi par exemple

$$\frac{a}{b} \times c \,;\, (-a + b) \times c \,;\, (a + b) - c \,;$$
$$\frac{-a}{-b \times c} \,;\, a - \frac{b}{-c} \,;\, a - (b - c) \,;\, \ldots$$

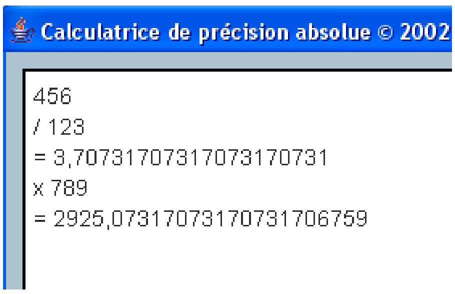
• Avec les calculatrices examinées ici, l'exécution de programmes ***du premier type***, c'est-à-dire de la forme $(\pm a \heartsuit \pm b) \clubsuit \pm c$, ne posent pas de problème particulier. Avec la calculatrice Microsoft, on peut « enchaîner » les opérations, sans cliquer chaque fois sur la touche =. Par exemple pour

$$a = 456,\ b = 123,\ c = 789$$

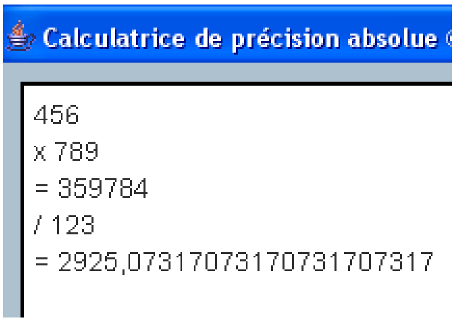
et le programme $\frac{a}{b} \times c$, on saisit a, on clique sur /, puis on saisit b, on clique alors sur ×, on saisit c, et on clique alors sur =. On obtient

2925,07317 07317 07317…

Avec la calculatrice de précision absolue, il faut cliquer sur = après chaque opération binaire, comme le montre l'écran suivant.



On observera en passant l'anomalie des 5 dernières décimales proposées (… 0731706759), qui résulte du fait que la calculatrice multiplie par 789 l'approximation décimale trouvée pour 456/123. On peut éviter ce phénomène en usant de l'équivalence $\frac{a}{b} \times c \equiv \frac{a \times c}{b}$, comme on le voit ci-après.



• L'exécution de programmes ***du second type***, de la forme $\pm\, a \;\heartsuit\; (\pm\, b \;\clubsuit\; \pm\, c)$, peut rencontrer en revanche une difficulté « structurelle ». Toutefois, dans le cas où l'opération $\heartsuit$ est commutative, on peut se ramener à un programme de calcul du ***premier type*** par l'équivalence

$$\pm\, a \;\heartsuit\; (\pm\, b \;\clubsuit\; \pm\, c) \equiv (\pm\, b \;\clubsuit\; \pm\, c) \;\heartsuit\; (\pm\, a).$$

S'il n'en est pas ainsi, comme par exemple avec le programme $\frac{-\,a}{-b \times c}$, on commence par calculer $\pm\, b \;\clubsuit\; \pm\, c$ et on le met en mémoire (MS), puis on calcule $\pm\, a$, on clique sur la touche $\heartsuit$ avant de rappeler (MR) la valeur calculée de $\pm\, b \;\clubsuit\; \pm\, c$ et de cliquer sur la touche =.

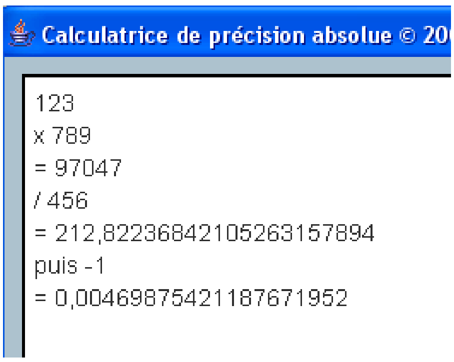
• D'une façon générale, il est loisible de « travailler » légèrement le programme à exécuter ***avant*** de solliciter la calculatrice. Ainsi le programme de calcul rencontré plus haut (et jusqu'ici non exécuté), à savoir $851 - 2 \times 391$, peut-il être calculé plus aisément grâce à l'égalité $851 - 2 \times 391 = -(2 \times 391 - 851)$. De même, on peut calculer $\frac{-\,456}{-123 \times 789}$ on considérant l'égalité

$$\frac{-\,456}{-123 \times 789} = \frac{1}{\frac{-123 \times 789}{-\,456}}.$$

Si l'on est « très fort » dans la manipulation du signe –, on peut encore user des égalités

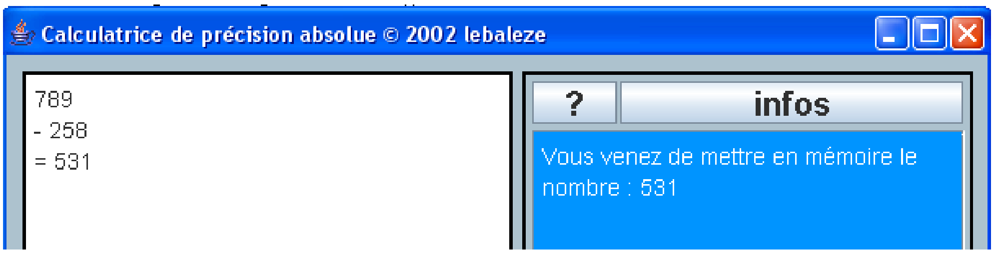
$$\frac{-\,456}{-123 \times 789} = \ldots = \frac{456}{123 \times 789} = \frac{1}{\frac{123 \times 789}{456}}.$$

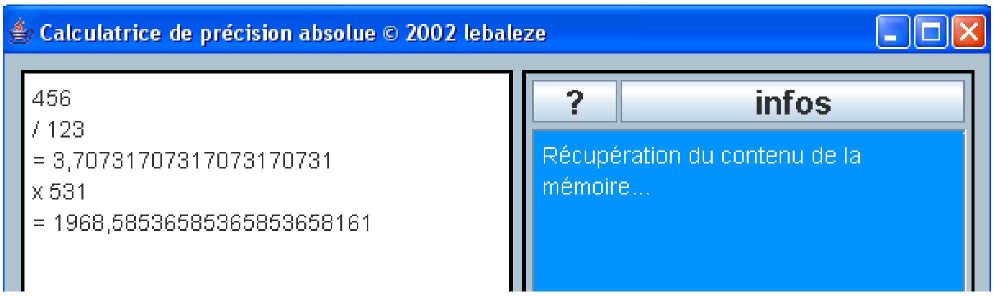
La calculatrice Microsoft propose en effet une touche $1/x$. Quant à la calculatrice de précision absolue, elle propose sa touche p, qui permet de calculer l'inverse en prenant pour exposant $b = -1$.



d) L’exécution de programmes à ***quatre*** variables suit les mêmes principes que précédemment indiqué.

• Pour calculer par exemple $\frac{a}{b} \times (c - d)$, on peut commencer par calculer $c - d$, mettre la valeur en mémoire, puis calculer $\frac{a}{b}$ avant de multiplier le résultat obtenu par la valeur mise en mémoire. Par exemple pour $a = 456$, $b = 123$, $c = 789$, $d = 258$, on peut procéder comme ci-après.





• On peut être conduit à des emplois répétés de la mémoire. Soit à calculer par exemple

$$\frac{a}{b - \frac{c}{d}}$$

toujours pour $a = 456$, $b = 123$, $c = 789$, $d = 258$. On calcule d’abord $\frac{c}{d} = \frac{789}{258}$ et on met la valeur obtenue en mémoire (MS) ; puis on saisit b, on clique sur – et on rappelle la valeur mise en mémoire (MR), ce qui donne une valeur de $b - \frac{c}{d}$ que l’on met alors en mémoire (MS) ; on saisit a, on clique sur /, on rappelle la valeur en mémoire, et on obtient la valeur cherchée.

• Pour $\frac{456}{123 - \frac{789}{258}}$, la calculatrice Microsoft propose la valeur

3,8018419777023751817741153659719.

Quant à la calculatrice de précision absolue, si on lui demande 100 chiffres après la virgule, elle donne ceci :

3,80184197770237518177411536597188560349006301502666020358700920988851187590887057682985942801745 0315.

➔ On ne voit pas, ici, apparaître de période… On a :

$$\frac{a}{b-\dfrac{c}{d}} = \frac{ad}{bd-c} = \frac{456 \times 258}{123 \times 258 - 789} = \frac{117648}{30945} = \ldots = \frac{39216}{10315}.$$

Comme 10315 = 5 × 2063, la partie ***apériodique*** est de longueur 1. (Sa longueur est en effet égale au maximum des exposants de 2 et de 5 dans la décomposition en facteurs premiers du dénominateur ; ici, on a $10315 = 2^0 \times 5^1 \times 2063^1$ et la longueur est donc 1.) La ***période*** commence par 01841977702375…

➔ On peut rechercher la ***longueur*** de la période à l'aide d'un petit algorithme utilisant le logiciel Excel (v. TD4 - Période d'un rationnel.xls) : en vérité, elle est ici égale à… 2062.

➔ La calculatrice « de précision absolue » donne au plus 999 décimales après la virgule ; on obtient ici :

3,80184197770237518177411536597188560349006301502666020358700920988851187590887057682
985942801745031507513330101793504604944255937954435288414929714008725157537566650508
967523024721279689772176442074648570043625787687833252544837615123606398448860882210
373242850218128938439166262724188075618031992244304411051866214251090644692195831313
620940378090159961221522055259331071255453223460979156568104701890450799806107610276
296655356277266117304895782840523509452253999030538051381483276781386330586524478914
202617547261269995152690256907416383906931652932622394571013087736306349975763451284
537081919534658264663111972855065438681531749878817256422685409597673291323315559864
275327193407658749394086282113427047988366456616577799321376635967038293746970431410
567135239941832283082888996606883179835191468734852157052835676199709161415414444983
034415899175957343674260785264178380998545807077072224915172079495879786718371303926
3208919049927290353853611245758603974793989335918565196316044595249636451769

Mais c'est bien sûr très insuffisant pour faire apparaître la période !

➔ On peut en revanche demander au logiciel *Dérive* d'afficher par exemple les 2100 premières décimales, comme on le voit ci-après : le résultat sur la longueur de la période se trouve confirmé.

3.8**01841977702375181774115**36597188560349006301502666020358700920988851187590887057682
985942801745031507513330101793504604944255937954435288414929714008725157537566650508
967523024721279689772176442074648570043625787687833252544837615123606398448860882210
373242850218128938439166262724188075618031992244304411051866214251090644692195831313
620940378090159961221522055259331071255453223460979156568104701890450799806107610276
296655356277266117304895782840523509452253999030538051381483276781386330586524478914
202617547261269995152690256907416383906931652932622394571013087736306349975763451284
537081919534658264663111972855065438681531749878817256422685409597673291323315559864
275327193407658749394086282113427047988366456616577799321376635967038293746970431410
567135239941832283082888996606883179835191468734852157052835676199709161415414444983
034415899175957343674260785264178380998545807077072224915172079495879786718371303926
320891904992729035385361124575860397479398933591856519631604459524963645176926805622
879301987396994667959282598158022297624818225884634028114396509936984973339796412990
790111488124091129423170140571982549684924866698982064953950557440620455647115850702
859912748424624333494910324769752787203102278235579253514299563742123121667474551623
848763936015511391177896267571497818710615608337372758119243819680077556955889481337
857489093553078041686863790596219098400387784779447406689287445467765390208434318952
981095492001938923897237033446437227338826951042171594764905477460009694619486185167
232186136694134755210857973824527387300048473097430925836160930683470673776054289869
122636936500242365487154629180804653417353368880271449345613184682501211827435773145
904023267086766844401357246728065923412506059137178865729520116335433834222006786233

6403296170625302956858943286476005816771691711100339311682016480853126514784294716 43
2380029083858458555501696558410082404265632573921473582161900145419292292777508482 79
2050412021328162869607367910809500727096461463887542413960252060106640814348036839 55
404750363548230731943771206980126030053320407174**018419777023751817741 1**53659718856034

3. D’autres calculatrices encore

3.1. Calculatrices téléchargeables ou en ligne

a) Le PER envisagé suppose un « stock » de calculatrices à étudier – en s’en tenant ici à des calculatrices « simples » (telle la version ***standard*** – mais non la version ***scientifique*** – de la calculatrice Microsoft).

b) Ainsi qu’on l’a vu, ce problème peut être résolu aisément à l’aide de ***calculatrices téléchargeables gratuites***, dont la nature fait qu’on peut en disposer sous la forme ***d’autant d’exemplaires que l’on veut***. C’est ainsi qu’on pourra se proposer d’établir un mode d’emploi de la partie « simple » (à préciser) de la calculatrice **Calc’n’Calc** (à télécharger à l’adresse http://www.ledru.org/) ou encore de la calculatrice **FLLCalc** (qu’on pourra télécharger à l’adresse http://www.01net.com/outils/telecharger/windows/Bureautique/calculatrice/fiches/34981.html).

c) On peut aussi rechercher sur Internet des ***calculatrices en ligne***. L’offre est abondante, mais la possibilité d’en user en classe suppose une connexion qui ne trahisse pas !

3.2. Poursuite des repérages

a) En vue du PER envisagé, on poursuit ici les repérages amorcés plus haut.

b) Pour cela, pour chaque binôme de participants,

– … si la connexion est possible, le binôme ***recherche sur Internet*** une calculatrice en ligne « simple » et l’étudie alors selon le schéma déjà mis en œuvre ;

– … si la connexion est impossible, le binôme choisit ***l’une*** des deux calculatrices mentionnées plus haut (Calc’n’Calc ou FLLCalc) et l’étudie alors selon le schéma déjà mis en œuvre.

c) La fiche de travail remise par chaque binôme de participants à la fin de la session comprendra…

1) les traces écrites résultant de l’étude de la calculatrice Microsoft (version standard) et de la calculatrice de précision absolue ;

2) les traces écrites de l’étude d’une calculatrice en ligne (dont on précisera l’adresse) ou de l’une des calculatrices Calc’n’Calc ou FLLCalc ;

3) une courte de liste de questions auxquelles les membres du binôme souhaiteraient en priorité disposer d’une réponse à propos soit des calculatrices à faire étudier, soit de l’organisation de l’étude de ces calculatrices.

3.3. Pour un carnet d’adresses

a) On donne ici, sans garantie, des adresses où l’on trouvera des calculatrices en ligne.

- ➔ http://www.calculatrice.org/
- ➔ http://www.actufinance.fr/outils/calculatrice.html
- ➔ http://www.lexilogos.com/pratique_calculatrice.htm
- ➔ http://www.aly-abbara.com/utilitaires/autres/calculatrice.html
- ➔ http://www.aly-abbara.com/utilitaires/autres/calculatrice_trigonometrique.html
- ➔ http://www.ann.jussieu.fr/~cordier/deug/calculette/
- ➔ http://www.calcoolate.com/

b) Pour une exploration plus large, on pourra visiter les pages suivantes :

- ⇨ http://www.aly-abbara.com/utilitaires/utilitaires.html#calculateurs
- ⇨ http://www.01net.com/windows/Bureautique/calculatrice/
- ⇨ http://www.toocharger.com/windows/bureautique/calculatrice/
- ⇨ http://www.linformatique.org/licence/gratuit?page=3
- ⇨ http://www.linformatique.org/licence/gratuit?page=4
- ⇨ http://www.framasoft.net/rubrique396.html

c) On pourra trouver les manuels d'un grand nombre de calculatrices ***anciennes*** à l'adresse suivante : http://www.wass.net/manuals/. Pour un exemple actuel, voir par exemple la calculatrice proposée (avec un mode d'emploi) à l'adresse http://ccalc.shanebweb.com/.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 14 : mardi 9 janvier 2007

➔ **Matin** : 0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions : autour des TICE // 2. Évaluation & développement

➔ **Après-midi** (explicitation) : 3. Problématique et fonctionnement du Séminaire // 4. Les Archives du Séminaire

Matin

0. Questions de la semaine

Journée 14 (9 janvier 2007)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4^e^ (et soutien en 5^e^)

Est-il judicieux de considérer les réductions dans le calcul littéral comme une application de la factorisation $ak + bk = (a + b)k$, comme par exemple dans $2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$?

1. Forum des questions : autour des TICE

1.1. Se former aux TICE

a) Dans le questionnaire passé le 19 décembre, la question 1b (« Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous a paru plutôt *négatif* ») a soulevé notamment les échos suivants.

Le C2i2e n'est peut-être pas assez encadré. // Le manque d'heures de formation sur les TICE et le C2i2e. // TICE (informatique) : on n'a pas beaucoup d'information. // Pas assez de temps concernant la formation sur les TICE // Pas assez de formation sur les TICE (validation du B2i). // Une pratique informatique « trop » laissée à notre charge. Un manque d'heures de formation dans le cadre de la validation du C2i2e. // Peut-être serait-il bien de placer dans les séances de GFP ou séminaire quelques explicitations sur le C2i2e // Pas de cours sur les TICE à part la remise à niveau en début d'année et plus d'information sur la formation au B2i.

b) Un mot d'abord sur la question du temps de formation aux TICE.

• Le temps de préparation présentielle au C2i2e et plus largement le temps de formation présentielle aux TICE est réduit : il comportera encore deux fois 3 heures de travail sur le volet A du référentiel de compétences du C2i2e, c'est-à-dire sur les « Compétences générales liées à l'exercice du métier », et des activités de formation – à propos des volets A et B (« Compétences nécessaires à l'intégration des TICE dans sa pratique ») – dans le cadre des séances de travaux dirigés associées au Séminaire ainsi que des séances du Séminaire *stricto sensu*.

• L'effort de travail personnel et d'auto-formation exigé joue un rôle important. Il doit prendre ***résolument appui*** sur le travail précédemment mentionné – chacun des participants évitant comme la peste d'adopter la posture paresseuse de qui regarde passer la caravane en faisant la moue, voire en glissant des commentaires aigres, en même temps qu'on cherche à s'exonérer de l'engagement formatif indispensable.

➔ Faut-il rappeler par exemple que, dès le premier compte rendu d'observation en classe étudié dans le Séminaire, on voyait apparaître l'emploi d'un logiciel de géométrie dynamique pour vérifier une propriété conjecturée par la classe, le concours des diagonales d'un parallélogramme en leur milieu ? Ce type d'emplois des TICE devrait aujourd'hui (et depuis longtemps) être acquis.

➔ Faut-il rappeler, plus généralement, que ***tout*** usage des TICE rencontré en formation doit être travaillé par ***chaque*** participant de façon à être intégré, le cas échéant, aux scénarios didactiques conçus et mis en œuvre en classe, dans l'un ou l'autre des stages à accomplir ? Voici à titre d'illustration un épisode qui devrait devenir rapidement maîtrisable par ***chacun***, cela ***à partir*** de ce qui a été fait dans la séance de travaux dirigés de ce matin.

1. On considère la fraction $\frac{145}{439}$. On sait écrire un petit programme sur Excel (v. TD4 - Période d'un rationnel.xls) pour déterminer la période du développement décimal de la fraction, et cela en prenant appui sur le résultat théorique suivant (admis ou non) : cette longueur est le premier entier n tel que 10^n soit congru à 1 modulo 439. Elle vaut ici 219.

2. On sait trouver sur Internet une calculatrice téléchargeable gratuite affichant, disons, les 300 premières décimales du développement de $\frac{145}{439}$; on a en l'espèce :

0,330296127562642369020501138952164009111617312072892938496583143507972665148063781321184510250569476082004555808656036446469248291571753986332574031890660592255125284738041002277904328018223234624145785876993166287015945330296127562642369020501138952164009111617312072892938496583143507972665148063781

3. À l'aide des fonctions standard de Word 97, on sait alors vérifier le résultat théoriquement prévu.

3.1. La fonction **Rechercher** permet de retrouver, par exemple, la suite de chiffres **330296** par laquelle débute la période.

0,**330296**12756264236902050113895216400911161731207289293849658314350797266514806378132118451025056947608200455580865603644646924829157175398633257403189066059225512528473804100227790432801822323462414578587699316628701594 5**330296**127562642369020501138952164009111617312072892938496583143507972665148063781

3.2. Comme on le vérifiera ci-après, la fonction **Statistiques…** permet ensuite de vérifier que la période est bien de longueur 219.

➔ Un tel épisode, notons-le ici, pourrait se produire par exemple lors du travail d'une classe de ***seconde*** sur le « thème d'étude » optionnel intitulé « Caractérisation des éléments de $\mathbb{D}$ et de $\mathbb{Q}$, soit en terme de développement décimal fini ou périodique, soit comme quotient irréductible d'entiers (le dénominateur étant ou non de la forme $2^p \times 5^q$) ». Il peut apparaître plus sûrement encore en classe de ***terminale L***, dans le cadre de l'***enseignement de spécialité***, dont le programme précise que « les élèves doivent être capables, *sur des exemples*, de déterminer l'écriture décimale périodique d'un quotient d'entiers » (pour ce programme, aller à l'adresse ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2005/hs7/mathematiques.pdf).

c) Chaque professeur stagiaire est invité à se faire un cahier (électronique) de ***Questions de TICE***, où il consignera les questions qu'il aura rencontrées, et cela ***au fur et à mesure de leur rencontre effective*** (et non pas *a priori*).

• Les questions consignées dans ce ***cahier de questions de TICE*** peuvent relever de domaines très divers, mais doivent sauf exception être liées à ***l'activité professionnelle*** (fût-elle en voie de large renouvellement). À titre d'exemples, voici deux questions « possibles » parmi des dizaines d'autres.

Q_1. Étant donné un fichier Word, comment en créer une version pdf ?

Q_2. Étant donné une série statistique, comment en obtenir un histogramme à l'aide d'Excel ?

• En écho à ces questions, on apportera des éléments de réponse toujours provisoires et conjecturaux, en particulier en glanant dans les *Archives du Séminaire* – et, plus largement, dans les « archives du métier ».

• Les questions (avec ou sans éléments de réponse) consignées dans les cahiers de ***Questions de TICE*** personnels pourront être soumises à l'équipe de formation en vue de leur publication dans un cahier de ***Questions de TICE de la filière*** mis en ligne.

• L'ensemble des questions/réponses soumises par un professeur stagiaire et acceptées pour publication dans le cahier de filière pourra être inséré dans le portfolio du stagiaire, pour lui valoir validation de la compétence A.1.1, « Rechercher, produire, partager et mutualiser des documents, des informations, des ressources dans un environnement numérique »

• Par ailleurs, le cahier des ***Questions de TICE*** personnel pourra être inséré dans le portfolio au titre de la compétence B.1.2, « Contribuer à une production ou à un projet collectif au sein d'équipes disciplinaires, interdisciplinaires, transversales ou éducatives », l'équipe étant ici constituée par la promotion et ses formateurs disciplinaires, et le projet étant celui de constituer un cahier de questions de TICE de filière.

1.2. À propos du B2i

a) La première mention du B2i a été faite lors de la séance 2 du Séminaire : les notes de cette séance proposaient (v. ci-après) un extrait de la ***circulaire de rentrée 2006*** relatif aux TIC.

> **Maîtriser les technologies de l'information et de la communication (TIC) et les mettre au service de tous les enseignements.**
>
> La circulaire n° 2005-135 du 9 septembre 2005 (B.O. n° 34 du 22 septembre 2005) réaffirme l'importance de la maîtrise des TIC conformément au cinquième volet du socle commun.
>
> Afin d'atteindre cet objectif, les référentiels du brevet informatique et internet (B2i) niveau école et niveau collège sont en cours d'actualisation. Un référentiel pour le B2i niveau lycée est en cours d'élaboration. Des textes réglementaires à paraître présenteront prochainement les référentiels et préciseront leurs modalités de mise en œuvre. Ils prendront effet dès la rentrée scolaire 2006. La généralisation du B2i prépare sa prise en compte dans le cadre du DNB.

b) Parmi les « textes réglementaires à paraître » figure certainement l'arrêté du 14 juin 2006 publié au *BO* n° 29 du 20 juillet 2006, comportant trois annexes relatives, respectivement, au « B2i École », au « B2i Collège », au « B2i Lycée ». L'ensemble était proposé à la lecture ***dès la séance 2***, puisque, sous le titre « Brevet B2i 2006 », il figurait d'ores et déjà parmi les documents rassemblés sous la rubrique *Documents/2nd degré* du site de l'IUFM (http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2006-2007/documents_07.html).

• On trouvera désormais ce même document (toujours sous le titre « Brevet B2i 2006 ») mis à jour pour inclure un texte récent, celui de la ***circulaire du 7 novembre 2006*** parue au BO n° 42 du 16 novembre 2006. En outre, on trouvera par ailleurs, sous le titre « Brevet B2i 2006 Annexes » les référentiels et ***« feuilles de position »*** utilisables avec les élèves (et en concertation avec les collègues) concernés.

• Les annexes de l'arrêté du 14 juin 2006 publié au BO n° 29 du 20 juillet 2006 fixent cinq domaines identiques pour les trois niveaux du B2i :

> ➔ Domaine 1 : s'approprier un environnement informatique de travail ;
> ➔ Domaine 2 : adopter une attitude responsable ;
> ➔ Domaine 3 : créer, produire, traiter, exploiter des données ;
> ➔ Domaine 4 : s'informer, se documenter ;
> ➔ Domaine 5 : communiquer, échanger.

c) On se penche aujourd'hui sur les compétences du B2i collège. Voici d'abord comment se présente le référentiel figurant sur la « feuille de position à annexer au livret scolaire et à transmettre au lycée ».

1 – S'approprier un environnement informatique de travail	**Acquis**	**Compétence attestée par l'enseignant**
1.1) Je sais m'identifier sur un réseau ou un site et mettre fin à cette identification.	❍	*Date :* *Discipline :* *Nom et signature :*

• Dans cette feuille de position, une bulle met dans la bouche de l'élève le commentaire que voici :

Avec les enseignants, je note mes progrès dans l'utilisation des technologies de l'information et de la communication. Lorsque je maîtriserai 23 des 29 compétences* qui figurent sur cette feuille de position, j'obtiendrai le B2i collège.

➔ L'appel de note figurant dans la bulle renvoie à la précision suivante :

* Au moins la moitié des items de chacun des domaines doit être validée.

• Chaque participant au Séminaire examine un à un les 29 items en question, et indique, pour chacun d'eux, sur une feuille distribuée à cet effet, si « ça va » ou s'il ressent un « besoin de formation », qu'il jauge en attribuant un score de 1 (le plus faible) à 3 (le plus fort). Avant cela, on parcourt ensemble les 29 « compétences » du référentiel.

1 – S'approprier un environnement informatique de travail

1.1. Je sais m'identifier sur un réseau ou un site et mettre fin à cette identification.

1.2. Je sais accéder aux logiciels et aux documents disponibles à partir de mon espace de travail.

1.3. Je sais organiser mes espaces de stockage.

1.4. Je sais lire les propriétés d'un fichier : nom, format, taille, dates de création et de dernière modification.

1.5. Je sais paramétrer l'impression (prévisualisation, quantité, partie de documents…).

1.6. Je sais faire un autre choix que celui proposé par défaut (lieu d'enregistrement, format, imprimante…).

2 – Adopter une attitude responsable

2.1. Je connais les droits et devoirs indiqués dans la charte d'usage des TIC et la procédure d'alerte de mon établissement.

2.2. Je protège ma vie privée en ne donnant sur internet des renseignements me concernant qu'avec l'accord de mon responsable légal.

2.3. Lorsque j'utilise ou transmets des documents, je vérifie que j'en ai le droit.

2.4. Je m'interroge sur les résultats des traitements informatiques (calcul, représentation graphique, correcteur...).

2.5. J'applique des règles de prudence contre les risques de malveillance (virus, spam...).

2.6. Je sécurise mes données (gestion des mots de passe, fermeture de session, sauvegarde).

2.7. Je mets mes compétences informatiques au service d'une production collective.

3 – Créer, produire, traiter, exploiter des données

3.1. Je sais modifier la mise en forme des caractères et des paragraphes, paginer automatiquement.

3.2. Je sais utiliser l'outil de recherche et de remplacement dans un document.

3.3. Je sais regrouper dans un même document plusieurs éléments (texte, image, tableau, son, graphique, vidéo…).

3.4. Je sais créer, modifier une feuille de calcul, insérer une formule.

3.5. Je sais réaliser un graphique de type donné.

3.6. Je sais utiliser un outil de simulation (ou de modélisation) en étant conscient de ses limites.

3.7. Je sais traiter un fichier image ou son à l'aide d'un logiciel dédié notamment pour modifier ses propriétés élémentaires.

4 – S'informer, se documenter

4.1. Je sais rechercher des références de documents à l'aide du logiciel documentaire présent au CDI.

4.2. Je sais utiliser les fonctions principales d'un logiciel de navigation sur le web (paramétrage, gestion des favoris, gestion des affichages et de l'impression).

4.3. je sais utiliser les fonctions principales d'un outil de recherche sur le web (moteur de recherche, annuaire...).

4.4. Je sais relever des éléments me permettant de connaître l'origine de l'information (auteur, date, source…).

4.5. Je sais sélectionner des résultats lors d'une recherche (et donner des arguments permettant de justifier mon choix).

5 – Communiquer, échanger

5.1. Lorsque j'envoie ou je publie des informations, je réfléchis aux lecteurs possibles en fonction de l'outil utilisé.

5.2. Je sais ouvrir et enregistrer un fichier joint à un message ou à une publication.

5.3. Je sais envoyer ou publier un message avec un fichier joint.

5.4. Je sais utiliser un carnet d'adresses ou un annuaire pour choisir un destinataire.

• Le travail amorcé ici sera poursuivi au cours des séances à venir. En attendant, on pourra s'informer davantage sur le B2i et les ressources disponibles en ligne en visitant les sites officiels suivants :

⇨ http://eduscol.education.fr/D0053/documents.htm
⇨ http://www2.educnet.education.fr/sections/formation/certification/b2i/

1.3. Le B2i vu depuis le C2i2e

a) Dans le référentiel de compétences du C2i2e ou dans le document d'accompagnement, le B2i est mentionné à plusieurs reprises, et tout d'abord dans le ***préambule*** au document d'accompagnement, où on lit ceci.

2. Il s'agit là, pour un enseignant, de se mettre en capacité de répondre à de nouvelles exigences sociales qui, dans l'école, résonnent au travers des B2i école, collège, lycée, et à l'université, du C2i niveau 1 ; il s'agit aussi de renouveler, d'adapter ses pratiques pédagogiques en prenant en compte tout ce que ces outils engendrent comme modification dans les apprentissages, dans les approches didactiques et pédagogiques.

b) Mais c'est dans le volet **B** du référentiel, consacré aux « Compétences nécessaires à l'intégration des TICE dans sa pratique », que se concentrent les mentions du B2i.

• Dans l'introduction du volet **B**, on trouve d'abord cette notation, qui fait écho au passage précédemment cité et fixe un principe à retenir et à méditer.

C'est par la mise au point de nouvelles pratiques pédagogiques que l'on permettra aux élèves d'acquérir les compétences définies dans les B2i en même temps que des conceptions d'usages orientés vers la formation de l'individu et des relations sociales citoyennes.

• À propos de la compétence **B.1.2**, « Contribuer à une production ou à un projet collectif au sein d'équipes disciplinaires, interdisciplinaires, transversales ou éducatives », le document d'accompagnement recense, parmi les « Activités possibles du stagiaire », celles-ci.

> – la participation à un projet au sein d'une équipe pédagogique, sur le lieu du stage (exemple : mise en place du B2i école, en lien avec ses collègues et le coordinateur TICE de circonscription).

• À propos de la compétence **B.1.3**, « Concevoir des situations de recherche d'information dans le cadre des projets transversaux et interdisciplinaires », le B2i est également mentionné, et cela en deux occasions.

> **Pistes pour la formation**
>
> – Cette compétence met en jeu les méthodologies de recherche et de traitement de l'information, mobilisées dans le cadre de projets ou dispositifs transversaux et interdisciplinaires (PPCP, B2i, échanges internationaux, classes transplantées, etc.) :
>
> …
>
> **Supports possibles pour l'évaluation**
>
> – Les supports ou indicateurs pourront être les suivants :
>
> • un compte rendu de participation à un projet interdisciplinaire (PPCP, B2i, etc.) ;
>
> …

• Dans la présentation du domaine de compétence **B.3**, « Mise en œuvre pédagogique », le B2i est cité dans le passage suivant.

> La pertinence des usages s'appréciera certes au plan de l'apport aux savoirs disciplinaires et transversaux (B2i, citoyenneté, maîtrise de la langue…) mais il s'agira également pour le professeur d'accompagner les élèves vers l'usage au quotidien des technologies numériques.

c) La plus forte densité de mentions du B2i apparaît toutefois à propos du domaine de compétence **B.4**, « Mises en œuvre de démarches d'évaluation ». On y lit d'abord ceci, qui précise l'objet de l'évaluation à laquelle l'intitulé du domaine fait référence.

> Il s'agit, dans la définition actuelle qui leur est donnée, des évaluations concernant l'utilisation des TIC avec les B2i école, collège et lycée, et le C2i niveau 1.

• La compétence **B.4.1**, « Identifier les compétences des référentiels TIC (B2i ou C2i) mises en œuvre dans une situation de formation proposée aux élèves, aux étudiants », est spécialement importante.

➔ Les « pistes pour la formation » proposées par le document d'accompagnement sont les suivantes.

> – Présenter et faire connaître les textes de référence et les sites ressources concernant les dispositifs B2i, C2i, avec les objectifs :
>
> • d'établir un lien entre les B2i et le C2i niveau 1 ;
>
> • de montrer comment le B2i apporte une dimension citoyenne et développe l'esprit critique.
>
> – À partir des référentiels B2i et C2i niveau 1, dégager une typologie des usages, dans les domaines et disciplines concernés.
>
> – Confronter les compétences B2i et les programmes d'enseignement.

➔ Les « Activités possibles du stagiaire », sous le titre « Auto-formation en complément des apports », comportent les deux items ci-après.

> – s'approprier les référentiels B2i école, collège, lycée afin de voir la cohérence entre ces niveaux, et avec le C2i niveau 1 ;
>
> – connaître les outils de suivi et les ressources en ligne (fiches, adaptation de feuilles de compétences, outils numérique de suivi, etc.).

➔ Parmi les « Activités possibles du stagiaire », menées « sur les lieux de stage », le document examiné ajoute alors ceci.

> – réflexion sur la mise en œuvre du B2i en classe et articulation avec l'équipe des enseignants et le projet d'établissement ou d'école ;
>
> – observation des séances disciplinaires ou transversales faisant appel au TIC et en dégager les compétences B2i mises en jeu ;
>
> – travail en collaboration avec les équipes pédagogiques d'école ou d'établissement.

➔ Les « Pistes pour l'évaluation » contiennent, elles, la mention suivante.

> – Analyse, *a posteriori*, en situation de formation, de séquences de classes pour mettre en évidence les compétences B2i.

➔ Parmi les « Supports possibles pour l'évaluation », le même document propose ceci.

> – Fiches de visite en stages rendant compte de la mise en œuvre effective du B2i dans l'école ou l'établissement.
>
> – Identification des compétences d'un référentiel B2i mises en œuvre dans une situation d'apprentissage proposée aux élèves :
>
> • analyse d'une fiche pédagogique, donnée par le formateur : énoncer une ou deux situations de validation ;
>
> • une fiche pédagogique conçue par le stagiaire pour l'évaluation de compétences B2i.

• Comme la précédente, la compétence **B.4.2**, « S'intégrer dans une démarche collective d'évaluation des compétences TIC (B2i ou C2i) », concerne de façon centrale le B2i.

➔ Les « Pistes pour la formation » comportent les développements suivants.

> – Idéalement, il faut que cette démarche puisse être mise en œuvre dans le contexte de formation du stagiaire pour pouvoir exiger quelque chose : connaissance des référentiels, identification et mise en œuvre des compétences B2i en classe, travail en collaboration avec les équipes pédagogiques des écoles ou établissements.
>
> – À défaut, et provisoirement (stage en école ou établissement où le B2i n'est pas l'objet d'une démarche collective) : travaux de groupes pluridisciplinaires scénarisant une telle démarche.

➔ Les « Activités possibles du stagiaire » sont ici nombreuses.

> – Élaborer avec une équipe une progression de cycle pour la maîtrise des compétences B2i, et organiser la répartition des évaluations de compétences entre les membres d'une équipe d'enseignants (à moduler selon que le stage s'effectue dans le premier ou le second degré).
>
> – Intégrer ou impulser un travail de suivi collaboratif avec l'équipe d'école ou d'établissement.

– Participer à l'évaluation des compétences B2i.
– Participer à l'évaluation des compétences à l'occasion de TPE, PPCP, IDD.
– Identifier l'organisation de l'évaluation du B2i sur le lieu de stage.
– Repérer et décrire des freins possibles à la mise en œuvre du B2i dans une école ou un établissement.

➔ Les « Pistes pour l'évaluation » semblent comporter une voie centrale unique, dans laquelle on retrouve une problématique au cœur du TER…

Analyse *a posteriori* en situation de formation de séquences de classes pour voir comment certaines activités relèveraient après modification de compétences de type B2i.

➔ Les « Supports possibles pour l'évaluation » sont multiples. Les voici.

– Fiche de compte rendu de visite.
– Suivi validé du travail du stagiaire, inclus de préférence dans un portfolio.
– Progression de cycle ou répartition des compétences B2i au sein d'une équipe.
– Fiche action permettant la mise en œuvre du B2i dans un projet d'école ou d'établissement

1.4. C2i2e : repères & balises

a) La version actuellement en ligne du document ***C2i2e – Repères & balises*** est datée du 7 novembre (on suppose que les participants au Séminaire ***en ont pris connaissance***).

b) La séance de travaux dirigés n° 4 (voir ci-dessus) conduira à ajouter de nouvelles balises. Le travail amorcé a en effet eu en perspective les types de tâches suivants.

1a. Rechercher et identifier (par une adresse URL) une ou des calculatrices téléchargeables gratuites.
1b. Rechercher et identifier (par une adresse URL) une ou des calculatrices en ligne.

2a. Étudier une calculatrice « simple » donnée (téléchargeable gratuite ou en ligne), nécessitant une « construction » spécifique des programmes de calcul à exécuter, et en établir un mode d'emploi.
2b. Étudier une calculatrice « simple » donnée (téléchargeable ou en ligne), permettant la saisie directe des programmes de calcul à exécuter (parenthèses possibles), et en établir un mode d'emploi.

3. Pour une classe de collège, élaborer un scénario didactique pour la recherche et l'identification de calculatrices téléchargeables gratuites ou en ligne.
4. Pour une classe de collège, élaborer un scénario didactique pour l'étude et l'établissement de modes d'emploi d'un ensemble donné de calculatrices téléchargeables gratuites ou en ligne.

c) Dans cette ligne, on peut ajouter un autre types de tâches : chaque professeur stagiaire est en effet invité à se constituer un ***carnet d'adresses de TICE*** dans lequel chaque adresse URL devra figurer avec une ***fiche d'accompagnement*** décrivant et analysant les ressources disponibles à cette adresse (à une date donnée).

• La structure et le contenu d'une telle fiche sera précisé progressivement.

• Les adresses documentées recensées dans les ***carnets d'adresses de TICE*** personnels pourront être soumises à l'équipe de formation en vue de leur publication dans un ***carnet d'adresses de TICE de la filière*** mis en ligne.

• L’ensemble des adresses et des fiches d’accompagnement soumises par un professeur stagiaire et acceptées pour publication dans le carnet de filière pourra être inséré dans le portfolio du stagiaire, pour lui valoir validation de la compétence B.1.1, « Rechercher, produire, partager et mutualiser des documents, des informations, des ressources dans un environnement numérique »

• Par ailleurs, le ***carnet d’adresses de TICE*** personnel pourra être inséré dans le portfolio du stagiaire au titre de la compétence B.1.2, « Contribuer à une production ou à un projet collectif au sein d’équipes disciplinaires, interdisciplinaires, transversales ou éducatives », l’équipe étant ici constituée par la promotion et ses formateurs disciplinaires, et le projet étant celui de constituer un carnet d’adresses de TICE de filière.

d) Deux questions ont en outre été formulées à propos de certaines compétences du C2i2e.

1. S’agissant de la compétence B.4.3 du C2i2e, « Exploiter les résultats produits par des logiciels institutionnels d’évaluation des élèves », que sont les logiciels institutionnels d’évaluation des élèves ? Comment y avoir accès ? Qu’est-ce que « JADE » ? (AC, OS, 2de, 10)

2. Pour valider la compétence B.3.5 du C2i2e, « Anticiper un incident technique ou savoir y faire face », suffit-il d’insérer dans son portfolio des situations parallèles à notre séance d’enseignement en les présentant comme des situations de secours ? La description d’une séance réalisée sans lumière suite à une coupure EDF suffit-elle ? Peut-on parler d’incident technique dans ce cas ? Est-ce que cela peut être lié à un travail à présenter à l’IUFM (la clé USB ne contient pas l’exposé prévu par exemple…) (AC, OS, 2de, 10)

• On reviendra sur la première question lorsque nous aborderons de façon plus systématique le thème de l’***évaluation***. En attendant, on se contente ici d’apporter trois précisions.

➔ Le seul logiciel « institutionnel » mentionné ***actuellement*** dans les documents relatifs au C2i2e est le logiciel J’ADE (**J’a**ide au **D**éveloppement des **E**valuations).

➔ Pour s’informer sur le logiciel J’ADE, on peut aller visiter le site correspondant à l’adresse suivante : http://dep.adc.education.fr/jade/. On y trouvera notamment ce commentaire.

Déployé dans toutes les académies à la rentrée 2006, le logiciel J’ADE permet de saisir et d’exploiter les résultats des évaluations à l’entrée en CE2 et en 6^{e} des écoles et des collèges des secteurs public et privé. Destiné aux équipes pédagogiques, ce logiciel facilite le repérage des réussites et l’analyse des difficultés éventuelles rencontrées par les élèves, tant au niveau individuel que collectif.

➔ S’agissant des « logiciels d’évaluation » non « institutionnels », le document d’accompagnement précise que « les formateurs IUFM, tout comme les enseignants de terrain, pourront aider les stagiaires à rechercher des logiciels pédagogiques ou didactiques comprenant des modules d’évaluation des élèves ». Cette recherche pourra préférentiellement porter sur ce que le document d’accompagnement appelle par ailleurs « des produits RIP comprenant un module d’évaluation ». (Les produits RIP sont des produits ayant reçu la marque « Reconnu d’Intérêt Pédagogique » de la part du ministère de l’Éducation nationale : sur la marque RIP, la procédure d’obtention et les produits l’ayant obtenue, voir http://www2.educnet.education.fr/sections/contenus/rip/les_produits_rip1750.)

e) La deuxième question a trait à la compétence B.3.5, « Anticiper un incident technique ou savoir y faire face ». Le document d’accompagnement note pertinemment, à cet égard, que « ce savoir-faire, même s’il est plus déterminant avec les nouvelles technologies, est avant tout un savoir-faire professionnel de base exigible y compris en dehors de l'utilisation des TICE ».

• De ce point de vue, tout « manque », tout dysfonctionnement, dès lors qu'il ne permet plus la mise en œuvre du scénario didactique prévu, entre dans le champ des incidents techniques qu'il faudrait savoir anticiper ou auxquels il faudrait savoir faire face – ***et qu'il faut tenter d'anticiper pour se préparer à leur faire face s'ils surviennent***.

• Deux points doivent d'abord être soulignés.

➔ Tout scénario didactique doit être doté d'une certaine ***robustesse*** par rapport aux principales anomalies qui pourraient survenir. Le scénario de TD (et le PER avec une classe de collège qu'il esquisse) qu'on trouve plus haut, ainsi, avait été imaginé au départ comme devant mettre en jeu des calculatrices ***en ligne*** ; il a été modifié pour s'affranchir d'une impossibilité éventuelle d'accéder à Internet lors de la session de travail, ce qui a conduit à introduire les calculatrices téléchargeables, qu'on peut envisager d'installer rapidement – par exemple à partir d'une ou plusieurs clés USB – sur chacun des ordinateurs utilisés, et cela en formation comme en classe. Cette robustesse intégrée au scénario didactique dispense d'élaborer un scénario « de secours » : c'est en principe le scénario préparé qui doit inclure *a priori* des dispositions lui permettant de résister à certaines perturbations – quoique certainement pas à toutes !

➔ La recherche de la robustesse dans l'élaboration d'un scénario didactique ne doit cependant pas aboutir à sa ***dénaturation***. Ainsi, l'une des idées de base derrière le TD 4 (autour d'un projet de PER avec une classe de collège) est bien que les élèves ***disposent tous des* mêmes *calculatrices*** – et non que chacun dispose d'***une*** calculatrice, qui pourrait ***différer d'élève à élève*** (ce qui serait revenir aux conditions dont il s'agit précisément de se dégager). Dans certains cas, plutôt que d'adapter le scénario à des conditions qui le dénatureraient, il vaut mieux ***en suspendre provisoirement la mise en œuvre***. Bien entendu, il faut alors disposer d'un ***autre*** scénario didactique. Mais celui-ci n'a pas à tenter de « mimer » le premier : ***il n'est pas un scénario de secours***, mais un scénario indépendant, à propos d'un autre type d'activité, voire d'un autre thème mathématique. On conservera donc une interprétation limitative de l'indication du document d'accompagnement à laquelle la question examinée fait référence et que l'on reproduit ci-après.

> Lors de la conception de ses séquences d'enseignement, le stagiaire doit prévoir une situation parallèle, un dispositif de « secours » et indiquer qu'il a anticipé sur les risques inhérents à l'utilisation de cet outil.

• S'agissant des conditions de mises en œuvre d'un scénario didactique donné, on peut distinguer deux grands types d'incidents techniques :

– ceux liés à des conditions ***génériques*** de l'organisation de l'étude, qui pourraient cependant ne pas être satisfaites, depuis le fait que la salle officiellement allouée se révèle occupée par une autre classe, en passant par la coupure d'électricité imprévue au cours de la séance, ou l'absence de craie, la panne de tel appareil régulièrement utilisé (rétroprojecteur, vidéoprojecteur, etc.) ;

– ceux liés à des conditions ***spécifiques*** du scénario lui-même, c'est-à-dire des conditions dont la non-satisfaction affecterait la ***nature même*** des activités prévues par le scénario.

Cette distinction permet d'énoncer deux principes.

➔ Premier principe : l'anticipation et le contrôle étant choses coûteuses (aux plans institutionnel, humain, technique, didactique) et à fiabilité limitée, on s'efforcera de donner une place minimale aux conditions ***spécifiques*** de mise en œuvre d'un scénario didactique donné. Pour cela, on s'efforcera d'***enrichir*** les conditions ***génériques*** de l'organisation de l'étude, en vue de promouvoir une certaine ***banalisation forcée*** de ces conditions, de façon à abaisser le coût (et notamment le « stress ») de l'anticipation et du contrôle de conditions « exceptionnelles » : utiliser (ou, au début, prétendre utiliser) à chaque séance un vidéoprojecteur permet de façonner des conditions génériques de fonctionnement de la classe à la longue moins coûteuses à satisfaire que des conditions exceptionnellement indispensables. Banalisation et routinisation sont ici les maîtres mots.

➔ Deuxième principe : on cherchera alors à donner une robustesse non dénaturante au scénario didactique à réaliser, cette recherche se faisant alors ***pour l'essentiel*** de manière compatible avec le système des conditions ***génériques*** installé.

• Dans la perspective précédente, chaque professeur stagiaire est invité à se constituer une ***liste de contrôle*** (ce qu'on nomme aussi en anglais *checklist* et en français… check-list), relative à l'ensemble (évolutif) des points à vérifier en vue d'une séance en classe supposant satisfaites les conditions génériques (bien entendu pour celles de ces conditions qui appellent un tel contrôle : on ne va pas vérifier par exemple que le collège où l'on enseigne… existe toujours).

• Une fois stabilisée, la ***liste des conditions à contrôler*** qu'il se sera constituée (elle dépend de son environnement professionnel), pourra alors être insérée dans le portfolio du stagiaire au titre de la compétence B.3.5, « Anticiper un incident technique ou savoir y faire face ».

f) Ce qui précède est préparatoire à la mise en place de nouvelles balises : on y procèdera lors de la prochaine séance.

2. Évaluation & développement

2.1. AER : en maths seulement ?

a) La question que voici a été formulée.

> Pour le B2i, je dois donner aux élèves les ordres de grandeur (exemples : K, M, G, T et m, μ, etc. Dois-je absolument chercher à leur faire une activité ou puis-je leur donner directement les résultats, et ensuite faire des exercices, et enfin leur valider cette compétence ? (YB, MJ, 4^{e}, 10)

b) La réponse est simple : l'exigence de faire apparaître les notions à étudier dans leur ***fonctionnalité*** pour comprendre et/ou agir concerne ***tout savoir***, mathématique ou autre – historique, grammatical, biologique, etc.

2.2. Matériaux pour un travail de développement

a) À titre de possibles matériaux d'une AER relative au sujet d'étude évoqué dans la question ci-dessus, on a reproduit ci-après deux extraits des notes du Séminaire 2002-2003 : le premier est issu des notes de la séance 14.

1. On reproduit d'abord une partie du programme de 4e déjà présenté ci-dessus.

Contenus
Notation scientifique des nombres décimaux. Ordre de grandeur d'un résultat.
Compétences exigibles
Sur des exemples numériques, écrire un nombre décimal sous différentes formes faisant intervenir des puissances de 10.
Utiliser la notation scientifique pour obtenir un encadrement ou un ordre de grandeur.
Commentaires
Modifier l'écriture d'un nombre comme 25 698, 236 sous la forme $2{,}5698236 \times 10^4$ ou $25\,698\,236 \times 10^{-2}$ ou $25{,}698236 \times 10^3$ est une activité que doivent pratiquer les élèves.
La notation ingénieur n'est pas exigible.

On notera en outre que l'expression « écriture scientifique » apparaît une fois dans les textes relatifs au collège, dans le passage suivant :

Accompagnement des programmes du cycle central 5e-4e

La calculatrice est un objet courant et une utilisation optimale nécessite un apprentissage sur plusieurs points, notamment […] le calcul avec des écritures scientifiques (puissances de 10) et notamment les touches EE ou EXP des calculatrices…

2. Tout nombre décimal non nul peut s'écrire sous la forme $a \times 10^n$, où a est un décimal vérifiant $1 \leq a < 10$ et n est un entier relatif : telle est « l'écriture scientifique » du nombre $x = a \times 10^n$. On aura ainsi, sur telle calculatrice : 12356800 ➥ 1,23568e+7 ; 0,256 ➥ 2,56e-1 ; 783,151 ➥ 7,83151e+2 ; etc.

3. Par contraste, l'« écriture ingénieur » impose un exposant n qui soit ***un multiple de* 3**, et, en compensation, admet une « mantisse » a à 1, 2 ou 3 chiffres. On aura par exemple : 1,23568e+7 ➥ 12,3568e+6 ; 2,56e-1 ➥ 256e-3 ; 783,151 ➥ 0,783151e+3 ; etc. La maîtrise de cette notation, rappelons-le, n'est pas une compétence exigible.

4. Quelles sont les raisons d'être de ces notations ? On reprend ici la réponse donnée sur son site Internet par un professeur de mathématiques enseignant en collège :

La notation scientifique permet d'écrire des nombres très grands ou très petits ou encore très proches de zéro. C'est une notation très utilisée en informatique et les calculatrices qui n'ont qu'une douzaine de chiffres significatifs peuvent étendre ainsi leur domaine de calcul de façon très efficace. Dès que le résultat atteint un certain seuil, la machine se met à parler en notation scientifique... Il existe dans la nature de très grands nombres : le nombre de grains de sable d'une plage, la distance qui sépare la Terre de la Lune, du Soleil, d'une autre étoile, la masse de la Terre, du Soleil... Il existe aussi de très petits nombres : l'épaisseur d'un cheveu, le poids d'une poussière, les dimensions d'une molécule, d'un atome... Nous n'avons pas à chercher longtemps pour trouver de tels nombres exotiques ! C'est grâce à cette notation que nous pouvons les écrire et les appréhender.

La notation ingénieur est une adaptation de la notation scientifique. Elle est liée de près au système des unités de mesure, et sert aux gens qui étudient des phénomènes mesurables tels les ingénieurs, physiciens, chimistes, électroniciens, etc. Pour mesurer un phénomène, il faut une unité. Les unités choisies dans le système international ne suffisent pas à atteindre la diversité de la nature et il a fallu les adapter en créant des multiples et des sous-multiples qui vont, dans le domaine du très grand ou du très petit, de mille en mille (…). Pourquoi de mille en mille ? C'est une échelle qui permet de bien rendre compte des différentes dimensions de la nature.

5. S'agissant de la notation ingénieur, on doit ajouter qu'elle va de pair avec l'emploi de ***préfixes*** pour désigner les grands nombres et les petits nombres :

Grands nombres

kilo (k), 10^3 ; méga (M), 10^6 ; giga (G), 10^9 ; téra (T), 10^{12} ; peta (P), 10^{15} ; exa (E), 10^{18} ; zetta (Z), 10^{21} ; yotta (Y), 10^{24}.

Petits nombres

milli (m), 10^{-3} ; micro (μ), 10^{-6} ; nano (n), 10^{-9} ; pico (p), 10^{-12} ; femto (f), 10^{-15}, atto (a), 10^{-21} ; zepto (z), 10^{-24} ; yocto (y), 10^{-30}.

On aura ainsi : $3{,}1 \times 10^{-8}$ s = 31×10^{-9} s = 31 ns ; $4{,}7 \times 10^{8}$ Pa = $0{,}47 \times 10^{9}$ Pa = 0,47 Gpa.

6. En 1938, le mathématicien américain Edward Kasner (1878-1955) demande à son neveu, Milton Sirotta, d'inventer un nom pour désigner le nombre composé du chiffre 1 suivi de 100 zéros. Le garçonnet, qui n'a pas encore neuf ans, propose « googol », mot qui va être ensuite popularisé pour désigner donc le nombre 10^{100} = 10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000. Ce nombre excède les mesures des choses « existantes » (non bien sûr des choses « imaginables »). Par exemple, le nombre de tours faits sur elle-même par la Terre depuis qu'elle existe est approximativement de $365 \times 5 \times 10^{9} \approx 1{,}825 \times 10^{12}$. Si de même, on tente de calculer… le nombre de cheveux de la population mondiale, en accordant généreusement 125 000 cheveux à chacun, on obtient approximativement $125\,000 \times 5{,}6 \times 10^{9} = 125 \times 5{,}6 \times 10^{12} = 7 \times 10^{14}$, ce qui reste très loin d'un googol ! On peut aussi tenter de calculer le nombre de grains de sable dans le Sahara : en supposant 2 milliards de grains par mètre carré, on obtiendrait un nombre égal à $(2 \times 10^{9}) \times (8 \times 10^{12}) = 16 \times 10^{21} = 1{,}6 \times 10^{22}$. Selon certains modèles théoriques proposés en physique, le nombre de particules élémentaires existant dans l'univers serait de 10^{80}, ce qui reste encore très petit par rapport à un googol...

7. Les exemples précédents illustrent des calculs que l'on peut avec profit mener à bien en 4^{e} : ils relèvent d'un grand type de tâches dont la maîtrise est, selon le programme, exigible : ***utiliser la notation scientifique pour obtenir un encadrement ou un ordre de grandeur***. L'ordre de grandeur du nombre du nombre de tours faits par la Terre serait ainsi de 10^{13}, celui des cheveux de la population mondiale serait de 10^{15}, celui du nombre de grains de sable dans le Sahara de 10^{22}, etc.

8. D'autres calculs peuvent être envisagés : si l'on apprend ainsi que le Soleil, dont la masse est d'environ 2×10^{27} tonnes, perd environ $1{,}26 \times 10^{14}$ tonnes par an, on peut être impressionné. Mais, pour un homme de 100 kg, cela représenterait une perte annuelle de

$$\frac{1{,}26 \times 10^{14}}{2 \times 10^{27}} \times 100 \text{ kg} = 0{,}63 \times 10^{-11} \text{ kg} = 0{,}63 \times 10^{-8} \text{ g} = \frac{0{,}63}{100} \text{ μg}$$

soit une perte inférieure à… un ***centième de microgramme !***

9. D'une manière générale on s'imposera comme règle que, hormis dans le cadre de purs ***exercices*** de calcul, les calculs demandés aux élèves ***soient dûment motivés par la recherche d'un ordre de grandeur***. Le calcul de l'expression $2{,}1 \times 10^{6} + 4 \times 10^{7}$ ne devrait pas échapper à cette règle…

b) Le second apport de matériaux emprunte aux notes de la séance 16 de cette même année 2002-2003 : il concerne l'usage ***en informatique*** des préfixes indiquant les multiples et sous-multiples d'une unité et était motivé par la question suivante.

À propos des puissances, on a les correspondances suivantes : kilo (k) → 10^{3} ; méga (M) → 10^{6} ; giga (G) → $10^{9.}$ Cependant, en informatique, lorsqu'on parle de 1 ko, on a, non pas 10^{3} octets, mais 2^{10} = 1024 octets. De même pour Mo (= 2^{20} octets), Go (= 2^{30} octets), etc. Est-ce qu'il existe une distinction entre kilo-octet et kilooctet, méga-octet et mégaoctet, etc. ? Ou est-ce simplement dû à l'approximation des puissances de 2 par des puissances de 10 ? (4^{e}, 15)

c) Voici alors les éléments proposés alors en réponse à la question précédente (à propos de laquelle on pourra aussi consulter http://en.wikipedia.org/wiki/Terabyte).

S'agissant de l'usage des préfixes *kilo*, *méga*, *giga* en informatique, on a en effet :

1 ko = 2^{10} octets = 1024 octets = $1{,}024 \times 10^{3}$ octets ;

1 Mo = 2^{20} octets = 1048576 octets = $1{,}048576 \times 10^{6}$ octets ;

1 Go = 2^{30} octets = 1073741824 octets = $1{,}073741824 \times 10^{9}$ octets.

On n'a donc qu'***approximativement*** 1 Mo = 10^3 ko, 1Go = 10^3 Mo… L'IEC (*International Electrotechnical Commission*, en français la Commission Électrotechnique Internationale, CEI) a donc proposé d'appeler respectivement ***kibi-octet***, ***mebi-octet***, ***gibi-octet*** ce qui est aujourd'hui appelé, par abus de langage, kilo-octet, méga-octet, giga-octet. Notons que, selon certaines sources, les constructeurs joueraient sur l'ambiguïté, comme le suggère ce texte prélevé sur Internet :

Dans les disques durs, 1 ko = 1000 octets (et non 1024 octets). Il y a donc une « arnaque » de la part des constructeurs de ce côté-là. Ça a l'air ridicule comme ça mais avec un disque dur de 10 Go vous perdez tout de même... 700 Mo !!! En effet, pour un constructeur 10 Go = 10000000000 octets. Or, en faisant 10000000000/1024/1024/1024, l'on obtient 9,30 Go environ. Soit une perte de 10 Go – 9,30 Go = 700 Mo.

Un travail d'***analyse*** de ce texte (consistant à en lire, expliciter, commenter, contrôler le contenu) constitue un type de tâches des plus utiles. Pourquoi, ainsi, devrait-on « faire » 10000000000/1024/1024/1024 ? Le résultat de cette opération est-il bien égal à 9,30 ? Et pourquoi « faire » ensuite 10 Go – 9,30 Go ? Le résultat est-il bien égal à 700 Mo ? Un ***travail critique*** analogue pourra être fait sur le texte ci-après, de semblable origine, et de facture tout aussi approximative :

Questions

a) Un disque dur hautes performances vous est vendu comme pouvant contenir 72 giga-octets. Or vous vous rendez compte qu'il ne peut contenir que 72 milliards d'octets. Expliquez cette supercherie.

b) Le disque dur de la question précédente vous a été facturé 10 000 francs. De quelle somme vous avez été lésé ?

Réponses

a) Les fabricants de disques durs estampillent souvent leur matériel de manière à faire paraître leur capacité de stockage plus importante qu'elle ne l'est réellement. Ceci peut se faire simplement en faisant croire à l'utilisateur ou au client qu'un kilo-octet représente 1000 octets, un méga-octet 1000 kilo-octets, et un giga-octet 1000 méga-octets, ce qui ne correspond absolument pas à leurs définitions réelles. Ainsi on vous vend des milliards d'octets à la place des giga-octets.

b) Il suffit de calculer le nombre d'octets perdus par rapport à l'annonce du fabricant, puis de multiplier cette somme par le prix théorique de l'octet :

- 72 giga-octets = $72 \times 1024 \times 1024 \times 1024$ = 77309411328 octets ;
- 77309411328 – 72000000000 = 5309411328 : le vendeur vous a volé plus de 5 giga-octets.
- La somme perdue est donc : $(10000/72) \times 5309411328$ = 737,42 francs.

Le même thème pourra fournir des problèmes plus simples, tel le suivant, extrait du même site que le précédent :

Question

Un disque dur a une capacité de 40 giga-octets. Quel est le nombre de bits que l'on peut stocker sur ce disque ?

Réponse

Il nous faut d'abord calculer à quoi correspond un giga-octet en nombre de bits, et multiplier ce nombre par 40. Un giga-octet est égal à 1024 méga-octets, un méga-octet est égal à 1024 kilo-octets, un kilo-octet est égal à 1024 octets, et un octet est égal à 8 bits. Nous avons donc : ((1024 * 1024 * 1024) * 8) * 40 = 343597383680 bits. Le disque dur en question peut donc stocker un peu plus de 343 milliards d'informations élémentaires.

D'une manière générale, de tels travaux concourent à ***enrichir*** en même qu'à ***diversifier*** l'enseignement prodigué. En 2^{de}, ils s'inscrivent dans la perspective tracée par l'extrait du document d'accompagnement ci-après, où l'on a souligné un passage clé :

Le professeur choisit des travaux de nature variée, allant de la rédaction de solutions de problèmes ébauchées en classe jusqu'à la rédaction après recherche collective ou non d'un problème construit en vue d'un résultat significatif (au niveau considéré), en passant par la résolution d'exercices d'applications, la construction de figures, ***le compte rendu et l'analyse d'un texte mathématique***

(adapté au niveau), l’analyse de documents de la vie courante, la production d’un document construit avec un logiciel… L’imagination et la liberté du professeur peuvent ici s’exprimer pleinement dès l’instant qu’il poursuit les objectifs de formation qui lui ont été soumis. C’est à cette occasion qu’il pourra adapter la nature, le niveau de ces travaux, et l’exigence qui y est attachée à la progression générale, mais aussi aux besoins qu’il aura relevés chez chaque élève.

L’accent mis sur l’***analyse critique*** n’est pas moins fort au collège, ainsi que l’attestent les deux textes suivants, extraits respectivement de l’avant-propos des programmes du collège et du document d’accompagnement du programme de 3e.

1. En donnant à l’élève la capacité de formuler rationnellement des opinions et de prendre en compte son interlocuteur, le cours de français contribue à l’éducation civique ; […] de même le cours de mathématiques, en développant les ***capacités d’analyse critique***, ou le cours de sciences de la vie et de la terre en aidant l’élève à acquérir le sens de ses responsabilités vis-à-vis de l’environnement et du cadre de vie…

2. En mathématiques, comme dans d’autres disciplines, les élèves ont eu tout au long du collège l’occasion de pratiquer une démarche scientifique […]. Les élèves y développent des qualités d’initiative, d’imagination et de créativité, en même temps qu’ils font l’apprentissage de la rigueur et de la recherche de preuves, ***d’écoute des arguments d’autrui et d’analyse critique***.

Après-midi

Séance d’explicitation

3. Problématique et fonctionnement du Séminaire

3.1. Un changement institutionnel

a) Un décret signé du premier ministre a été publié au *Journal officiel* n° 302 du 30 décembre 2006, le décret n° 2006-1733 du 23 décembre 2006, qui porte création d’un ***institut universitaire de formation des maîtres dans l’université Aix-Marseille I*** (http://admi.net/jo/20061230/MENS0603194D.html).

b) Un second décret paru dans le même numéro du *JO* et signé le même jour, le décret 2006-1735, porte dissolution de l’institut universitaire de formation des maîtres ***de l’académie d’Aix-Marseille*** (http://admi.net/jo/20061230/MENS0603196D.html). Ce dernier décret précise, dans son article 3, ceci.

> Les biens, droits et obligations de l’institut universitaire de formation des maîtres de l’académie d’Aix-Marseille sont dévolus à l’université Aix-Marseille-I.
>
> Les fonctionnaires affectés à l’institut universitaire de formation des maîtres de l’académie d’Aix-Marseille et les fonctionnaires stagiaires en formation dans cet institut sont affectés à l’université Aix-Marseille-I à compter du 1er janvier 2007.
>
> Les étudiants inscrits à l’institut universitaire de formation des maîtres de l’académie d’Aix-Marseille sont inscrits à l’université Aix-Marseille-I à compter de la même date.

c) On ne parlera donc plus, désormais, de « l’IUFM de l’académie d’Aix-Marseille », mais de l’IUFM de l’université Aix-Marseille-I (ou de Provence : http://www.up.univ-mrs.fr/).

3.2. Un questionnaire d’évaluation

a) Comme celui passé le 17 octobre, le questionnaire passé le 19 décembre comportait quatre questions.

> **Question 1a.** Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous paraît plutôt *positif*.
>
> **Question 1b.** Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt *négatif*.
>
> **Question 2a.** Indiquez *un* aspect de votre travail personnel dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît plutôt *positif*.
>
> **Question 2b.** Indiquez *un* aspect de votre travail personnel dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt *négatif*.

b) Nous nous sommes arrêtés ce matin sur quelques-unes des réponses aux questionnaires, celles touchant aux TICE et au C2i2e. Certaines fiches étaient manquantes lors du premier dépouillement ; on reviendra donc sur l’ensemble des réponses ultérieurement. Celles et ceux qui ne l’auraient pas fait prendront connaissance des réponses disponibles en ligne sur le site de l’IUFM de l’université de Provence…

3.3. Questions de la semaine

a) Rappelons que l'une des règles de vie et de travail formulées dès la séance 2 dispose que, « chaque semaine, avant le mardi matin, chacun a lu et étudié, seul ou dans un cartel de travail, … les *Questions de la semaine* précédente… ».

b) Ici, on reprend ensemble rapidement les questions des participants au Séminaire mises par écrit à l'occasion de la dernière séance avant les vacances de Noël. Chaque participant choisira, parmi cet ensemble, deux questions (autres que la ou les siennes propres) qu'il souhaiterait voir faire l'objet d'un travail spécifique dans le Séminaire au cours des séances à venir. (La collecte des choix sera faite après lecture collective des questions.)

FLA (OS, 5^e^)

13. J'ai commencé le chapitre sur les médiatrices et le cercle circonscrit vendredi. La définition et la propriété caractéristique sont vues en 6^e^ ainsi que la construction. Les élèves ne semblaient pas se souvenir de la définition et de la propriété et ne pas connaître du tout la construction à la règle et au compas : ils avaient visiblement travaillé sur la construction à l'équerre uniquement. Comment faire avancer le temps didactique s'il faut reprendre toute la notion ? De plus, ils ne comprenaient pas l'intérêt de tracer une médiatrice au compas.

VAC (MJ, 2^de^)

13. a) Suite aux bulletins du premier trimestre, la question de l'orientation pour les élèves de 2^de^ s'est posée. Quels sont les critères permettant de déterminer quels sont les élèves qui pourront accéder à la série S, à la série ES, L, STG, STL ? (Ma PCP m'a donné un critère pour la série S, qui est d'être bon en géométrie.)

b) J'ai fait les fonctions avec ma classe de 2^de^ et en particulier le tableau de variations. J'ai insisté sur le fait que le deuxième ligne correspondait aux variations de la fonction et donc que l'on écrivait *f* au lieu de *f*(*x*). La notation est-elle correcte ?

c) Une élève de ma classe qui ne participait jamais jusqu'à présent, demande maintenant à passer souvent au tableau. Le problème est qu'elle est très lente lors de ses corrections au tableau. Du coup, beaucoup d'élèves décrochent, et ça ralentit le rythme de la classe. Je ne sais pas quoi faire, car ne plus l'envoyer serait, à mon avis, une faute de ma part, freinant alors son activité mathématique. Mais alors je « perds du temps » dans ma séance. Quelle est la solution permettant de satisfaire tout le monde, elle, les élèves, et moi-même ?

WB (MJ, 4^e^)

13. J'ai eu une discussion avec un élève qui refuse de travailler avec la classe. Ça n'est pas la négation des problèmes mathématiques posés qui semble empêcher son apprentissage. Il n'arrive pas à s'intéresser à ce que l'on fait s'il n'y trouve pas une utilité dans son quotidien ou sa vie de futur adulte. Quelles réponses apporter à un élève qui fait ce raisonnement ?

AB (OS, 3^e^)

13. Un élève victime d'un accident devrait revenir en cours après un mois d'absence. Comment gérer efficacement son retour ?

YB (MJ, 4^e^)

13. Dans la validation d'items du B2i au collège, les élèves devront travailler sur le tableur. Est-il préférable que je me fasse une adresse de courrier électronique pour mes élèves, leur permettant ainsi de m'envoyer leurs travaux ? Ou alors dois-je passer, dans la classe, d'un élève à un autre afin qu'il m'explique ce qu'il a fait ? Personnellement, je préfère la seconde solution ; mais j'ai du mal à voir comment je peux obtenir une évaluation « juste » (des élèves peuvent s'échanger les solutions, etc.).

JB (CR, 2^de^)

13. Quels sont précisément les éléments didactico-technologiques à prendre en compte lors de l'analyse de la gestion de la séance ? On entend parler ça et là de « topogenèse », de « mésogenèse », de

« chronogenèse », mais on n'a pas encore clairement défini ces notions en séminaire. Y en a-t-il d'autres à considérer ?

OB (OS, 5^{e})

13. Doit-on considérer que le temps didactique avance uniquement quand on aborde un savoir (ou savoir-faire) nouveau, ou peut-on considérer qu'il avance aussi, par exemple, dans le travail de la technique ?

MB (CR, 2de)

13. Pourrait-on repasser du temps sur ce qui concerne le *topos* d'un élève ?

TB (CR, 4^{e})

13. Hier, lundi 18 décembre, jour de grève, j'ai fait cours à la moitié de la classe seulement. On a corrigé un exercice, fini une activité et fait une synthèse. Est-ce que je dois refaire pour les autres la synthèse (elle porte sur la suppression des parenthèses précédées d'un signe + ou –) ?

MBP (OS, 2de)

13. Je pense donner des exercices de réinvestissement sur les fonctions à mes élèves, pendant les vacances de Noël. Doit-on considérer les vacances de Noël comme des vacances « particulières » et de ce fait limiter le travail à faire à la maison ?

AC (OS, 2de)

13. Y a-t-il un autre entretien prévu entre stagiaires redoublants et équipes de formation ?

VD (OS, 4^{e})

13. J'ai du mal à organiser mes bilans d'activités et mes synthèses. Les élèves trouvent qu'on écrit deux fois la même chose. En effet, je fais écrire les notions importantes découvertes pendant l'AER et dans la synthèse je récapitule (finalement) les résultats importants.

KE (MJ, 4^{e})

13. Cette semaine, les élèves ont tendance à être plus agités. Comment adapter les séances pour les motiver à travailler le vendredi 22, sachant qu'ils sont en vacances après mon cours ?

AEO (OS, 4^{e})

13. Un nouvel élève est arrivé hier dans la classe (je n'étais d'ailleurs pas au courant de son arrivée). Comment « intégrer » cet élève dans la classe ? Comment peut-il rattraper des cours qu'il n'a pas vus ?

SF (CR, 5^{e})

13. a) Y a-t-il un moyen de se procurer des logiciels comme Cabri-géomètre II par le biais de l'IUFM ?

b) Qu'en est-il de l'utilisation d'un logiciel en classe dont le collège n'a pas acheté la licence ?

c) Dans la symétrie centrale, une des propriétés de conservation est : un segment se transforme en un segment de même longueur et parallèle. Est-il rigoureux de parler de segments parallèles ?

MG1 (CR, 2de)

13. Dans le chapitre de statistique sur la fluctuation d'échantillonnage, faut-il donner les résultats d'une enquête sur plusieurs échantillons et observer qu'ils diffèrent d'un échantillon à l'autre, ou faut-il que les élèves réalisent eux-mêmes des enquêtes (par exemple en lançant une pièce, un dé, en utilisant « random » de la calculatrice) ? Si la deuxième option est la meilleure, y a-t-il d'autres manières de faire une enquête ? (J'ai vu dans le programme que la deuxième était obligatoire ; mais faut-il faire aussi la première ?)

AG (CR, 2de)

13. Comment différencier « propriété » et « théorème » et faut-il tout démontrer ? Peut-on demander aux élèves de redémontrer en devoir des théorèmes ou des propriétés vues en classe ?

SG (OS, 2de)

13. Je pense demander aux élèves à la rentrée s'ils ont un peu réfléchi à leur choix pour l'année suivante, de manière à pouvoir proposer ensuite des DM avec un exercice spécifique pour ceux qui choisissent S ou ES option Mathématiques, et un autre plus classique pour le reste de la classe. Est-ce une bonne chose ?

RH (MJ, 4^{e})

13. Comment faire pour intéresser les élèves les plus faibles qui ont tendance à décrocher voire à abandonner devant les difficultés rencontrées ?

SH (CR, 4^{e})

13. Je vais commencer le chapitre sur les puissances et je chercher à savoir quelle question je dois me poser pour être la base d'une AER. Je pense que je vais aller faire des recherches dans les archives du Séminaire.

AMJ (CR, 2de)

13. Dans un tableau de variation d'une fonction, doit-on écrire « f » ou « $f(x)$ » ? Qu'en pensez-vous ?

ML (MJ, 2de)

13. Lors d'un DM, un élève a utilisé le discriminant pour résoudre une équation du second degré pourtant factorisable grâce à une identité remarquable ! Nous n'avons pas vu, bien sûr, cette méthode en classe (vu que c'est une classe de 2de). Je lui ai demandé pourquoi il avait utilisé cette méthode ; il m'a dit qu'il avait fait un exercice du livre de 2de dans lequel il avait découvert cette méthode et qu'il avait trouvé celle-ci facile à utiliser. Comment tenir compte du travail de cet élève, même si ce n'était pas la réponse attendue et que, en plus, celle-ci est hors programme ?

CL (OS, 4^{e})

13. Un groupe relativement important d'élèves (cinq) sont arrivés en cours avec quinze minutes de retard, créant du désordre, et mettant à mal l'organisation didactique que j'avais prévue (notamment l'activité de recherche pour laquelle ils sont arrivés en plein milieu). J'ai accepté ces élèves, de comportements et de niveaux en mathématiques divers, après les avoir envoyé chercher un mot à la Vie scolaire, avec les conséquences qui en ont découlé. Aurait-il mieux valu que je refuse ces élèves en cours en leur donnant le travail à faire en Vie scolaire, sachant qu'au bout de trois retards notifiés ils sont de toute façon sanctionnés par une heure de retenue par la CPE ?

FL (MJ, 2de)

13. Que peut-on proposer aux élèves pour leur avant-dernière dernière séance (vendredi, de 15 h à 16 h) avant les vacances ? Quelque chose d'allégé ?

OL1 (OS, 5^{e})

13. Le professeur principal de ma classe en responsabilité m'a fait part de ce que pensent les élèves à mon sujet. D'après eux, je suis trop sévère avec les élèves qui ne me rendent pas leur DM à la date demandée. Je me demande si je dois parler de ce problème dès le prochain cours avec mes élèves, directement, ou si l'intermédiaire du professeur principal est préférable.

OL2 (OS, 5^{e} & option 1re L)

13. Comment peut-on introduire du vocabulaire (par exemple le vocabulaire sur les angles en 5^{e}) sans faire un exposé de type magistral ?

JL (CR, 4^{e})

13. À l'approche des vacances de Noël, l'excitation des élèves est perceptible dans le collège… Que leur proposer à la dernière heure de l'année civile pour que « ça se passe au mieux » pour tout le monde !?? Nouvelle AER et nouvelles notions ? Travail sur ordinateur ? Contrôle ? (Goûter récréatif ?)

SM1 (MJ, 4^{e})

13. On entend beaucoup de choses sur les livrets de suivi des élèves. Pourriez-vous nous donner quelques informations sur ces fameux livrets ?

SM2 (MJ, 4^{e})

13. Si un élève désigne un cercle en utilisant le mot « rond », est-il nécessaire de rectifier ?

JN (CR, 4^e & demi-4^e)

13. Pourquoi n'y a-t-il pas une grille commune à destination des PCP pour l'évaluation de stagiaires ? Un PCP demande à son stagiaire qu'il lui remette ses cours ; un autre ne veut absolument pas des cours, mais uniquement des analyses didactiques. Bref, il ne semble pas qu'il y ait une uniformisation des critères d'évaluation. Cela a l'air de se faire quelque peu au goût du PCP et ça me semble assez peu égalitaire.

ALP (CR, 2^{de})

13. Comment aborder le chapitre « Fonctions de référence » ? Quelle est la raison d'être (pour une AER) ?

SP (MJ, 4^e)

13. Le programme de 4^e indique la compétence exigible suivante : « Utiliser sur des exemples numériques, pour des exposants très simples des égalités telles que $a^2 \times a^3 = a^5$; $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$; $(ab)^2 = a^2b^2$, où a et b sont des nombres relatifs non nuls. » Les commentaires insistent : « Cette rubrique ne doit pas donner lieu à des calculs artificiels sur les puissances entières d'un nombre relatif. Pour des nombres autres que 10, on s'en tiendra au cas d'exposants simples. » Après avoir fait travailler les élèves en activité sur des exemples simples illustrant ce qui précède, que noter dans la synthèse à ce sujet ?

PP (MJ, 2^{de})

13. Faut-il donner des devoirs aux élèves pour la rentrée des vacances ou doit-on réserver l'étude aux semaines effectives de cours ? Peut-on accepter que les élèves n'étudient pas pendant deux semaines ? Est-ce que ce dispositif peut permettre de relancer l'étude à la rentrée de façon plus « consentie » ?

CAR (OS, 5^e)

13. Comment définir une égalité dans le cas général qui englobe les tautologies, les équations, des formules telles que $k(a + b) = ka + kb$, etc. ?

BR (MJ, 2^{de})

13. Je n'arrive pas trop à voir dans quels domaines concrets intervient la théorie des graphes.

SR (CR, 4^e)

13. En 4^e, le théorème de Thalès n'est pas énoncé sous cet intitulé mais sous la forme de « l'égalité de trois rapports ». Peut-on tout de même prononcer le nom de « Thalès » en classe ? De cette façon on pourrait lors des démonstrations, comme pour Pythagore, écrire : « d'après le théorème de Thalès, … ».

CS1 (CR, 1^{re} STL)

13. Je ne comprends pas bien à quoi fait référence la quatrième partie, intitulée « Gestion de la séance », de l'analyse d'une séance.

CS2 (OS, 2^{de})

13. En géométrie, mes élèves semblent plus intéressés par les AER et la synthèse (moments de première rencontre et d'exploration) que par les moments de travail de la technique. Cela engendre donc des bavardages pendant les exercices.

JS (OS, 2^{de})

13. Sur un histogramme, la classe modale est-elle celle de plus grande aire ou de plus grande hauteur ? Existe-t-il une classe médiane ?

WT (MJ, 3^e)

13. a) Quelles nuances existent-ils éventuellement entre les expressions « construire le point tel que… » et « placer le point M tel que… » ? Le second énoncé est-il moins précis que le premier ?

b) Dans ma pratique professionnelle au sein de l'établissement, j'ai du mal à être très perspicace sur l'analyse critique d'une séance après l'avoir vécue dans la classe. Comment faire pour améliorer ce travail d'auto-évaluation ?

FV (OS, 5^e^)

13. Vendredi matin, j'ai une matinée pédagogique. J'ai souvent entendu le terme lorsque j'étais élève. Mais en quoi consiste cette matinée ?

PV (MJ, 2^de^)

13. La classe dont j'ai la responsabilité est très hétérogène. Il devient assez difficile de construire un DS car il sera trop dur pour certains et trop facile pour les autres. Comment puis-je établir un DS pour ne léser personne ?

c) La liste des questions de la semaine 13 circule parmi les participants ; chacun y indique, à l'endroit prévu à cet effet, les deux questions qu'il a choisies (v. l'exemple ci-après).

MB (CR, 2^de^)

13. Pourrait-on repasser du temps sur ce qui concerne le *topos* d'un élève ?

Choisie par… Mathilde Peyron

4. Les Archives du Séminaire

4.1. Enseigner les fonctions ?

a) Le binôme constitué de *KE* et *RH* présente ses choix d'éléments de réponse contenus dans les *Archives du Séminaire* à la question ci-après.

Que contiennent les *Archives du Séminaire* à propos de ***l'enseignement des fonctions***, notamment ***en classe de 2^de^*** ?

b) Remarques & commentaires…

4.2. Des calculs avec les unités dedans ?

a) Un deuxième compte rendu est présenté par le trinôme formé de *JB*, *TB* et *ALP* à propos de la question suivante.

Que disent les *Archives du Séminaire* à propos du ***calcul incluant les unités*** ?

b) Remarques & commentaires…

4.3. La médiane, quelle médiane ?

a) Un troisième compte rendu de recherche, présenté par *VD* et *SG*, a trait à la question ci-après.

Que recèlent les *Archives du Séminaire* à propos de la définition et du calcul de la ***médiane d'une série statistique*** ?

4.4. Recherches à venir

Les recherches à venir dans les *Archives du Séminaire* seront précisées lors de la séance 15. Les prochaines séances d'explicitation devraient avoir lieu le ***mardi 13 février*** et le ***mardi 20 mars***.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 15 : mardi 16 janvier 2007

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Observation & analyse // 2. Forum des questions

0. Questions de la semaine

> *Journée 15 (16 janvier 2007)*
> *Tuteur : [MJ, CR, OS]*
>
> *Mathilde Peyron*
> *Classe : 4^e^ (et soutien en 5^e^)*
>
> *Concernant la note pédagogique, est-il vrai que l'augmentation maximale est fixée à 0,5 point ? Quelle incidence a cette note sur notre carrière ?*

1. Observation & analyse

a) Lors de la séance 13, sur la base d'un compte rendu d'observation, on a conduit une première analyse d'une séance en classe de 2^{de} à propos des fonctions. Rappelons que cette séance observée en février 2006 était en fait la seconde partie d'une session de travail de deux heures coupée par une pause et que, au cours de la première période, la classe avait réalisé un travail de ***synthèse*** à propos de la propriété de ***croissance*** d'une fonction.

b) On visionne une première partie (de 12 minutes environ) d'une vidéo de la séance. On a reproduit ci-après l'essentiel des commentaires suscités par ce visionnage.

• Les élèves entrent après la pause et s'installent à leur place. L'impression éprouvée est celle d'une classe où règne un calme favorable au travail. Il convient ici, à nouveau, d'insister sur ce fait qu'il s'agit là d'une ***conquête***, gagnée par le travail accompli ***depuis la rentrée*** par la professeure avec les élèves. On se gardera à cet égard de donner dans une tradition sans doute répandue chez les professeurs, mais insoutenable, qui consiste à assigner à une classe des propriétés ***intrinsèques***, du genre « C'est une classe bavarde » ou « brouillonne » ou « paresseuse » ou « indisciplinée » ou, au contraire, « travailleuse », « attentive », « volontaire », etc. Un ***même*** groupe-classe peut se montrer plein de sérieux en telle matière et extrêmement rétif, voire chahuteur, en telle autre matière. On n'est pas plus fondé à voir en cela la pure projection d'une prétendue « personnalité » du professeur (un tel aurait un certain « charisme », tel autre en serait dépourvu, etc.). Une classe, ***cela se construit au fil des semaines***. Ce n'est pas un ***donné*** ayant des propriétés arrêtées, ou entretenant avec tel professeur une relation figée : cette relation se construit par le travail que le professeur impulse et régule, y compris par le moyen de « règles de vie et de travail », dont toutes, au demeurant, ne sont pas nécessairement explicitées.

• La conduite de la synthèse par la professeure observée amène à souligner combien ce type de travail avec la classe ***ne doit pas s'effectuer au pas de charge***, si l'on ne veut pas faire de la classe un partenaire fictif (et non plus effectif) : le réglage du ***tempo*** est ici une ***variable didactique sensible***.

• Le lancement de la synthèse se fait par cette sollicitation de la professeure à l'adresse des élèves : « Vous avez une définition à proposer ? » La ***frontière topogénétique*** gagnerait à passer ***plus en amont***, la question devenant alors : « Par quoi commençons-nous ? Qu'allons-nous écrire ? » La réponse en ce cas serait : « On commence par une définition de la notion de fonction décroissante. » C'est là, alors, que la professeure demanderait : « Oui, quelle définition ? En avez-vous une à proposer ? » Etc.

• On note que la professeure réutilise les écritures demeurées au tableau, en y modifiant des membres de phrases (où elle remplace par exemple « croissant » par « décroissant »). Ce procédé assez répandu, rapide pour le professeur, n'épargne pas aux élèves le soin de ***tout récrire***. Si l'on souhaite – comme il semble que ce soit ici le cas – que les élèves restent des ***acteurs*** de la synthèse, il ne faut recourir à ce procédé qu'avec ***une extrême parcimonie***. Bien entendu, qui voudrait au contraire faire que les élèves ne soient que des ***récepteurs passifs*** gagnera à systématiser ce procédé, jusqu'à faire comme ce professeur malveillant qui – *horresco referens !* –effaçait aussitôt, avec une éponge tenue de la main gauche, ce que sa main droite venait d'écrire quelques secondes auparavant…

• Après échange avec les élèves, la professeure écrit au tableau une définition de la notion de fonction décroissante. Elle consigne d'abord ceci : « Une fonction est décroissante si pour » Elle s'arrête et, dialoguant avec elle-même, corrige subrepticement sa formulation en y insérant un membre de phrase oublié : « Une fonction est décroissante sur un intervalle I si pour ». Ce monologue quasi privé aurait gagné à devenir public dans l'espace de la classe, et objet d'un échange avec les élèves où aurait pu émerger une ***raison d'être*** élémentaire de cet ajout. Pourquoi préciser « sur un intervalle I » ? Parce que la classe a vu (on peut le penser !) des fonctions se révéler croissantes sur un intervalle, mais décroissantes sur un autre (par exemple). La ***mise en débat*** dans la classe est presque toujours supérieure, du point de vue de l'entrée effective des élèves dans l'organisation mathématique étudiée, à son absence : elle fournit l'occasion de mettre en question ce que le professeur ne voyait pas spontanément comme opaque pour certains élèves ; elle diminue les effets de « naturalisation » (« Pourquoi on met "sur un intervalle I" ? Parce que. C'est comme ça. La prof fait toujours ça… »). On notera en outre que ce qui peut être fait par la classe lors de la synthèse dépend essentiellement de ce que les élèves auront fait ***avant***, ***ensemble***, avec le professeur.

• L'épisode précédent conduit à souligner que l'essentiel de ce qui va se passer dans une séance se joue ***avant***, dans ***l'organisation didactique*** mise en place ou prévue. Si, ici, il était convenu, peut-être depuis longtemps, que les élèves ***ont à proposer les formulations*** qui, après débat, correctifs, additifs, composeront la synthèse, l'ajout introduit discrètement par la professeure aurait été tout naturellement objet d'un débat, par exemple parce qu'un élève aurait proposé une formulation fautive à cet égard, qu'une autre aurait contestée en soulignant que, dans la synthèse relative à la notion de fonction croissante, on précisait l'intervalle, qu'elle aurait demandé pourquoi ici on pourrait s'en dispenser ; ou encore parce que le proposant aurait inclus cette précision dans sa proposition, et qu'un autre élève aurait demandé pourquoi le faire, etc. Les « trajectoires cognitives » de la classe ne sont certes pas entièrement prévisibles ; mais, pour nombre d'entre elles, l'ajout dû à la professeure aurait acquis une véritable visibilité collective qui aurait fait progresser la classe dans sa maîtrise de la « théorie » des fonctions. Bien entendu, en séance, dans l'organisation didactique adoptée, la professeure aurait pu s'interrompre, prendre la classe a témoin de son oubli, demandant ce qu'il conviendrait d'ajouter et qu'elle aurait oublié, etc. Mais cette ***gestion de l'épisode***, sans doute meilleure que celle réellement adoptée, ne saurait complètement rattraper le déficit fonctionnel ***de l'organisation didactique***. Plus généralement, la gestion de la séance ne saurait durablement compenser les insuffisances structurelles de l'organisation de l'étude.

• Nouvel épisode critique : une élève propose d'écrire, dans la définition en cours de rédaction, que, si $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \geq f(x_2)$; la professeure sollicite la classe : d'accord ? Pas d'accord ? Un élève n'est pas d'accord : lui attendait qu'on écrive $f(x_1) \leq f(x_2)$. On doit souligner ici, d'abord, l'échange, le débat, l'incertitude, qui permettent en principe à chacun de formuler (au moins pour lui-même) un point de vue, une conjecture, peut-être une remémoration plus ou moins difficile. Par rapport à l'épisode de la correction furtive commenté ci-dessus, la situation vécue par la classe est ***fort différente***. L'épisode montre en outre, s'il en était besoin, que l'on n'en est pas ici au simple psittacisme, à la restitution pure et simple d'un « texte du savoir » appris par cœur, préalablement. Tout au contraire, il illustre l'existence d'un « travail » collectif de ***questionnement***, qu'il faut avoir su installer dans les us et coutumes de la classe – en en écartant progressivement les interventions faiblement contributives ayant surtout pour but de « dire quelque chose », de se « montrer », de se « faire bien voir », etc.

• La professeure use ici de plusieurs langages autour de la notion de croissance : un langage d'origine graphique (la courbe monte ou descend), un langage de la variation (l'image augmente ou diminue), un langage semi-formel (si $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$ ou $f(x_1) \geq f(x_2)$). On ne saurait trop insister sur l'importance de tresser ainsi ensemble des formulations relevant de registres différents, afin que la classe dispose d'un outillage langagier ***divers*** permettant de varier les essais de formulation. Un risque existe toutefois : celui de voir la frontière topogénétique séparer les langages « pour le professeur » des manières de dire « pour les élèves » – hormis lorsque, sur commande, les élèves doivent s'adresser au professeur dans l'« idiome » de ce dernier ! Ici, l'observation montre que ce risque n'est pas totalement évité. « L'image doit diminuer donc… $f(x_1)$ doit être… plus grand que $f(x_2)$ », dit la professeure en écrivant l'énoncé formel correspondant, $f(x_1) \geq f(x_2)$; formulation qu'elle reprendra mot pour mot un peu après, en répondant à la question d'une élève qui demande « pourquoi, alors, c'est x_2 qui est plus grand ? ». C'est en ce point que le professeur peut s'abuser, en pensant que « ça va » – que les choses sont claires pour les élèves –, alors qu'il n'en est rien : le passage de « quand x augmente, $f(x)$ diminue » à « si $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \geq f(x_2)$ », qu'il peut être tenté de regarder comme une « simple » traduction, peut précisément être l'élément ***problématique*** pour un certain nombre d'élèves encore… À cet égard, on ne saurait trop souligner l'exigence pour le professeur de « prendre de l'information » sur ce qu'il en est de la réception par les élèves d'éléments mathématiques mentionnés, invoqués mais non encore véritablement banalisés.

• Après avoir mis par écrit au tableau l'énoncé semi-formalisé indiqué, la professeure écrit « Autrement dit, », signifiant par là qu'une autre formulation est attendue. En vérité, cet épisode semble marqué par une régression momentanée vers un contrat didactique traditionnel, où le professeur « fait le cours », tandis que les élèves « prennent le cours ». La professeure apparaît donc un instant dans une certaine solitude topogénétique : apparemment, les élèves sont ici en stand-by… Pourtant la sollicitation réitérée, y compris à travers l'invitation à s'inspirer de ce qui a été fait à propos de la notion de fonction croissante, finit par produire des effets, minimalistes peut-être, mais réels en termes d'***aide à l'apprentissage***. On insistera notamment sur un fait souvent négligé : l'invitation à remplacer un mot par un autre – « monte » par « descend », par exemple – dans une formulation antérieurement consignée au tableau permet, le cas échéant, d'offrir un bout de rôle, sans doute des plus modestes, mais non nul, à tel ou tel élève en difficulté relative, qui, sans cela, n'aurait peut-être pas l'occasion de faire une contribution même minime au travail de la classe. (Cette dernière observation relève, plus largement, d'un travail à venir sur la ***gestion de la diversité***.)

• L'ensemble visionné conduit à une réflexion plus globale sur le temps de l'apprentissage. Tout apprentissage demande du temps. Un apprentissage abusivement accéléré conduit à des résultats soit illusoires, soit volatils : l'apprentissage « instantané » est un mythe. Il faut donc ***ralentir le temps*** plutôt que l'accélérer, prendre des « rallongis » plutôt que des raccourcis. Il faut « temporiser », et employer le temps d'horloge rendu ainsi disponible pour méditer la « matière » étudiée, pour revenir sur la chronique des minutes passées, pour effectuer un travail de remémoration méditative – travail que l'élève avisé prolongera ***hors de la classe***, seul ***ou à plusieurs***, lors de ses trajets en bus, en se promenant, dans la cafétéria près du collège avant que celui-ci n'ouvre ses portes, etc. Cette culture de l'apprentissage « éclaté », ***ubiquitaire***, sans lieu privilégié, il convient bien sûr d'en faire reconnaître les principes et les précieuses vertus.

2. Forum des questions

2.1. Questions de la semaine 13 les plus choisies

a) Lors de la séance d'explicitation du mardi 9 janvier, 44 participants étaient présents. Chacun des participants disposant de deux voix, 88 voix étaient à répartir entre 47 questions, c'est-à-dire presque 1,9 voix par question. En réalité 81 voix seulement ont été « utilisées », leur distribution étant la suivante.

Nombres de voix utilisées (sur 2)	0	1	2	3
Effectifs	2	4	37	1

b) Voici maintenant un tableau statistique donnant le nombre de questions ayant obtenu un nombre de voix donné.

Nombre de voix obtenu	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	23	7	4	4	2	2	2	2	0	0	1

➔ On voit que 23 questions sur 47 n'ont fait l'objet d'aucune mention.

➔ À l'opposé, une question a été choisie 10 fois, ce qui représente une proportion des « votants » de

$$\frac{10}{44} = \frac{1000}{44}\,\% \approx 22{,}7\,\%.$$

2.2. « Fonctions didactiques »

a) On s'arrête dans ce qui suit sur la question la plus fréquemment choisie, dont on reproduit ci-après le libellé en le faisant suivre de celui de deux autres questions de semblable inspiration.

> 1. Quels sont précisément les éléments didactico-technologiques à prendre en compte lors de l'analyse de la gestion de la séance ? On entend parler ça et là de « topogenèse », de « mésogenèse », de « chronogenèse », mais on n'a pas encore clairement défini ces notions en séminaire. Y en a-t-il d'autres à considérer ? (JB, CR, 2de, 13)
>
> 2. Pour reprendre la question que j'ai pu poser à la séance précédente, nous n'avons pas encore abordé en Séminaire les quatre fonctions de productions didactiques (mésogenèse, topogenèse, chronogenèse et dialectique du groupe et de l'individu) qui semblent pourtant essentielles pour l'analyse didactique du TER (?). Par ailleurs, parallèlement, y a-t-il des éléments didactico-technologiques pour analyser la gestion de séance ? (JB, CR, 2de, 14)
>
> 3. Peut-on avoir des explications sur la chronogenèse, la mésogenèse, la topogenèse et la dialectique ? Comment traiter ces différentes fonctions par rapport au compte rendu : linéairement ou globalement ? (FL, MJ, 2de, 14)

b) On notera, dans la question « princeps », cette notation : « ***On entend parler ça et là*** de "topogenèse", etc. »

• Dans les ***résumés*** du Séminaire, « topogenèse » n'apparaît pas (hormis dans la question examinée, reproduite dans le résumé de la séance 14), non plus que « chronogenèse »ou « mésogenèse ».

• Dans les ***notices*** étudiées jusqu'ici, seule la notice *Le temps de l'étude* contient – très normalement – une occurrence, non du substantif « chronogenèse », mais de l'adjectif « chronogène » ; on y lit en effet ceci : « … la fonction chronogène qu'assume normalement le professeur ayant la responsabilité d'une classe apparaît alors comme extrêmement exigeante… » (Ce passage apparaît également dans le résumé de la séance 11 du Séminaire.)

• On examine maintenant deux sources ***écrites*** possibles de la référence « flottante » aux notions mentionnées. La première est la ***liste des questions d'entretien*** pour l'année 2005-2006.

➔ Ce dispositif de formation et de régulation a été très normalement annoncé dans le document de présentation de la formation et de sa validation pour l'année 2006-2007, où on lit ceci.

> [Le suivi des enseignements en GFP] constitue ainsi, pour chaque élève professeur, un point d'appui important dans sa ***préparation personnelle*** de l'entretien avec le jury d'évaluation des enseignements, en même temps qu'il contribue à circonscrire la matière de cet entretien en permettant au tuteur de dresser une liste de ***questions d'entretien***. Cette liste sera arrêtée par le tuteur après concertation avec les autres tuteurs et validation par les responsables des différents enseignements (EDD et FGC).

➔ On reproduit ci-après, afin de l'examiner et de l'interroger, le texte correspondant ***pour l'année 2005-2006***. Ce texte, qui peut certes fonctionner comme un horizon de travail pour la période à venir, ne doit cependant pas conduire à ***bachoter***. Le texte correspondant pour 2006-2007 ne saurait d'ailleurs être encore arrêté, puisqu'il est censé enregistrer le travail de formation accompli collectivement – lequel n'est nullement achevé ! Rappelons, pour la bonne compréhension du texte ci-après, que, en outre, les questions ci-après se réfèrent à un ensemble documentaire – formé du corpus A (constitué par le visiteur) et du corpus B (constitué par le professeur stagiaire) – relatif à une séance et à une séquence qui, à ce jour, ***n'ont pas encore eu lieu !***

On donne ci-après une liste de questions autour desquelles s'organisera l'entretien. Cette liste est structurée en cinq grandes rubriques interdépendantes, que les questions proposées ont d'abord pour objet d'illustrer, sans exclusive et sans en épuiser la matière.

① ***Structure et contenu de la séquence et de la séance observées***

❶ Que sont les SDA et dispositifs didactiques internes au SDP mobilisés lors de la réalisation de la séquence ? Comment la séquence exploite-t-elle l'espace didactique offert par le SDP et ses SDA ?

❷ Quelle est la place du thème mathématique parmi les secteurs et domaines d'études en lesquels se structure le programme de mathématiques de la classe ? Que sont les principaux sujets d'étude participant de ce thème ? Comment ce thème est-il situé dans la programmation annuelle adoptée ?

② ***L'organisation mathématique***

❶ Que sont les types de tâches travaillés dans la séquence ? Y sont-ils clairement dégagés et bien identifiés ?

❷ Quelles sont les raisons d'être des types de tâches travaillés ? Sont-elles explicitées ? Comment ?

❸ Quelle pertinence ont les types de tâches travaillés en tant qu'outils d'études pour l'année en cours ? Pour les années à venir ? Pour d'autres disciplines ?

❹ Que sont les techniques associées aux types de tâches travaillés ? Sont-elles faciles à utiliser ? Quelle est leur portée ? Sont-elles fiables ? Qu'en est-il de leur intelligibilité ? Quel est leur avenir ? Quelles évolutions devront-elles subir pour perdurer ?

❺ Comment les techniques travaillées sont-elles justifiées ? Y a-t-il des énoncés technologiques ou théoriques qui soient considérés comme « évidents » ou « bien connus » ? Les formes de justification utilisées sont-elles proches des formes canoniques en mathématiques ? Ont-elles valeur d'explication pour les élèves ? Les résultats technologiques rendus disponibles sont-ils effectivement exploités ?

③ ***L'organisation didactique***

❶ Comment se réalisent dans les temps et les lieux alloués, et selon quelles modalités (place du manuel, travail en classe et hors classe, etc.), les différents moments de l'étude – première rencontre avec les types de problèmes associés au thème, travail exploratoire visant à l'émergence d'une technique, travail d'élaboration technologique et théorique, travail de la technique et, plus largement, de l'organisation mathématique, institutionnalisation, évaluation ? Comment ces moments didactiques sont-ils articulés ? Jusqu'à quel point leurs modalités de réalisation apparaissent-elles installées dans la culture de la classe ?

❷ Qu'en est-il de la chronogenèse ? Quelle avancée de l'étude la séquence a-t-elle permis ?

– Cette avancée dans le temps didactique se manifeste-t-elle concrètement dans l'organisation mathématique effectivement construite ?
– S'est-elle faite au détriment de certains des moments de l'étude ? Lesquels ?
– Comment la mémoire didactique de la classe est-elle assurée ?

❸ Qu'en est-il de la topogénèse ?

– Quel est le *topos* de l'élève dans l'organisation de l'étude ? Les élèves l'occupent-ils franchement, ou seulement d'une manière aléatoire ?
– Quel est le *topos* du professeur dans la séquence ? Lui permet-il d'assurer adéquatement ses différents rôles (directeur d'étude, aide à l'étude, enseignant, etc.) ?
– Comment le *topos* du professeur s'articule-t-il avec le *topos* de l'élève ?

❹ Qu'en est-il de la mésogénèse ?

– De quelles ressources, en termes de médias et de milieux, les élèves disposent-ils ou construisent-ils sous la direction du professeur, dans le travail d'étude qui leur est dévolu ?

– Ces ressources leur permettent-elles de résoudre en quasi-autonomie les problèmes qu'ils ont à affronter ?

④ ***La gestion de la séquence et de la séance***

❶ La gestion du temps didactique permet-elle d'impulser une dynamique de l'étude adéquate ? La gestion de l'espace didactique conduit-elle à une exploitation satisfaisante des divers SD mobilisables et des dispositifs didactiques qu'ils proposent, notamment en ce qui concerne la mémoire didactique de la classe et de chacun des élèves ?

❷ La gestion par le professeur de son propre *topos* et du *topos* de l'élève, et en particulier des ressources que celui-ci peut mobiliser, lui permet-elle une prise de décision effective et une action efficace devant les difficultés rencontrées au cours de la séquence ?

⑤ ***Les passages imposés***

❶ Quel est le dispositif d'évaluation utilisé ? Quels sont les critères d'évaluation ? Quels sont leurs rôles ?

❷ Quelle est la contribution possible de la séquence à l'éducation à la citoyenneté ?

❸ Quelles formes d'aide ou de différenciation réalistes propose la séquence (ou pourrait-on proposer à partir de cette séquence) pour gérer la diversité des élèves ?

❹ Quelles formes de collaboration disciplinaires, interdisciplinaires ou intercatégorielles pourraient prolonger la séquence ou s'intégrer à elle ?

• On trouve encore, dans les notes relatives à la séance 10, tenue le 23 novembre 2004, du Séminaire de l'année 2004-2005, un passage qui a pu jouer un rôle dans la diffusion du souci dont se font l'écho les questions reproduites plus haut. On examine ce passage – ci-après.

⇨ ***Analyser une OD : au-delà des moments***

• L'analyse d'une organisation didactique ne s'arrête pas à l'identification des moments de l'étude réalisés en tel épisode du processus didactique. Encore faut-il analyser ce que ***produit*** ou ce que ***permet*** la réalisation de ces moments de l'étude.

① La première ***fonction de production*** que doit assurer l'OD est la fonction de ***chronogenèse*** : le temps de l'horloge passe, mais le temps ainsi consommé aura-t-il permis une production de savoir appropriée ? Ou bien y a-t-il eu, au contraire, sous-production, ou production inadéquate (parce qu'on s'est trop hâté, par exemple) ? Une organisation idoine de l'étude doit produire un ***temps didactique*** qui revienne à créer, conformément à la programmation arrêtée, les OM que l'on aura déterminés (et dont la mise en place est prévue par le programme d'études en vigueur).

❶ À cet égard, on se demandera si la création des OM visées est appuyée sur un système ***de PER et d'AER*** ayant une bonne ***générativité***, ou si, au contraire, chaque nouvelle avancée dans le temps de l'étude revêt un coût propre élevé, voire prohibitif. (C'est là que le plongement de l'étude ***locale*** dans un ou des PER ***« régionaux »*** apparaît précieux.)

❷ L'analyse de la chronogenèse passe par l'analyse des OM qu'elle aura permis de créer : aura-t-elle – par exemple – engendré des technologies bien adaptées, ouvertes sur l'avenir, etc. ? Aura-t-elle assuré des synthèses efficaces, appuyées sur des bilans précis, etc. ? La chronogenèse ne se mesure qu'en prenant ainsi en compte la qualité des OM construites. Une chevauchée rapide à travers un thème d'études n'est nullement équivalente à une chronogenèse de qualité, productrice d'un temps didactique qui ne soit pas illusoire : le temps de l'horloge peut passer sans qu'avance sensiblement le temps du savoir. Une erreur commune, à cet égard, est de tenter de « prendre des raccourcis » alors que, contre un certain sens commun, pour « aller vite et bien » (du point de vue didactique), il faut savoir renoncer à aller ***trop*** vite – « à la va-vite ». Il faut savoir ***temporiser***. En d'autres termes, il convient de se régler sur l'adage latin ***Festina lente*** (« Hâte-toi lentement ! »), qu'un commentateur d'aujourd'hui rend ainsi : « Ne nous pressons pas : nous n'avons pas de temps à perdre. »

② La deuxième fonction de production à assurer est la fonction de ***mésogenèse***. Le grec *mesos* signifie « milieu » (il correspond au latin *medius*) : le terme « mésogenèse » désigne la fabrication de ce qu'on nomme usuellement le ***milieu didactique***, c'est-à-dire de l'ensemble des moyens et ressources

didactiques (de nature théorique, expérimentale, etc.), qui sont nécessaires ou utiles à la création en classe des OM prévues par le programme d'études.

➊ Une mésogenèse insuffisante conduit soit à l'arrêt du temps didactique, soit, plus sûrement, à l'importation, en général par le truchement du professeur, d'OM toutes faites (« allogènes »), en lieu et place du processus de leur création « indigène » – par la classe – comme réponses $R^{\heartsuit}$ à des questions Q, et de leur confrontation aux productions allogènes $R^{\Diamond}$.

➋ Devant toute question Q à étudier, on se demandera donc si la classe dispose ou non, ou si elle peut se rendre aisément disponibles, les ressources idoines pour l'étude ***effective*** de la question Q, et en particulier si l'on dispose d'une suite de ***questions cruciales*** par lesquelles passe l'étude de Q, ou si au contraire la classe sera condamnée à ***recopier*** telle ou telle réponse $R^{\Diamond}$…

③ La troisième fonction de production à assumer est la fonction de ***topogenèse***. « Topos » signifie, en grec, « lieu » (qui vient du latin *locus*) : on le retrouve dans « topologie », « topographie », etc. Quel est donc le *topos* – c'est-à-dire le lieu – offert aux élèves dans l'étude d'une question Q (comment accomplir la tâche t ?) génératrice d'une certaine OM ? Solidairement, bien sûr, quel est le *topos* alloué au professeur ?

➊ L'examen du *topos* de l'élève (et de celui du professeur) suppose l'investigation de l'ensemble des gestes didactiques que la création d'une OM peut supposer, à propos de chacun des moments de l'étude. Quelle est, ainsi, la place de l'élève dans l'élaboration de la technique et de sa technologie relative à un certain type de tâches, dans la mise en forme d'une synthèse, etc. ?

➋ L'examen à mener concerne également la place de l'élève dans la production du ***questionnement générateur*** de l'OM considéré : l'élève est-il par exemple réduit à suivre le déroulement d'un énoncé fixé à l'avance ou la classe participe-t-elle à la production de l'étude de Q par la production et l'étude de ***questions cruciales*** successives ? Dans quelle mesure encore la classe participe-t-elle à la production ou à la mobilisation des ***moyens*** utiles pour construire une réponse R bien contrôlée à la question Q étudiée ? Ces moyens et ressources didactiques sont-ils apportés tout faits par le professeur ou bien les problèmes de la mésogenèse sont-ils dévolués à la classe et résolus par elle sous l'impulsion et sous la direction du professeur ?

④ La quatrième fonction à assurer est celle de la ***dialectique du groupe et de l'individu*** (qui relève d'abord de l'OD, et pas seulement de la gestion de la séance). C'est en effet non seulement le *topos* de l'élève « générique » qui devra être évalué, mais aussi le *topos* particulier à tel ou tel élève de la classe ou à telle ou telle « catégorie » d'élèves (filles et garçons, « forts » et « faibles », etc.). La gestion du groupe est-elle attentive à chacun ? Ou bien laisse-t-elle se créer et perdurer une géographie didactique visible et invisible de la classe avec des lieux d'activité et des foyers d'inactivité ? En d'autres termes, la classe est-elle un bon outil au service des apprentissages de chacun de ses membres ? Inversement, ceux-ci ont-ils la possibilité concrète de contribuer, chacun à sa mesure et à sa façon, à la vie et au travail de la classe pour qu'il en soit ainsi ?

⑤ Une conception ou une gestion inadéquate des processus de ***chronogenèse*** (on perd du temps sans avancer, ou au contraire on fait une économie de temps qui se révèlera dommageable), de ***mésogenèse*** (on ne construit pas les outils didactiques utiles, ou au contraire on met en place des ressources sans grande utilité, qui diminuent la lisibilité du système de travail de la classe), de ***topogenèse*** (on réduit à l'extrême le *topos* de l'élève, ou au contraire on abandonne l'élève en un *topos* trop vaste, non structuré et en quelque sorte non « viabilisé »), ou encore de la dialectique classe / élèves conduit aisément à ne pas réaliser en classe les promesses du travail réalisé par le professeur en amont de la classe. On sera donc attentif, dans la suite du Séminaire, à la question de la prise en charge de chacun des aspects précédents de l'organisation de l'étude.

c) Les questions examinées portaient aussi sur la gestion de la séance et le caractère « linéaire » ou « global » de l'analyse d'une séance observée (par rapport au texte du compte rendu d'observation disponible). Sur ces points, une recherche est confiée au trinôme formé de *WB*, *FL* et *PV*, avec pour objet plus global la question suivante.

Que proposent les *Archives du Séminaire* en matière d'***analyse didactique*** du compte rendu de séance en 4^{e} intitulé « À propos des médianes d'un triangle » ?

Le compte rendu de la recherche sera présenté le ***mardi 13 février***. (Les participants au Séminaire prendront préalablement connaissance du compte rendu d'observation mentionné, à l'adresse http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/seminaire7.html.)

2.3. Chronogenèse – encore

a) D'autres questions de la semaine 13 touchent aux aspects que l'on vient d'examiner. On s'arrête d'abord, ici, sur les problèmes de chronogenèse soulevés, de façon implicite ou explicite, par les formulations ci-après.

1. J'ai du mal à organiser mes bilans d'activités et mes synthèses. Les élèves trouvent qu'on écrit deux fois la même chose. En effet, je fais écrire les notions importantes découvertes pendant l'AER et dans la synthèse je récapitule (finalement) les résultats importants. (VD, OS, 4^{e}, 13) [choisie 6 fois]

2. Doit-on considérer que le temps didactique avance uniquement quand on aborde un savoir (ou savoir-faire) nouveau, ou peut-on considérer qu'il avance aussi, par exemple, dans le travail de la technique ? (OB, OS, 5^{e}, 13) [choisie 0 fois]

b) La seconde question, en apparence très « pointue », est en fait des plus pertinentes : c'est d'elle que l'on partira.

• Il y a une vision « externe » du temps didactique, qui peut être celle des parents d'élèves (« Ça n'avance pas en maths, vous en êtes toujours aux fractions ! ») ou encore celle du professeur parlant en salle des professeurs avec d'autres professeurs de mathématiques (« Ce matin j'ai fini les relatifs, ouf ! »). Cette vision des choses prend acte de l'avancée (ou de la non-avancée) du temps du savoir mais ne regarde pas à la « qualité » du temps créé du point de vue des ***apprentissages*** dont ce temps « officiel » est censé être le support, l'aiguillon, le régulateur, le représentant. De ce point de vue ***incomplet***, on pourra dire que le travail de la technique permet de ***mettre en phase*** le temps des ***apprentissages*** avec le temps ***de l'étude*** (collective), sans pour autant faire avancer ce dernier.

• Mais il y a aussi une vision « interne », où l'on regarde si le temps didactique créé ***est bien adéquat à sa fonction***, qui est d'engendrer, de dynamiser, de promouvoir de ***nouveaux apprentissages***. C'est dans l'adjectif « nouveaux » que gît une distinction utile pour répondre à la question posée. Si le travail de la technique dans lequel la classe est engagée est le ***premier*** travail de la technique touchant l'organisation mathématique en cours de mise en place, alors ce travail participe de la création du temps didactique (et donc, par définition, de son avancée) ; car ce travail, qui relève du « gros œuvre » (pour user d'une métaphore du BTP), a pour objet premier de façonner l'organisation de savoir en cours d'étude, davantage que de contribuer à la maîtrise par les élèves d'un savoir encore en devenir. Par contraste, la poursuite ou la reprise du travail de la technique (et, plus largement, de l'organisation mathématique créée) relève du « second œuvre » : il vise à doter les élèves d'un équipement praxéologique approprié au nouvel habitat mathématique où ils devront évoluer et, par là, à ***renforcer*** le temps didactique créé plutôt qu'à le faire avancer *stricto sensu* (même si ce travail crée en cela des conditions favorables à certaines des avancées futures du temps didactique).

• Si la vision ***externe*** du temps didactique peut être celle du professeur dans ses rapports avec ***l'extérieur de la classe***, la vision qui doit être la sienne ***en tant que directeur d'étude*** est bien la vision ***interne*** décrite ici – même si, tiraillé par les « injonctions » exogènes qu'il sent peser sur lui (en les exagérant parfois), il a tendance à céder à une vision par trop externaliste et bureaucratique.

c) Échapper à cette pression externe n'est certes pas facile ! C'est ce que montre la première des deux questions examinées ici, en montrant du même coup que la soumission à la vision externaliste se fait ***au détriment*** des moyens que le professeur peut mettre en œuvre pour impulser l'apprentissage.

• Par contraste, afin d'illustrer le travail d'apprentissage que permet une organisation où la « mise en texte » du savoir se fait en deux temps distincts – bilans d'AER ***puis*** synthèse –, une recherche est confiée au trinôme formé d'*AlB*, *OB* et *OL2*, avec pour objet plus large la question suivante.

> Que proposent les *Archives du Séminaire* en matière d'***analyse didactique*** du compte rendu de séance en 5^{e} intitulé « Comparer des relatifs » ?

Le compte rendu de la recherche sera présenté le ***mardi 13 février***. (Les participants au Séminaire prendront préalablement connaissance du compte rendu d'observation mentionné, à l'adresse http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/seminaire7.html.)

• Se déprendre de contraintes profondément installées dans la culture et longuement intériorisées – sans même qu'on s'en rende compte – au cours de ses propres études (secondaires et supérieures) n'est jamais chose facile, et cela tout d'abord si l'on a perdu la familiarité avec l'exercice essentiel de l'***examen de soi*** (ce que suggèrent, notons-le en passant, quelques-unes des formulations répondant, dans le questionnaire passé le 17 octobre et le 19 décembre, à la consigne d'indiquer « un aspect de votre travail personnel dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt négatif »…). Or ce dont il faut se déprendre, ici, c'est un contrat « scolaire » immémorial, où l'avancée du temps didactique se mesure à l'avancement du « cours » du professeur, le travail d'apprentissage à partir du cours étant, dans ce cadre, ***entièrement*** à la charge de l'élève – dès lors que le professeur a ***présenté*** et ***« expliqué »*** la matière qu'il s'agira ensuite d'étudier ***par ses propres moyens*** (ou, du moins, sans le secours du professeur).

➔ Voici, à titre d'illustration, un témoignage (dû à l'un de ses anciens élèves, Constantin Possé) de la façon dont un mathématicien de grand renom, Panouftiy Lvovitch Tchebichev (1821-1894), faisait exemplairement « son cours » en se situant dans le cadre strict du découpage topogénétique autrefois en vigueur (cité *in* W. J. Adams, *The Life and Times of the Central Limit Theorem*, New York, Kaedmon Publishing Company, 1974, p. 77-78).

> As a teacher Chebyshev was extraordinarily precise in his habits ; he was rarely absent, was never late, but on the other hand did not remain one minute after the time – even if he had to interrupt the lecture in the middle of a sentence. If he did not finish an argument, he took it up from the beginning at the next lecture, provided that this lecture did not immediately follow the preceding one. He prefaced each derivation, no matter how simple, with an explanation of his goal and an outline of the main ideas. He almost never verbalized his derivations so that the students would have to follow him visually rather than orally. Derivations were carried out quickly and in great detail, so that his arguments were easy to follow. During the lectures Chebyshev would often digress from the systematic course, present his views and the views of other mathematicians on questions discussed during the lectures, and explain their relative importance and interconnections with other problems. These digressions enlivened the class, relaxed the students somewhat, and excited their interest. Chebyshev's courses were not superficial, but profound, and at the same time accessible and easy to understand.

➔ Cette simplicité adamique hante encore une certaine culture didactique scolaire qui, désormais obsolète, mais abondamment vécue et profondément « absorbée » quand ils étaient élèves puis étudiants, imprègne les manières de faire spontanément mobilisées par certains professeurs. Cette remarque soulève la question du ***topos*** de l'élève.

2.4. *Topos* de l'élève et gestion de la séance

a) Réduire le travail d'avancement du temps didactique au défilé hiératique des « notions » du programme, c'est, en effet, oublier le *topos* de l'élève, et c'est revenir de façon illégitime à une époque révolue, où l'élève devait construire lui-même son *topos* à partir du cours du professeur – même si, au vrai, divers dispositifs didactiques l'aidaient à le faire, par exemple l'existence de ***répétiteurs***, à qui les élèves ou étudiants pouvaient « redemander » (c'est le sens du latin *repetitio*) des explications sur le cours du professeur. Une question de la semaine 13 invite à aller plus loin sur ce sujet.

Pourrait-on repasser du temps sur ce qui concerne le *topos* d'un élève ? (MB, CR, 2^de^, 13) [choisie 2 fois]

Pour répondre à cette demande, on recourt dans ce qui suit aux *Archives du Séminaire*.

b) On examine d'abord un extrait des notes de la 23^e^ séance du Séminaire 2001-2002.

① Le concept de *topos* désigne, on le sait, la « place » dévolue à l'élève (qui peut ou non venir l'occuper…) dans le processus didactique. Mais cette métaphore spatiale doit être maniée avec attention. Non seulement, bien entendu, elle ne renvoie pas uniquement aux aspects spatiaux *stricto sensu*, mais surtout elle se décline à ***chaque niveau*** de l'organisation de l'étude, et pas seulement aux niveaux les plus élevés (les plus « génériques »). En particulier, le professeur se doit d'organiser et de gérer le *topos* de l'élève ***jusqu'aux niveaux les plus spécifiques, c'est-à-dire les plus « disciplinaires »***, que traverse à l'égal des autres niveaux la ***frontière topogénétique*** entre élèves et professeur.

❶ Ainsi, s'agissant de tracer une figure en géométrie, l'activité de ***nomination*** (de points, de droites, d'angles) relève-t-elle ***traditionnellement*** (et de manière souvent non explicite) du *topos* du professeur, et non de celui de l'élève ; en conséquence, ce dernier ne pourra conquérir, du moins du seul fait de son activité en classe, une véritable autonomie didactico-mathématique en la matière.

❷ La question suivante fournit une illustration de ce phénomène.

Quelles manipulations algébriques ?

Doit-on attendre des élèves de passer de l'expression développée $-2x^2 + 12x + 3$ (par exemple) à la forme canonique $-2(x-3)^2 + 21$? Ou bien doit-on se contenter de leur demander de montrer l'égalité $-2x^2 + 12x + 3 = -2(x-3)^2 + 21$? (…, 2^de^, 22)

On peut en effet reformuler ainsi la question posée : doit-on faire que le *topos* de l'élève de 2^de^ en vienne à contenir le type de tâches qui fait passer d'une expression du second degré quelconque à la forme « canonique » d'icelle ? Ou bien ce type de tâches doit-il rester dans le *topos* du professeur, en sorte que, pour effectuer une telle opération, l'élève restera – du moins en classe de 2^de^ – dépendant du professeur (ou de l'énoncé), qui devra le faire « à sa place ».

❸ Traditionnellement, de même, les élèves de Terminale scientifique sont initiés à l'étude des suites ***arithmético-géométriques***, de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ (où $a \neq 1$ et $b \neq 0$). Ici, la ***dépendance didactique*** des élèves prend la forme suivante : le professeur (ou l'énoncé) doit fournir à l'élève le nombre ℓ tel que la suite de terme général $u_n - \ell$ soit une suite ***géométrique***, sujet d'étude sur lequel les élèves sont alors censés être ***autonomes***. Il n'est pas prévu, dans ce cadre topogénétique que les élèves aient à

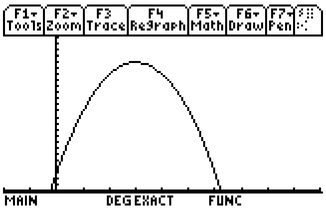
« produire » eux-mêmes le paramètre ℓ (ce qui par exemple sera demandé l'année d'après aux élèves des classes préparatoires). Le nombre ℓ est simplement le point fixe solution de l'équation $\ell = a\ell + b$, soit $\ell = \dfrac{b}{1-a}$. En soustrayant l'égalité $\ell = a\ell + b$ de l'égalité $u_{n+1} = au_n + b$ on obtient en effet aussitôt : $u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$.

② D'une manière générale, le *topos* de l'élève n'est pas constitué seulement de ce que l'élève ***a à faire***. Il est fait aussi, de manière cruciale, de ce que l'élève ***peut*** faire, par exemple lorsque, pour la ***première fois***, il rencontre un type de tâches promis en fin de compte à entrer dans son *topos*.

❶ Ce qu'il peut faire devant tel ***problème*** dépend évidemment du *topos* qui se sera construit jusque-là pour lui et que lui-même sera venu occuper (on peut à cet égard distinguer le *topos* ***assigné*** et le *topos* ***occupé***). Reprenons ici l'exemple du trinôme du second degré vu plus haut. Supposons que l'expression $-2(x-3)^2 + 21$ soit appelée par le désir de déterminer le maximum de l'expression $-2x^2 + 12x + 3$. Dans un certain ***milieu didactique*** qui, aujourd'hui, existe encore bien peu, l'élève peut d'abord faire tracer par une calculatrice graphique la courbe représentative de la fonction

$$x \mapsto -2x^2 + 12x + 3,$$

comme ci-après.



Il semble que le maximum soit atteint pour $x = 3$, valeur en laquelle l'expression étudiée vaut $3(-6 + 12) + 3 = 21$. On peut alors être porté à écrire $-2x^2 + 12x + 3 = 21 - P(x)$ où $P(x)$ devrait être positif pour tout x, et nul en $x = 3$. Comme $P(x)$ est de degré 2, on doit s'attendre à ce que $P(x) = k(x-3)^2$. On a en fait : $P(x) = 21 - (-2x^2 + 12x + 3) = 2x^2 - 12x + 18 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2(x-3)^2$. On aurait pu aussi procéder par identification : $-2x^2 + 12x + 3 = 21 - P(x) \Leftrightarrow -2x^2 + 12x + 3 = 21 - k(x-3)^2$. Comme on doit avoir $21 - 3^2k = 3$, il vient $k = 2$; il ne reste plus alors qu'à vérifier que $-2x^2 + 12x + 3 = 21 - 2(x-3)^2$.

❷ On voit ici que le fait de donner simplement aux élèves cette dernière vérification à faire élimine tout un travail mathématique qui pourra rester indéfiniment hors du *topos* de l'élève (et peut-être du professeur…), appauvrissant d'autant son « expérience mathématique ». À cet égard, le fait de mettre entre les mains des élèves la technique consistant à écrire

$$ax^2 + bx = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

n'est qu'une autre manière de neutraliser le travail évoqué, et d'enrichir le milieu didactique tout en le privant d'une expérience et de savoir-faire didactiques sans lesquels la technique dévoilée risque fort de n'être qu'une recette immotivée et, pour cela, pauvre d'emplois.

c) On examine maintenant un extrait des notes de la 20e séance du Séminaire 2002-2003, qui, en introduisant la notion de ***geste***, approfondit la conceptualisation utilisée jusqu'ici.

Toute technique […] suppose un *dispositif*, soit un ensemble structuré de *moyens* et d'*instruments*, matériels et immatériels, et un ensemble réglé de *gestes* opérés dans le cadre de ce dispositif, le système dispositif + gestes s'identifiant, en fin de compte, à la technique mise en œuvre.

Le mot de geste, employé ici génériquement, mérite un bref commentaire : le latin *gestus* signifie, au figuré, « prendre sur soi, se charger volontairement de », et donc « exécuter, faire » ; c'est en ce sens large, et non dans le sens restreint plus courant (« mouvement du corps »), que le mot est pris ici – on doit le rapprocher du verbe *gérer* et du substantif *gestion*, de même origine. Ce mot sera employé de manière très extensive – plus extensive encore que celui de tâche : dans une institution donnée, en effet, un geste pourra ne pas apparaître comme une tâche « à part entière ». S'agissant du professeur, par exemple, sont ainsi des gestes le fait d'attribuer une note au devoir d'un élève, de retoucher les notations de l'énoncé d'un exercice trouvé dans un manuel avant de le proposer aux élèves, de préparer pendant l'été son cours pour l'année suivante, de participer à une réunion pour choisir le manuel qui sera utilisé dans les classes de tel niveau de l'établissement, de s'abstenir de répondre à un élève de Quatrième qui, ayant à développer l'expression $(2x–3)(x+1)$, demande « s'il faut mettre les flèches », de demander à un élève qui vient de développer l'expression $(2x–3)(x+1)$ de vérifier l'égalité des deux membres pour au moins une valeur de x, d'indiquer à la mère d'un élève de 6e que son fils est « plus littéraire que scientifique » (ce qui est un geste à vrai dire étonnant). Mais seuls certains de ces gestes seront pleinement regardés comme des tâches véritables par l'institution scolaire.

… le motif essentiel de la distinction institutionnelle entre gestes et tâches se trouve dans le fait suivant. Contrairement à ce que peut laisser croire l'institution scolaire dans sa présentation presque toujours individualiste des tâches cibles de l'étude, la plupart des tâches, et en particulier les tâches didactiques, sont, dans la plupart des contextes, *coopératives*, en ce sens qu'elles doivent être accomplies *de concert* par plusieurs personnes $x_1, ..., x_n$, les *acteurs* de la tâche. Chacun des acteurs x_i d'une tâche t doit en ce cas effectuer certains gestes, dont l'ensemble constitue alors son *rôle* dans l'accomplissement de t, ces gestes étant à la fois différenciés (selon les acteurs) et coordonnés entre eux par la technique τ mise en œuvre collectivement. Certains de ces gestes seront regardés alors comme des tâches à part entière, t', dans l'accomplissement desquelles x_i agira (momentanément) *en autonomie relative* par rapport aux autres acteurs de la tâche. L'ensemble de ces tâches, sous-ensemble du rôle de x_i lorsque t est accomplie selon τ, est nommé alors le *topos* de x_i dans t.

Le grec *topos* (qui correspond au latin *locus*) signifie « lieu » : le *topos* de x_i, c'est le « lieu de x_i », sa « place », l'endroit où, psychologiquement, x_i éprouve la sensation de jouer, dans l'accomplissement de t, « un rôle bien à lui ». Dans le cas d'une classe, on parlera ainsi du *topos* de l'élève et du *topos* du professeur. Ainsi, lorsqu'une classe de mathématiques « fait un exercice », ce qui est une tâche éminemment coopérative, la sous-tâche consistant à fournir l'énoncé de l'exercice revient – généralement – au professeur : elle appartient à son *topos*. La tâche consistant à produire – par exemple par écrit – une solution de l'exercice relève, elle, du *topos* de l'élève, tandis que la tâche consistant, ensuite, à fournir un corrigé ressortit, à nouveau, au *topos* du professeur. Si, au cours de la résolution de l'exercice, un élève pose une question au professeur, il effectue ainsi ce qui est vu ordinairement comme un simple geste, appelant un geste homologue de la part du professeur – geste qui peut consister, ainsi qu'on l'a vu, à... refuser de répondre.

L'une des difficultés didactiques les plus ordinaires et les plus pressantes pour un professeur est celle qu'il rencontre pour « donner une place aux élèves », c'est-à-dire pour créer, à leur intention, et à propos de chacun des thèmes étudiés, un *topos* approprié, qui donne à l'élève le sentiment d'avoir un « vrai rôle à jouer ». Dans ce qu'on peut appeler l'enseignement-spectacle, que certaines modes pédagogiques ont pu pousser en avant au cours des décennies écoulées, les élèves sont ainsi sollicités fréquemment, mais n'interviennent en général que comme des figurants sans véritable rôle. Dans la plupart des cas, pourtant, une tâche didactique a pour acteurs et le professeur, et les élèves : lorsque le professeur s'engage dans une tâche où il opère en autonomie relative, cette tâche apparaît généralement comme une sous-tâche au sein d'une tâche plus vaste, où il coopère avec l'élève. L'étude du système des tâches et gestes du professeur, et plus généralement de tout autre aide à l'étude (parents, etc.), ne saurait donc être menée de manière isolée : derrière l'activité du professeur, on doit sans cesse apercevoir l'activité de l'élève.

c) S'il est vrai que le *topos* de l'élève s'inscrit d'abord dans l'organisation didactique (qui prédéfinit le *topos* « assigné »), il se réalise concrètement (il devient *topos* « occupé ») par l'activité des élèves et dépend donc de la ***gestion de la séance*** par le professeur. Sur cet aspect, une recherche est confiée au trinôme formé de *SF*, *SH* et *AG*, avec pour objet la question suivante.

Que proposent les *Archives du Séminaire* en matière d'***analyse didactique*** d'un passage d'une vidéo de séance en 2de faisant par ailleurs l'objet d'un compte rendu écrit intitulé « Modélisation & fonctions » ?

Le compte rendu de la recherche sera présenté le ***mardi 13 février***. (Les participants au Séminaire prendront préalablement connaissance du compte rendu d'observation mentionné, à l'adresse http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/seminaire7.html. La vidéo mentionnée dans la question ci-dessus sera visionnée lors de la séance d'explicitation du 13 février.)

2.5. Le temps didactique, l'individu, le groupe

a) La question ci-après occupe (ex-æquo) le deuxième rang du « palmarès » établi lors de la séance d'explicitation du 9 janvier : on s'y arrête maintenant.

> Un nouvel élève est arrivé hier dans la classe (je n'étais d'ailleurs pas au courant de son arrivée). Comment « intégrer » cet élève dans la classe ? Comment peut-il rattraper des cours qu'il n'a pas vus ? (AEO, OS, 4^{e}, 13) [choisie 7 fois]

b) Une question analogue a été travaillée au cours de la 20^{e} séance du Séminaire 2002-2003. On examine ci-après les éléments de réponse proposés alors.

> **Un nouvel élève…**
>
> 1. Une nouvelle élève vient d'arriver dans la classe. Comment l'intégrer au mieux ? Dois-je lui faire photocopier les synthèses des chapitres qu'elle n'a pas étudiés dans son établissement précédent ? Lui faire faire des exercices sur ces chapitres ? (…, 4^{e}, 19)
>
> 2. Faire en sorte qu'un élève comble un retard d'un trimestre est difficile. Peut-on faire confiance à l'élève pour combler lui-même son retard (pendant les vacances d'été) ? (…, 2de, 19)
>
> **Matériaux pour une réponse**
>
> 1. Sur le site Internet d'un collège belge, on trouve le document ci-après.
>
> **10. Après une absence, que dois-je faire ?**
>
> Après toute absence, une justification écrite signée par tes parents te sera réclamée.
>
> Elle indiquera ton nom, ta classe, la date et le motif de ton absence.
>
> Si aucun motif n'est rentré, tes parents recevront une lettre en fin de semaine.
>
> Pour une absence de trois jours ou plus, un certificat médical sera réclamé.
>
> IMPORTANT
>
> RATTRAPE TON RETARD LE PLUS VITE POSSIBLE !
>
> Dès ton retour,
>
> ✓ Mets ton journal de classe en ordre.
>
> ✓ Complète tes classeurs et cahiers.
>
> ✓ Attention ! La mise en ordre ne peut se faire pendant les heures de cours.
>
> Il s'agit là, bien sûr, d'indications minimales. Mais elles laissent transparaître un postulat implicite qui semble largement partagé : le fait de ***« rattraper »*** des cours manqués ne poserait pas de problème essentiel – il suffirait de le faire ! Même, apparemment, si l'absence s'est prolongée.
>
> 2. Pour voir le paradoxe qu'il y aurait à valider, fût-ce subrepticement, ce postulat, on peut faire le raisonnement suivant : la suppression d'une semaine de classe (par exemple), accompagnée de l'explicitation (par le truchement des programmes et des manuels) de ce qui aurait été « fait » pendant cette semaine, n'aurait pas d'incidence sur les apprentissages – à condition, bien sûr, que les élèves, tous les élèves, consentent à « rattraper leur retard » ! La classe ordinaire serait une affaire délicate, à ne confier qu'à des enseignants patentés ; le rattrapage, une opération allant de soi, non problématique, à laquelle il suffirait que l'élève consente ! Le professeur qui a peiné pour faire entrer ses élèves dans un commerce mathématique satisfaisant avec les triangles semblables sera ainsi requis de penser que

l’élève absent pourrait se jouer des difficultés rencontrées avec la classe en ayant pour seul viatique quelques conseils avisés et une dose de bonne volonté…

3. Le paralogisme que l’on vient de relever s’explique en grande partie, sans doute, de la manière suivante : le « postulat » évoqué traduit moins une croyance institutionnelle en la facilité intrinsèque du « rattrapage » qu’une déclaration de non-responsabilité de l’institution à l’endroit des apprentissages « à rattraper », réputés ainsi placés sous la seule responsabilité de l’élève et de sa famille. Il s’agit là d’une position traditionnelle, mais qui, désormais, entre en conflit avec la problématique contemporaine de l’accompagnement du travail personnel. Il convient en conséquence de revoir la solution au problème des « nouveaux arrivants ».

4. Une solution davantage conforme aux principes actuels d’engagement et de responsabilité de l’Éducation nationale à l’endroit de ses « usagers » suppose une prise en charge adéquate des besoins de l’élève nouvellement arrivé. À cet égard, plusieurs repères peuvent être envisagés.

① À l’instar de ses collègues membres de l’équipe pédagogique (de classe), le professeur de mathématiques doit en premier lieu se tourner vers le ***professeur principal*** de la classe, à qui il revient de coordonner l’ensemble des actions destinées à accompagner l’élève dans sa mise en phase avec le travail de la classe.

② Les actions coordonnées visant notamment l’intégration didactique de l’élève doivent pouvoir se prévaloir de décisions – en matière de dispositifs d’ATP spécifiques par exemple – arrêtées par le conseil d’administration : pas davantage que le professeur de telle discipline n’a à agir en solitaire, l’équipe pédagogique de classe dont il est membre ne doit s’autoriser que d’elle-même.

③ Ces conditions étant satisfaites, et en supposant ici un cadre d’intervention hebdomadaire, il appartient en propre au professeur de mathématiques de la classe de préciser chaque semaine, tant à l’adresse du nouvel élève que des personnels intervenants dans le dispositif d’ATP concerné,

– les types de tâches, techniques, technologies et éléments théoriques, bref, les organisations mathématiques mises en place dans la classe d’arrivée et qui y seront mobilisées la semaine suivante ;

– parmi ces éléments mathématiques, ceux qui, au vu des traces écrites dont dispose l’élève (y compris la photocopie éventuelle du cahier de textes de la classe de départ…), auront été peu ou pas travaillés dans la classe qu’il vient de quitter.

5. Les indications précédentes valent, *mutatis mutandis*, dans le cas d’un élève rentrant en classe après une absence éventuellement de longue durée. On notera ici que le « paradoxe » évoqué plus haut n’a pas tout à fait, fort heureusement, l’évidence terrible qu’on lui a prêtée. Car, dans le rattrapage qu’il s’agit de réaliser, une force agit qui n’existerait pas dans l’hypothèse d’une classe « absente » : celle d’un groupe en marche dans ses apprentissages, et qui entraîne chacun de ses membres, « nouveaux » compris. Sujet sur lequel on va revenir.

c) Le traitement évoqué dans ce qui précède rappelle que c’est l’établissement qui prend en charge le nouvel arrivant – c’est bien le chef d’établissement, non le professeur, qui a pris la responsabilité de l’inscrire. Mais il convient aussi de préciser le « traitement didactique » à mettre en œuvre, sous la responsabilité immédiate du professeur, ***au sein de la classe*** (et pas seulement dans des dispositifs *ad hoc* extérieurs à la classe). À cet égard, un certain nombre d’éléments de technologie didactique peuvent être explicités.

• Le problème posé au professeur n’est pas de faire – par une espèce de miracle didactique ! – que l’élève « en retard » apprenne par ses propres moyens tout ce qu’il n’aura pas vu : si la chose pouvait s’opérer si aisément, c’en serait fini du métier de professeur !… Il s’agit d’intégrer l’élève dans la classe, dans son histoire, dans sa culture mathématique et didactique, et d’abord dans ses ***dynamiques d’étude en cours***.

• Pour cela, il ne saurait être question de lui demander de reprendre *ab ovo* ce que la classe aura vécu depuis le début de l’année, mais simplement de lui demander de tenter de prendre sa place ***ici et maintenant*** dans la vie ***actuelle*** de la classe. On lui demandera donc seulement, moyennant une aide appropriée, de se rendre rapidement et suffisamment maître des outils ***véritablement utilisés*** en ce moment, cet outillage étant défini toujours avec une ***parcimonie rigoureuse*** (à l'opposé du slogan « Tout depuis le début de l'année ! » dénoncé lors de la séance 7 de ce Séminaire).

• Si les outils actuellement mobilisés ont été, ***comme il se devrait***, introduit fonctionnellement, une telle expérience mathématique manquera, à n'en pas douter, au nouvel arrivant. Celui-ci devra alors assumer provisoirement un usage ***« mimétique »*** de ces outils. Si par exemple il n'a pas vu, dans la classe dont il provient, l'addition des fractions dans le cas général étudié en 4^e, et si le travail engagé dans la classe où il arrive conduit à calculer

$$\frac{1}{4}\text{ h} + \frac{2}{15}\text{ h} = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{15}\right)\text{ h} = \frac{23}{60}\text{ h} = 23\text{ min}$$

l'élève devra faire siens, ***culturellement*** en quelque sorte, et le calcul ***avec les unités*** (ainsi que les écritures du type $\frac{23}{60}$ h = 23 min), et surtout une règle de calcul de la somme de fractions correspondant à la formule $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

• On notera ici que, si l'élève doit évidemment être clairement informé de sa ***responsabilité didactique*** vis-à-vis de la classe, celle-ci, en retour, devra ***assumer certaines contraintes momentanées pour l'accueillir en son sein***. Pour ne donner qu'un exemple, dans le cas envisagé ci-dessus (calcul d'une somme de fractions), le professeur pourra s'interdire de proposer des calculs impliquant le recours à un multiple commun des dénominateurs qui ne serait pas purement et simplement leur ***produit*** (ainsi qu'il en va dans la formule d'addition rappelée plus haut) : si les données du problème étudié conduisent au calcul de $\frac{1}{4} + \frac{3}{18}$, somme qui vaut $\frac{5}{12}$ ou plutôt $\frac{25}{60}$ (en sorte que la durée à calculer est de 25 min), on les modifiera pour aboutir – par exemple – au cas indiqué plus haut.

• Le déficit que devra assumer le nouvel arrivant ne doit donc être mesuré que par rapport ***à l'instant présent***, et non par rapport à ***l'histoire passée*** de la classe. Sans doute faut-il souligner ici que cette histoire, que le professeur peut être tenté d'enjoliver, s'est sans doute accommodée de déficits très semblables à ceux dont un nouvel arrivant peut pâtir : un rapport surtout mimétique aux mathématiques manipulées ! On illustrera cette remarque à l'aide d'une question récente.

> Lorsqu'on fait un problème sur le calcul fractionnaires et qu'on a par exemple à calculer le temps de connexion consacré aux impressionnistes sachant que ce temps représente les $\frac{3}{4}$ des $\frac{4}{5}$ du temps de connexion consacré à une recherche sur les peintres français, comment justifier aux élèves qu'il faut effectuer la multiplication des fractions ? (VD, OS, 4^e, 14)

➔ Soit t la durée de connexion consacrée aux peintres français ; le problème envisagée mentionne une durée $t' = \frac{4}{5}t$, c'est-à-dire telle que $5t' = 4t$, puis une durée $t'' = \frac{3}{4}t'$, c'est-à-dire telle que $4t'' = 3t'$. Comment s'exprime t'' en fonction de t ? On sait exprimer $5t'$ en fonction de t et on veut exprimer $3t'$. On a, d'une part, $5(3t') = 3(5t') = 3(4t) = 12t$, et, d'autre part, $5(3t') = 5(4t'') = 20t''$, ce qui implique $20t'' = 12t$, soit $5t'' = 3t$ ou $t'' = \frac{3}{5}t$.

➔ Bien entendu, ***cela ne révèle pas encore de règle générale !*** Pour dégager une telle règle, on recourt aux ***lettres*** – qui sont des « marqueurs » des nombres que le calcul transforme. Si l'on a donc $t' = \frac{a}{b}t$, soit $bt' = at$, et $t'' = \frac{c}{d}t'$, soit $dt'' = ct'$, on a, d'une part, $b(ct') = c(bt') = c(at) = (ac)t$, et, d'autre part, $b(ct') = b(dt'') = (bd)t''$, ce qui donne $(bd)t'' = (ac)t$, soit $t'' = \frac{ac}{bd}t$. On a donc $t'' = \frac{ac}{bd}t = \left(\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}\right)t$, et on établit ainsi la règle cherchée :

$$\text{si } t' = \frac{a}{b}t \text{ et } t'' = \frac{c}{d}t', \text{ alors } t'' = \frac{c}{d}t' = \frac{c}{d}\left(\frac{a}{b}t\right) = \left(\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}\right)t.$$

➔ Cela noté, on peut se demander dans combien de classes de collège le fait « qu'il faut effectuer la multiplication des fractions » est autre chose que le fruit d'un mimétisme culturel-mathématique, sans goût ni saveur, exemple même d'une « science *(sic)* sans conscience ».

• Les principes énoncés à propos de l'arrivée d'un nouvel élève valent en fait ***beaucoup plus largement***, comme on va le voir avec la question suivante.

> J'ai commencé le chapitre sur les médiatrices et le cercle circonscrit vendredi. La définition et la propriété caractéristique sont vues en 6^{e} ainsi que la construction. Les élèves ne semblaient pas se souvenir de la définition et de la propriété et ne pas connaître du tout la construction à la règle et au compas : ils avaient visiblement travaillé sur la construction à l'équerre uniquement. Comment faire avancer le temps didactique s'il faut reprendre toute la notion ? De plus, ils ne comprenaient pas l'intérêt de tracer une médiatrice au compas. (FLA, OS, 5^{e}, 13) [choisie 3 fois]

➔ La référence au passé est toujours délicate : la manipulation du passé est chose trop facile pour que les élèves ne se montrent pas rétifs devant l'évocation de ce qu'ils doivent avoir vu, étudié, appris, de ce qu'ils devraient savoir, etc., au point parfois qu'ils refusent même l'évidence ! Il faut donc s'en tenir toujours au présent en se centrant rigoureusement ***sur ce qui est à faire*** (au lieu d'en tirer prétexte pour « revoir » telle ou telle notion, technique, etc.) En l'espèce (voir ci-après), il n'est nullement question, *a priori*, de ***construire*** les médiatrices, mais de construire le ***cercle circonscrit*** à un triangle : ce n'est que lorsqu'on aura mis en évidence que ce cercle est centré au point de concours de deux médiatrices que se posera éventuellement la question de construire deux des trois médiatrices.

> **Contenus**
> Cercle circonscrit à un triangle
>
> **Compétences**
> – Construire le cercle circonscrit à un triangle.
>
> **Exemples d'activités, commentaires**
> La caractérisation de la médiatrice d'un segment à l'aide de l'équidistance a déjà été rencontrée en classe de sixième. Elle permet de démontrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes et justifie la construction du cercle circonscrit à un triangle.

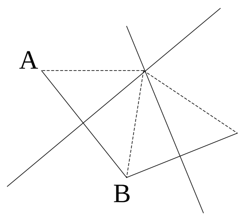
➔ Ce qui rend la médiatrice (étudiée en 6^{e}) « intéressante » ici, c'est le fait qu'elle est ***le lieu des points équidistants*** de deux point donnés. C'est ce que dit, en substance, le commentaire du programme de 5^{e} reproduit ci-dessus ; et c'est aussi ce que disait le (futur ancien) document d'accompagnement relatif au cycle central dans le passage que voici.

> La caractérisation de la médiatrice d'un segment à l'aide de l'équidistance a déjà été rencontrée en classe de sixième. Elle permet de démontrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes et justifie la construction du cercle circonscrit à un triangle.

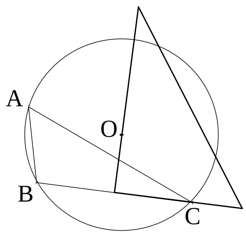
➔ Le programme de 6^{e}, lui, enjoint aux élèves de « connaître et utiliser la définition de la médiatrice ainsi que la caractérisation de ses points par la propriété d'équidistance ». Un commentaire ajoute : « Le rôle de la médiatrice comme axe de symétrie d'un segment est mis en évidence. » S'il existe un cercle passant par A, B, C (points supposés non alignés), le centre O de ce cercle est équidistant de A et B et appartient donc à la médiatrice de [AB] ; de même, il est appartient à la médiatrice de [BC] et à celle de [CA]. L'existence d'un tel cercle équivaut donc au concours des trois médiatrices ! Mais on peut réduire cette condition : les trois médiatrices concourent ***si, et seulement si,*** deux d'entre elles – par exemple les médiatrices de [AB] et [BC] – sont sécantes. Cette dernière propriété, à son tour, équivaut au fait que les droites (AB) et (BC) ***ne sont pas parallèles***, soit encore que les points A, B, C ***ne sont pas alignés*** – ce qui est supposé. Le document d'accompagnement du programme du cycle central résume les choses ainsi.

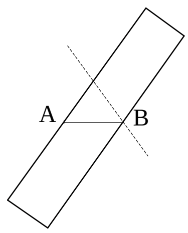
> Dans le cas du concours des médiatrices d'un triangle, c'est la caractérisation de la médiatrice d'un segment à l'aide de l'équidistance qui intervient. Elle est mobilisée deux fois dans un sens et une fois dans l'autre sens.

➔ Il faut éviter de faire dépendre l'étude relative à l'existence (et l'unicité) du cercle circonscrit et à l'identification de son centre de telle ou telle construction ***particulière*** de la médiatrice d'un segment – construction qui n'a, ici, qu'un rôle secondaire. Pour tracer les ***schémas*** utiles au raisonnement à produire, on peut laisser les élèves procéder à leur façon, y compris par des procédés ***approchés***, voire « pifométriques ». Si l'on part de trois points A, B, C, on obtiendra quelque chose comme le schéma ci-après.

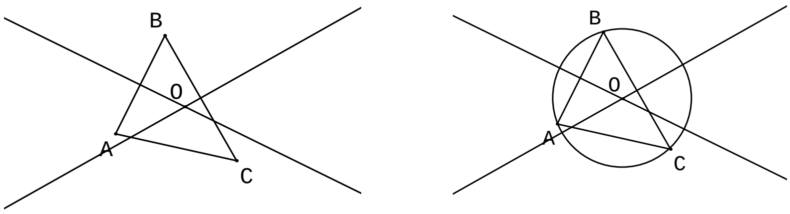


Si l'on souhaite disposer d'un schéma où apparaît le cercle circonscrit, il vaut mieux aller « à l'envers », en se donnant un cercle par son centre et un point A, et en choisissant alors deux autres points B et C : en ce cas, pour tracer des médiatrices, l'équerre fait merveille (ci-dessous, à gauche). Bien entendu, il n'y a pas de raison d'écarter une construction à l'aide d'une règle à deux bords parallèles : elle est esquissée sur la figure ci-dessous à droite.





Notons qu'on peut aussi bien ***neutraliser*** complètement, pendant un temps, le problème du tracé des médiatrices aux instruments en utilisant un logiciel de géométrie dynamique qui trace automatiquement la médiatrice d'un segment donné (voir ci-après).



2.6. Mésogenèses

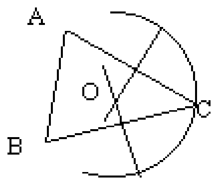
a) L'exemple précédent conduit à faire plusieurs remarques sur la mésogenèse – ici en matière d'étude de faits ***géométriques***. Dans le cas du concours des médiatrices, la déduction théorique paraît incontestable : si les points A, B, C ne sont pas alignés, les droites (AB) et (BC) ne sont pas parallèles et les médiatrices de [AB] et [BC], perpendiculaires à des droites non parallèles, sont donc sécantes en un point O qui est *ipso facto* équidistant de A, B et C. Mais comment la vérifier expérimentalement ? La chose n'est pas si facile qu'il y paraît !

b) La construction de la médiatrice « à la règle et au compas » est présente de façon implicite dans le programme de 6^{e} : un commentaire indique ainsi que, pour le tracé d'une perpendiculaire, on fera « usage de la règle et de l'équerre, puis du compas et de la règle (après le travail sur la médiatrice d'un segment) ». Mais on va voir ici que la règle et le compas ne constituent pas le ***système d'instruments*** le plus adéquat pour mener à bien une vérification expérimentale du concours des médiatrices d'un triangle. C'est en effet ce que montre l'extrait ci-après des notes de la séance 8 du Séminaire 2001-2002, où ce problème avait déjà été examiné.

① Soit à établir expérimentalement que, dans un triangle ABC, le fait spatial suivant a lieu : ***les médiatrices des trois côtés sont concourantes***. Supposons, plus précisément, que l'on veuille établir ce fait spatial en établissant que le point d'intersection de deux des trois médiatrices est en fait équidistant des trois sommets A, B, C.

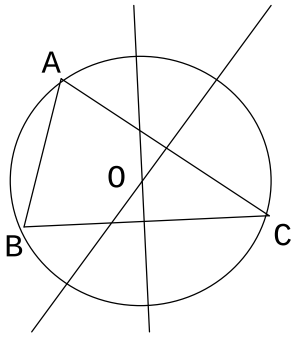
② On choisit de procéder ainsi : désignant par O le point commun aux médiatrices de [BC] et [CA], on se propose de vérifier que le cercle de centre O passant par C passe aussi par A et B. L'expérience ***graphique*** à réaliser peut être représentée par le ***schéma*** suivant, dont la précision importe peu ***pourvu qu'elle n'entraîne pas d'ambiguïté de lecture*** (le schéma d'une expérience graphique gagnera d'ailleurs à être tracé « à main levée »).

Classe de 5^{e}D – Expérience graphique 17



Les médiatrices de [BC] et [CA] se coupent en O. Le cercle de centre O passant par C passe-t-il par B et A ?

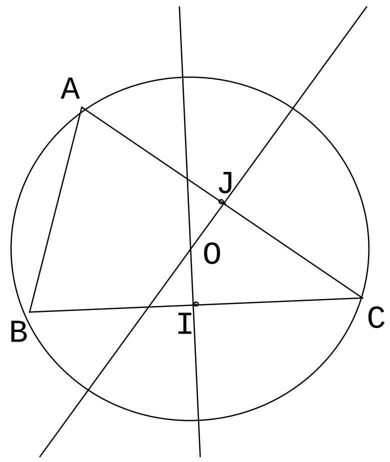
③ La ***réalisation*** de l'expérience graphique, qui revient au tracé d'une ***épure***, révèle pourtant des difficultés : en général, le cercle ***ne passe pas « exactement »*** par B et C, comme ci-après.



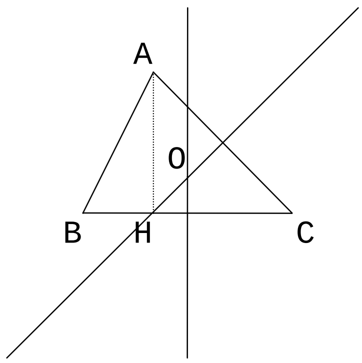
④ La raison d'un tel phénomène se trouve évidemment ***dans l'imprécision du tracé*** : les milieux de [BC] et [CA] ne sont pas exactement… au milieu ; les médiatrices, même si elles passent par les milieux des côtés, ne sont pas exactement perpendiculaires aux côtés ; le cercle de centre O passant par C ne passe pas exactement par C et n'est peut-être pas exactement de centre O...

⑤ Avant d'imputer ces faits à la maladresse ou au manque de soin des élèves, il convient de voir que, à moins que ***l'on ne triche***, il s'agit là d'un ***phénomène inévitable***, même si son ampleur peut être plus ou moins réduite.

❶ La figure précédente a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique en introduisant (volontairement) de très légères erreurs (les médiatrices ne passent pas exactement par les milieux I et J), ce que montre plus nettement la figure ci-après :



❷ Ce phénomène peut être précisé par le calcul. (La petite étude mathématique qui suit, ainsi que ses multiples variantes possibles, qui ont le mérite de partir d'un ***vrai*** problème – comment expliquer ***objectivement*** l'à-peu-près des tracés géométriques ? – pourront utilement être menées à bien ***en classe de 2^de^***.) Considérons le cas particulier de la figure suivante, où le point H est le projeté orthogonal de A et où AH = HC = 4 et BH = 2.



Par rapport au repère (H, C, A), les médiatrices de [BC] et [CA] ont $x = 1$ et $y = x$ pour équations, et le point O a donc pour couple de coordonnées (1, 1). Supposons alors que, par suite d'une erreur de tracé, la médiatrice de [BC] soit remplacée subrepticement par la droite d'équation $x = 1+\varepsilon$, avec ε « petit ». Le point O est alors remplacé par le point O_ε de coordonnées $(1+\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$; le point C ayant pour coordonnées (4, 0), le rayon OC est remplacé par

$$O_\varepsilon C = \sqrt{[4-(1+\varepsilon)]^2 + (1+\varepsilon)^2} = \sqrt{10 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2}.$$

Par ailleurs, le point B ayant pour coordonnées (–2, 0), on a

$$O_\varepsilon B = \sqrt{[-2-(1+\varepsilon)]^2 + (1+\varepsilon)^2} = \sqrt{10 + 8\varepsilon + 2\varepsilon^2}.$$

On voit ainsi que l'on a $O_\varepsilon B \geq O_\varepsilon C$ ou $O_\varepsilon B \leq O_\varepsilon C$ selon que $\varepsilon \geq 0$ ou $\varepsilon \leq 0$, l'égalité se produisant si et seulement si $\varepsilon = 0$. Lorsque $\varepsilon \neq 0$, donc, le cercle ***ne passe pas*** par B.

❸ Supposons, pour fixer les idées, que $\varepsilon > 0$, et considérons la différence

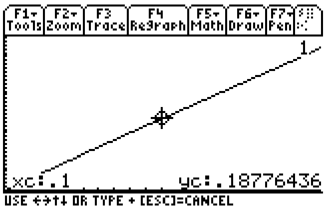
$$\delta_\varepsilon = OB_\varepsilon - OC_\varepsilon = \sqrt{10 + 8\varepsilon + 2\varepsilon^2} - \sqrt{10 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2} = \frac{12\varepsilon}{\sqrt{10 + 8\varepsilon + 2\varepsilon^2} + \sqrt{10 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2}}.$$

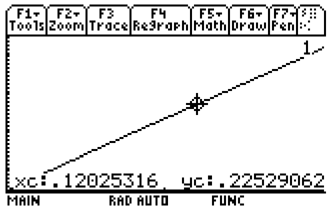
On a : $\lim\limits_{\varepsilon \to 0_+} \dfrac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} = \dfrac{6}{\sqrt{10}} \approx 1{,}89736\ldots$ Même avec une erreur ε « petite », presque invisible à l'œil pressé ou non éduqué, la distance δ_ε, qui est presque deux fois plus grande, peut fort bien être nettement visible.

❹ Dans le cas très simplifié examiné, on peut encore préciser les choses en étudiant l'application

$$x \mapsto \frac{12x}{\sqrt{10 + 8x + 2x^2} + \sqrt{10 - 4x + 2x^2}}$$

sur l'intervalle [0 ; 0,2] (par exemple). (La courbe représentative admet pour tangente à l'origine la droite d'équation $y = \dfrac{6}{\sqrt{10}}\, x$, avec laquelle elle se confond pratiquement ici.) On obtient ce qui suit :





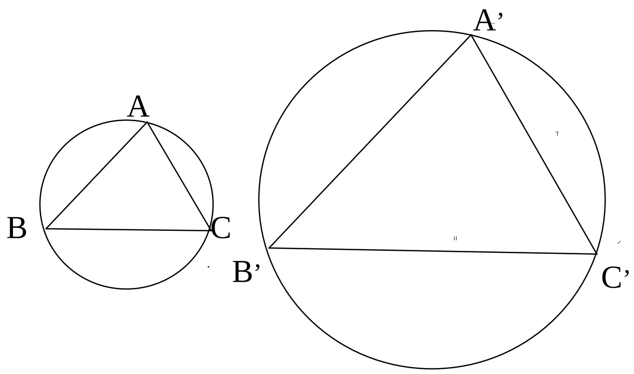
Si l'erreur ε est de 0,9 mm, le point B est a une distance δ_ε du cercle de plus de 1,5 mm, ce qui commence à se remarquer ; si ε est de 1,8 mm, δ_ε dépasse 2,5 mm !

⑥ Il n'est guère possible d'éliminer les très petites erreurs : dans certains cas, elles se compenseront à peu près, tandis que, dans d'autres cas, elles se cumuleront, sans pour autant qu'on puisse conclure que le dessinateur – l'élève – a été plus maladroit qu'un autre.

❶ En réalité, il faudra, dans la réalisation d'épures « aux instruments » en vue d'une expérimentation graphique admettre le ***principe expérimental*** suivant : si les points sont ***presque*** sur le cercle dans toutes les réalisations de l'expérience graphique, on devra considérer que, aux imprécisions de tracé près, le cercle passe effectivement par ces points, et on tiendra alors la chose pour ***un fait spatial expérimentalement établi***, ou du moins ***très hautement vraisemblable***.

❷ On pourra encore appliquer le principe suivant : lorsqu'on agrandit le tracé dans un rapport $n = 2$, 3…, si la distance δ du point B au cercle n'était pas due aux imprécisions du tracé, elle serait elle aussi augmentée dans le rapport n choisi ; s'il n'en est pas ainsi, on conclura que le phénomène observé résulte très vraisemblablement de l'imprécision du tracé.

❸ À titre d'exemple, on examinera les figures ci-après, réalisées à l'aide d'un logiciel de géométrie : les triangles ABC et A'B'C' sont homothétiques l'un de l'autre dans le rapport $2^{\pm 1}$, tandis que les erreurs de tracé sur les médiatrices (non représentées) sont ***les mêmes*** : les distances δ et δ' ne sont ***visiblement pas*** dans le rapport $2^{\pm 1}$.



⑦ Les difficultés évoqués se retrouvent en fait dans les dessins des manuels d'autrefois, où elles sont, bien sûr, réduites par l'habileté du dessinateur (qui, en général, était un professionnel), et, surtout, ***masquées***, en particulier par… l'épaisseur des traits (ce qui fait de ces dessins des ***schémas*** plutôt que des ***épures***).

❶ On examinera à cet égard le dessin suivant, extrait d'un manuel de 5^e^ publié en 1958.

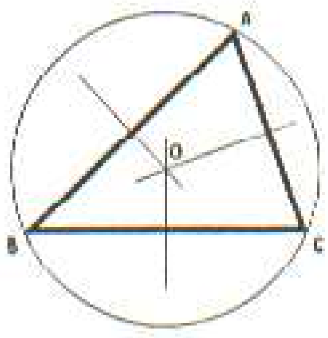
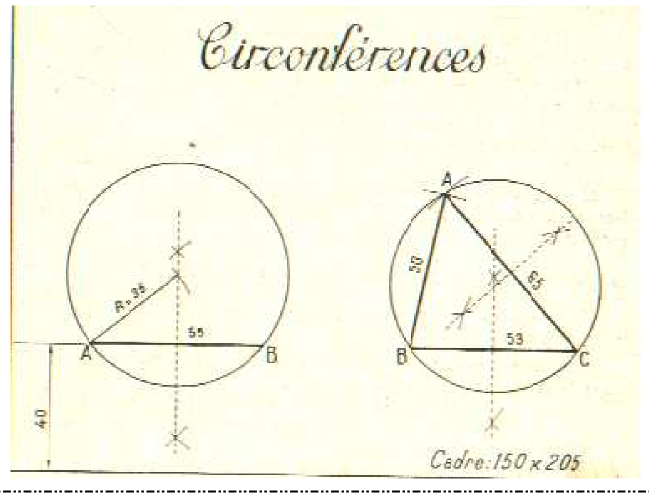


Fig. 91.

❷ La pratique du « maquillage » plus ou moins habile, destiné à pallier les imprécisions du tracé, se retrouvent même dans les ouvrages de dessin technique, comme dans cet ouvrage, paru en 1957 (et destiné, certes, à former modestement au « dessin géométrique » les candidats au certificat d'études primaires), dont on a extrait les figures ci-après.



c) Le programme de 6^e^ comporte aussi le commentaire suivant.

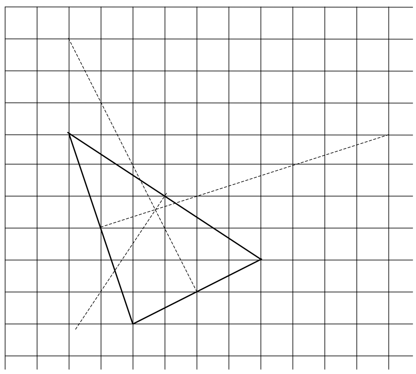
Les procédés utilisés pour la reproduction ou la construction dépendent des indications fournies à l'élève et des instruments disponibles. Pour les figures suivantes : cerf-volant, losange, carré, triangle isocèle, triangle équilatéral, leur construction à la règle graduée et au compas est un objectif de la classe de sixième (dans la mesure où la construction ne fait pas intervenir le parallélisme).

• L'idée de « système d'***instruments*** » affleure dans le passage cité. Or cette notion est ***indispensable*** dans la culture de la classe pour permettre de comprendre l'activité de la classe (et l'activité humaine en général), tant devant des problèmes de construction de figures que des problèmes de conduite de calculs notamment. Plus généralement, c'est l'idée de résoudre un problème ***sous des contraintes données*** qui doit émerger dans la culture de la classe.

• L'instrument expérimental pertinent dans le cas envisagé ici est certainement le ***quadrillage***, qu'il faut évidemment apprendre à utiliser. Mais cela aussi devrait être fait depuis la 6^{e}, classe dont le programme précise ceci.

Les travaux géométriques sont conduits dans différents cadres : espace ordinaire (cour de récréation, par exemple), espace de la feuille de papier uni ou quadrillé, écran d'ordinateur. La résolution des mêmes problèmes dans ces environnements différents, et les interactions qu'elle suscite, contribuent à une approche plus efficace des concepts mis en œuvre.

• En prenant des configurations adéquates (à déterminer…), on obtiendra alors des épures « exactes », comme ci-après.



Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 16 : mardi 23 janvier 2007

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions // 2. Présentation de l'APMEP

0. Questions de la semaine

Journée 16 (23 janvier 2007)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4^e (et soutien en 5^e)

Doit-on, dans la partie « Développement » du mémoire de TER, présenter entre autres choses une simulation de séance incluant les améliorations que l'on apporterait à la séance initiale (compte rendu d'observation fictif) ?

1. Forum des questions

1.1. Questions de la semaine, *suite*

a) Le tableau ci-après présente le bilan des questions de la semaine 13 non encore examinées.

Voix	0	1	2	3	4	5	6	7
Effectif	22	7	3	3	2	2	1	1

b) On trouvera la reproduction de ces questions dans l'**Annexe 1**, en fin de résumé.

1.2. Gestion de la diversité

a) Plusieurs des questions précédentes renvoient au problème de la ***gestion de la diversité des élèves***. On les rassemble ci-après (en laissant de côté, pour le moment, la question de l'***orientation***).

1. J'ai eu une discussion avec un élève qui refuse de travailler avec la classe. Ça n'est pas la négation des problèmes mathématiques posés qui semble empêcher son apprentissage. Il n'arrive pas à s'intéresser à ce que l'on fait s'il n'y trouve pas une utilité dans son quotidien ou sa vie de futur adulte. Quelles réponses apporter à un élève qui fait ce raisonnement ? (WB, MJ, 4^e, 13) [choisie 6 fois]

2. La classe dont j'ai la responsabilité est très hétérogène. Il devient assez difficile de construire un DS car il sera trop dur pour certains et trop facile pour les autres. Comment puis-je établir un DS pour ne léser personne ? (PV, MJ, 2^de^, 13) [choisie 4 fois]

3. Comment faire pour intéresser les élèves les plus faibles qui ont tendance à décrocher voire à abandonner devant les difficultés rencontrées ? (RH, MJ, 4^e^, 13) [choisie 3 fois]

b) Pour amorcer le travail sur ce thème, on commence par étudier des matériaux contenus dans les *Archives du Séminaire*, tout d'abord dans les notes de la séance 20 de l'année 2002-2003.

⇨ ***Gérer la diversité en spécifiant la formation***

• Dans le cas évoqué jusqu'ici, l'élève qu'il s'agit d'accompagner a été assujetti à une histoire intellectuelle et disciplinaire singulière, celle de la classe qu'il vient de quitter. Cet assujettissement fait de lui, ***pendant un temps***, un membre à nul autre semblable de la communauté d'étude où il entre. Mais une telle singularité n'est pas, d'ordinaire, la règle. Toute ***personne*** – chacun de nous – est en effet la résultante d'***assujettissements*** à une multitude d'***institutions*** qui ont peu à peu, au fil des années, construit sa « personnalité », en lui inspirant ses manières d'être et ses manières de voir – ses praxéologies. La ***personne*** se constitue à partir du maelström de ses assujettissements passés et présents, sans se réduire jamais à aucun d'eux, même si tel d'entre eux apparaît dominant en tel type de situations. Dans ces conditions, la formation scolaire apparaît comme un faisceau d'assujettissements toujours renouvelés qui peuvent selon les cas s'accorder ou entrer en conflit avec les assujettissements ayant façonné l'élève.

• Ce serait ainsi une lourde erreur de croire qu'un élève, par exemple, est ou devrait être le sujet docile de la discipline (français, mathématiques, anglais, sciences économiques et sociales, etc.) dans laquelle le professeur a reçu mission de le faire entrer. D'autres assujettissements, exogènes, antérieurs, seront peut-être vécus par lui comme ***plus vitaux***, ou simplement comme de meilleurs garants de l'intégrité et du développement de sa personne, tandis que les assujettissements imposés par la formation scolaire seront ressentis, ponctuellement ou globalement, comme menaçant son intégrité personnelle, chose particulièrement sensible en milieu populaire (Jean-Yves Rochex, « Pourquoi certains élèves défavorisés réussissent-ils ? », *Sciences humaines*, n^{o} 44 [novembre 1994], p. 12) :

> S'éloigner de l'enfant que l'on a été ne peut se faire au prix de devenir radicalement autre. Les transformations subjectives indissociablement requises et produites par la réussite scolaire nécessitent de pouvoir conjuguer changement et continuité dans sa propre histoire et dans ce que celle-ci doit à l'histoire de la famille. Cette nécessité vaut quelle que soit l'origine sociale ou ethnique. Mais elle apparaît plus difficile à mettre en œuvre dans les milieux populaires. En effet, l'espoir de promotion et de transformation par l'école s'y conjugue bien souvent avec la crainte que la distance ainsi parcourue rende l'enfant ainsi « sorti de sa condition » étranger à sa famille et à ses proches, à celui qu'il a été parmi eux.

① Dans certains cas, c'est ainsi toute la culture scolaire qui sera rejetée par l'élève comme lui étant totalement étrangère. À l'enquêteur qui lui demandait son sentiment sur le travail en classe, un élève britannique répondait ainsi, sur un ton définitif : *«Poofy things ! »*, « Des trucs de pédé ! » (Patrick Berthier, *L'Ethnographie de l'École. Éloge critique*, Economica, Paris, 1996, p. 55).

② La récusation des praxéologies institutionnelles propres à l'École est pourtant, en règle générale, élective. Une professeure de français, mutée dans un département du nord de la France dans une zone à forte population ouvrière, contait il y a quelques années, dans le quotidien *Le Monde*, la « mésaventure » suivante. Ses élèves s'obstinant à dire « Je suis été » (à la boulangerie, voir le professeur principal, etc.), elle s'était d'abord essayée à les corriger, en tentant de leur faire entendre qu'en français il convient de dire « Je suis allé » ou « J'ai été ». Cela jusqu'au jour où quelques-uns d'entre eux vinrent, *motu proprio*, lui expliquer qu'ils comprenaient fort bien la chose, mais que modifier leur façon de dire eût signifié pour eux une exclusion au moins symbolique – et, à la longue, peut-être réelle – du groupe familial et de la plupart des groupes d'appartenance (bande de copains, etc.) essentiels pour eux. Plutôt donc être un « mauvais sujet » de l'École qu'être mis au ban d'institutions qui, comme la famille, la fratrie ou le proche voisinage, leur apparaissaient absolument vitales !

• Parce qu'elle vise à faire entrer l'élève en de nouveaux assujettissements, la formation scolaire aboutit, de façon souvent inentionnelle et inaperçue, à distendre, voire à détruire, certains assujettissements antérieurs de la personne, qui fonctionnent alors comme des ***obstacles à la formation***.

① Les assujettissements-obstacles ne se rencontrent pas seulement parmi la foule des assujettissements ***allogènes*** de l'élève : la formation ***passée***, reçue peut-être dans la ***même*** institution de formation, peut elle-même venir faire obstacle à la poursuite de la formation – et cela précisément d'autant plus qu'elle aura plus profondément installé l'élève dans des assujettissements permanents, désormais constitutifs de sa personne. L'incapacité à voir que, derrière ce qui peut apparaître comme une non-connaissance, se cache une ***certaine forme*** de connaissance, c'est-à-dire une praxéologie personnelle ***déterminée***, et peut-être ***résistante***, n'est pas seulement la cause possible d'un jugement parfois injustement dépréciatif. Dans la conduite de la formation, une telle cécité peut amener le professeur à ignorer l'assujettissement de l'élève à des manières de faire et de penser qui, éventuellement, fonctionneront à son insu, silencieusement, comme autant d'obstacles à l'évolution souhaitée de ses praxéologies.

② En visant à modifier certaines au moins de leurs praxéologies personnelles, toute formation attente à la stabilité du rapport au monde des sujets de la formation. Le changement visé altère ce qui, pour la personne en formation – pour l'élève – avait jusque-là le statut de ***milieu***, c'est-à-dire de réalité ayant des propriétés stables, bien connues, rassurantes même, en sorte qu'un univers transparent et allant de soi tout à coup s'opacifie, se brouille, se remplit d'incertitude, même s'il y a promesse qu'il retrouvera bientôt sa transparence subjective originaire, critère d'un apprentissage réussi. Toute personne n'est pas indéfiniment capable de supporter un tel traumatisme. On peut appeler ***adultisme*** cette incapacité qui, traditionnellement, au double plan social et culturel, est le lot des adultes, et qui, en moyenne, croît avec l'âge. Un adulte, en effet, sait ou ne sait pas. Je sais l'anglais, je ne sais pas le russe ; ou plutôt : je parle anglais, je ne parle pas le russe, comme si c'était là des traits intemporels, consubstantiels à ma personne. Car, pour l'adulte, le temps – socialement construit – de l'étude et du changement cognitif est passé. L'adulte est réputé, cognitivement, dans un état stable, stabilisé. L'adultisme est bien entendu une disposition socialement construite. En conséquence, le rapport à la formation, à l'étude, aux apprentissages qui le caractérise est inégalement diffusé dans les différents milieux sociaux : sans doute est-on adulte – ou plutôt ***adultiste*** – plus jeune, en moyenne, en milieu populaire, par exemple.

• Toute formation est potentiellement destructrice de praxéologies antérieurement installées qui pourraient faire obstacle à la mise en place des praxéologies visées, tandis que, en sens inverse, elle vient conforter certaines praxéologies anciennes, qui fonctionnent alors comme autant de ***points d'appui*** de la formation projetée.

① L'organisation d'une formation suppose donc l'identification des principaux assujettissements ***sensibles*** des sujets de la formation, c'est-à-dire des assujettissements qui fonctionneront en obstacle ou en appui à la formation. Une telle identification conduit en fait à repérer, non des individus, mais des ***espèces*** de personnes, catégories définies par le fait de partager ***les mêmes assujettissements sensibles***. Gérer une formation de manière ***différenciée*** conduit alors, non pas à ***individualiser*** la formation, mais à la ***spécifier***, à l'adapter aux « espèces » de personnes en formation.

② Une telle adaptation – il convient de le souligner d'emblée – ne conduit nullement à réunir au sein d'un ***même*** groupe les formés « de ***même*** espèce » : l'analyse des conditions facilitatrices du changement cognitif ne peut se contenter des fausses évidences et du simplisme de l'individualisme moderne. Le facteur principal dans l'acceptation du changement cognitif tient dans le fait de ***changer ensemble***, dans une communauté de « pairs » vécue comme une « tribu » en changement. *A priori* tribu parmi d'autres (la famille, le groupe de copains, etc.), généralement fragmentée en ***clans*** de quelques personnes, le groupe de formation (la classe, la promotion, etc.), pourra ainsi fonctionner comme une ***contre-tribu*** fabriquant et imposant peu à peu ses propres praxéologies, selon un processus à l'œuvre d'ailleurs en d'autres contre-tribus, ce dont certains parents prennent conscience avec surprise et, quelquefois, non sans effroi, en en découvrant les effets les plus spectaculaires (cheveux longs avant-hier, crânes rasés ou cheveux jaunes hier, etc.).

③ Référé à la tribu ou au clan au sein duquel il s'institue, le changement cognitif apparaît alors comme un processus dans lequel chacun aide l'autre à assumer le changement ***parce que tous changent ensemble***, chacun étant le témoin du changement des autres et témoignant de son acceptation ***non tant***

de son propre changement que du changement des autres. Tel est le schéma par lequel on a répondu depuis toujours, de manière apparemment indépassable, à une difficulté elle-même incontournable : la difficulté à s'arracher au passé, à ses évidences, à son « innocence ». Seuls quelques-uns, peut-être, peuvent changer tout seuls, ***solitairement***. (Mais même Einstein, par exemple, travaillait, sinon en bande, du moins à deux – avec sa femme Milena, avec Michele Besso, qu'il appelait sa « caisse de résonance », avec Marcel Grossmann, avec et contre Heisenberg, etc.) L'immense majorité des personnes change en fait ***solidairement***, au sein d'un groupe, d'une bande, d'une tribu, d'une classe, d'un « collège invisible ».

④ Pourtant, tout groupe de changement a ses limites. Dans le groupe-classe, notamment, les praxéologies anciennes sont souvent à peine cachées sous les praxéologies nouvelles, vécues par l'élève comme propres à un univers pour lui sans avenir, dans lequel il ne fait que passer. Sous le vernis de l'éducation scolaire se découvrent alors des croyances, des manières de faire et de voir que les professeurs croyaient, à tort, éradiquées, et qui sont les rejetons d'éducations autres, élaborés en d'autres institutions ayant fonctionné comme autant de « collèges invisibles alternatifs », ainsi que l'indique cette élève qui, interrogée par un enquêteur britannique à propos de son professeur principal, s'exclame : « ... elle essaye de nous contraindre à être comme elle. Mais c'est quelque chose que je ne pourrai jamais faire, parce que depuis que j'ai cinq ans, je grimpe aux arbres et sur le toit des garages – je ne crois pas que je pourrai jamais me conduire comme M^lle^ Sparkes... ah non ! » (Peter Woods, *L'ethnographie de l'école*, Armand Colin, Paris, 1990, p. 28). D'autres assujettissements institutionnels se révèlent ainsi, en fin de compte, plus puissants que les contre-praxéologies mises en place dans le cadre de la formation. En dépit de toutes ces difficultés parfois douloureusement vécues – par le professeur comme par les élèves –, le plus remarquable est bien que, en chaque classe, chaque semaine, l'univers praxéologique de chaque élève change, dans une grande diversité de domaines !

• À tous égards, l'appartenance à une « tribu en mouvement » favorise le changement praxéologique parce qu'elle le rend plus acceptable non seulement à ceux qui le vivent, mais encore à ceux qui doivent l'apprécier, le soutenir, l'impulser. Ainsi, par exemple, les élèves de milieux populaires scolarisés dans un établissement accueillant majoritairement des élèves de milieux aisés, sont-ils « tirés vers le haut » plus qu'ils ne le seraient dans un établissement à public populaire : « au niveau du passage en seconde, les enfants de milieu populaire scolarisés dans des "établissements d'excellence" sont moins souvent écartés des orientations les plus prestigieuses que lorsqu'ils sont scolarisés dans un établissement "populaire" », notent ainsi les sociologues Marie Duru-Bellat & Agnès Henriot-van Zanten (*Sociologie de l'école*, Armand Colin, Paris, 1992, p. 110). Le « facteur tribal » apparaît en ce cas comme essentiel : l'émergence d'une culture majoritaire, propre à l'établissement, touchant ***élèves, professeurs et parents***, tire l'ambition scolaire vers le haut dans les établissements d'excellence, en entraînant sur cette voie ascendante même les élèves issus de milieux peu favorisés. En sens inverse, cette culture majoritaire limite l'ambition scolaire dans les établissements « populaires », en imposant un mouvement à la baisse même aux élèves issus de milieux aisés.

① Au total, une certaine hétérogénéité ***des établissements et des classes*** apparaît comme élevant le rendement d'ensemble de l'investissement éducatif (Aletta Grisay, *Le fonctionnement des collèges et ses effets sur les élèves de sixième et de cinquième, in* Jean-Marie Besse *et al.* 1995, p. 79-80) :

> D'une manière qui peut paraître paradoxale – mais qui ne l'est guère en fait – *l'hétérogénéité de la population recrutée par le collège (CSP, nationalité) s'avère être un facteur positif*. C'est vrai en ce qui concerne les performances en français et en mathématiques ; et c'est vrai, surtout, en ce qui concerne la *réduction des écarts entre faibles et forts*. Les élèves des collèges à population hétérogène tendent, après deux ans, à se ressembler davantage, tandis que des différenciations apparaissent dans les collèges dont la population était, au départ, la plus homogène. Les dispositifs de lutte contre l'inégalité scolaire qui se fondent sur une réduction de l'hétérogénéité des classes (tout particulièrement la mise en œuvre de *classes de niveau*) s'avèrent dès lors contre-productifs : au lieu de compenser les écarts de rendement, ils les accroissent de manière significative. L'étude confirme sur ce point une longue série de travaux antérieurs mettant en évidence l'inefficacité, voire le caractère nocif, de la répartition des élèves en classes de niveau.

② Ces observations conduisent très normalement certains observateurs du système éducatif, non seulement à dénoncer les discriminations *a priori* entre établissements, mais encore à prôner la constitution, au sein de chaque établissement, en amont de tout dispositif de spécification, des classes les plus hétérogènes possibles (Philippe Meirieu & Marc Guiraud, *L'école ou la guerre civile*, Plon, Paris, 1997, p. 102) :

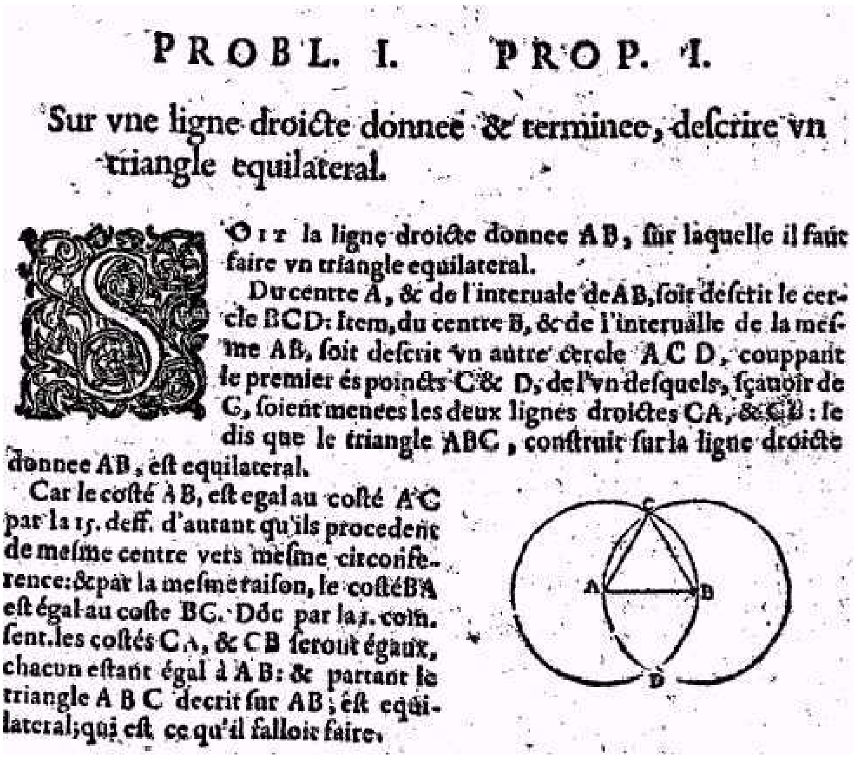
La République a besoin d'une institution scolaire fondée sur le principe de l'hétérogénéité maximale : les classes devront y être constituées avec des élèves issus des origines les plus diverses. Aux enseignants, ensuite, d'examiner les aménagements nécessaires aux exigences de chaque discipline, l'organisation matérielle de l'école et les outils pédagogiques nécessaires (ordinateurs, livres, etc.).

③ La classe, toutefois, n'est pas le seul niveau où le « facteur tribal » doive être contrôlé. Au-dessus de la classe, mais dans l'établissement encore, ou en liaison avec lui, on peut imaginer que l'élève participe à des contre-tribus organisées sciemment pour lui permettre tout à la fois de « travailler » ses assujettissements anciens sans nécessairement les rompre, et d'assumer les assujettissements neufs proposés par la formation dans laquelle il est engagé – dispositifs où le professeur devra par-dessus tout chercher à respecter ce que la philosophe des sciences Isabelle Stengers a nommé ***la contrainte leibnizienne*** (*L'invention des sciences modernes*, Flammarion, Paris, 1993, p. 25) : « ne pas heurter les sentiments établis afin de pouvoir tenter de les ouvrir à ce que leur identité établie leur impose de refuser, de combattre, de méconnaître ».

c) La réponse principale au problème soulevé dans les questions examinées tient dans la notion d'***enseignement diversifié***, que l'on abordera maintenant à travers un développement présenté lors de la séance 19 du Séminaire 2004-2005. On notera que cette notion a trait à ***l'organisation mathématique*** et à ***l'organisation didactique*** beaucoup plus qu'à la ***gestion de la séance***, laquelle ***ne saurait compenser*** une organisation de l'étude qui ignore le besoin de diversification de l'enseignement à concevoir et à réaliser.

② D'une manière plus générale, un ***enseignement diversifié*** – et non pas « différencié » – suppose d'abord (mais bien sûr pas seulement !) une ***attention réellement équitable*** aux ***types de tâches***, aux ***techniques***, à leur ***technologie*** ainsi qu'aux aspects ***théoriques*** s'il y a lieu. Pour illustrer ce principe, on se tourne maintenant vers l'exemple des problèmes de ***construction géométrique***.

➊ Examinons en premier lieu le document ci-après, relatif à la proposition 1 du livre I des *Éléments* d'Euclide (vers 300 av. J.-C.), que l'on présente dans la traduction des *Éléments* publiée par Didier Henrion en 1632.


PROBL. I. PROP. I.

Sur vne ligne droicte donnee & terminee, descrire vn triangle equilateral.

SOIT la ligne droicte donnee AB, sur laquelle il faut faire vn triangle equilateral.

Du centre A, & de l'interualle de AB, soit descrit le cercle BCD: Item, du centre B, & de l'interualle de la mesme AB, soit descrit vn autre cercle ACD, couppant le premier és poincts C & D, de l'vn desquels, sçauoir de C, soient menees les deux lignes droictes CA, & CB: Ie dis que le triangle ABC, construit sur la ligne droicte donnee AB, est equilateral.

Car le costé AB, est egal au costé AC par la 15. deff. d'autant qu'ils procedent de mesme centre vers mesme circonference: & par la mesme raison, le costé BA est égal au coste BC. Dõc par la 1. com. sent. les costés CA, & CB seront égaux, chacun estant égal à AB: & partant le triangle ABC decrit sur AB; est equilateral; qui est ce qu'il falloit faire.

On y voit en effet nettement distingués le ***type de tâches***, la ***technique***, la ***technologie***, ainsi que des éléments ***théoriques***. Le type de tâches y apparaît énoncé en ces termes :

Sur une ligne droicte donnee & terminee, descrire un triangle equilateral.

La technique s'explicite ainsi :

Du centre A, & de l'intervale de AB, soit descrit le cercle BCD : Item, du centre B, & de l'intervale de la mesme AB, soit descrit un autre cercle ACD, couppant le premier és poincts C & D, de l'un desquels, sçavoir de C, soient menees les deux lignes droictes CA, & CB : Ie dis que le triangle ABC, construit sur la ligne droicte donnee AB, est equilateral.

La technologie s'énonce ainsi :

Car le costé AB, est égal au costé AC par la 15 deff. d'autant qu'ils procedent de mesme centre vers mesme circonference : & par la mesme raison, le costé BA est égal au costé BC. Dŏc par la I. com. sent. les costés seront égaux, chacun estant égal à AB : & partant le triangle ABC descrit sur AB, est equilateral ; qui est ce qu'il falloit faire ».

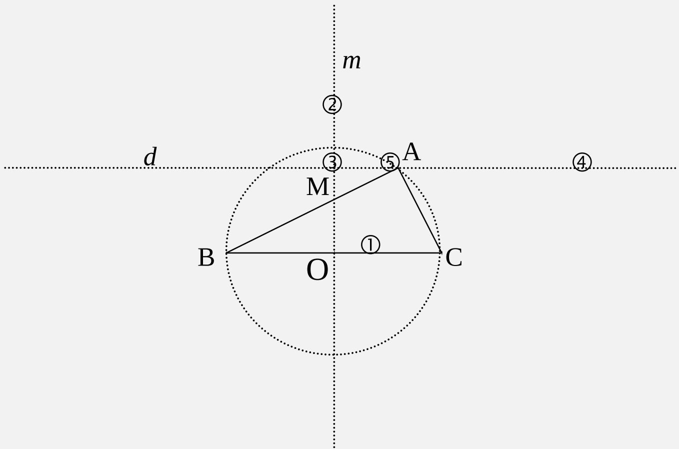
Ce que la formulation précédente désigne par l'abréviation « 15 deff. » est la définition 15, qui relève aussi de la ***technologie*** et s'énonce ainsi : « Cercle, est une figure plane, contenue par une seule ligne qu'on appelle circonference, vers laquelle toutes les lignes droictes menees d'un seul point de ceux qui sont en icelle figure sont égales entr'elles ». Enfin, la « I. com. sent. », la première commune sentence, qui relève, elle, de la ***théorie***, est libellée ainsi : « Axiomes ou communes sentences. I. Les choses égales à une mesme, sont égales entr'elles. »

❷ D'une façon générale, technique et technologie doivent être ***co-présentes dans l'organisation mathématique*** qui sera institutionnalisée, et il serait *a priori* inopportun de gommer l'une ou l'autre d'entre elles. La classe doit en fait travailler ***plusieurs aspects***, que l'on retrouvera à l'étape de ***l'évaluation***, et que l'on explicitera dans ce qui suit.

③ Sous le titre ***Les problèmes de construction***, le document d'accompagnement du programme du cycle central du collège comporte ce passage : « Le tracé est une chose, sa description raisonnée en est une autre. » Le texte euclidien précédemment examiné illustre l'exigence, au-delà de la mise en œuvre du procédé de tracé, de la formulation d'une « description raisonnée » de ce procédé.

❶ Telle est la première exigence que l'on fera prévaloir dans la classe, et qui pourra conduire, dans les travaux évalués, à proposer des exercices (au sens strict du mot) du type suivant – où, ***volontairement***, on a ***neutralisé*** en partie la ***recherche*** de la technique de construction :

On considère le problème suivant : *Construire un triangle* ABC *rectangle en* A, *où* BC = 3 cm *et* AH = 1,2 cm, H *étant le pied de la hauteur issue de* A. En s'appuyant sur le schéma ci-après, écrire un programme de construction permettant de résoudre ce problème.



La réponse attendue pourra prendre la forme suivante :

Programme de construction

1) Marquer deux points B et C tels que BC = 3 cm.

2) Tracer la médiatrice *m* de [BC].

3) Sur *m*, du côté de (BC) que l'on souhaite, marquer le point M tel que OM = 1,2 cm (où O est le milieu de [BC]).

4) Tracer la parallèle *d* à (BC) passant par M.

5) Choisir pour A l'un des points d'intersection de *d* avec le cercle.

---

❷ Le document d'accompagnement déjà cité indique encore :

Les élèves sont amenés à mettre en œuvre des définitions ou des propriétés caractéristiques de figures géométriques et des propriétés d'une transformation qui agit sur ces figures. L'intérêt d'une construction porte plus sur la procédure utilisée que sur l'objet obtenu. La justification qui l'accompagne est une occasion de raisonnement.

La description de la « procédure » est « accompagnée » d'une « justification » : tel est, bien sûr, le deuxième point qu'il convient de travailler fermement – quoique ***sans exclusive***. À ce travail de la classe pourra correspondre, dans les travaux évalués, l'exercice que voici :

Exercice

On considère le programme de construction suivant :

1) Marquer deux points B et C tels que BC = 3 cm.

2) Tracer la médiatrice *m* de [BC].

3) Sur *m*, du côté de (BC) que l'on souhaite, marquer le point M tel que OM = 1,2 cm (où O est le milieu de [BC]).

4) Tracer la parallèle *d* à (BC) passant par M.

5) Choisir pour A l'un des points d'intersection de *d* avec le cercle.

Démontrer que l'exécution de ce programme produit un triangle ABC rectangle en A.

Le « discours technologique » demandé prendra la forme d'une « preuve de programme » qui pourrait avoir le contenu suivant :

Preuve du programme

Comme MO = 1,2 cm < 1,5 cm = $\frac{BC}{2}$, le point M est intérieur au cercle $\mathcal{C}$. Par suite, la droite *d*, qui passe par M, coupe $\mathcal{C}$ en deux points. Soit A l'un de ces points. Puisque A ∈ *d*, on a AH = 1,2 cm. Puisque A ∈ $\mathcal{C}$, on a $\widehat{BAC} = 90°$. Le point A convient.

---

❸ On notera la présence, dans la démonstration précédente, de ***deux niveaux d'exigence*** : celui de la démonstration que $\widehat{BAC}$ est droit, qui devrait être accessible ***à tous***, et celui de la démonstration de l'***existence*** du point A, qui relève d'un type de difficultés à la limite du programme, « point extrémal » du domaine étudié comme le suggère cet autre passage du document d'accompagnement :

L'existence d'une solution dans l'un ou l'autre problème de construction peut se poser sans que, pour autant, elle soit soulevée de façon systématique et formalisée.

❹ Un troisième point tient dans l'***exécution graphique*** du programme de construction. Pour « lester » ce travail et le valoriser dans la classe de mathématiques, on pourra exploiter la notion de ***calcul graphique*** (et sa pratique éventuelle à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique), tel qu'on l'a mentionné dès la séance 2 de ce Séminaire. Le problème de construction évoquée plus haut permet ainsi de résoudre graphiquement le système

$$\begin{cases} BC = 3 \\ AH = 1{,}2 \\ BH \cdot HC = AH^2 \end{cases}$$

soit encore, en posant BH = x,

$$\begin{cases} x(3-x) = 1{,}44 \\ 0 \le x \le 3 \end{cases}, \text{ ou } \begin{cases} x^2 - 3x + 1{,}44 = 0 \\ 0 \le x \le 3 \end{cases}.$$

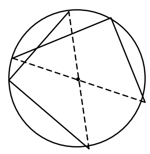
Les solutions sont ici x = 2,4 et x = 3 – 2,4 = 0,6. On voit ainsi comme on peut résoudre ***graphiquement*** (et donc, à l'aide d'un logiciel adéquat, ***numériquement***) une ***équation du second degré***. La technique précédente permet par exemple de s'attaquer aux équations du type $ax^2 + bx + c = 0$, où $ac > 0$ et $ab < 0$, puisqu'une telle équation s'écrit $x(\beta - x) = \gamma$ où $\beta = -\frac{b}{a}$ et $\gamma = \frac{c}{a}$.

④ On s'attachera ci-après à un autre aspect des problèmes de construction géométrique : leur rôle clé dans la résolution de problèmes de « géométrie pratique ».

❶ Considérons le type de tâches suivant :

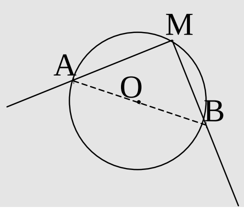
T_L. Un cercle ayant été tracé, mais son centre ayant été perdu, déterminer ce centre lorsqu'on ne dispose que d'une équerre.

❷ La technique τ_L consiste à appliquer deux fois le sommet de l'équerre en un point du cercle afin de déterminer deux diamètres, diamètres dont le point d'intersection fournit le centre cherché.



❸ L'essentiel de la technologie θ_L tient dans le théorème suivant :

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, un point M de $\mathcal{C}$, et deux droites perpendiculaires d et d' passant par M, qui recoupent $\mathcal{C}$ en A et B (voir la figure).
Alors [AB] est un diamètre de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire que O ∈ (AB).



❹ Telle est la propriété sur laquelle est fondée la technique τ_L. Mais cette propriété est-elle ***vraie*** ? Une expérience ***graphique*** peut être conçue pour être réalisée ***sur papier***. La ***conception*** de cette expérience est un ***problème*** qui doit être résolu ***par la classe*** avant sa réalisation, et dont la solution est un ***protocole d'expérience*** tel le suivant :

Expérience graphique

1) On trace un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

2) À l'aide d'une équerre dont on place le sommet en un point M du cercle, on marque des points A et B du cercle $\mathcal{C}$ tels que $\widehat{AMB} = 90°$.

3) On examine à l'aide d'une règle si (AB) passe approximativement par O.

---

❺ Une expérience ***graphique*** – qui sera en vérité une expérience numérique, mais dont les résultats sont présentés graphiquement – peut alors être conçue en vue d'être réalisée ***à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique***. Dans le cas de l'emploi de Géoplan, on peut s'arrêter sur le programme expérimental suivant (qui pourra être ***mis au point*** au cours d'une séance de travail avec Géoplan portant sur ***plusieurs*** études expérimentales préalables) :

Expérience graphique sur Géoplan

1) On crée un point O.

2) On crée un cercle c de centre O et de rayon 1, que l'on agrandit à l'écran autant que nécessaire.

3) On crée un point M et un point A sur le cercle c.

4) On crée la droite d passant par M, perpendiculaire à la droite (MA).

5) On crée le deuxième point d'intersection du cercle c et de la droite d, soit B.

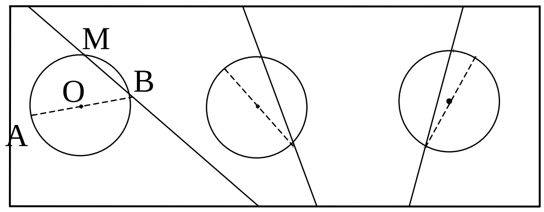
6) On crée le segment [AB].

7) On fait varier A et/ou M sur c et on examine si [AB] passe constamment par O.

---

❻ Il restera ensuite à déduire de la TGD la propriété ainsi établie par l'expérience : la déduction dépendra bien sûr des propriétés déjà démontrées ou admises.

❼ On notera que, quel que soit le contexte de travail (AER, synthèse, évaluation), les ***traces écrites*** du travail évoqué dans ce qui précède – ***protocole d'expérience*** et ***description des observations*** auxquelles l'expérience donne lieu –, ainsi que ses traces ***figuratives*** – à savoir les tracés obtenus (quand on peut les imprimer) ou les ***schémas*** (dessinés par l'élève) de ces tracés lorsque l'impression est écartée – doivent être consignés dans les divers registres prévus à cet effet : à l'équilibre du travail réalisé doit correspondre une représentation équilibrée des traces de ce travail.



1.3. Les outils du professeur de mathématiques

a) Avant de revenir aux questions de la séance 13, on amorce ici une mise en ordre conceptuelle et pratique de ce qu'on a appelé (lors de la séance 13, précisément) ***l'équipement praxéologique professionnel*** du professeur de mathématiques. Selon une métaphore commode, on parlera aussi des ***outils***, ou des ***savoirs*** (et des ***savoir-faire***) ou des ***connaissances*** du professeur de mathématiques – un « outil », un savoir, un savoir-faire, une connaissance désignant ici une ***praxéologie***, ou un ***fragment*** de praxéologie, ou, en sens inverse, un ***complexe*** praxéologique.

b) Les « outils » du professeur de mathématiques ***sont de nature très diverse*** : ils peuvent relever de l'informatique, du droit, de l'histoire, de la sociologie, etc., et, bien sûr, des mathématiques. On donne ici deux illustrations ***simples*** de cette remarque.

• Les ***TICE*** sont l'un des domaines où le professeur de mathématiques doit constamment, humblement, enrichir son « équipement » professionnel. Voici un exemple d'un tel besoin praxéologique.

Comment copier une construction, faite sur Géoplan, sur un document Word en conservant l'unité de mesure ? (PP, MJ, 2de, 15)

En l'espèce, on trouvera une réponse dans les ***Archives du Séminaire*** pour l'année 2001-2002 (séance 17) : on a reproduit le passage correspondant dans l'**Annexe 2**, en fin de résumé.

• Le ***droit*** constitue un autre domaine avec lequel le professeur est amené à avoir un certain commerce. Considérons ainsi la question que voici.

> Nul n'est censé ignorer la loi… Mais où peut-on se renseigner sur les droits et les devoirs du professeur (en ce qui concerne la responsabilité d'une classe, sa prise en charge en fonction de son effectif, par exemple) ? (VD, OS, 4e, 15)

➔ Un document relatif à la question posée figure sous la rubrique ***Documents / 2nd degré*** (à l'adresse http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2006-2007/documents_07.html) : il s'agit de la ***fiche 12***, intitulée « Les personnels enseignants », de l'édition 2001 du ***Guide juridique du chef d'établissement***. Ce guide est présenté par le ministère (à l'adresse http://www.education.gouv.fr/cid3946/guide-juridique-du-chef-d-etablissement.html, où il est téléchargeable) comme en cours d'actualisation, une nouvelle édition devant être mise en ligne avant la fin de l'année 2006 – ce qui, sauf erreur, n'a pas été fait.

➔ À titre indicatif, voici le ***sommaire*** de la fiche 12.

> I. LE SERVICE DES ENSEIGNANTS
> 1 - Service d'enseignement en présence des élèves
> 2 - Obligations inséparables du service d'enseignement
> 3 - Manquement à l'exigence de service fait
> 4 - Régime des heures supplémentaires
> 5 - Régime des vacances
> 6 - Exercice éventuel à temps partiel
>
> II. LA CARRIÈRE DES ENSEIGNANTS
>
> A. LA NOTATION ADMINISTRATIVE
> 1 - Procédure d'attribution de la note administrative
> 2 - Détermination de la note administrative
>
> B. LA TRANSMISSION D'INFORMATIONS ET PROPOSITIONS RELATIVES À LA GESTION DES ENSEIGNANTS
> 1 - Les transmissions d'informations
> 2 - Les avancements de grade, d'échelon et les promotions par changement de corps
>
> C. LA DISCIPLINE

On laissera les participants découvrir le contenu de ce document – en attendant sa version actualisée.

c) L'outillage idéal du professeur de mathématiques est d'une profusion qui décourage la description. Toutefois un grand nombre d'outils qu'il doit connaître et maîtriser de façon appropriée sont de nature ***mathématique***, en un sens large, sur lequel on s'arrêtera maintenant.

1.4. La diversité des besoins mathématiques

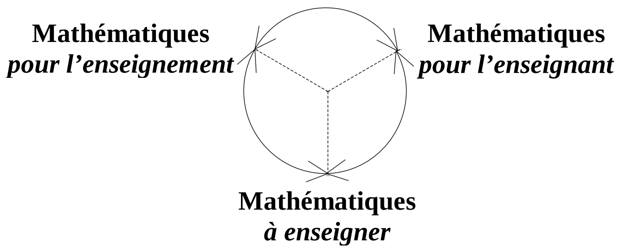
a) Les besoins mathématiques dont il s'agit sont ceux ***du professeur de mathématiques***. À cet égard, trois niveaux peuvent être distingués, que l'on commentera et illustrera dans la suite :

– le niveau des mathématiques ***à enseigner*** ;

– celui des mathématiques ***pour l'enseignant*** ;

– celui des mathématiques ***pour l'enseignement***.

b) Ces trois niveaux s'organisent en un cycle que l'on peut représenter ainsi.



L'alpha et l'oméga de ce « circuit » mathématique, ce sont les ***mathématiques à enseigner***, telles que le programme (ou la tradition d'enseignement) de la classe les désigne.

c) L'***identification*** des praxéologies mathématiques à enseigner est le premier travail, qui conduira à la ***détermination*** des OML à enseigner. Plus particulièrement, le tout premier type de besoins de connaissances mathématiques de la profession, qui relève des ***mathématiques pour l'enseignant***, doit permettre tout simplement de comprendre ce dont parle le programme.

• On illustre cette exigence par l'exemple de la question suivante.

> Lors de ma préparation sur le thème des puissances de 10, en 4e, je me demandais quelle définition on peut donner aux élèves de la notion d'ordre de grandeur d'un nombre. (KE, MJ, 4e, 15)

➔ Ici, le questionnement se formule, comme souvent, en termes de ***mathématiques à enseigner*** : quelle définition ***donner aux élèves*** de… ? Mais comme souvent, l'interrogation met le doigt, de fait, ***sur un problème de la profession***, et, en l'espèce, sur un problème pour lequel cette dernière n'a pas, actuellement, ***de solution claire et nette***. La solution qu'on est conduit à élaborer s'énonce en trois points.

➔ Soit un réel $a > 1$; on nomme échelle de base a l'ensemble des réels a^n, où $n \in \mathbb{Z}$, qui « couvre » l'ensemble des réels strictement positifs $\mathbb{R}_+^*$: pour tout réel $x > 0$, il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a^n \leq x < a^{n+1}$. Il existe alors un unique réel $k \in [1 ; a[$ tel que $x = k \cdot a^n$. Lorsque $a = 10$, qui est la base utilisée traditionnellement en physique, $k \cdot a^n$ est appelée ***l'écriture scientifique*** de x. On notera que les physiciens ne sauraient utiliser la totalité de l'échelle de base 10, ainsi que le souligne fortement l'un d'eux dans le passage qui suit. (http://www.lacosmo.com/Nature39.html).

> Un résultat résume bien la situation concernant l'échelle du monde physique : quand on les représente sous forme de puissances de 10, les nombres que les physiciens manipulent ont des exposants se situant, grosso modo, entre –100 et +100. Autrement dit ces exposants comportent seulement deux chiffres [1. L'indication est donnée sans souci de précision et ne veut servir qu'à fixer les idées. Dans un calcul physique ou dans des théories très exotiques pourra apparaître exceptionnellement un exposant de trois chiffres, avec un nombre tel que 10^{120} par exemple.]. Par exemple le nombre d'atomes dans l'Univers visible est de l'ordre de 10^{80} et le plus petit temps imaginable (ou temps de Planck) vaut 5×10^{-44} seconde.

➔ L'***ordre de grandeur*** d'un réel > 0 dans l'échelle $\{ a^n / n \in \mathbb{Z} \}$ est l'une des puissances a^n, et non autre chose. En base 10, par exemple, 6 745 239 a pour ordre de grandeur 10^7 = 10 000 000, et non, disons, 7 000 000.

➔ Si $a^n \leq x < a^{n+1}$, l'ordre de grandeur en base a de x est soit a^n, soit a^{n+1}. Mais où faut-il « couper » l'intervalle $[a^n ; a^{n+1}[$? Le principe de la réponse est le suivant : l'ordre de grandeur de x est celle des extrémités de l'intervalle $[a^n ; a^{n+1}[$ qui est ***la plus proche*** de x. Mais comment « mesurer » la distance de x à a^n et a^{n+1} ? Fondée sur le fait que l'échelle est ***géométrique*** (les rapports « géométriques » a^{n+1}/a^n sont constants) et non pas ***arithmétique*** (les rapports « arithmétiques » $a^{n+1} - a^n$ ne le sont pas), la bonne réponse est celle-ci (même si on la rencontre bien rarement dans les « archives du métier ») : si $y \leq x < z$, on dit que x est (strictement) plus proche de y que de z, non pas si $x - y < z - x$, mais si $\frac{x}{y} < \frac{z}{x}$. Ainsi x est plus proche de a^n que de a^{n+1} si et seulement si $\frac{x}{a^n} < \frac{a^{n+1}}{x}$, c'est-à-dire si $x^2 < a^{2n+1}$, soit encore si $x < \sqrt{a} \cdot a^n$. Si donc $a^n \leq x < \sqrt{a} \cdot a^n$, l'ordre de grandeur de x est a^n ; et si $\sqrt{a} \cdot a^n \leq x < a^{n+1}$, l'ordre de grandeur de x est a^{n+1}. Dans le cas où $a = 10$, le « séparateur » entre 10^n et 10^{n+1} est donc $\sqrt{10} \cdot 10^n$ ($\approx 3{,}1623 \cdot 10^n$), en sorte que l'ordre de grandeur de 4 076 883 = $4{,}076\,883 \cdot 10^6$ est 10^7, tandis que l'ordre de grandeur de 3 076 883 est 10^6.

➔ Pour plus de détail, on se reportera au traitement de la question qu'on trouve consigné dans les notes de la séance 10 du Séminaire 2004-2005 : on a reproduit le passage correspondant dans l'**Annexe 3**, en fin de résumé.

➔ Pour des précisions sur la ***dénomination*** des puissances de 10, on pourra se reporter par exemple à l'article « Échelles longue et courte » de l'encyclopédie *Wikipedia* (http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89chelle_longue) ainsi qu'aux références qui y sont proposées (notamment l'article « Liste de nombres »).

• La bonne compréhension des mathématiques à enseigner telles que les textes officiels les font connaître ou telles que les manuels les explicitent demande souvent des « mathématiques pour l'enseignant » que l'on ne trouve pas si facilement dans le corpus mathématique étudié au cours de ses études supérieures – ainsi en va-t-il, on vient de le voir, de la notion d'ordre de grandeur. Souvent, la rencontre avec les mathématiques à enseigner ***engendre des interrogations*** qui, semblablement, n'ont guère d'écho dans les mathématiques que l'on a eu à étudier préalablement à l'exercice du métier.

➔ Ainsi en va-t-il avec la question suivante – qui soulève d'abord, en apparence, un ***problème de langage***.

> Dans beaucoup de manuels, on peut trouver deux formulations d'un énoncé concernant le parallélogramme :
>
> 1) Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
>
> 2) Si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
>
> Je me demande si ces deux énoncés sont corrects ou s'il est préférable de n'employer que l'un des deux. (OL1, OS, 5e, 14)

➔ On notera tout d'abord que ces deux formulations comportent une même ***faille***, qu'on découvrira en examinant, ci-après, un extrait des notes de la séance 6 du Séminaire 2001-2002 (où l'on suppose qu'un parallélogramme est ***défini*** comme étant un quadrilatère « dont les côtés opposés sont parallèles »). On notera l'absence, dans ce qui suit, de l'expression « deux à deux ».

• Un quadrilatère ABCD est un parallélogramme…

☞ si ses diagonales se coupent en leur milieu [π_2^{-1}] ;

☞ s'il est convexe et a les côtés opposés de même longueur [π_3^{-1}] ;

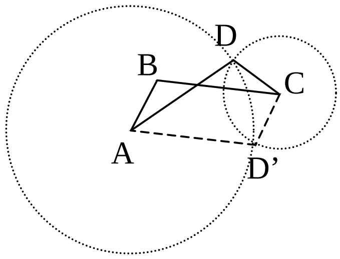
☞ s'il est convexe et a deux côtés opposés parallèles et de même longueur [$\pi_{0/3}^{-1}$] ;

☞ s'il est convexe et a les angles opposés égaux [π_4^{-1}].

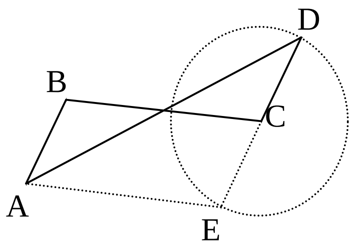
…

– S'agissant [de ces] résultats, qui caractérisent les parallélogrammes parmi les quadrilatères, il est bon d'expliciter ce qui peut se passer en cas de non-convexité.

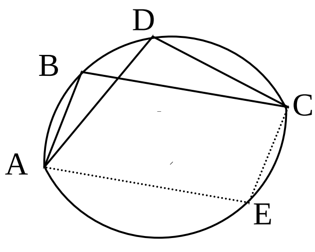
① Lorsqu'un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, ce peut être un parallélogramme, mais ce peut être aussi ce qu'on nomme quelquefois un ***contre-parallélogramme***, comme ci-après.



② Lorsqu'un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, ce peut être un parallélogramme, mais ce peut être aussi le quadrilatère croisé ci-après.



③ Lorsqu'un quadrilatère a ses angles opposés deux à deux égaux, à nouveau ce peut être un quadrilatère croisé : étant donné A, B, C, il n'y a qu'un parallélogramme ABCE possible ; mais il y a une infinité de quadrilatères croisés satisfaisant la condition sur les angles : tout point D ≠ A, B, C de l'arc capable de l'angle ABC qui contient B convient (on a alors $\widehat{ABC} = \widehat{CDA}$), puisque on a alors en même temps $\widehat{BCD} = \widehat{DAB}$.



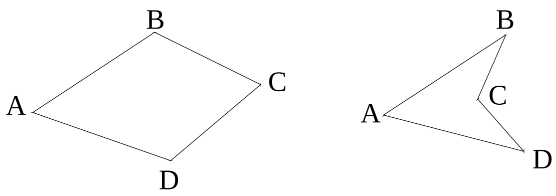
➔ Le cas précédent montre que, avant de penser à la réception ***par les élèves*** de telle ou telle formulation, il convient de s'assurer que les formulations envisagées sont ***mathématiquement recevables***. Cela noté, ce qui semble poser problème est l'usage de l'expression « deux à deux », en effet archaïque. Dans son *Dictionnaire de la langue française* (1863-1877), Émile Littré (1801-1881) la définit ainsi : **«** **Deux** à **deux**, par couples ». Il donne pour exemple « Marcher **deux** à **deux** » (par deux), et, dans l'historique du mot « Deux », rapporte ce passage d'un auteur ancien : « Ils alloient **deux** à **deux** armez à cheval à la guerre [**deux** sur un cheval]. »

➔ Revenons alors aux formulations en débat.

1) Si un quadrilatère convexe a ses côtés opposés de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

2) Si un quadrilatère convexe a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

C'est bien la première formulation qu'il faut recommander. La seconde comporte en effet une redondance, puisque les « côtés opposés » d'un quadrilatère vont par deux : avoir « ses côtés opposés de même longueur » c'est, *ipso facto*, avoir « ses côtés deux à deux de même longueur ». Cette seconde propriété n'est, en revanche, ***pas équivalente*** à la première : un « cerf-volant » (ci-dessous à gauche) est convexe (au contraire du « fer de lance », ci-dessous à droite) et a ses côtés ***deux à deux*** de même longueur ; mais ce n'est pas, en général, un parallélogramme.



➔ Dans un langage daté, un petit livre ancien (Théophile Moreux, *Pour comprendre la géométrie*, Doin, Paris, 1926) montre l'usage correct de l'expression « deux à deux » à l'occasion de la formulation que voici (*op. cit.*, p. 74) : *« Les portions de parallèles comprises entre parallèles sont égales deux à deux ;* ce qui revient à dire que *dans tout parallélogramme, les côtés opposés sont égaux. »*

• Comme dans la question qu'on vient d'examiner, la profession – et tout professionnel – doit se colleter régulièrement avec des questions de ***langue*** (et de notation). Dans le cas précédent, la difficulté provient d'un ***archaïsme*** linguistique. Dans le cas suivant – soulevé avec persévérance par son auteur… –, on va voir que c'est, à l'inverse, un usage ***néologique*** qui pose problème.

1. Faut-il parler de repère orthonormé ou orthonormal ? Quelle est la différence ? (MG1, CR, 2de, 14)

2. Quelle est la différence entre orthonormé ou orthonormal ? (MG1, CR, 2de, 15)

➔ La toute première question a une réponse facile. Si les anciens programmes du collège parlent bien de repère ***orthonormé***, si le programme de seconde actuel ne parle ni de repère orthonormé, ni de repère ***orthonormal***, c'est en revanche cette dernière dénomination qui est utilisée dans les programmes de Première (« Distance entre deux points en repère orthonormal », etc.) et de Terminale (« Expression en repère orthonormal de la distance d'un point à une droite dans le plan »). C'est donc elle qu'on devra employer en 2de, le cas échéant.

➔ Il n'y a pas de différence ***mathématique*** entre « orthonormé » et « orthonormal ». Le premier adjectif est, en français, « traditionnel » (si l'on peut dire : il apparaît dans la première moitié du XX^{e} siècle). L'introduction du second est « moderne ». Elle se fait depuis le monde savant (Jean Dieudonné l'emploie dans son ouvrage *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* paru en 1964, par exemple), sans doute sous l'influence de l'anglais, qui connaît depuis le XIX^e siècle le verbe *to normalize* (et le substantif correspondant, *normalization*), employé d'abord dans l'industrie et la diplomatie. « Orthonormé », indiquent les dictionnaires français/anglais (voir ainsi http://www.tv5.org/TV5Site/lf/langue_francaise.php), se dit en anglais *orthonormal* – et réciproquement. Tel dictionnaire de l'anglais précisera ainsi que *orthonormal* se dit *of a set of vectors, both orthogonal and normalized*. Là où, en français « classique », en mathématiques, on « norme » un vecteur, en anglais on le *normalize* ; quand on *orthonormalize* un ensemble de vecteurs – on parle en français « moderne » d'orthonormalisation –, on obtient un ensemble… *orthonormal*.

• Les « mathématiques pour l'enseignant », on l'a dit, doivent d'abord permettre d'identifier ce que le programme de l'année porte en lui. Pour aller vers un enseignement de ces « mathématiques à enseigner », il faut toutefois d'autres outils mathématiques encore, sans qu'on en arrive pour autant aux « mathématiques pour l'enseignement » au sens strict – vers lesquelles on se tournera dès la séance prochaine.

➔ Lors de la séance 14, une allusion avait été faite à deux propriétés fondamentales touchant le ***développement décimal des rationnels*** : étant donné A, $B \in \mathbb{N}^*$, si la fraction $\frac{A}{B}$ est irréductible, et si $B = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot b$, avec $\alpha, \beta \geq 0$ et $(b, 10) = 1$, alors

1) le développement décimal de $\frac{A}{B}$ commence par une partie ***apériodique*** de longueur $\max(\alpha, \beta)$;

2) au-delà de cette partie apériodique, le développement décimal de $\frac{A}{B}$ devient périodique, la longueur de la période étant le plus petit entier n tel que $10^n \equiv 1 \pmod{b}$. À ce propos, la question suivante a été formulée.

> Dans le TD 4 du mardi 9 janvier, je n'ai pas compris, à la page 278, pourquoi la période correspondant à $b = 59$ est de longueur 58. Il est indiqué qu'il s'agit du plus petit entier n tel que 10^n est congru à 1 modulo b, mais je ne sais pas le démontrer. Est-ce qu'on pourrait y revenir ? (ML, MJ, 2^de, 15)

➔ Il est certain que l'on a $10^{58} \equiv 1 \pmod{59}$: c'est par exemple une conséquence du « petit théorème de Fermat », selon lequel si a n'est pas divisible par l'entier premier b, alors $a^{b-1} \equiv 1 \pmod{b}$. Bien entendu, cela n'implique pas, *a priori*, que 58 soit le ***plus petit*** entier n tel que $10^n \equiv 1 \pmod{59}$. Pour s'en assurer, on a utilisé un petit programme Excel qui permet d'obtenir la suite, pour $n \geq 1$, des restes r_n tels que $10^n \equiv r_n \pmod{b}$ (voir TD4 - Période d'un rationnel, page http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/seminaire7.html).

➔ L'établissement des résultats précédents relèvent pleinement des « mathématiques pour l'enseignant » qui permettent de mieux appréhender le phénomène mathématique avec lequel, si par exemple on enseigne en Terminale L dans le cadre de l'enseignement de spécialité, on aura à organiser la rencontre, et cela notamment en vue de permettre aux élèves de se rendre « capables, *sur des exemples*, de déterminer l'écriture décimale périodique d'un quotient d'entiers ». On doit noter, toutefois, que, bien que ces résultats s'insèrent assez naturellement dans des théories arithmétiques « bien connues », on n'en trouve pas si facilement d'exposé explicite et complet dans la littérature courante. Pour combler cette lacune, les participants au Séminaire sont donc invités à étudier un document *ad hoc*, en l'espèce une ***micro-épreuve*** proposée en 1998-1999 aux élèves professeurs de première année de l'IUFM d'Aix-Marseille, dans lequel les ***commentaires*** ajoutés au corrigé proprement dit fournissent l'explicitation demandée (voir la Micro-épreuve 1 - 1998-1999 parmi les documents accompagnant le Séminaire, page http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/seminaire7.html).

d) L'identification une fois faite, les connaissances mathématiques pour l'enseignant doivent permettre de ***déterminer*** l'OML à enseigner – travail exigeant qui pose une foule de problèmes.

• Comme souvent, une des interrogations les plus fréquemment soulevées met en jeu ***les élèves*** : faut-il ***leur*** démontrer ceci ou cela ? Ou, pour le dire mieux : faut-il que ***la classe*** démontre ceci ou cela ?

➔ Voici d'abord un florilège de questions récemment posées à ce propos.

1. En classe de 5^{e} existe-t-il des résultats du cours (en particulier en géométrie) à démontrer et d'autres à admettre ? Ou le choix est-il de la responsabilité du professeur ? (FBA, OS, 5^{e}, 8)

2. En 4^{e}, j'ai commencé le chapitre des droites remarquables d'un triangle. Est-ce qu'on est obligé de faire toutes les démonstrations du concours des droites, sachant que, dans les manuels, elles ne sont pas traitées ? (IIP, CR, 4^{e} & demi-5^{e}, 11)

3. Doit-on démontrer en classe, avec les élèves, tout résultat pouvant se démontrer à l'aide de la TGD (par exemple), même si la démonstration est difficile ? (OB, OS, 5^{e}, 12)

4. Est-il envisageable de démontrer la réciproque du théorème de Pythagore en classe de 4^{e} ? (WB, MJ, 4^{e}, 14)

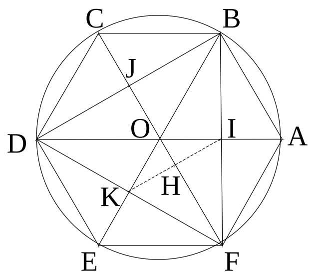
5. Dans l'étude des fonctions affines, est-il nécessaire de démontrer la caractérisation des fonctions affines par le fait que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable ? En effet, un des sens de la caractérisation a déjà été vu en 3^{e}. (MB, CR, 2de, 14)

6. Je trouve les programmes un peu lacunaires, imprécis. Comment savoir par exemple quelles sont les démonstrations de théorèmes à faire en 2de ? (ALP, CR, 2de, 14)

7. Est-il nécessaire de démontrer le théorème de Pythagore ? (J'ai obtenu la réponse à ma question en regardant les archives du Séminaire des années précédentes.) (SH, CR, 4^{e}, 14)

8. Je vais commencer le chapitre sur la droite des milieux. J'ai prévu de faire en exercice, en utilisant la TGD sur les propriétés du parallélogramme, les démonstrations des propriétés suivantes : 1) dans un triangle, la droite passant par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté ; 2) dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de celle du troisième côté. J'ai prévu également que, dans la synthèse, il y ait la propriété suivante : 3) si dans un triangle une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu. Mais je ne compte en faire la démonstration. Par contre, je vais utiliser un logiciel de géométrie pour faire voir aux élèves que cette propriété reste vraie même si on modifie le triangle. Ma question est donc de savoir s'il faut quand même proposer une justification (autre que graphique) de cette propriété afin de pouvoir en disposer dans la TGD de la classe. (TB, CR, 4^{e}, 15)

9. En travaillant sur les transformations du plan, j'ai fait l'exercice suivant avec mes élèves : « ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans le cercle de centre O. Quelle est l'image de K par la réflexion d'axe (CF) ? » Une réponse immédiate est apparue : I. J'ai choisi de leur faire démontrer ce fait (à savoir que (IK) est perpendiculaire à (CF) et que H est le milieu de [IK]). Pour ma PCP, cela n'était pas nécessaire (long et difficile). Il me semble au contraire que c'est un travail sur la démonstration qui est demandé en classe de seconde. (AC, OS, 2de, 15)



10. Est-il raisonnable de ne pas donner de démonstration (ou même pas une idée) pour le théorème de Pythagore en 4^{e} ? Si au contraire les élèves sont amenés à découvrir ce théorème lors d'une AER

faisant intervenir les aires, ne penseront-ils pas que ce théorème « fait intervenir les aires de carrés » ? (MD, CR, 4e & demi-5e, 15)

➔ La question des démonstrations à « faire » ou non est si fréquente qu'on peut être sûr d'en trouver trace dans les *Archives du Séminaire*. Les notes de la séance 2 du Séminaire 2000-2001 fournissent ainsi les indications suivantes.

3) Que démontrer, et comment ?

Quel type de résultat fait l'objet de démonstrations ? (…, 2de, 1)

…

Matériaux pour une réponse

1. En principe, tout résultat doit faire l'objet d'une démonstration. Si un résultat n'est pas démontré, la chose – toujours en principe – doit être signalée aux élèves, comme le souligne le programme du cycle central :

« … pour tout résultat mathématique énoncé, on précisera explicitement qu'il est admis lorsqu'il n'a pas été démontré. »

2. Dans un certain nombre de cas, les programmes précisent les résultats ***qu'il convient d'admettre***. Le programme de 5e précise par exemple :

« On rencontrera à ce propos l'inégalité triangulaire, $AB + BC \geq AC$ dont l'énoncé sera admis. »

De même, en 4e, on considère le théorème suivant :

« Dans un triangle ABC, si M est un point du côté [AB], N un point du côté [AC] et si [MN] est parallèle à [BC], alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. »

Le programme indique alors :

« L'égalité des trois rapports sera admise après d'éventuelles études dans des cas particuliers. »

Dans le programme de seconde, de même, on lit :

« D'autres fonctions telles que $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto |x|$… pourront être découvertes à l'occasion de problèmes. Les résultats les concernant pourront être admis. Les positions relatives des diverses courbes ainsi découvertes seront observées et admises. »

Le document d'accompagnement du programme de seconde précise encore ceci :

« L'étude […] amène à dégager quelques énoncés concernant les positions relatives de droites et de plans de l'espace (règles usuelles dites d'incidence, qui seront admises) : on pourra se limiter aux seules propriétés effectivement utilisées. »

3. En dehors des théorèmes dont les textes officiels imposent qu'ils soient admis (ou au contraire dont ils exigent qu'ils soient démontrés), il revient au professeur de choisir, responsabilité à propos de laquelle le document d'accompagnement des programmes du cycle central du collège note :

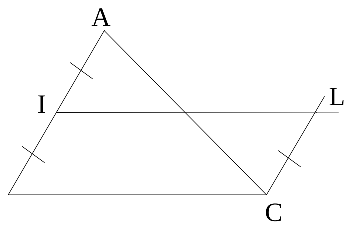
« Pour tout le cycle central, il est de la responsabilité du professeur, en fonction de ses élèves, de décider de l'opportunité de démontrer certains résultats du cours (leur statut, admis sur conjecture ou établi, doit cependant être clair) et d'organiser des étapes de recherche et de rédaction. »

Le document d'accompagnement du programme de seconde précise de son côté :

« Il faut souligner ici l'effort important entrepris au collège pour différencier le résultat *observé* du résultat *démontré* et pour annoncer clairement le statut des divers énoncés : définition, résultat ou théorème admis sur conjecture, résultat ou théorème établi, etc. (cf. document d'accompagnement des programmes de 5e-4e). Il importe de garder cet esprit dans le travail conduit en 2de, en particulier dans ce paragraphe de géométrie. Ainsi, l'enseignant décidera, en fonction de ses élèves et du temps dont il dispose, du caractère *admis* ou *démontré* des trois cas d'isométrie des triangles. »

➔ À propos du théorème de Pythagore et de sa ***réciproque*** (questions 4, 7 & 10), on se reportera aux notes de la séance 16 du Séminaire 2001-2002 : on a reproduit le passage correspondant dans l'**Annexe 4** en fin de résumé.

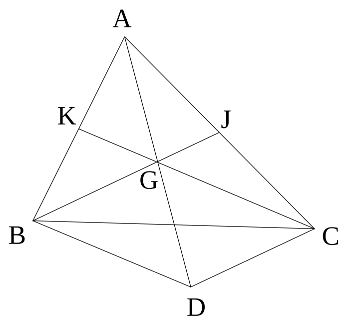
➔ À propos du deuxième théorème des milieux (question 8), un commentaire du programme précise : « La symétrie centrale et les propriétés caractéristiques du parallélogramme permettent de démontrer ces théorèmes. » Sans doute faut-il voir là une invitation forte à déduire cette propriété dans la TGD. Si par exemple la propriété appelée plus haut $\pi^1_{0/3}$ est présente dans la TGD, la figure ci-après, où (CL) est parallèle à (AB), suggère une voie démonstrative facile.

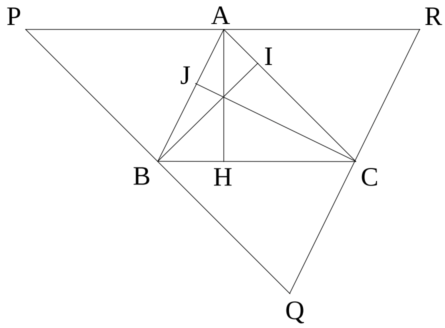


➔ À propos de la question 2, un commentaire du programme de 4^e indique, s'agissant des « droites remarquables d'un triangle » : « Certaines de ces propriétés de concours pourront être démontrées ; ce sera l'occasion de mettre en œuvre les connaissances de la classe ou celles de cinquième. » Rien de plus n'est, semble-t-il, précisé. En revanche, à propos des bissectrices, le nouveau programme du cycle central, qui entrera en vigueur en 4^e à la rentrée 2007, souligne ce qui suit.

Contenus
Bissectrices et cercle inscrit
Compétences
– Caractériser les points de la bissectrice d'un angle donné par la propriété d'équidistance aux deux côtés de l'angle.
– Construire le cercle inscrit dans un triangle.
Exemples d'activités, commentaires
Cette caractérisation permet de démontrer que les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes et justifie la construction du cercle inscrit.
L'analogie est faite avec le résultat concernant les médiatrices des trois côtés du triangle vu en classe de cinquième.

Le commentaire est une invitation très claire à établir la démonstration évoquée. S'agissant des médianes et des hauteurs, un commentaire relatif aux contenus de 5^e se borne à faire savoir que « la démonstration de ces propriétés n'est pas envisageable en classe de cinquième, mais possible en classe de quatrième ». Le concours des médianes est un résultat classique, qu'on peut établir en considérant la figure ci-contre, où D est le symétrique de A par rapport à G. (Pour une voie déductive alternative, on pourra se reporter aux notes de la séance 23 du Séminaire 2001-2002, reproduites dans l'**Annexe 5** en fin de résumé.) Quant au concours des hauteurs, il se déduit aisément du concours des médiatrices, comme le suggère la figure ci-après (où les hauteurs de ABC apparaissent comme étant les médiatrices de PQR).





➔ S'agissant des fonctions affines (question 5), le programme de 3^{e} indique : « On remarquera la proportionnalité des accroissements de x et y. » Le principal apport de la 2de est donc la réciproque : si f est telle que $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ est constant, quels que soient x_1 et x_2 (pourvu que $x_1 \neq x_2$), alors f est une fonction affine dont le coefficient de proportionnalité est la valeur constante du rapport $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Ainsi, si un cycliste roule à la vitesse de 30 km/h, alors, d'après cette réciproque, la distance $f(t)$ qu'il aura parcourue au temps t est une fonction affine de t ; si au temps t_0, il avait parcouru déjà 23 kilomètres, on aura donc $f(t) = 30\,(t - t_0) + 23$. Plus généralement, le théorème réciproque permet de modéliser les processus à ***taux constant***. Si un robinet qui fuit avec un débit constant a versé 1,5 litres en 45 minutes, la quantité qui s'en sera échappée dans t minutes est donnée par

$$f(t) = \frac{1,5}{45}\,t + 1,5 = \frac{1}{30}\,t + 1,5.$$

Ainsi est-il bon de démontrer explicitement le théorème réciproque, utile dans un vaste ensemble de problèmes. En voici un exemple parmi beaucoup d'autres possibles (extrait de E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, Springer-Verlag, 1975, p. 85).

A leaping animal, such as a cat, a porpoise *[marsouin]*, or a flea *[puce]*, falls in such a way that the vertical speed of its center of gravity increases by 9.81 m/sec every second. What is the equation of the vertical speed, if the time zero is chosen at the instant when the vertical speed is zero (at the point of culmination)? What are the vertical speeds for $t = 0.1$ sec, 0.2 sec, etc.? Plot a diagram. Interpret the values of the function for negative values of t.

➔ La question 9 n'a pas trait à un théorème classique enregistrée à ce titre dans la TGD (cette dernière est très sélective !). À son propos, on évoquera seulement, ici, le ***principe directeur*** qui émerge de l'ensemble des notations précédentes, à savoir ***l'exigence démonstrative***, dont on ne peut exagérément faire l'économie sans renoncer du même coup à vivre avec les élèves une authentique aventure mathématique.

3. Présentation de l'APMEP

On visitera le site de l'APMEP (http://www.apmep.asso.fr/) et celui de la régionale d'Aix-Marseille (http://www.apmep-aix-mrs.org/).

Séance 16 – Annexes

Annexe 1

Choisies par 7 participants

2.2. Comment aborder le chapitre « Fonctions de référence » ? Quelle est la raison d'être (pour une AER) ? (ALP, CR, 2^{de}, 13)

Choisies par 6 participants

3.1. J'ai eu une discussion avec un élève qui refuse de travailler avec la classe. Ça n'est pas la négation des problèmes mathématiques posés qui semble empêcher son apprentissage. Il n'arrive pas à s'intéresser à ce que l'on fait s'il n'y trouve pas une utilité dans son quotidien ou sa vie de futur adulte. Quelles réponses apporter à un élève qui fait ce raisonnement ? (WB, MJ, 4^e, 13)

Choisies par 5 participants

4.1. Suite aux bulletins du premier trimestre, la question de l'orientation pour les élèves de 2^{de} s'est posée. Quels sont les critères permettant de déterminer quels sont les élèves qui pourront accéder à la série S, à la série ES, L, STG, STL ? (Ma PCP m'a donné un critère pour la série S, qui est d'être bon en géométrie.) (VAC, MJ, 2^{de}, 13)

4.2. Hier, lundi 18 décembre, jour de grève, j'ai fait cours à la moitié de la classe seulement. On a corrigé un exercice, fini une activité et fait une synthèse. Est-ce que je dois refaire pour les autres la synthèse (elle porte sur la suppression des parenthèses précédées d'un signe + ou –) ? (TB, CR, 4^e, 13)

Choisie par 4 participants

5.1. Comment peut-on introduire du vocabulaire (par exemple le vocabulaire sur les angles en 5^e) sans faire un exposé de type magistral ? (OL2, OS, 5^e & option 1^{re} L, 13)

5.2. La classe dont j'ai la responsabilité est très hétérogène. Il devient assez difficile de construire un DS car il sera trop dur pour certains et trop facile pour les autres. Comment puis-je établir un DS pour ne léser personne ? (PV, MJ, 2^{de}, 13)

Choisie par 3 participants

6.2. Dans le chapitre de statistique sur la fluctuation d'échantillonnage, faut-il donner les résultats d'une enquête sur plusieurs échantillons et observer qu'ils diffèrent d'un échantillon à l'autre, ou faut-il que les élèves réalisent eux-mêmes des enquêtes (par exemple en lançant une pièce, un dé, en utilisant « random » de la calculatrice) ? Si la deuxième option est la meilleure, y a-t-il d'autres manières de faire une enquête ? (J'ai vu dans le programme que la deuxième était obligatoire ; mais faut-il faire aussi la première ?) (MG1, CR, 2^{de}, 13)

6.3. Comment faire pour intéresser les élèves les plus faibles qui ont tendance à décrocher voire à abandonner devant les difficultés rencontrées ? (RH, MJ, 4^e, 13)

6.4. Lors d'un DM, un élève a utilisé le discriminant pour résoudre une équation du second degré pourtant factorisable grâce à une identité remarquable ! Nous n'avons pas vu, bien sûr, cette méthode en classe (vu que c'est une classe de 2^{de}). Je lui ai demandé pourquoi il avait utilisé cette méthode ; il m'a dit qu'il avait fait un exercice du livre de 2^{de} dans lequel il avait découvert cette méthode et qu'il avait trouvé celle-ci facile à utiliser. Comment tenir compte du travail de cet élève, même si ce n'était pas la réponse attendue et que, en plus, celle-ci est hors programme ? (ML, MJ, 2^{de}, 13)

Choisie par 2 participants

7.2. Je pense donner des exercices de réinvestissement sur les fonctions à mes élèves, pendant les vacances de Noël. Doit-on considérer les vacances de Noël comme des vacances « particulières » et de ce fait limiter le travail à faire à la maison ? (MBP, OS, 2^{de}, 13)

7.3. Cette semaine, les élèves ont tendance à être plus agités. Comment adapter les séances pour les motiver à travailler le vendredi 22, sachant qu'ils sont en vacances après mon cours ? (KE, MJ, 4^e, 13)

7.4. Le professeur principal de ma classe en responsabilité m'a fait part de ce que pensent les élèves à mon sujet. D'après eux, je suis trop sévère avec les élèves qui ne me rendent pas leur DM à la date demandée. Je me demande si je dois parler de ce problème dès le prochain cours avec mes élèves, directement, ou si l'intermédiaire du professeur principal est préférable. (OL1, OS, 5e, 13)

Choisie par 1 participant

8.1. Je pense demander aux élèves à la rentrée s'ils ont un peu réfléchi à leur choix pour l'année suivante, de manière à pouvoir proposer ensuite des DM avec un exercice spécifique pour ceux qui choisissent S ou ES option Mathématiques, et un autre plus classique pour le reste de la classe. Est-ce une bonne chose ? (SG, OS, 2de, 13)

8.2. Le programme de 4e indique la compétence exigible suivante : « Utiliser sur des exemples numériques, pour des exposants très simples des égalités telles que $a^2 \times a^3 = a^5$; $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$; $(ab)^2 = a^2b^2$, où a et b sont des nombres relatifs non nuls. » Les commentaires insistent : « Cette rubrique ne doit pas donner lieu à des calculs artificiels sur les puissances entières d'un nombre relatif. Pour des nombres autres que 10, on s'en tiendra au cas d'exposants simples. » Après avoir fait travailler les élèves en activité sur des exemples simples illustrant ce qui précède, que noter dans la synthèse à ce sujet ? (SP, MJ, 4e, 13)

8.3. Faut-il donner des devoirs aux élèves pour la rentrée des vacances ou doit-on réserver l'étude aux semaines effectives de cours ? Peut-on accepter que les élèves n'étudient pas pendant deux semaines ? Est-ce que ce dispositif peut permettre de relancer l'étude à la rentrée de façon plus « consentie » ? (PP, MJ, 2de, 13)

8.4. En 4e, le théorème de Thalès n'est pas énoncé sous cet intitulé mais sous la forme de « l'égalité de trois rapports ». Peut-on tout de même prononcer le nom de « Thalès » en classe ? De cette façon on pourrait lors des démonstrations, comme pour Pythagore, écrire : « d'après le théorème de Thalès, … ». (SR, CR, 4e, 13)

8.5. Je ne comprends pas bien à quoi fait référence la quatrième partie, intitulée « Gestion de la séance », de l'analyse d'une séance. (CS1, CR, 1re STL, 13)

8.6. Sur un histogramme, la classe modale est-elle celle de plus grande aire ou de plus grande hauteur ? Existe-t-il une classe médiane ? (JS, OS, 2de, 13)

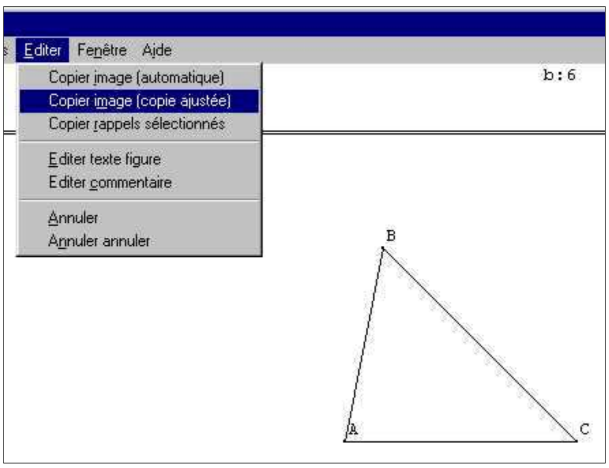
8.7. Dans ma pratique professionnelle au sein de l'établissement, j'ai du mal à être très perspicace sur l'analyse critique d'une séance après l'avoir vécue dans la classe. Comment faire pour améliorer ce travail d'auto-évaluation ? (WT, MJ, 3e, 13)

Annexe 2

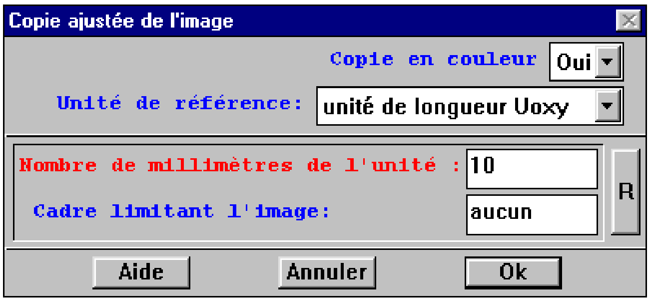
Copie d'une figure GéoplanW respectant les mesures

1. Créer la figure en utilisant des points repérés dans le plan de façon à pouvoir contrôler les mesures.

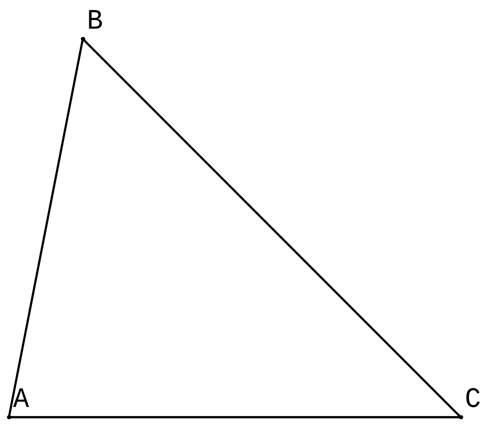
2. Dans le menu « Editer », choisir « Copier image (copie ajustée) »



3. Dans la fenêtre qui s'ouvre alors, [voir ci-après] choisir comme unité de référence : « unité de longueur Uoxy » et comme nombre de millimètres de l'unité « 10 ». Ce qui mesure 1 dans Géoplan mesure alors 1 cm sur la figure importée.



Résultat (après rognage de la figure sous word pour la cadrer) :



Remarque. Pour faire des copies d'écran à insérer sous Word, utiliser la touche [Impr écran] (à coté de F12) ; [Alt - Impr écran] permet d'avoir juste la fenêtre active.

Annexe 3

• À l'instigation d'une participante au Séminaire, on revient ici sur une question examinée déjà lors de la séance 7 Séminaire : celle que soulève la notion d'***ordre de grandeur***.

① La question posée était la suivante :

Lors d'un travail sur l'écriture scientifique des nombres et l'ordre de grandeur, j'ai posé la définition suivante : « Pour trouver l'ordre de grandeur d'un nombre décimal dont l'écriture scientifique est $a \times 10^p$, où $a \in \mathbb{D}$, $1 \leq |a| < 10$, et $p \in \mathbb{Z}$, on arrondit a à l'unité dans cette écriture. » Les élèves avaient déjà travaillé ces notions en sciences physiques et rencontré une définition différente (« puissance de 10 la plus proche du nombre »). Peut-on leur imposer deux définitions différentes ? (…, 2$^{\text{de}}$, 6)

❶ La définition « mathématique » évoquée – l'ordre de grandeur d'un décimal $a \times 10^p$, où $a \in \mathbb{D}$, $1 \leq |a| < 10$, $p \in \mathbb{Z}$, s'obtient en arrondissant a à l'unité – ne pose pas de problème particulier (l'ordre de grandeur de $480 = 4{,}8 \times 10^2$ est 5×10^2, soit 500, par exemple), hormis le fait qu'elle ne correspond pas à l'usage généralement accepté, qui veut que l'ordre de grandeur d'un nombre soit une puissance de 10 (en sorte que l'ordre de grandeur de 480 est, soit 100, soit 1000, par exemple).

❷ Le rappel de ce fait, qui doit guider le professeur de mathématiques, n'était pas assorti d'une définition précise, mais d'une simple illustration par un document témoignant de l'usage dit « des physiciens », celui de prendre pour ordre de grandeur d'un nombre la « puissance de 10 la plus proche du nombre ». On reproduit ci-après une partie de ce document, en appliquant les indications qu'il donne au cas du nombre 480 :

L’ordre de grandeur [d’un nombre est] ***la puissance de dix*** qui se rapproche le plus de ce nombre.

Pour trouver l’ordre de grandeur d’un nombre on doit suivre les étapes suivantes :

1. Transforme le nombre en notation scientifique

[$480 = 4{,}8 \times 10^2$]

2. Arrondis le coefficient à l’unité près.

[$4{,}8 \times 10^2 \approx 5 \times 10^2$]

3. Une fois arrondi, si le coefficient est plus petit que 5, l’ordre de grandeur est la même puissance de dix que le nombre en notation scientifique. Si le coefficient est 5 ou plus que 5, on ajoute 1 à l’exposant de la puissance de dix du nombre écrit en notation scientifique.

[Ordre de grandeur de 480 : $10^{2+1} = 1000$]

❸ Une difficulté surgit : 480 n’est-il pas en fait « plus proche » de 100 que de 1000 ? Si on entend la chose au sens usuel, on a en effet : $480 - 100 = 380 < 1000 - 480 = 520$. On peut même noter qu’on a de même $500 - 100 = 400 < 1000 - 500 = 500$, en sorte que la puissance de 10 la plus proche de 500 serait 100 et non 1000, contrairement à ce qu’implique la règle donnée précédemment !

❹ Le milieu de l’intervalle [100 ; 1000] est en fait 550 et non 500. Plus généralement, le milieu de l’intervalle $[10^p\,;\,10^{p+1}]$ est $5{,}5 \times 10^p$. On peut donc être porté alors à donner pour technique d’obtention de l’ordre de grandeur ceci :

1. Transforme le nombre en notation scientifique

[$480 = 4{,}8 \times 10^2$]

2. Tronque le coefficient au dixième.

[$4{,}8 \times 10^2 \approx 4{,}8 \times 10^2$]

3. Une fois tronqué, si le coefficient est plus petit que 5,5, l’ordre de grandeur est la même puissance de dix que le nombre en notation scientifique. Si le coefficient est 5,5 ou plus que 5,5, on ajoute 1 à l’exposant de la puissance de dix du nombre écrit en notation scientifique.

[Ordre de grandeur de 480 : $10^2 = 100$]

② S’il ne s’agit que de donner une définition précise de la notion d’ordre de grandeur, définition qui tantôt s’accordera, tantôt non, avec telle ou telle autre définition possible, la définition précédente peut certes être adoptée. Mais, à l’instar d’ailleurs de celle proposée dans le document cité, elle est critiquable pour des raisons que l’on va exposer rapidement.

❶ La notion de « plus proche » utilisée ci-dessus est la notion que l’on peut appeler ***arithmétique*** (en suivant un vocabulaire fixé par les mathématiciens grecs). Des nombres $a < x < b$ forment une « médiété arithmétique » si $x - a = b - x$, c’est-à-dire si $x = \frac{a+b}{2}$, en d’autres termes si x est la moyenne ***arithmétique*** de a et b. (Le mot « médiété » traduisant ici un mot grec qui signifie à peu près « moyenne, proportion ».) On dira en ce sens que x est plus proche, arithmétiquement, de a que de c si $x - a < b - x$, c’est-à-dire si $x < \frac{a+b}{2}$.

❷ Dans le cas des ordres de grandeur, les puissances de 10 ne forment pas une progression ***arithmétique*** (additive) mais une progression ***géométrique*** (multiplicative), et la « distance » entre deux nombres $x < y$ se mesure, non par leur ***rapport arithmétique*** $y - x$ mais par leur ***rapport géométrique*** $\frac{y}{x}$. Les anciens Grecs disaient ainsi que $a < x < b$ forment une « médiété géométrique » si l’on a $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$, c’est-à-dire si « x est à a comme b est à x », ce qui revient à l’égalité $x = \sqrt{ab}$: x est ainsi la moyenne ***géométrique*** de a et b.

❸ Quand dira-t-on alors que « x est plus proche (géométriquement) de a que de b » ? Lorsqu’on a $\frac{x}{a} < \frac{b}{x}$, c’est-à-dire lorsque $x < \sqrt{ab}$. Dans le cas où $a = 10^p$ et $b = 10^{p+1}$, on dira que « x est plus proche de 10^p que de 10^{p+1} » si l’on a $\frac{x}{10^p} < \frac{10^{p+1}}{x}$, soit encore si $x < \sqrt{10} \times 10^p$. On a $\sqrt{10}$ =

3,16227766016837933199889354443 27… On en déduit la règle suivante pour obtenir l'ordre de grandeur d'un nombre x :

1. Transforme le nombre en notation scientifique

[$480 = 4{,}8 \times 10^2$]

~~2. Tronque le coefficient au dixième.~~

~~[$4{,}8 \times 10^2 \approx 4{,}8 \times 10^2$]~~

3. ~~Une fois tronqué,~~ si le coefficient est plus petit que $\sqrt{10}$ **(= 3,162…)**, l'ordre de grandeur est la même puissance de dix que le nombre en notation scientifique. Si le coefficient est ~~5,5 ou~~ plus grand que $\sqrt{10}$ **(= 3,162…)**, on ajoute 1 à l'exposant de la puissance de dix du nombre écrit en notation scientifique.

[Ordre de grandeur de 480 : $10^{2+1} = 1000$]

❹ En pratique, si $x = k \times 10^p$, où $k \in \mathbb{D}_+$, $1 \le k < 10$, et $p \in \mathbb{Z}$, on peut comparer le coefficient k à $\sqrt{10}$, mais on peut aussi bien comparer les fractions $\frac{x}{10^p}$ et $\frac{10^{p+1}}{x}$. On a ainsi $\frac{480}{100} = 4{,}8$ et $\frac{1000}{480} = 2{,}083\ldots$, en sorte que 480 est (multiplicativement) « plus proche » de 1000 que de 100, ce qui entraîne que l'ordre de grandeur de 480 est 1000, et non 100. On notera que le programme de 4e comporte tous les ingrédients utiles pour que la définition authentique de l'ordre de grandeur y soit opérationnelle.

② La difficulté rencontrée pour définir l'ordre de grandeur d'un nombre est liée à une situation qu'il convient de préciser.

❶ On définit parfois la relation binaire « x et y ont le même ordre de grandeur », où x et y sont strictement positifs, en disant que le rapport (« géométrique ») $\frac{\max(x, y)}{\min(x, y)}$ du plus grand des deux nombres au plus petit est inférieur strictement à 10. Cette relation est évidemment ***réflexive*** et ***symétrique***. S'il s'agissait d'une relation ***d'équivalence***, on pourrait, selon un procédé tout classique, définir abstraitement l'ordre de grandeur d'un nombre x comme ***la classe d'équivalence*** à laquelle ce nombre appartient, et, concrètement, identifier cette classe d'équivalence – et donc l'ordre de grandeur commun à tous ses éléments – à l'unique puissance de 10 qu'elle contient.

❷ Le problème est que la relation « avoir même ordre de grandeur » ainsi définie n'est pas ***transitive*** et n'est donc pas une relation d'équivalence ! Le nombre 2×10^p a ainsi même ordre de grandeur que 10^{p+1} qui a lui-même le même ordre de grandeur que $4 \times 10^{p+1}$; mais les nombres 2×10^p et $4 \times 10^{p+1}$, dont le rapport est égal à 20, n'ont pas le même ordre de grandeur. Telle est la raison pour laquelle la définition de la notion d'ordre de grandeur ne va pas de soi.

❸ La définition préconisée ici revient à dire que l'ensemble des nombres $x > 0$ ayant pour ordre de grandeur 10^p, où $p \in \mathbb{Z}$, s'écrit $\{ x > 0 \,/\, \sqrt{10} \times 10^{p-1} \le x < \sqrt{10} \times 10^p \}$. Pour $x = 480$, par exemple, on a vu que $p = 3$; on a bien : $\sqrt{10} \times 10^2 = 316{,}\ldots \le 480 < \sqrt{10} \times 10^3 = 3162{,}\ldots$ L'ensemble précédent s'écrit encore : $\{ x > 0 \,/\, \frac{1}{\sqrt{10}} \le \frac{x}{10^p} < \sqrt{10} \}$. En d'autres termes, avoir pour ordre de grandeur 10^p, pour un nombre x, c'est avoir avec 10^p un rapport $\frac{x}{10^p}$ qui ne soit pas plus grand que $\sqrt{10} = 3{,}162\ldots$, et qui soit au moins égal à $\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} = 0{,}3162\ldots$

Annexe 4

Pythagore : démontrer la réciproque

Les livres ne donnent pas de démonstration de la réciproque de Pythagore. Celle qui m'est venue à l'idée est très intéressante, car elle réinvesti les connaissances antérieures (récentes). Il s'agit de construire un triangle rectangle ayant deux côtés de même longueur que le triangle étudié, puis, grâce à la partie directe, d'identifier les longueurs du 3e côté. Les deux triangles étant isométriques (intuitif), ils sont de même nature et le triangle initial était donc rectangle. Où puis-je trouver d'autres démonstrations ? (…, 4^e, 15)

Matériaux pour une réponse

1. La ***réciproque*** du théorème de Pythagore est ***clairement inscrite*** au programme de la 4^e. Le secteur d'études intitulé *Triangle rectangle et cercle* contient un thème d'étude libellé ainsi :

« Cercle circonscrit, théorème de Pythagore et sa réciproque. »

2. Faut-il démontrer ce théorème, ou bien l'admettre ? Rappelons que, selon le programme, « pour tout résultat mathématique énoncé, on précisera explicitement qu'il est admis lorsqu'il n'a pas été démontré ». D'autres théorèmes figurant au programme sont signalés ***explicitement*** comme devant être admis : ainsi en va-t-il, en 5^e, de l'inégalité triangulaire ; en 4^e, du fait qu'un produit comme $(-2)\times(-3)$ est égal à 6, c'est-à-dire que « moins par moins donne plus ». Il semble que la ***réciproque*** du théorème de Pythagore relève du cas intermédiaire que décrit ce passage du document d'accompagnement des programmes du cycle central :

« Pour tout le cycle central, il est de la responsabilité du professeur, en fonction de ses élèves, de décider de l'opportunité de démontrer certains résultats du cours (leur statut, admis sur conjecture ou établi, doit cependant être clair) et d'organiser des étapes de recherche et de rédaction. »

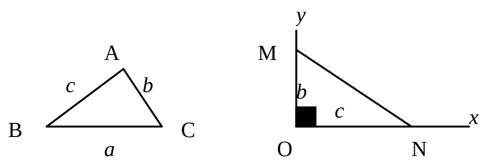
3. La démonstration de la réciproque du théorème de Pythagore était chose aisée au temps où l'on disposait au collège des classiques ***« cas d'égalité »***, c'est-à-dire des théorèmes donnant des conditions ***suffisantes*** pour que deux triangles soient ***isométriques*** (sujet d'études qui figure désormais au programme de 2^{de}).

① En l'espèce, il suffit de savoir que, si deux triangles ABC et A'B'C' ont leurs côtés correspondants de même longueur, alors ils sont isométriques, et ont en particulier leurs angles correspondants égaux : c'était là autrefois le « troisième cas d'égalité des triangles ». Un manuel de collège proposait ainsi cette démonstration, alors toute classique :

« **Réciproque du théorème de Pythagore. Si les trois côtés a, b, c d'un triangle vérifient la relation**

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

ce triangle est rectangle.



Construisons un angle droit xOy. Portons sur Oy une longueur OM = b et sur Ox une longueur ON = c. Traçons MN. On a : $\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = b^2+c^2$ ou : $\overline{MN}^2 = a^2$. Ainsi : MN = a. Dès lors, les triangles OMN et ABC sont égaux comme ayant les trois côtés respectivement égaux. Par suite : $\angle A = \angle O$ = 1 droit, et le rectangle ABC est rectangle en A.
Cas particulier. *Un triangle dont les côtés sont proportionnels à* 3, 4 *et* 5 *est rectangle*. »

---

② La démonstration « classique » n'était donc rien d'autre que la démonstration évoquée dans la question examinée, à ceci près que la reconnaissance de l'isométrie des deux triangles n'était pas alors abandonnée à « l'intuition ».

4. La disparition des programmes du collège, il y a quelque trente ans, des cas d'égalités des triangles a laissé de nombreuses lacunes dans l'organisation déductive de la géométrie élémentaire : la réciproque du théorème de Pythagore est une de ces lacunes.

① On notera que, d'une matière générale, les connaissances mathématiques spécifiques du secondaire (par exemple la manière de démontrer la réciproque du théorème de Pythagore), lorsqu'elles ne font pas l'objet d'une reprise d'étude dans l'enseignement supérieur (ou plus exactement d'une reprise dont les résultats soient aisément transposables au collège), et lorsqu'elles ne sont plus enseignées dans les classes du collège ou du lycée, ***s'effacent rapidement de la culture mathématique de la profession*** – ce qu'on doit regretter et chercher à combattre.

② Il est vrai qu'on trouve assez difficilement dans la littérature mathématique d'aujourd'hui des démonstrations de la ***réciproque*** du théorème de Pythagore, et plus difficilement encore des démonstrations que l'on puisse intégrer dans le curriculum français. À titre d'exemple, on reproduit ci-après une démonstration proposée sur Internet dans le cadre d'une étude sur les triplets pythagoriciens (on notera l'aveu de l'auteur au début de son propos, et on se rappellera que la « loi des cosinus » est le théorème d'Al Kashi) :

Astonishingly I have never seen a proof of the converse of the Pythagorean theorem. However, because it is the converse that is relevant to a study of Pythagorean triples, I will give a proof. It is possible to prove the converse using the Pythagorean theorem itself (via the law of cosines, for example), but (as Robert Strichartz says regarding the fundamental theorems of calculus) "this proof lacks intuitive appeal" (*The Way of Analysis*, p. 209). Instead let us use Heron's formula, whose proof does not require the Pythagorean theorem.

Converse of the Pythagorean Theorem

If $x^2 + y^2 = z^2$ for positive real numbers x, y, and z, then segments of lengths x, y, and z form a right triangle with hypotenuse length z.

Proof: We first show that x, y, and z do indeed form a triangle. It is sufficient to show that the sum of each pair of sides is greater than the remaining side. $2xy > 0$, so $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 > x^2 + y^2$. Therefore $x + y > \sqrt{x^2 + y^2} = z$. $z + y > z - y$, so $(z + y)^2 > (z + y)(z - y) = z^2 - y^2$, which implies $y + z > \sqrt{z^2 - y^2} = x$. Similarly $x + z > y$.

Heron's formula for the area of a triangle states: $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$, where the semiperimeter $s = (x + y + z)/2$. We substitue $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ because z is nonnegative. $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)} = \frac{1}{4}\sqrt{(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)} = \frac{1}{4}\sqrt{(-x^2 + y^2 + z^2 + 2yz)(x^2 - y^2 - z^2 + 2yz)} = \frac{1}{4}\sqrt{(2y^2 + 2y\sqrt{x^2 + y^2})(-2y^2 + 2y\sqrt{x^2 + y^2})} = \frac{1}{2}\sqrt{-y^4 + y^2(x^2 + y^2)} = \frac{1}{2}xy$.

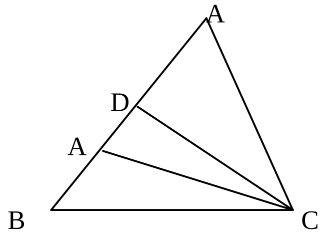
Because the area of a triangle equals half of the product of the base and the height, we conclude that the segments of lengths x and y are perpendicular, so we have a right triangle with hypotenuse length z. QED

---

③ Tout cela noté, voici une démonstration compatible avec les résultats disponibles en 4^{e}.

❶ On suppose connu le théorème de Pythagore et on démontre sa réciproque en démontrant que, si le triangle ABC n'est pas rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$. Pour cela, on introduit un point D tel que $\widehat{BDC}$ soit droit et on va démontrer que l'on a $AB^2 + AC^2 \neq DB^2 + DC^2$.

❷ Pour choisir D, rappelons que, dans un triangle quelconque, au plus ***un*** des angles est droit ou obtus. Des deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$, l'un au moins est donc aigu : on suppose ici que c'est $\widehat{ABC}$. Soit alors D l'intersection avec]BA) de la perpendiculaire à (AB) passant par C (si D n'était pas sur la demi-droite]BA), comme $\widehat{DBC}$ est nécessairement aigu comme angle non droit du triangle rectangle DBC, on aurait $\widehat{ABC}$ obtus, contrairement au choix de B).



❸ Pour conclure, on procède alors à une ***distinction de cas***.

• Si D ∈]BA[, on a AB > DB ; comme AC > DC (d'après le théorème de Pythagore), on a donc $AB^2 + AC^2 > DB^2 + DC^2$.

• Si A ∈]BD[, on a : $AB^2 + AC^2 = (DB - DA)^2 + (DA^2 + DC^2) = (DB^2 + DC^2) + 2DA^2 - 2DA \times DB = (DB^2 + DC^2) - 2DA \times (DB - DA) = (DB^2 + DC^2) - 2DA \times AB < DB^2 + DC^2$.

④ À propos de la situation européenne, on reproduit ci-après un extrait d'un rapport de Tony Gardiner, président de la commission sur l'enseignement des mathématiques de la SME (Société mathématique européenne), qui esquisse un inventaire de la situation dans divers pays d'Europe à propos du théorème de Pythagore, de sa réciproque, et de leur démonstration :

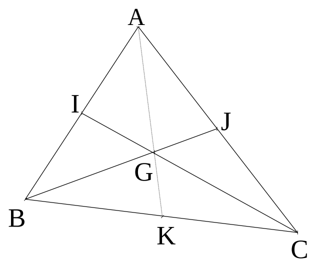
4.2 Pythagorean theorem
In many countries (e.g. Poland, Germany, Greece, Spain, Russia, Italy, Finland, Sweden) all pupils would meet the Pythagorean theorem by the age of 16. In Italy, some motivation is presented when the result is first met, but the topic is treated more thoroughly later in secondary school. In Germany, a full proof would be expected – and the converse would be stated – for those in a Gymnasium; those in a Hauptschule would meet the result without proof. In Finland and Sweden no proofs would normally be given. In Spain, some visual image may be used to make the result plausible, but a proof is unlikely to be given. In Russia, the proof is compulsory and the converse would also be treated. In Belgium the result would be presented with proof to almost all pupils in the academic-oriented lower secondary school, and without proof to some in the technical/vocational school; thus roughly 50% of pupils meet the result by the age of 16. In England, around 40% of pupils are expected to have met the result by age 16, but there is no official mention of the need for a proof, and none is usually given.

Annexe 5

Je cherche une démonstration du concours des médianes dans un triangle. La seule que je connais utilise la droite des milieux. Y a-t-il une démonstration qui utilise des outils « plus faibles » ? (…, 4e, 22)

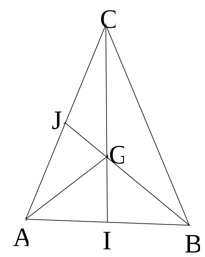
On peut utiliser la formule de l'aire d'un triangle (quelconque) établie en 5e.

❶ Dans la figure ci-après, I et J sont les milieux de [AB] et [AC], G est le point d'intersection de [CI] et [BJ], et K le point d'intersection de (AG) avec [BC]. On va montrer que K est le milieu de [BC].



❷ On utilise le fait suivant : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ où $a, b, c, d > 0$ et $a > c$, $b > d$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$. Il vient ainsi : $\frac{\text{BK}}{\text{KC}} = \frac{\text{Aire AKB}}{\text{Aire AKC}} = \frac{\text{Aire GKB}}{\text{Aire GKC}} = \frac{\text{Aire AGB}}{\text{Aire AGC}}$. Il reste donc à montrer que Aire AGB = Aire AGC.

❸ Considérons la figure ci-contre : I étant le milieu de [AB], on a Aire AIC = Aire ICB et aussi Aire AIG = Aire IGB. Par soustraction, on a donc : Aire AGC = Aire BGC. En remplaçant I par J dans ce qui précède, on obtient de même que Aire BGC = Aire AGB. Il vient donc : Aire AGC = Aire AGB, CQFD.



IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 17 : mardi 30 janvier 2007

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions // 2. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques

0. Questions de la semaine

> *Journée 17 (30 janvier 2007)*
> *Tuteur : [MJ, CR, OS]*
>
> *Mathilde Peyron*
> *Classe : 4^e (et soutien en 5^e)*
>
> *Comment expliquer à une classe de 4^e le fait qu'on ne puisse pas diviser par 0 ?*

1. Forum des questions

1.1. Les TICE en classe de mathématiques

a) On commence par la question ci-après, qui s'inscrit dans la perspective du TD4.

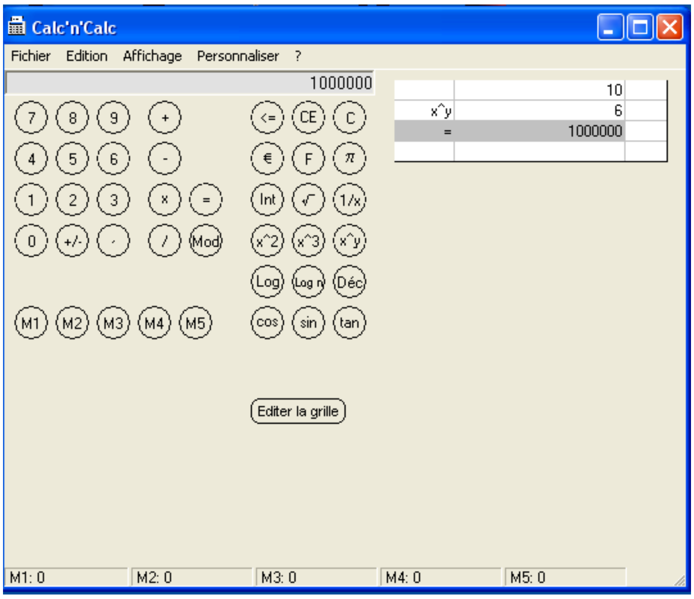
> Le programme de 4^e contient, concernant les puissances, l'utilisation de la calculatrice. Comment gérer les traces écrites des élèves concernant les séquences de touches à utiliser ? Mes élèves ont une dizaine de modèles différents. Exemple : 2 $\boxed{10^x}$ $\boxed{(–)}$ 12. La touche $\boxed{10^x}$ est parfois directe, et parfois elle nécessite de commencer par utiliser *shift*. Je leur ai proposé de « s'approprier » leur séquence propre à partir de celle que j'avais écrite au tableau. (KE, MJ, 4^e, 16)

• Rappelons que, dans la séance de travaux dirigés numéro 4 (le 9 janvier), on a évoqué le type de tâches consistant à ***établir un mode d'emploi d'une ou plusieurs calculatrices*** données – les mêmes pour tous les élèves. Une consigne précisait ceci.

> À terme, chaque mode d'emploi proposé devrait indiquer…
>
> 1) ***l'usage*** de chaque élément de la calculatrice, avec des ***exemples illustratifs*** ;
>
> 2) pour un ensemble de ***type de tâches*** de calcul à préciser sous la forme de ***programmes de calcul***, une ou plusieurs ***techniques*** de calcul utilisant la calculatrice, mises en œuvre sur un ou plusieurs ***spécimens*** de chaque type de tâches.

• Une adaptation pertinente de cette consigne dans une classe de collège consiste en ceci : à propos de la calculatrice « physique » dont il dispose, chaque élève établit, ***au fur et à mesure*** de l'avancée de la classe, un ***mode d'emploi*** évolutif précisant une ou plusieurs techniques de calcul pour chacun des programmes de calcul examinés. Comme tout travail, celui-ci se fera avec l'aide et sous le contrôle du professeur, chaque élève étant responsable de la tenue à jour d'un mode d'emploi pertinent et correct.

• S'agissant de la ***description*** des techniques de calcul avec tel type de calculatrice, on ne cherchera pas à avoir un langage de description unique : les manuels des calculatrices commerciales ont pu répandre l'habitude de description qui se veulent très « réalistes » mais qui sont (de façon intéressée, sans doute), des descriptions « fermées ». On laissera à cet égard une certaine latitude aux élèves en fonction de la calculatrice dont ils décrivent le mode d'emploi. Par exemple avec la calculatrice Calc'n'Calc (voir le compte rendu du TD4), on peut proposer les deux techniques suivantes :



Calcul de 10^{-6} et de 2×10^{-6}

1. Pour calculer 10^{-6}, taper 10, puis *x*^*y*, puis 6, puis +/–, puis =
2. Pour calculer 2×10^{-6}, deux techniques :

2.1. soit calculer 10^{-6}, puis taper $\times$, puis 2, puis =

2.2. soit taper 2, puis mettre 2 en M1 (clic gauche), puis taper C, puis calculer 10^{-6}, puis mettre le résultat en M2 (clic gauche), puis taper C, puis rappeler le contenu de M1 (clic droit), puis taper $\times$, puis rappeler le contenu de M2 (clic droit), puis taper =

b) La question suivante évoque des projets en cours au ministère.

> Lors d'une récréation, en salle des professeurs, j'ai entendu mes collègues parler d'une future épreuve sur ordinateur, au baccalauréat de la série scientifique, en mathématiques. Y a-t-il eu des essais menés dans des lycées, quels sont les types de tâches, les techniques sur lesquels les élèves seront évalués ? Où peut-on se renseigner ? (ML, MJ, 2^de^, 16)

• Il existe en effet un projet d'***épreuve pratique de mathématiques*** au baccalauréat S.

➔ On en trouvera le descriptif (que l'on reproduit ci-après) à l'adresse suivante : http://eduscol.education.fr/D1115/epr_pratique_presentation.htm.

Le groupe de mathématiques de l'Inspection générale expérimente, pendant l'année scolaire 2006/2007, la mise en place d'une épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat S.

Objectifs et projet d'organisation de cette épreuve

L'objectif de l'épreuve est d'évaluer les compétences des élèves dans l'utilisation des calculatrices et de certains logiciels spécifiques en mathématiques, il s'agit d'évaluer chez les élèves, la capacité à mobiliser les TICE pour résoudre un problème mathématique

Les sujets proposés aux candidats sont des exercices mathématiques où l'utilisation des TICE (calculatrice graphique programmable, ordinateurs et logiciels spécifiques, logiciels libres de préférence, tableurs, grapheur tableur, géométrie dynamique, calcul formel) intervient de manière significative dans la résolution du problème posé.

Une banque de sujets est élaborée au niveau national. Chaque sujet est composé :

- d'une description destinée à alimenter la liste nationale de situations d'évaluation ;
- d'une « fiche élève » donnant l'énoncé et précisant ce qui est attendu du candidat ;
- d'une « fiche professeur » décrivant les intentions de l'auteur, des considérations sur l'environnement TICE du sujet et des commentaires sur l'évaluation ;
- d'une « fiche évaluation » destinée à figurer dans le dossier du candidat.

L'épreuve se déroule au sein des lycées fréquentés par les élèves. Chaque établissement choisit, dans cette banque les sujets qui seront proposés aux élèves de l'établissement ; ce choix est guidé par les équipements disponibles et les enseignements assurés par le professeur. Un même sujet peut être commun à plusieurs candidats passant au même moment dans la même salle.

Cette épreuve pratique comptera pour un cinquième dans la note globale de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat série S lorsqu'elle aura été généralisée.

L'expérimentation en 2006/2007

En 2006/2007, cette épreuve est expérimentée dans 20 lycées de 9 académies. Les épreuves se dérouleront dans les lycées entre le 8 et le 20 janvier 2007.

Une banque de 28 sujets, dont seuls les descriptifs figurent sur ce site, a été constituée par tirage au sort dans un ensemble de 54 propositions. Cette disposition explique la numérotation retenue. Le complément sera publié ultérieurement.

Cette expérimentation donnera lieu à un rapport courant février 2007.

➔ On s'en tiendra à cette première information pour le moment. La ***banque de sujets*** est téléchargeable à l'adresse http://eduscol.education.fr/D1115/epr_pratique_MATHS2007.htm.

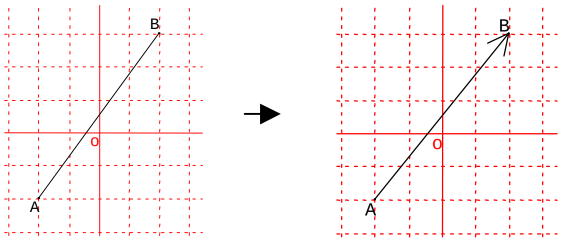
c) On s'arrête un instant sur la question ci-après.

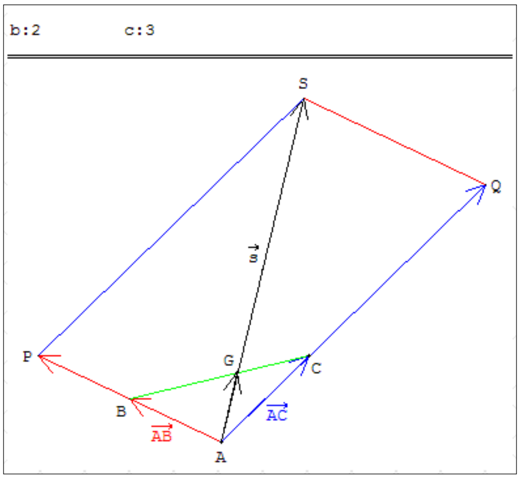
Comment *tracer* des vecteurs avec Géoplan ? (ALP, CR, 2de, 16)

• Géoplan ne le fait pas. La rubrique d'aide précise : « Les vecteurs sont des objets non dessinables (un vecteur n'est pas un ensemble de points). »

• Notons toutefois que, si l'on importe dans un fichier Word un dessin réalisé avec Géoplan, on peut alors transformer un segment en flèche à l'aide de la barre de dessin de Word (voir ci-dessous).

• Le problème soulevé a cependant reçu des solutions. On se reportera ainsi à l'adresse http://perso.orange.fr/debart/seconde/vecteur.html#proto (ou encore à http://www.maths.ac-aix-marseille.fr/debart/pdf/vecteur_seconde.pdf). L'auteur de ces documents propose l'illustration ci-après.





d) On considère cette question encore.

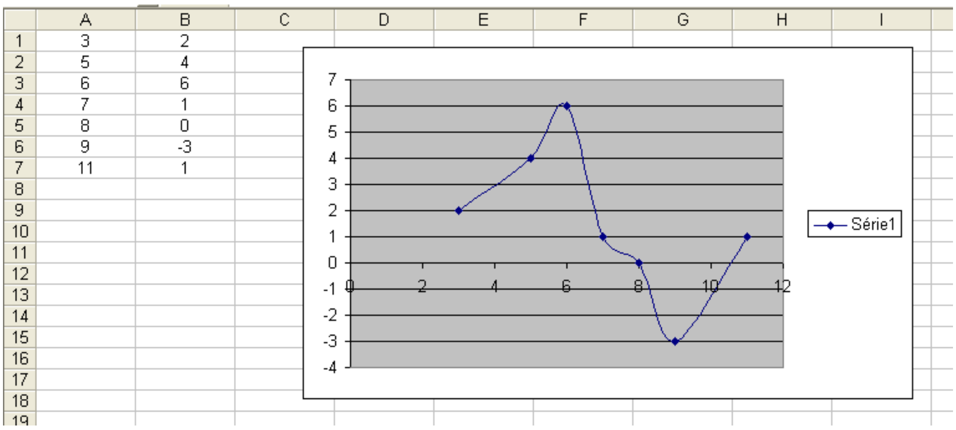
Y a-t-il un logiciel permettant de dessiner une courbe dans un repère, passant par des points, que l'on relierait « à la main » ? (MG1, CR, 2^de^, 16)

Le tableur Excel permet les réalisations souhaitées. On saisit d'abord les coordonnées des points concernés – comme ci-après, où l'on a saisi (en ligne) les coordonnées de 7 points.

	A	B
1	3	2
2	5	4
3	6	6
4	7	1
5	8	0
6	9	-3
7	11	1
8		

On choisit ensuite **Insertion** puis **Graphique**, puis, dans « Types standard » et **Type de graphique**, « Nuages de points ». En choisissant alors, dans **Sous-type de graphique**, par exemple « Nuage de points reliés par une courbe lissée », on obtient ce que montre la copie d'écran ci-après.

e) Lors de la prochaine séance du Séminaire, un point sera fait sur le C2i2e ainsi que sur le document ***C2i2e – Repères & balises***.



1.2. Expérimenter en classe de mathématiques

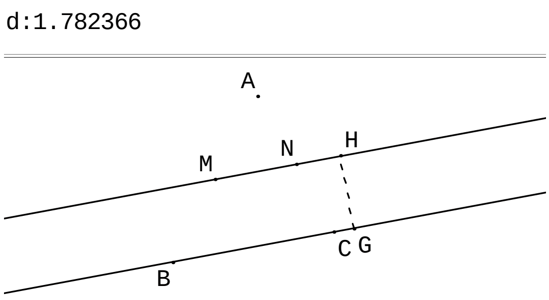
a) Sur ce thème essentiel, on considère la question suivante.

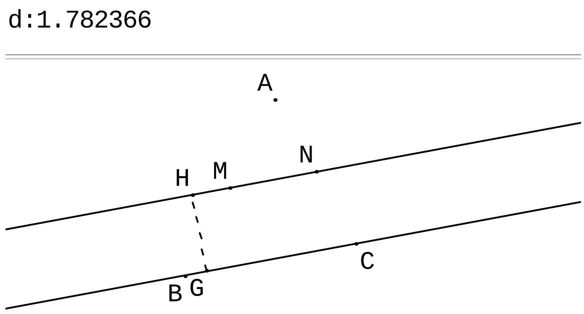
> Préparant le thème « Milieux et parallèles », je voudrais montrer une expérimentation du théorème « Dans un triangle, si une droite passe par le milieu de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté ». J'ai essayé d'expérimenter sur le logiciel Géoplan. Je n'ai pas trouvé comment tester le fait que (IJ) // (BC). Existe-t-il une « fonction » ? (Sur le logiciel Cabri, il existe des fonctions pour tester si des droites sont perpendiculaires, parallèles ; existe-t-il les mêmes sur Géoplan ?) (KE, MJ, 4^{e}, 14)

• L'expérience à réaliser doit être élaborée ***par la classe***, sous la direction du professeur : le problème soulevé dans la question est en fait un problème ***posé à la classe***.

• Adoptons le montage expérimental suivant : on choisit trois points libres A, B, C ; on crée la droite (BC), le milieu M de [AB], le milieu N de [AC], la droite (MN). ***La première utilisation*** de ce « montage expérimental » consiste, en déplaçant les points, à constater ***visuellement*** que les droites (MN) et (BC) semblent rester parallèles. Dans le cas envisagé, ***cela suffit*** pour se convaincre de façon raisonnable du parallélisme des droites.

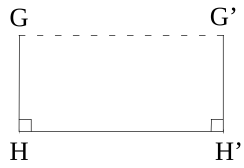
• Si, toutefois, l'on veut une confirmation quantitative, on peut procéder ainsi : créer un point libre G sur (BC) ; créer son projeté orthogonal sur (MN) ; créer la longueur d du segment [GH] ; enfin faire afficher la mesure d (à la précision maximale).





➔ Ce montage permet, pour un positionnement donné de A, B, C, de vérifier que la « distance » GH ne varie pas lorsque G est déplacé sur (BC).

➔ La technologie de la technique utilisée tient dans la proposition suivante (voir la figure ci-après) : (HG) et (H'G') étant perpendiculaires à (HH'), si HG = H'G' alors (GG') est parallèle à (HH').



➔ L'établissement de ce résultat est laissé à… la classe. Bien entendu, on peut imaginer d'autres contrôles de même nature : reprenant le montage envisagé, on peut aussi faire afficher la mesure de l'angle $\widehat{\text{HGB}}$ (ou $\widehat{\text{HGC}}$). Mais la chose est moins spectaculaire : alors que la distance GH est constante lorsque A, B, C restent fixes mais varie quand on déplace ces points, l'affichage de l'angle est, lui, toujours le même, égal à 90º.

b) On réunit maintenant deux questions d'inspiration un peu différente.

1. Comment expliquer aux élèves la différence entre expérimentation et démonstration ? Et comment leur faire comprendre que, pour une démonstration d'une propriété algébrique, on ne peut pas utiliser les nombres ? (MG2, OS, 2$^{\text{de}}$, 14)

2. Lorsqu'on fait la résolution d'équations en classe de 4$^{\text{e}}$ ou de 3$^{\text{e}}$, il est sous-entendu qu'elles admettent une unique solution. On peut alors faire la vérification. Est-ce, caché, un raisonnement par analyse et synthèse ? Comment faire la vérification avec des inéquations ? (SM2, MJ, 4$^{\text{e}}$, 16)

• Il faut donner beaucoup de soin à distinguer ***expérimentation*** et ***déduction*** (au sein de la théorie disponible). Pour cela, il ne faut pas regarder cette distinction comme toute faite : ***elle doit être construite***. Pour la construire, il convient de pratiquer (et d'institutionnaliser) ***de façon systématique*** un grand nombre d'expérimentations et un grand nombre de déductions – que ces opérations portent sur des assertions géométriques ou sur des assertions algébriques.

• Une manière de faire consiste à proposer à l'étude aussi bien des assertions qui se révèleront ***vraies*** (et qu'on s'efforcera donc de déduire ensuite dans la théorie disponible) que des assertions qui se révèleront ***fausses*** (et que l'on tentera, lorsque la chose n'est pas hors de portée, de rectifier). On peut par exemple lancer l'étude des deux questions suivantes.

1. Est-il vrai que, si n est un entier pair non nul, l'entier $n^4 + 9$ est divisible par 5 ?
2. Est-il vrai que, si n est un entier quelconque, l'entier $n^4 + 4$ est divisible par l'entier $n^2 + 2n + 2$?

➔ La première question devrait conduire à étudier les conjectures suivantes (qui devraient émerger lors de l'étude de l'assertion proposée) : si l'entier pair n est un multiple de 10, alors $n^4 + 9$ n'est pas divisible par 5 ; sinon, il l'est.

➔ La seconde question devrait aboutir à la découverte de l'identité

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2).$$

• La résolution d'une équation dans un ensemble de nombres $\mathcal{N}$ par analyse et synthèse consiste à rechercher les solutions possibles (analyse) et à vérifier ensuite s'il s'agit bien de solutions effectives et acceptables (synthèse). Par exemple, cherchons les solutions entières de l'équation $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$. L'égalité $x^4 - 4x^2 = 45$ montre que, si l'entier x est solution, il divise 45 : ce peut donc être ± 1, ± 3, ± 5, ± 9, ± 15, ± 45. Il reste à vérifier si ces solutions ***possibles*** (tout autre nombre est désormais exclu) sont véritablement des solutions. Ici, en fait, on peut raffiner l'analyse en observant que x^2 doit diviser 45 : on a donc nécessairement $x^2 = 1$ ou $x^2 = 9$. La synthèse vient alors : $x^2 = 1$ n'est pas solution de l'équation en x^2 (puisque $1 - 4 \neq 45$), tandis que $x^2 = 9$ est solution (on a $9^2 - 4 \times 9 = 9 \times 5 = 45$). Les seules solutions entières sont donc ± 3. (On a en fait $x^4 - 4x^2 - 45 = (x^2 - 9)(x^2 + 5)$.) Cela noté, on peut en effet regarder la résolution d'une équation du premier degré suivie de sa vérification comme un processus d'analyse-synthèse : dans la mesure où l'on ne procède pas par équivalence, la vérification est ***indispensable***.

• Considérons le problème suivant.

Un enfant a une cagnotte de 57 €. Craignant des dépenses incontrôlées, ses parents lui proposent d'en être les dépositaires, en contrepartie d'un apport de leur part de 5 € par mois. L'enfant veut attendre suffisamment longtemps pour que sa cagnotte contienne au moins 150 €. Six mois ont passé ; il a fait lui-même un apport de 21 €. Combien de mois au moins lui reste-t-il à attendre ?

➔ L'entier n désignant le nombre de mois qui se seront écoulés, l'inéquation correspondante s'écrit $57 + 6 \times 5 + 21 + 5n \geq 150$, soit encore $108 + 5n \geq 150$. On peut étudier cette inéquation à l'aide d'un tableur.

n	$108 + 5n$
1	113
2	118
3	123
4	128
5	133
6	138
7	143
8	148
9	153
10	158
11	163
12	168
13	173

Les solutions dans $\mathbb{N}$ de l'inéquation proposée semblent donc être les entiers $n \geq 9$. Il faudra en tout cas que l'élève attende au moins 9 mois encore pour disposer d'au moins 150 €.

➔ Supposons que l'on ait « résolu » l'inéquation et qu'on soit donc arrivé à la conclusion précédente. Le même usage du tableur permet de vérifier la conclusion à laquelle on est arrivé, au moins dans la zone numérique effectivement explorée. Bien entendu, on peut aussi procéder à des vérifications ponctuelles : par exemple, pour $n = 8$, on s'attend à ce que $108 + 5n < 150$; et, de fait, on a $108 + 5 \times 8 = 108 + 40 = 148 < 150$.

➔ Pour que la vérification soit complète, il suffit de savoir que, si $m > n$, alors $108 + 5n < 108 + 5m$, ce qui s'établit en utilisant « le fait que des nombres relatifs de la forme $a + b$ et $a + c$ sont rangés dans le même ordre que b et c » ainsi que « le fait que des nombres relatifs de la forme ab et ac sont rangés dans le même ordre que b et c si a est strictement positif » (programme de 4^e). On en déduit que, si n est solution de l'inéquation, alors tout entier m

supérieur à n est aussi solution ; et que si m n'est pas solution, il en est de même de tout entier n inférieur à m. Ici, 9 est solution et 8 ne l'est pas ; l'ensemble des solutions est donc bien l'ensemble de tous les entiers $n \geq 9$.

1.3. Mathématiques pour l'enseignant

a) On prolonge le travail de la séance précédente du Séminaire autour du diptyque mathématiques ***à enseigner***/mathématiques ***pour l'enseignant***, en commençant par la question suivante (omise par erreur dans l'Annexe 1 du résumé de la séance 16).

> Comment différencier « propriété » et « théorème » et faut-il tout démontrer ? Peut-on demander aux élèves de redémontrer en devoir des théorèmes ou des propriétés vues en classe ? (AG, CR, 2$^{\text{de}}$, 13)

La question des démonstrations a été examinée lors de la séance 16. Pour le reste, une question analogue, posée en 2005-2006, avait suscité la reprise de développements que l'on trouve dans les notes du Séminaire 2002-2003. On ne reproduit ci-après – pour les commenter – que le début de ces développements : les participants intéressés en retrouveront sans peine l'intégralité dans les *Archives du Séminaire*.

> **Propriété, théorème ?**
>
> Quelle différence y a-t-il entre un théorème et une propriété ? Par exemple on parle du théorème de Pythagore et le programme de 4$^{\text{e}}$ parle de la propriété de Pythagore. Quel terme utiliser ? (4$^{\text{e}}$, 13)
>
> **Matériaux pour une réponse**
>
> 1. On retouchera d'abord la formulation adoptée dans cette question, afin d'éviter tout risque d'accréditer une éventuelle rumeur : s'il est vrai que les programmes du collège utilisent ***une fois*** l'expression « ***propriété*** de Pythagore », ils utilisent ***en général*** – exactement : 7 fois – l'expression « ***théorème*** de Pythagore ». On le vérifiera sur l'inventaire qui suit, où l'on a réuni ***toutes*** les occurrences du mot ***théorème*** dans le fichier Programmes du collège.doc (hormis celles figurant dans le tableau synoptique de fin).
>
> ……………………………………………………………………………………………
>
> 2. Il est vrai, toutefois, que la tendance à parler de « propriété de Thalès » est un peu plus forte : on dénombre, dans le même fichier, 3 occurrences de « théorème de Thalès » pour… 4 occurrences de « propriété de Thalès ». Quoi qu'il en soit, il n'y a en fait ***aucun conflit*** entre le choix de « propriété » et celui de « théorème », mais une ***différence de signification*** qu'il est important d'entendre et de faire entendre. En vérité, le « jeu » langagier réunit ***trois*** termes, et non deux. Un objet mathématique possède certaines ***propriétés*** ; ces propriétés doivent être ***formulées*** ou ***énoncées*** : on obtient alors une ***formulation*** ou un ***énoncé*** de la propriété considérée. Un tel énoncé, exprimant une propriété qui aura été établie, éventuellement, de manière ***expérimentale***, pourra alors être ***démontré***, et deviendra ainsi un ***théorème*** de plein droit de la théorie (géométrique, algébrique, etc.) disponible – à moins qu'il n'y soit ***admis*** à titre de théorème ***sans démonstration***…

b) Voici maintenant une question typique des besoins de « mathématiques pour l'enseignant » que peut engendrer la rencontre avec les mathématiques à enseigner.

> Doit-on parler de l'intérieur d'un cercle ou d'un disque ? (AC, OS, 2$^{\text{de}}$, 16)

• Le mot « intérieur » peut être entendu de deux façons. La première est usuelle en topologie : de ce point de vue, un cercle est un ensemble fermé d'intérieur vide tandis que le disque de même rayon a un intérieur qui est le disque ouvert correspondant. Mais ce n'est pas là la « bonne » notion à utiliser.

• Un cercle, un carré, etc., divise leur complémentaire dans le plan en deux régions connexes par arcs et telle en outre qu'on ne puisse aller de l'une à l'autre (par un arc polygonal) sans couper le cercle, le carré, etc. L'une de ces régions est bornée : c'est l'intérieur ; l'autre est non bornée : c'est l'extérieur.

➔ Cette situation élémentaire peut être précisée mathématiquement. Étant donné des points A et B de $\mathbb{R}^2$, on appelle ***chemin*** d'origine A et d'extrémité B toute application ***continue*** f de $[0 ; 1]$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f(0) = A$ et $f(1) = B$; on appelle ***arc de Jordan*** toute application continue ***injective*** f de $[0 ; 1]$ dans $\mathbb{R}^2$. Si f est injective, la « courbe » $\mathcal{C} = f([0 ; 1])$ ne peut pas se couper : on dit qu'elle est ***simple***. Si $f(0) = f(1)$, on dit qu'elle est ***fermée***. Il est facile de vérifier qu'un cercle, un carré, un rectangle, un triangle sont des « courbes » fermées simples.

➔ D'une façon générale, on a le théorème suivant, dit ***théorème de Jordan***. Pour toute courbe fermée simple $\mathcal{C}$, il existe $\mathcal{I}$, $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{C}$ tels que 1) $\mathcal{I} \cap \mathcal{E} = \varnothing$ et $\mathcal{I} \cup \mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{C}$; 2) $\mathcal{I}$ et $\mathcal{E}$ sont l'un et l'autre connexes par arcs polygonaux ; 3) si $A \in \mathcal{I}$ et $B \in \mathcal{E}$, et si g est un chemin d'origine A et d'extrémité B, alors $g([0 ; 1])$ coupe $\mathcal{C}$; 4) la région $\mathcal{I}$ est bornée, la région $\mathcal{E}$ ne l'est pas. La région $\mathcal{I}$ est appelée l'***intérieur*** de $\mathcal{C}$, tandis que $\mathcal{E}$ est l'***extérieur*** de $\mathcal{C}$.

➔ À propos de ce théorème, dont l'énoncé est dû au mathématicien français Camille Jordan (1838-1922), H. B. Griffiths et P. J. Hilton écrivent ceci dans leur ouvrage déjà mentionné (séance 11), *A Comprehensive Textbook of Classical Mathematics. A Contemporary Interpretation*, p. 225.

Jordan seems to have been the first to point out that a proof was required to establish the seemingly obvious fact that a Jordan curve divides the plane into an 'inside' and an 'outside'. The fact is 'obvious' only for unsophisticated curves; it is not so obvious even for such a relatively simple one as that in Fig. 15.8. A full proof is fairly difficult and is called the 'Jordan curve theorem'…

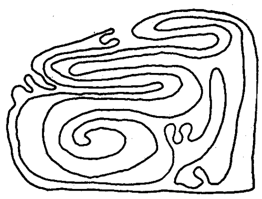


Fig. 15.8

➔ S'il faut connaître l'existence de ce résultat, il n'est pas scandaleux de s'en servir de façon intuitive avec les courbes polygonales et les cercles – comme l'ont fait longtemps tous les mathématiciens. (La première démonstration complète du théorème de Jordan date de 1905 : elle est due au mathématicien américain Oswald Veblen, 1880-1960).

c) On s'arrête maintenant sur une question qui a trait à un sujet mathématique déjà examiné.

Je vais bientôt aborder le chapitre sur les fractions avec mes élèves et je me souviens avoir vu, lors de ma propre 4^{e}, que pour trouver la fraction de 0,33…, il fallait mettre le chiffre qui se répète (la raison) au numérateur, et au dénominateur autant de 9 qu'il y a de chiffres au numérateur. Exemple : 0,33… = $\frac{3}{9}$ donc 0,33… = $\frac{1}{3}$; de même 0,128128128… = $\frac{128}{999}$. Je me rappelle avoir trouvé ça intéressant et, bien que ce soit hors programme, j'aimerais en parler à mes élèves, sachant que je ne pourrai pas les évaluer sur cette technique. Je pense que ça pourrait les intéresser. Dois-je donc aborder ce point ? (YB, MJ, 4^{e}, 16)

• Le type de tâches évoqué était classique dans l'enseignement secondaire ancien. Aujourd'hui, et sauf erreur, il n'apparaît qu'en ***terminale L***, dans le cadre de l'***enseignement de spécialité***, dont le programme précise que « les élèves doivent être capables, *sur des exemples*, de reconnaître un nombre dont la partie décimale est périodique à partir d'un certain rang comme un quotient d'entiers ». (On trouvera le programme à l'adresse suivante : ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2005/hs7/mathematiques.pdf.)

• Cela noté, rectifions le vocabulaire utilisé dans la question – qui marque qu'il y là un souvenir de collège non remanié ultérieurement (au plan mathématique). Le « chiffre qui se répète » s'appelle la ***période*** ; et la « fraction de 0,33… » est la fraction ***génératrice*** de 0,33… La technique indiquée dans la question – que l'on peut reformuler en disant que « pour trouver la fraction génératrice d'un développement décimal périodique ***pur***, on écrit la période au numérateur, et au dénominateur autant de 9 qu'il y a de chiffres au numérateur » – est en fait une ***recette***, tout à fait dépourvue de justification (autre que le fait de retrouver le développement donné au départ à partir de la fraction obtenue).

• Pour compléter ces remarques, on examine d'abord un extrait des notes du Séminaire 2003-2004, où le sujet des fractions génératrices est l'un des exemples illustratifs.

Rien qui ne soit déjà dans l'AER ?

Doit-on faire une activité d'étude et de recherche sur tous les points de la synthèse ? Quand faire les démonstrations des théorèmes du cours ? Dans la synthèse ou en activité ? (…, 2de, 5)

Matériaux pour une réponse

1. Une synthèse ne se borne pas à trier les matériaux surgis lors de l'AER qu'elle vise à synthétiser : l'activité de synthèse est souvent l'occasion de prendre conscience de certains manques, ambiguïtés et imperfections – que celles-ci concernent un type de tâches non dégagé, une technique insuffisante, une technologie fautive, etc. – dans le travail réalisé jusque-là.

2. Dans certains cas, le travail d'étude et de recherche qu'appelle cette prise de conscience peut tenir « dans la marge » du travail de synthèse : en ce cas, il y aura (un peu) plus dans la synthèse qu'il n'y avait dans l'AER. Cette remarque ne doit cependant pas être sollicitée pour s'autoriser à faire de la synthèse un exposé magistral qui introduise subrepticement des matériaux mathématiques entièrement neufs !

3. Dans d'autres cas, il ne faudra pas hésiter à revenir à l'activité d'étude et de recherche en ouvrant une ***AER auxiliaire***, qui permettra de compléter la synthèse.

① Revenons, à titre d'exemple, au TEL évoqué lors de la séance 6 : « Caractérisation des éléments de $\mathbb{D}$ et de $\mathbb{Q}$ ». On peut, au cours de la synthèse, s'apercevoir qu'un type de tâches a été oublié, qu'on peut énoncer ainsi :

T_{fg}. Étant donné un développement décimal, par exemple 0,35129129129…, trouver une fraction ***génératrice*** $\frac{a}{b}$, c'est-à-dire dont ce soit le développement décimal.

Ici, l'AER à accomplir devra permettre d'insérer dans la synthèse une technique τ_{fg} dont la mise en œuvre dans l'exemple mentionnée pourra prendre l'allure suivante :

Désignons par x le nombre donné par son développement décimal ; on a d'abord : $u = 100x - 35 = 0{,}129129129\ldots$ puis : $10^3u - 129 = u$. Il vient ainsi $999u = 129$ et donc $u = \frac{129}{999} = \frac{43}{333}$. D'où $x = \frac{u+35}{100} = \frac{43}{33300} + \frac{35\times 333}{33300} = \frac{11698}{33300} = \frac{5849}{16650}$. On a bien : $\frac{5849}{16650} = 0{,}35129129129\ldots$

② Lors de ce dernier épisode, on peut prendre conscience qu'on n'a pas, au plan ***technologique***, examiné nettement l'énoncé suivant :

θ. Le développement décimal d'un nombre rationnel est périodique.

Il faudra donc le faire, intégrer les résultats dans la synthèse, etc.

4. …

• À propos de la ***technologie*** du calcul de fractions génératrices, une ***importante lacune*** mérite d'être mise en évidence. L'écriture « $x = 0{,}267267\ldots$ » (par exemple) peut recevoir deux sens distincts.

➔ Soit cela signifie, conventionnellement, que x est une fraction d'entiers $\frac{a}{b}$ telle que la division de a par b engendre la suite de décimales 267267… On peut alors prouver – et pas seulement constater – que cette fraction peut être $\frac{267}{999} = \frac{89}{333}$; il resterait à prouver que cette fraction (et les fractions équivalentes, c'est-à-dire de même valeur) sont les seules qui engendrent la suite périodique de décimales considérée.

➔ Soit, dans le cadre d'une certaine ***théorie*** des nombres (réels), on suppose que toute suite de « décimales » définit un nombre x. C'est dans ce cadre que le programme de l'enseignement de spécialité en T[le] L semble implicitement se placer, puisqu'un commentaire dit ceci : « les irrationnels apparaissent ainsi comme les nombres dont le développement décimal illimité n'est pas périodique ». Tout nombre x aurait donc un « développement décimal illimité ».

• En supposant donc que l'on dispose d'une théorie des nombres réels qui permette de développer une théorie adéquate des développements décimaux, comment justifier le calcul de la fraction génératrice proposée dans l'encadré ci-dessus ?

➔ Formellement, on a $x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots$, où a_i est l'un des entiers de 0 à 9, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. En posant $\frac{a_i}{10^i} = \alpha_i$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

et le calcul donnant la fraction génératrice apparaît alors fondé sur l'égalité

$$\lambda x = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n + \ldots) = \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \lambda\alpha_3 + \ldots + \lambda\alpha_n + \ldots$$

ou encore $\lambda\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda\alpha_i$, soit la « distributivité de la multiplication par rapport à l'addition de sommes infinies », ce qui revient à disposer d'un théorème d'interversion de limites :

$$\lambda \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i.$$

Ainsi l'insuffisance technologico-théorique de l'organisation mathématique dont la mise en place est évoquée dans l'encadré n'est-elle nullement triviale.

➔ Existe-t-il une théorie « moyenne », adéquate, mais qui ne fasse pas appel aux raffinements de l'analyse réelle à une variable ? On se contentera ici de soulever la question – sur laquelle on reviendra.

c) Le programme de la classe de 2de semble receler bien des énigmes !

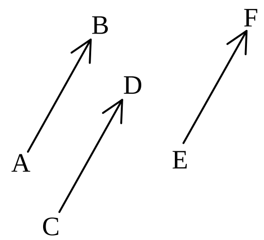
• Ainsi en va-t-il, semble-t-il, à propos des plus simples des fonctions.

> J'ai fait avec ma classe la partie du programme concernant les fonctions affines. J'ai évoqué pendant l'activité les notions de coefficient directeur et d'ordonnée à l'origine. Seulement deux élèves sur 35 ont compris de quoi je parlais. Ma PCP ayant assisté à la séance m'a demandé si c'était au programme de 2de et même de 3e. J'ai vérifié et, en effet, il n'en est fait mention nulle part. Pourtant les manuels l'évoquent. Peut-on quand même en parler ? Et même faut-il en parler ? (VAC, MJ, 2de, 16)

L'extrait ci-après du programme de 3e règle la question et montre en outre que la lecture des programmes évoquée dans la question est fautive. (La recherche de « coeff » dans le fichier des programmes du collège permet d'arriver en quelques clics au passage ci-après.)

> **Programme de 3e (extrait)**
>
> **Contenus**
>
> Fonction affine
>
> **Compétences exigibles**
>
> Connaître la notation $x \mapsto ax + b$ pour des valeurs de deux nombres et de leurs images. […]
>
> **Commentaires**
>
> … On interprétera graphiquement le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b…

• La question des vecteurs semble également problématique. On s'arrête d'abord sur la question que voici, qui a trait en fait à la classe de 3e.

> Peut-on parler à des élèves de 3e de la notion de « représentant d'un vecteur » dans l'étude du thème « Vecteurs et translations » ? Si oui, suffirait-il de l'illustrer à travers un exemple d'égalité vectorielle sans vraiment rentrer dans les détails ?
>
> $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont égaux ;
> ils sont les représentants
> d'un même vecteur.
>
> 
>
>
> (WT, MJ, 3e, 16)

➔ Le programme de 3e comporte ce commentaire.

Cette rubrique […] est orientée vers la reconnaissance, dans les couples (A, A’), (B, B’), (C, C’)… de points homologues par une même translation, d’un même objet nommé vecteur. On écrira $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$…
L’un des objectifs est que les élèves se représentent un vecteur à partir d’une direction, d’un sens et d’une longueur.

Le « même objet nommé vecteur », $\vec{u}$, se « reconnaît » donc dans chacun des couples (A, A’), (B, B’), (C, C’), etc. : on le note donc aussi $\overrightarrow{AA'}$, ou $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, etc. ; c’est-à-dire que l’on a : $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \ldots$ Le couple (A, A’) peut-il être appelé un « représentant » du vecteur $\overrightarrow{AA'}$? Parmi les compétences exigibles du programme de 3^{e} figure par exemple ce type de tâches.

Construire un représentant du vecteur somme à l’aide d’un parallélogramme.

Ou encore celui-ci.

Calculer les coordonnées d’un vecteur connaissant les coordonnées des extrémités de l’un quelconque de ses représentants.

➔ Ce dernier extrait du programme rappelle implicitement qu’un vecteur ***n’a pas d’extrémités***, alors que chacun de ses ***représentants*** a une origine et une extrémité ! On observera à cet égard que le passage suivant de la question examinée est fautif.

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont égaux ; ils sont les représentants d’un même vecteur.

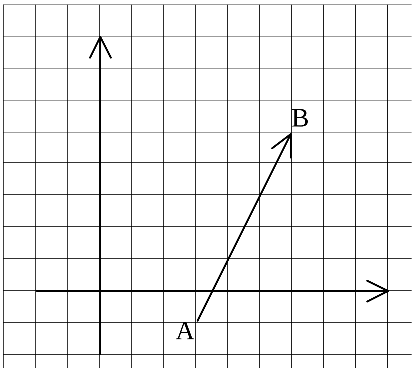
Il devrait être écrit ainsi (par exemple).

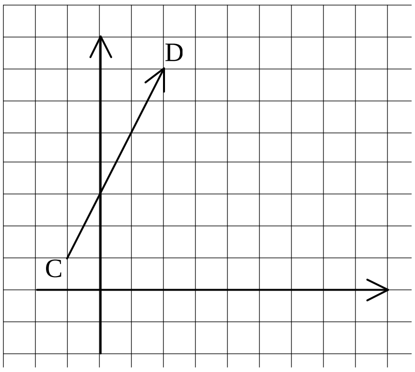
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont égaux ; les couples (A, B), (C, D) et (E, F) sont les représentants d’un même vecteur [$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$].

➔ Deux types de tâches sont ici essentiels à pratiquer. Le premier a été rencontré plus haut ; rappelons-le.

Calculer les coordonnées d’un vecteur connaissant les coordonnées des extrémités de l’un quelconque de ses représentants.

Le vecteur $\vec{u}$ dont un représentant est le couple (A, B), avec A de coordonnées (3 ; –1) et B de coordonnées (6 ; 5), a pour coordonnées (3 ; 6) : voir la figure ci-dessous à gauche. On notera que les coordonnées des extrémités A et B ont disparu « dans » les coordonnées du vecteur $\vec{u}$: si l’on ne connaît que les coordonnées de $\vec{u}$, il est impossible de les reconstituer.





Le second type de tâches est implicite dans la formulation suivante.

Représenter, dans le plan muni d'un repère, un vecteur dont on donne les coordonnées.

« Représenter », cela veut dire, ici, dessiner un « représentant ». Pour cela, il faut se donner un point C par ses coordonnées, par exemple (–1 ; 1), et calculer alors les coordonnées de D tel que $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$. Si $\vec{u}$ a pour coordonnées, disons, (3 ; 6), alors B aura pour coordonnées (–1 + 3 ; 1 + 6) = (2 ; 7) : voir la figure ci-dessus à droite. La pratique de ***l'un et l'autre*** type de tâches est essentielle pour une maîtrise opérationnelle du jeu conceptuel entre vecteur et représentant(s) d'un vecteur.

• On examine maintenant une autre difficulté, signalée par plusieurs participantes.

1. Je commence à préparer la séquence sur le thème « Repérage du plan et vecteurs ». Dans le document d'accompagnement, il est indiqué : « On définira la multiplication d'un vecteur par un réel indépendamment du repérage… » Il me semble que l'introduction de cette notion a justement pour objectif de l'utiliser dans le cadre de la géométrie analytique et donc dans le repérage des points du plan. Comment comprendre alors le passage cité ci-dessus ? (MB, CR, 2^{de}, 11)

2. Au programme de la classe de seconde, il y a un chapitre sur les vecteurs. Je n'arrive pas à savoir s'il faut privilégier la partie vectorielle ou la partie analytique, ou bien traiter les deux de manière équivalente. (PV, MJ, 2^{de}, 15)

3. Que signifie la phrase « On utilisera le calcul vectoriel pour *justifier* le calcul de coordonnées » ? (ALP, CR, 2^{de}, 16)

➔ Pour tirer les choses au clair, on reprend d'abord un développement contenu dans les notes de la séance 14 du Séminaire 2000-2001. On observera en particulier que, tout du long, il n'est ***nullement*** question de coordonnées (dans un certain repère).

– On suppose ici une certaine TGD dans le cadre de laquelle on veut construire les vecteurs du plan. Le premier problème consiste à définir une relation d'équivalence entre « bipoints » du plan, c'est-à-dire entre couples de points.

– Si l'on ignore la translation, on peut vouloir définir l'« équipollence » par :

$$(A, B) \sim (C, D) \Leftrightarrow \text{ABDC parallélogramme.}$$

Cette définition présente toutefois une difficulté lorsque A, B, C, D sont alignés : qu'est-ce au juste qu'un parallélogramme « aplati » ?

• On peut régler ce problème en remplaçant l'énoncé précédent par :

$$(A,B) \sim (C,D) \Leftrightarrow \text{il existe E et F tels que ABFE \& DCFE sont des parallélogrammes}$$

• On peut aussi utiliser la définition suivante : $(A,B) \sim (C,D) \Leftrightarrow$ [AD] et [BC] ont même milieu.

– Le programme de 3^e incite toutefois à introduire les vecteurs ***à partir de la translation***, non sans demander de lier cette définition avec celle qui se formule en termes de parallélogramme éventuellement aplati :

…

• On posera donc : $(A, B) \sim (C, D) \Leftrightarrow$ la translation $t_{A \mapsto B}$ transforme C en D.

• Toutefois, le programme de 3^e demande en outre d'établir l'équivalence de ce point de vue avec les points de vue précédemment évoqués :

« On mettra en évidence la caractérisation d'une égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ à l'aide des milieux de [AD] et [BC] :
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.

Si les segments [AD] et [BC] ont le même milieu, alors on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. »

• En outre, il conviendra de justifier un point de vue en apparence plus « naïf », dont le même programme souligne l'importance :

« L'un des objectifs est que les élèves se représentent un vecteur à partir d'une direction, d'un sens et d'une longueur. »

– On a donc ici un ***premier problème à étudier***, Π_1 : problème de « mise en ordre déductif » dans le cadre de la TGD des différentes expressions envisageables de l'équipollence de deux « bipoints ».

– ***Supposant Π_1 résolu***, désignons par #ABCD l'une quelconque des expressions utilisables pour définir l'équipollence de (A, B) et (C, D). Pour avancer à partir de là, supposons en outre ***que l'on a résolu le problème Π_2*** consistant à établir que l'on a :

$\vdash_{TGD}$ Si #ABCD alors #ACBD [V_1]

$\vdash_{TGD}$ Si #ABCD alors #CDAB [V_2]

$\vdash_{TGD}$ Si #ABCD et #CDEF alors #ABEF [V_3]

$\vdash_{TGD}$ Quels que soient les points A, B, C, il existe un unique point D tel que #ABCD [V_4]

– Montrons alors que la relation d'équipollence est une relation d'***équivalence***.

• La relation est d'abord ***symétrique*** : d'après V_2, si (A, B) ~ (C, D), c'est-à-dire si #ABCD, alors #CDAB, soit (C, D) ~ (A, B).

• La relation est ***transitive*** : d'après V_3, si (A, B) ~ (C, D) et (C, D) ~ (E, F), c'est-à-dire si #ABCD et #CDEF, alors #ABEF, soit (A, B) ~ (E, F).

• La relation est ***réflexive*** : soit A et B deux points donnés, C un point quelconque, et soit alors D, d'après V_4, le point tel que #ABCD ; d'après V_2 on a #CDAB, en sorte que, d'après V_3, il vient enfin #ABAB, soit (A, B) ~ (A, B).

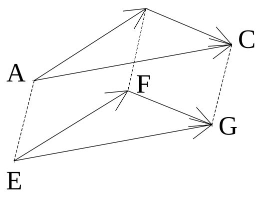
– Un ***vecteur*** peut dès lors être défini, formellement, comme une ***classe d'équivalence de couples de points***, la classe d'équivalence du couple (A, B) étant notée $\overrightarrow{AB}$. Si X désigne le plan, l'ensemble $\overrightarrow{X}$ des vecteurs vérifie : $\overrightarrow{X} = X/\sim$. Cette définition « abstraite » doit évidemment être remplacée, en 3^e^ comme en 2^de^, par la définition « concrète » en termes de direction, sens et longueur : problème qu'on laisse ici de côté.

– On peut maintenant envisager de définir la ***somme*** de deux vecteurs.

• Montrons d'abord que, étant donné un vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{X}$ et un point A, ***il existe un unique point* B *tel que*** $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \vec{\mathbf{u}}$. Soit en effet un couple (C, D) tel que $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$; l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ équivaut alors au fait que #CDAB : en vertu de V_4, B existe et est unique.

• Soit $\vec{u}$, $\vec{v} \in \overrightarrow{X}$ et soit A un point. D'après ce qui précède, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. De même, il existe alors un unique point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. On souhaite poser $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$: il suffit pour cela de démontrer que $\overrightarrow{AC}$ est ***indépendant du choix de* A**.

• Soit E, F, G tels que $\overrightarrow{EF} = \vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FG} = \vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Montrons que l'on a alors $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$, soit (E, G) ~ (A, C).



On a en effet #EFAB et #FGBC. D'après V_1, on en déduit #EAFB et #FBGC (par « permutation des moyens »). D'après V_3 il vient ainsi #EAGC, et, par une nouvelle application de V_1, #EGAC, soit (E, G) ~ (A, C).

– Il conviendrait alors de vérifier que l'addition ainsi définie sur $\overrightarrow{X}$ possède bien les propriétés usuelles (associativité, commutativité, etc.).

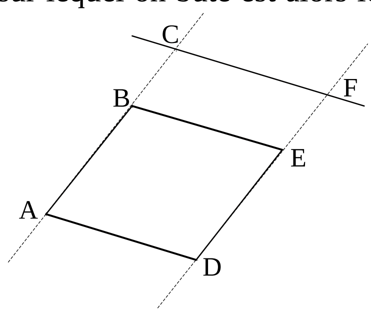
• Montrons par exemple ***l'existence d'un élément neutre***. Soit A un point ; notons $\vec{0}$ le vecteur $\overrightarrow{AA}$. Soit B un point quelconque et soit, d'après V_4, C l'unique point tel que #AABC. D'après V_1, on a #ABAC, en sorte que, d'après la propriété d'unicité démontrée plus haut, C = B. Inversement, on a #ABAB et donc (d'après V_1) #AABB, soit $\overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Ainsi $\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ si et seulement si B = C.

• Soit $\vec{u} \in \vec{X}$, $A \in X$, et soit B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On a alors $\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On montre de même que $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$. Le vecteur $\vec{0}$ est donc l'élément neutre de l'addition vectorielle.

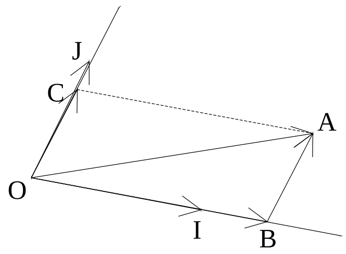
• On peut alors vérifier que pour chaque vecteur $\vec{u}$ il existe un vecteur opposé, noté $-\vec{u}$: si $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, on a en effet $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. On a ainsi $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, et donc $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

– L'étude mathématique que l'on vient d'esquisser devrait évidemment se poursuivre avec, notamment, la définition du ***produit d'un vecteur par un scalaire*** et la vérification des propriétés usuelles de ce produit. Mais l'ébauche précédente suffit à donner du crédit à l'idée selon laquelle les assertions V_1 à V_4 pourraient constituer une axiomatique des espaces affines, ou du moins une partie importante d'une telle axiomatique.

➔ Comment définir le vecteur $\vec{v}$ produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un scalaire λ ? Ce qui engendre la notion est le souhait d'exprimer « vectoriellement » $\overrightarrow{AC}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ lorsque A, B, C sont des points alignés. Étant donné trois points A, B, C ***alignés***, avec $A \neq B$, et un réel λ, posons que $\lambda\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, où, si $\lambda \geq 0$, C est le point de [AB) tel que $AC = \lambda\,AB$, et si $\lambda \leq 0$, C est le point de la demi-droite opposée à [AB) tel que $AC = \lambda\,AB$. (On notera que λ ne dépend pas du choix de l'unité de longueur dans le plan.) Le problème sur lequel on bute est alors le suivant : si D, E et F sont des points tels $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}$ et si F est défini par rapport à $\overrightarrow{DE}$ (et λ) comme l'est C par rapport à $\overrightarrow{AB}$, a-t-on bien, comme il convient, $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC}$? Considérons la figure ci-après, où $DF = \lambda\,DE$; comme DE = AB, on a $DF = \lambda\,AB = AC$. Le quadrilatère ACFD est convexe et a deux côtés opposés parallèles et de même longueur (à savoir [AC] et [DF]) : c'est donc un parallélogramme. Par suite, $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC}$, CQFD.



➔ Une fois réalisé le travail évoqué jusqu'ici (et les travaux complémentaires pour montrer que $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$, etc.), on établira l'expression analytique des diverses opérations vectorielles. Le point de départ est le suivant. Supposons choisi un repère (O, I, J) dans le plan, et soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Il existe un point A unique tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$; on définit les points B et C comme sur la figure ci-contre, en sorte qu'on a : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Par ailleurs, comme B est sur (OI), il existe un nombre x tel que $\overrightarrow{OB} = x\,\overrightarrow{OI}$; de même il existe y tel que $\overrightarrow{OC} = y\,\overrightarrow{OJ}$. On a ainsi : $\vec{u} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}$; soit, en posant $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.



➔ Telle est la « logique », extrêmement classique, de la construction poussée en avant par le programme de 2^de^ : on construit d'abord les vecteurs du plan et les opérations vectorielles ; on en établit ***alors*** l'expression analytique dans un repère donné. En 2^de^, seule l'opération de multiplication d'un vecteur par un réel est nouvelle. Selon le programme, on utilisera très peu le calcul vectoriel lui-même ; il sera seulement un outil pour 1) faciliter le repérage des points ; 2) justifier le calcul de coordonnées ; 3) un repère étant fixé, exprimer analytiquement la colinéarité de deux vecteurs ou l'alignement de trois points. Ce point sera illustré ci-après.

1.4. Mathématiques pour l'enseignement

a) Les mathématiques ***pour l'enseignement*** sont les mathématiques utiles pour concevoir et réaliser un enseignement relatif à des contenus mathématiques à enseigner. Les mathématiques pour l'enseignement sont évidemment des mathématiques pour l'enseignant. Mais la réciproque n'est pas toujours vraie, comme l'illustre par exemple la réponse donnée plus haut à la question relative à l'intérieur d'un cercle.

b) On prendra ici, d'abord, le cas explicité par les questions que voici.

1. À la rentrée des vacances de Noël, je compte commencer l'étude du thème « Repérage dans le plan ». Après avoir lu le programme, je ne comprends pas ce qu'est le type de tâches « interpréter les cartes et les plans ». Est-ce qu'on pourrait expliciter ce type de tâches ? (ML, MJ, 2de, 11)

2. Comment peut-on aborder la notion de repérage en classe de seconde ? (MBP, OS, 2de, 14)

3. En 2de, quel travail doit-on mener avec les élèves sur l'interprétation des cartes et des plans ? (CS2, OS, 2de, 16)

4. Je ne comprends pas ce qui, dans le chapitre « Repérage et vecteurs », doit être traité en premier : repérage, ou multiplication d'un vecteur, puisqu'il est dit que le calcul vectoriel justifiera le calcul avec les coordonnées, qu'on l'appliquera à la géométrie analytique et qu'il facilitera le repérage. (ALP, CR, 2de, 16)

• Que dit donc le programme de 2de à propos du thème évoqué ? Voici.

Contenus

Repérage dans le plan.

Capacités attendues

Repérer des points d'un plan, des cases d'un réseau carré ou rectangulaire ; interpréter les cartes et les plans.

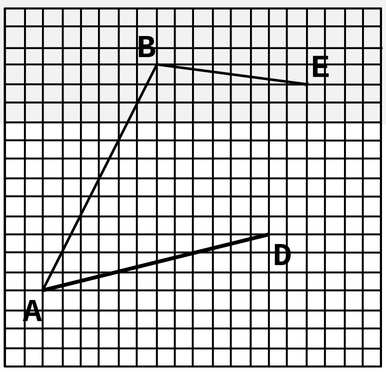
Commentaires

On pourra réfléchir aux avantages des divers types de repérage. On évoquera, en comparant les repérages sur la droite, dans le plan (voire sur la sphère ou dans l'espace), la notion de dimension.

➔ La principale source de perplexité, c'est évidemment le fait que la culture mathématique courante ne reconnaît pas, dans les objets que sont les cartes et les plans, et dans leurs usages les plus habituels, matière à faire des mathématiques !

➔ Voici un exemple qui se rapproche (volontairement) de la culture mathématique ordinaire : il est extrait des *Archives du Séminaire*, où on le rencontre en plusieurs occasions.

« Par rapport à un repère à préciser, repérer le point C où se coupent les demi-droites]AD) et]BE) sur le quadrillage ci-dessous. Ce point est-il un nœud du quadrillage ? À quelle distance se situe-t-il du bord [droit] du quadrillage ? »



➲ Soit k et ℓ tel que $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC} = \ell\,\overrightarrow{BE}$. On a par ailleurs $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \ell\,\overrightarrow{BE}$. Par rapport au repère d'origine A du quadrillage, les coordonnées (x, y) de $\overrightarrow{AC}$ s'écrivent donc, d'une part $x = 12k$, $y = 3k$, d'autre part $x = 6 + 8\ell$, $y = 12 - \ell$. On a ainsi le système

$$\begin{cases} 12k - 8\ell = 6 \\ 3k + \ell = 12 \end{cases}$$

➲ Sa résolution fournit $k = \frac{102}{36} = \frac{17}{6}$ et $\ell = \frac{7}{2}$. Les coordonnées de C sont donc $x = 12k = 34$ et $y = 3k = \frac{17}{2} = 8{,}5$. (On vérifie les valeurs trouvées à l'aide des expressions en ℓ : $x = 6 + 8\ell = 6 + 8\times\frac{7}{2} = 6 + 28 = 34$; $y = 12 - \ell = 12 - \frac{7}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5$.)

➲ Le point C n'est donc pas un point du quadrillage. La verticale de A étant à 18 unités du bord du quadrillage, le point C est à 34–18 = 26 unités du bord.

• Le document d'accompagnement du programme de 2[de] comporte le passage suivant.

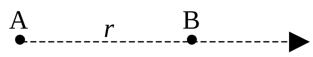
Repères et vecteurs

Le programme met nettement l'accent sur la notion de repérage : on a voulu assurer à l'ensemble des élèves, quelle que soit leur orientation ultérieure, la maîtrise indispensable en ce domaine qu'exigent aussi bien l'interprétation de plans et de cartes que l'utilisation de tableurs ou la compréhension des représentations graphiques.

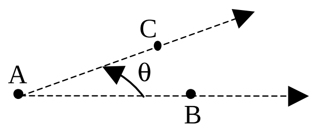
➔ On trouve à ce propos, dans les *Archives du Séminaire*, le développement que voici.

Il est donc clair que la notion « générale » de ***repérage*** se voit allouer une place non négligeable dans l'actuel programme de 2[de]. Il s'agit là d'une notion qui permet de ***repenser*** tout un ensemble de « gestes » géométriques plus traditionnels, qu'on peut en fait regarder comme participant du repérage.

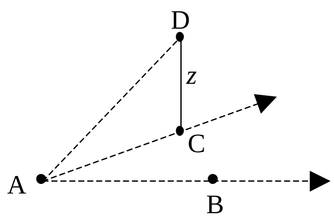
① Ainsi, déterminer la distance r de deux points A et B dans un espace plan, c'est (par exemple) repérer le point B par rapport au système de coordonnées polaires dont le pôle est A, et dont l'axe est la droite (AB) orientée de A vers B.



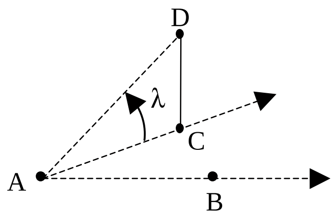
② Déterminer un angle $\widehat{ABC}$, c'est repérer la seconde coordonnée du point C dans le système de coordonnées polaires identique au précédent.



③ De même encore, repérer la hauteur d'un point D c'est repérer D (par exemple) dans le système de coordonnées cylindriques issu du système de coordonnées polaires indiqué plus haut.



④ Dans le cas précédent, la détermination de l'angle $\widehat{CAD}$ permettrait le repérage de D dans le système de coordonnées sphériques associé au système de coordonnées polaires indiqué.



➔ Le passage que voici suit le développement ci-dessus et permet de mieux comprendre ce qui semble intriguer si fort certains, le fait que le repérage vienne ***avant*** les vecteurs et que les vecteurs soient un outil par excellence du repérage.

– Cette logique des programmes reprend l'ordre historique : les vecteurs apparaissent tardivement, et sont d'abord un moyen de « repérage ».

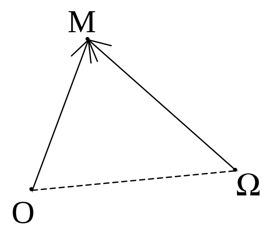
① Les manuels d'il y a un demi-siècle appelaient d'ailleurs ***repère d'un point*** M par rapport à une origine O le vecteur $\overrightarrow{OM}$, en soulignant la bijection entre points du plan et vecteurs. On établissait alors le théorème fondamental suivant :

« Un vecteur [= bipoint] est égal au repère de son extrémité diminué du repère de son origine »

En d'autres termes, on disposait dès lors de l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, qui s'écrit encore $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ (« relation de Chasles »).

② La technologie des vecteurs permet la création de ***techniques d'une puissance redoutable***.

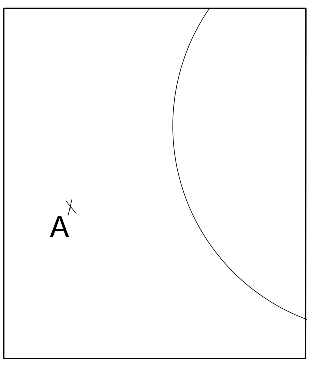
❶ Soit un repère cartésien d'origine O (où se trouve un certain observateur).
On a repéré un point par ses coordonnées (x, y).
On voudrait connaître ses coordonnées
par rapport à un autre observateur, situé en Ω.
Pour cela, on détermine le « repère de M » par rapport
à Ω : $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O\Omega}$. Si Ω a pour coordonnées (ξ, ζ),
les coordonnées de M par rapport à Ω sont (x – ξ, y – ζ).



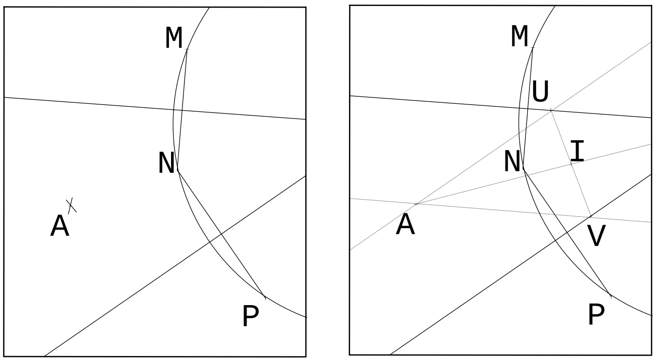
➔ L'idée de repérage conduit à « relire » en termes de repérage des types de tâches connus. Voici de cela un exemple.

③ La technologie vectorielle ne constitue pas, bien entendu, le seul outil de repérage à utiliser. À titre d'illustration, considérons le problème suivant :

Sur une feuille de papier, on a marqué un point A et un arc de cercle γ dont le centre O tombe hors de la feuille ; on veut déterminer graphiquement la distance de A à O.



❶ On marque trois points M, N, P sur l'arc de cercle, et on trace les médiatrices d_1 et d_2 de [MN] et [NP], qui se coupent (hors de la feuille) en O.



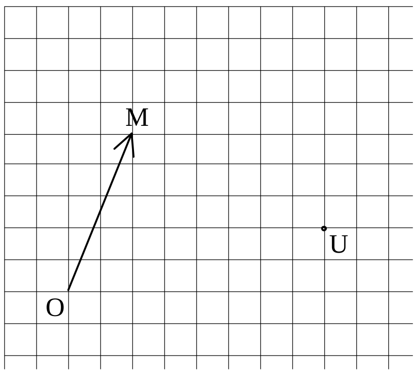
❷ On est alors ramené à un problème plus classique : le parallélogramme de sommet A appuyé sur les médiatrices d_1 et d_2 a pour diagonale [AO], et on peut alors construire la demi-diagonale [AI], qui fournit la solution (…).

❸ La construction proposée conduit en fait à repérer le point O à partir de A en repérant sa ***direction***, soit la demi-droite [AO), puis en déterminant la ***distance*** AO. Si l'on choisit une demi-droite [A*x*) d'origine A, et si l'on repère la demi-droite [AO) par l'angle $\widehat{xAO}$, le point O est repéré par deux nombres, la mesure en radian $\theta \in [0, 2\pi[$ de l'angle $\widehat{xAO}$, et la distance ρ = AO.

• Le thème du repérage, des cartes et des plans constitue un ***élément de diversification*** de l'enseignement prodigué. Il est donc important de dégager des types de tâches qui peuvent raisonnablement être associés à ce thème. On se limitera ici à deux exemples.

➔ On s'inspire d'abord d'une situation rencontrée plus haut pour proposer le problème suivant.

Dans un repère d'origine O lié à un quadrillage, un point M a pour coordonnées (2 ; 5) : pour aller de O à M, on se déplace de 2 vers la droite et on monte de 5.
1. Un observateur se trouve au point S de coordonnées (8 ; 2). Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{UM}$? En déduire par quel déplacement horizontal puis vertical on peut aller de U à M.



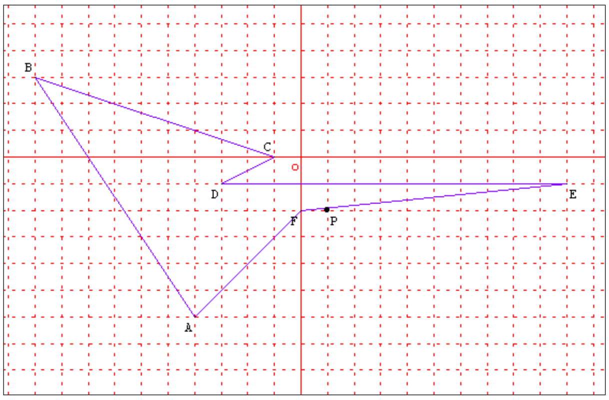
2. Même question pour le point V de coordonnées (34 ; 19).

La seconde question ne permet plus une stratégie de décompte « manuel » : le recours au calcul vectoriel le plus élémentaire est alors le bienvenu : le vecteur $\overrightarrow{VM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OV}$ a pour coordonnées (2 – 34 ; 5 – 19) = (–32 ; –14). Pour aller en M, l'observateur situé en V doit aller vers la gauche de 34 et vers le bas de 14.

➔ Le problème ci-après est, lui, inspiré, par les considérations faites plus haut sur l'intérieur et l'extérieur d'une courbe fermée simple.

Le nouveau propriétaire d'un terrain y installe une cabane pour ranger des outils. Rapporté à un certain repère, le cabane est sise au point P de coordonnées (1 ; –2). Un voisin vient lui dire qu'il a en fait installé la cabane hors de son terrain ! Le nouveau propriétaire est persuadé du contraire. Tous deux se réfèrent au cadastre : le terrain est délimité par une ligne polygonale joignant les points A (–4 ; –6), B (–10 ; 3), C (–1 ; 0), D (–3 ; –1), E (10 ; –1), F (0 ; –2). Qui des deux a raison ?

Le travail permettant de régler le litige évoqué peut être fait à la main sur du papier quadrillé ordinaire. La vérification, elle, pourra se faire à l'aide d'un logiciel auquel on demandera de tracer le polygone de sommets A, B, C, D, E, F (voir ci-après, avec Géoplan).



2. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques

2.1. Une nouvelle notice

a) Une nouvelle notice est mise à l'étude : ***Évaluation & notation – Aspects didactiques***. Pour des raisons pratiques, une version imprimée n'en sera diffusée qu'ultérieurement.

b) Cette notice sera suivie ultérieurement d'une seconde notice traitant des « Aspects institutionnels et historiques ».

2.2. Entrée en matière

a) On examine les deux premières sections de la notice. La première section précise le sens des mots « évaluer », « évaluation ».

1. L'illusion de la mesure et la notion de « valeur pour… »

1.1. Le verbe « évaluer » porte en lui deux éléments sémantiques intimement mêlés, qui l'un et l'autre importent à son emploi moderne, tel qu'on tentera d'en préciser le bon usage ici. Le *Dictionnaire historique de la langue française* (1993) indique à ce propos :

Évaluer (…) s'emploie à partir du XIV^e^ s. avec le sens de « déterminer la valeur, le prix de (qqch.) » qu'il a conservé. Par extension, il signifie « fixer approximativement » (une quantité, une distance, etc.) ou « estimer » (les qualités, les chances d'une personne, fin XVIII^e^ s.). Il se dit (1870) pour « déterminer (une quantité) par le calcul ».

1.2. Écartant l'usage *mathématique* (évaluer l'expression $x^2 y$ lorsque $x = 1{,}2$ et $y = 2{,}7$, par exemple), soulignons d'abord la nuance d'imprécision qui nimbe l'idée d'évaluer : évaluer, c'est *estimer*. L'évaluation n'est pas une *mesure*, et cela même quand il s'agira, par exemple lors d'un conseil de classe, d'évaluer – d'attribuer une valeur – à une note chiffrée résultant d'un certain procédé de construction arithmétique, tel le calcul de la moyenne trimestrielle en telle discipline. La supposée « vraie note » poursuivie par les docimologues anciens [1. Voir la notice *Évaluation & notation – Aspects institutionnels et historiques*.] n'est que le fruit illusoire de la projection sur les pratiques scolaires de notation du modèle gaussien des erreurs de mesure – où l'on ne doute pas qu'il existe une distance *réelle*, un angle *vrai* que les opérations de l'astronome ou du géodésien cernent au mieux sans pouvoir l'atteindre à coup sûr, et qu'il s'agit alors de dégager, par valeurs approchées, de la série des mesures relevées.

1.3. L'élément de sens déterminant se trouve pourtant dans l'idée de *valeur* : évaluer, c'est estimer *la valeur*. On bute ici, au vrai, sur un premier obstacle que portent en elles les praxéologies courantes de l'évaluation : comme la « note vraie », *la* valeur n'existe pas. Une entité matérielle ou immatérielle n'a de valeur que par rapport à un *projet* individuel ou collectif. Que l'on songe à ces « évaluations » auxquelles on procède sans cesse dans la vie quotidienne : un instant de réflexion montre qu'elles sont contemporaines d'une mise en relation implicite avec un ou plusieurs usages sociaux supposés, qui en général demeurent flous, à peine esquissés, voire n'osent pas s'avouer comme tels, et dont l'« évaluateur » se situe souvent, de façon imaginaire, comme partie prenante. « La » valeur, en effet, c'est la valeur *pour* – pour réaliser un certain projet, actuel ou potentiel, dont la réalisation est en cours ou est envisagée pour plus tard et n'adviendra peut-être jamais. La valeur d'une « copie » d'élève, par exemple, ce sera donc sa valeur pour un certain projet individuel et/ou collectif – point de vue qui éloigne définitivement de l'aporie de la « vraie note », et que l'on s'efforcera d'expliciter dans les développements qui suivent.

b) La deuxième section précise le schéma par rapport auquel il convient de situer tout acte d'évaluation.

2. Un schéma fondateur et sa portée

2.1. Le schéma essentiel est le suivant : le projet de base est celui d'apporter une réponse R à une question Q, situation qu'on peut décrire par la « formule » $S(X, Y ; Q) \rightarrowtail R$, où X est le collectif (éventuellement réduit à un individu) qui s'efforce d'élaborer la réponse R avec l'aide (et éventuellement sous la direction) du collectif Y (éventuellement réduit à un individu, s'il n'est pas vide). Par rapport à cette situation génératrice, l'évaluation trouve son lieu et son temps à deux niveaux. Le premier niveau est celui du rapport aux œuvres de la culture (mathématique et autre) que l'on connaît ou que l'on peut connaître, préalablement à la construction de R. Il arrive fréquemment, en effet, que l'enquête suscitée par le projet d'étudier Q révèle presque immédiatement l'existence, dans l'environnement institutionnel « proche », de réponses toutes faites, notées $R^{\Diamond}$ (« R poinçon »), en quelque sorte « estampillées » par une institution ou une autre (d'où leur notation), et à partir desquelles on s'efforcera de bâtir la réponse souhaitée, $R^{\heartsuit}$, réponse satisfaisant à *certaines contraintes* que l'on s'impose et/ou qui s'imposent – du fait, par exemple, du « programme d'études », P, propre au système didactique $S(X, Y ; P)$.

2.2. En ce premier niveau, cinq « gestes » sont à accomplir : il faut *observer* les réponses $R^{\Diamond}$, *analyser* ces réponses $R^{\Diamond}$, les *évaluer*, puis *développer* la réponse $R^{\heartsuit}$, qu'on sera ensuite amené à *diffuser & défendre*. Chacun de ces « gestes » appellerait d'assez longs commentaires. L'observation de réponses allogènes $R^{\Diamond}$, ainsi, est classiquement exclue du *topos* de l'élève dans la classe – du moins dans la classe de mathématiques. C'est au professeur, en effet, qu'il échoit de préparer – hors de la classe – la réponse $R^{\heartsuit}$ qui sera mise en place, et c'est donc lui qui est amené à *observer* les réponses $R^{\Diamond}$, à les *analyser*, à les *évaluer*, c'est-à-dire à reconnaître ce qui, en elles, pourrait bien avoir quelque *valeur* relativement à son projet de production d'une réponse $R^{\heartsuit}$ pour la classe. La mise en place subséquente, dans la classe, de la réponse $R^{\heartsuit}$ ainsi pré-produite par le professeur n'ouvre aux élèves qu'un *topos* limité, que la pratique des activités d'étude et de recherche (AER) enrichit pourtant sur des points essentiels, notamment lorsque la mobilisation et l'exploitation de « milieux » adéquats à l'étude poursuivie est confiée à la classe, et non décidée à l'avance par le professeur seul.

2.3. Lorsque, par contraste, le *topos* des élèves s'élargit à la recherche et à l'étude de réponses $R^{\Diamond}$, on bute alors, faute d'une culture didactico-mathématique adéquate, sur différents problèmes également cruciaux.

Outre l'*analyse* de $R^\lozenge$, qui ne va nullement de soi, on ne saurait trop souligner la difficulté – liée notamment à la nouveauté du geste, mais pas seulement – d'*évaluer* $R^\lozenge$ dans la perspective de la conception et de la construction de $R^\heartsuit$. Une telle évaluation, en effet, suppose souvent, en tout premier lieu, une *valorisation* de la réponse $R^\lozenge$ regardée comme au service de l'élaboration de $R^\heartsuit$.

2.4. Le schéma rappelé est, on l'a dit, générique. Il régit notamment les situations de classe les plus communes : le professeur a proposé – peut-être à la suggestion d'élèves, ou en s'inspirant de leurs questionnements – la recherche d'un *problème*, qui se ramène, élémentairement, à l'étude d'une question Q. Individuellement ou en équipes, les élèves apportent leur contribution à l'effort collectif entrepris en faisant connaître des réponses $R^\lozenge$, ou des fragments de telles réponses. La première exigence, ici, est d'analyser ces réponses et, sur cette base, d'en tenter la valorisation – avant toute évaluation proprement dite – dans la perspective d'élaboration d'une réponse $R^\heartsuit$ *de la classe* (laquelle s'identifie grosso modo, dans l'organisation traditionnelle du travail de la classe, à la réponse qui sera explicitée dans le *corrigé* du problème proposé). C'est alors que la culture didactique de la classe est soumise à une double épreuve : celle d'être capable de produire *d'abord* une analyse suffisante des réponses $R^\lozenge$; celle, corrélative, de différer l'évaluation *proprement dite* de ces réponses, alors même que la culture scolaire dominante tend à amalgamer une ébauche d'analyse avec une parodie d'évaluation en un verdict brutal – que celui-ci approuve ou écarte.

2.5. Contre le réflexe qu'on vient d'évoquer – trancher quant à la valeur de telle ou telle proposition de réponse –, on s'emploiera à respecter cette ascèse que les anciens Grecs nommaient *epochè*, ou *suspension de jugement*. Selon une formulation fameuse de Spinoza (1632-1677) dans son *Traité politique* (1670), il faut « ne pas railler, ne pas déplorer ni maudire, mais comprendre » (*non ridere, non lugere, neque detestari, sed intellegere*). L'évaluation doit venir *à son heure*, en créant de judicieuses relances, au double plan individuel et collectif, dans le processus d'étude. L'ascèse de l'*epochè* et la dialectique subtile entre suspension de jugement et verdict évaluatif sont de mise en particulier lorsqu'un élève x va « au tableau » défendre et illustrer sa réponse R_x (ou celle de l'équipe dont il est membre). En un tel cas, qui fait le quotidien de la vie et du travail en classe, la classe va, sous la direction du professeur, observer la réponse R_x, l'analyser, et *enfin* l'évaluer, en la regardant comme une réponse $R^\lozenge$ dont *pourrait* se nourrir la construction de la réponse $R^\heartsuit$ qui doit être « développée » par la classe. On notera ici que, non seulement l'évaluation *n'est pas première*, mais qu'elle portera prioritairement *sur* R_x, non *sur la maîtrise* que x possède de R_x (maîtrise qui n'importe guère que dans la mesure où son insuffisance pourrait gêner le travail collectif d'observation, d'analyse et d'évaluation de R_x). L'évaluation *de la maîtrise qu'aura x (ou quelque autre élève de la classe)* de la réponse $R^\heartsuit$ relève d'une autre temporalité, d'un temps qui viendra à son heure, après que $R^\heartsuit$ aura été non seulement « développée », mais aussi « défendue & illustrée » dans la classe.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 18 : mardi 6 février 2007

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques // 2. Forum des questions // 3. Problématique et fonctionnement du Séminaire

0. Questions de la semaine

Journée 18 (6 février 2007)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4^e (et soutien en 5^e)

Je vous soumets une question d'élève, à laquelle j'ai eu du mal à répondre : « À quoi cela sert-il de faire le cercle circonscrit à un triangle ? » Pouvez-vous m'aider ?

1. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques

1.1. La notice *Évaluation & notation*

On poursuit l'étude de la notice intitulée ***Évaluation & notation – Aspects didactiques***.

1.2. L'évaluation et le travail de la classe

On s'arrête ici sur la troisième section de cette notice, qui permettra de progresser dans le travail praxéologique appelé par une ***rénovation de l'évaluation dans la classe***.

3. L'évaluation et le travail de la classe

3.1. Les remarques qui précèdent valent aussi bien à propos des travaux donnés à faire *hors classe*, d'une séance à l'autre, travaux que le professeur ne vise pas exhaustivement mais dont quelques-uns donneront lieu à défense & illustration devant la classe. Ces remarques valent encore s'agissant des DM (« devoir à la maison ») et des DS (« devoir surveillés », ou contrôles), qui font en principe l'objet d'un examen exhaustif de la part du professeur. Ces types de travaux demandés aux élèves appellent toutefois des remarques spécifiques. Avant d'y venir, toutefois, on précisera ce qu'est le second niveau en lequel se joue la question de l'évaluation, celui du rapport aux œuvres de la culture à partir du moment où la réponse $R^\heartsuit$ a été, pour l'essentiel, construite.

3.2. Les matériaux fournis par l'observation, l'analyse, l'évaluation de réponses $R^\lozenge$ servent à bâtir la réponse $R^\heartsuit$ visée plus ou moins précisément. Une telle réponse $R^\heartsuit$ est, sinon toujours une praxéologie « complète », du moins un « ingrédient » praxéologique devant s'intégrer à terme dans une praxéologie complète. Sa construction se structure en différents *moments d'étude* ayant pour objet les différentes composantes d'une praxéologie qu'on peut supposer *locale*, c'est-à-dire de la forme $O = [T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{1\leq i\leq n}$. Plus précisément, étant donné une organisation mathématique ponctuelle $O_i = [T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i] \subset O$, où θ_i et Θ_i sont les « parties » de θ et Θ permettant de justifier le bloc $[T_i/\tau_i]$, on distingue le moment *de la première rencontre* avec le type de tâches T_i ; le moment *exploratoire*, qui conjugue *l'exploration* du type de tâches T_i et *l'émergence de la technique* τ_i ; le moment *technologico-théorique*, qui voit *la création du bloc* $[\theta_i/\Theta_i]$; le moment *du travail* de l'organisation mathématique créée, et en particulier *de la technique*, où *l'on fait travailler* les éléments de l'organisation mathématique ponctuelle élaborée pour s'assurer qu'ils « résistent » (et, le cas échéant, pour les améliorer), et où, en même temps, on *travaille sa maîtrise* de cette organisation mathématique, et en particulier de la technique τ_i ; le moment *de l'institutionnalisation*, où l'on *met en forme* l'organisation mathématique $[T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i]$, en précisant chacun de ses composants, et en l'amalgamant à l'organisation déjà institutionnalisée, ce qui aboutit à une *synthèse* nouvelle ; le moment *de l'évaluation*, où l'on apprécie sa maîtrise de l'organisation mathématique créée, mais aussi où l'on évalue cette organisation mathématique elle-même, ce qui pourra conduire à retoucher la synthèse élaborée. Chacun de ces moments, rappelons-le aussi, peut se réaliser en *plusieurs fois*, non seulement parce que l'on procède par épisodes *limités dans le temps*, mais aussi parce que, par exemple, un épisode de travail de la technique peut conduire à retoucher l'organisation mathématique mise en place (et donc éventuellement à vivre un nouvel épisode technologico-théorique), et en tout cas à envisager un autre épisode d'institutionnalisation, si bref soit-il.

3.3. Contre les contrats didactiques encore dominants, qui enferment l'évaluation de l'organisation mathématique $O = [T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{1\leq i\leq n}$ enfin construite dans le *topos* du professeur agissant hors la présence des élèves, on tentera de redonner à la classe, et à chacun des élèves, sa place dans ce processus d'évaluation. Considérant momentanément la réponse $R^♥$ envisagée (qui participe de la construction de O) comme une réponse $R^◊$, la classe sera amenée à l'observer et à l'analyser – en vue de l'évaluer – en l'examinant sous divers angles que les questions ci-après résument.

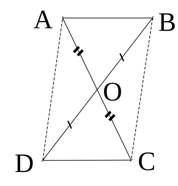
1. Que sont les types de tâches travaillés dans la séquence ? Y sont-ils clairement dégagés et bien identifiés ?
2. Quelles sont les raisons d'être des types de tâches travaillés ? Sont-elles explicitées ? Comment ?
3. Quelle pertinence ont les types de tâches travaillés en tant qu'outils d'études pour l'année en cours ? Pour les années à venir ? Pour d'autres disciplines ?
4. Que sont les techniques associées aux types de tâches travaillés ? Sont-elles faciles à utiliser ? Quelle est leur portée ? Sont-elles fiables ? Qu'en est-il de leur intelligibilité ? Quel est leur avenir ? Quelles évolutions devront-elles subir pour perdurer ?
5. Comment les techniques travaillées sont-elles justifiées ? Y a-t-il des énoncés technologiques ou théoriques qui soient considérés comme « évidents » ou « bien connus » ? Les formes de justification utilisées sont-elles proches des formes habituelles en mathématiques ? Ont-elles valeur d'explication ? Les résultats technologiques rendus disponibles sont-ils effectivement exploités ?

3.4. Pour répondre à une telle interrogation, on pourra notamment confronter la réponse $R^♥$ élue à d'autres réponses $R^◊$, proposées par exemple dans des manuels, des ouvrages d'exercices et de problèmes commentés, etc. Ayant ainsi, en 5^e^, étudié le parallélogramme, on pourra mettre le fruit du travail ainsi accompli à l'épreuve de la compréhension de la page ci-après d'un manuel autrefois en usage (D. Berlion & F. Claustre, *1^er^ en mathématiques 5^e^*, Hachette Éducation, 1995).

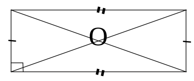
17

Parallélogrammes

Retiens bien !

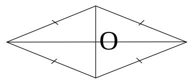


• Un quadrilatère ABCD est un parallélogramme si ses diagonales se coupent en leur milieu. Les points A et C ainsi que les points B et D sont symétriques par rapport au milieu O. Les segments [AB] et [CD] sont portés par des droites parallèles et sont de même longueur.



• Un rectangle est un parallélogramme ayant deux côtés perpendiculaires. Ses diagonales sont de même longueur.

• Un losange est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur. Ses diagonales sont perpendiculaires.



Entraîne-toi !

❶ Construis un triangle quelconque ABC et un point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

❷ Construis un parallélogramme ABCD. O est l'intersection des diagonales et le centre de symétrie. Soit M un point quelconque de [AB] et N un point quelconque de [BC]. La droite (OM) coupe (CD) en P et la droite (ON) coupe (AD) en Q. Construis les symétriques de M et de N par rapport à O. Que remarques-tu ? Pourquoi peut-on dire que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme ?

❸ Dessine un parallélogramme ABCD, puis un autre parallélogramme AEFD. Pourquoi le quadrilatère EBCF est-il un parallélogramme ?

3.5. Revenons à l'évaluation du travail de l'élève *x*. Un tel travail présente, à telle question Q à étudier, une réponse R_x qu'il convient de situer dans le *projet collectif* de la classe : construire une réponse $R^\heartsuit$ (consistant par exemple en un fragment de praxéologie ponctuelle) destinée à nourrir la construction par la classe de certaines organisations mathématiques commandées par le programme de la classe. C'est de ce point de vue qu'il convient d'évaluer le travail présenté, le principe de sa valeur se trouvant dans ce que la réponse R_x peut apporter *au projet didactique de la classe*.

3.6. Une telle problématique suppose bien évidemment des objectifs qu'aura dégagés l'étude du programme, formulés en termes de praxéologies mathématiques à construire et à maîtriser. Soulignons que ces objectifs d'étude, de recherche et de formation ne sauraient être précisés que *progressivement* – et non pas en totalité *au démarrage de l'étude*. Il n'est pas possible par exemple d'expliciter *a priori*, d'emblée, ce que sera la praxéologie $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{1\leq i\leq n}$ qu'on s'accordera à construire, dans une classe de 5^{e}, en réponse aux prescriptions du programme (reproduites ci-après) relatives à l'étude du parallélogramme.

Contenus
Parallélogramme.

Compétences exigibles
Connaître et utiliser une définition du parallélogramme et des propriétés relatives aux côtés, aux diagonales et aux angles.
Relier les propriétés du parallélogramme à celles de la symétrie centrale.
Calculer l'aire d'un parallélogramme.

Commentaires
Le travail entrepris sur le parallélogramme et la symétrie centrale aboutit ainsi à des énoncés précis que les élèves doivent connaître. Des séquences déductives pourront s'appuyer sur ces énoncés.
L'aire du parallélogramme pourra être reliée à celle du rectangle.

3.7. Dans le cadre d'un devoir rédigé et *noté* (DM, DS, etc.), un élément non négligeable indiquant l'importance accordée *a priori* par le professeur – qui peut le négocier –, dans le cadre d'un projet collectif d'étude toujours en construction, à tel « problème » dont se compose ce devoir, voire à différentes parties de ce problème, est constitué par le dispositif du *barème* [2. Le mot de *barème* est la reprise, avec altération graphique, d'un *nom propre*, celui de François Barrême (1638-1703), expert auprès de la Chambre des comptes de Paris et auteur d'un ouvrage qui eut un immense et durable succès attesté par de nombreuses éditions : *Le livre des comptes-faits* (1670), « où l'on trouve les Supputations qui se font par les Multiplications, pour la valeur de quelque chose que l'on puisse s'imaginer, & à telles sommes qu'elles puissent monter. Ouvrage très utile à tous Trésoriers, Officiers, Entrepreneurs, Négociants, & même à ceux qui ne savent pas l'Arithmétique ». Cette origine, jointe à l'incertitude de l'orthographe ancienne des noms propres, expliquent peut-être les vacillations de certains auteurs actuels, que l'on se gardera d'imiter.]. Savoir que telle « partie » est notée sur 5 alors que telle autre l'est sur 3 *signifie* une différence quant à la valeur reconnue provisoirement à chacune de ces parties pour la construction dans laquelle les résultats du travail demandé s'intègreront. Un tel barème, bien entendu, ne saurait être qu'approximatif, mais il le sera d'autant moins que l'on se rapprochera de l'aboutissement de la construction globale engagée. On notera en revanche que l'usage d'un barème – plutôt que la référence à un projet partagé de développement – se révèle à l'observation ne pas constituer un rempart efficace contre les écarts de notation entre correcteurs [3. Dans sa *Sociologie de l'évaluation scolaire* (PUF, 1998), Pierre Merle écrit ainsi (*op. cit.*, p. 12) :

« … l’utilisation d’un barème de notation au point près, voire au demi-point près, ne constitue pas une garantie de précision de la correction. De fait, les écarts de notation peuvent être nuls ou très limités entre les correcteurs sur des questions notées sur deux ou trois points ; et inversement, une grande incertitude peut caractériser la notation d’une question sur un point, voire un demi-point. »].

1.3. Que faire des erreurs ?

a) La quatrième section se confronte notamment avec une difficulté classique, celle du bon usage des erreurs.

4. Correction et erreurs

4.1. Le principe fondamental, on l’a souligné, est que la valeur d’une production d’élève ou d’équipe d’élèves tient dans ce qu’elle apporte au projet didactique de la classe. Cela conduit le professeur à porter son regard, *en premier lieu*, non sur la « réunion » des échecs des élèves, mais bien sur la réunion *de leurs réussites*. À partir des différentes réponses $R^{\lozenge} = R_x$ (dont plusieurs pourront être en partie – voire en totalité – erronées) qui sont apportées par les différentes équipes composant la classe en cette occasion à telle question Q proposée en un DM par exemple, la classe tirera, sous la direction du professeur, une réponse commune, $R^{\heartsuit}$, qui sera consignée par écrit avant de donner lieu à un examen visant à enrichir la synthèse de divers apports.

4.2. La « correction » en classe d’un DM ou d’un DS répond à un schéma qu’une note due au groupe de mathématiques de l’Inspection générale de l’éducation nationale (27 mars 1997), *Les travaux écrits des élèves en mathématiques au collège et au lycée*, brosse avec vigueur :

… les travaux individuels de rédaction (et notamment les « devoirs à la maison »), dont les fonctions sont multiples (…) peuvent et doivent prendre des formes variées (résolution individuelle, ou en petits groupes, d’un problème comportant éventuellement des questions ouvertes et aboutissant à une rédaction individuelle, compte rendu et synthèse d’une séance de travaux dirigés, recherche d’exemples, constitution d’un dossier sur un thème donné, mise au point et rédaction de solutions d’exercices dont l’étude a été engagée en classe…). Ils font l’objet d’une rédaction individuelle sur copie, d’une correction détaillée des copies par le professeur, et d’un rapport de correction destiné notamment à rectifier les erreurs les plus courantes et à dégager les méthodes essentielles.

Dans la perspective ouverte jusqu’ici, le *rapport de correction* établi par le professeur à propos d’un DM ou d’un DS doit recenser *l’ensemble* des aspects significatifs, soit positifs, soit négatifs, en mettant en avant, en règle générale, ce fait que l’activité collégiale de la classe produit des matériaux qui devraient normalement permettre de fabriquer une réponse $R^{\heartsuit}$ de bon aloi. Ce rapport de correction, à la charge du professeur, se sera construit dans une dialectique avec la correction et la notation des copies (si notation il y a), la note assignée à la copie de x devant être en consonance avec l’apport estimé de cette copie au projet collectif.

4.3. Il convient de s’arrêter brièvement sur la question des *erreurs*. Dans un projet de progrès collectif et individuel, une erreur d’un type donné est en principe vouée à disparaître : à cet égard, on jugera la réussite du professeur au fait qu’elle disparaisse effectivement, et, plus encore, au fait que, quelques semaines ou quelques mois après, l’élève ne se souvienne plus avoir jamais commis cette erreur-là, et même se demande comment il est possible de se tromper ainsi ! Une mise en garde doit à cet égard être formulée concernant l’emploi officiellement préconisé des résultats des évaluations conduites par le ministère de l’Éducation nationale [4. La première évaluation diagnostique fut réalisée en septembre 1989 : elle concernait tous les CE2 et toutes les 6^es^ de France. Ces évaluations concerneront la classe de 2^de^ en 1992 (jusqu’en 2001 seulement), puis la classe de 5^e^ à partir de septembre 2002.]. L’élève de décembre n’est déjà plus identique – au plan mathématique, et souvent aussi au plan humain – à l’élève de septembre. Les maladresses et les erreurs révélées par l’évaluation nationale auront peut-être disparu ; à tout le moins auront-elles changé de statut. Il serait maladroit, au double point de vue psychologique et didactique, d’arrêter l’élève dans son évolution en lui imputant échecs et erreurs *d’autrefois*. Bref, la prise d’information doit être *renouvelée* : on recourra pour cela au dispositif du *test d’entrée*, présenté dans la notice *Le temps de l’étude* et sur lequel on ne revient donc pas ici.

4.4. Plusieurs additifs doivent être faits à la remarque précédente, qui conduit à prendre ses distances avec une insistance malsaine sur les « erreurs des élèves ». L’erreur peut être due à une *technique peu* *fiable*, et à ce titre critiquable, promise à être modifiée afin d'être moins productrice d'erreurs. Ainsi est-il peu niable que la technique de changement d'unités usuellement enseignée en France encore aujourd'hui est moins fiable que les techniques intégrant les unités dans les calculs. Pour « convertir » 1,25 g/cm^3 en kg/m^3, ainsi, un manuel de 3^e propose cette « solution » :

– On convertit l'unité de masse : 1,25 g = 0,001 25 kg donc 1,25 g/cm^3 = 0,001 25 kg/cm^3.

– On convertit l'unité de volume : 1 m^3 = 1 000 000 cm^3.

0,001 25 $\times$ 1 000 000 = 1 250

donc 0,001 25 kg/cm^3 = 1 250 kg/m^3.

– On conclut : 1,25 g/cm^3 = 1 250 kg/m^3.

Par contraste, la technique « avec unités » donne ceci :

$$1{,}25\ \text{g/cm}^3 = \frac{1{,}25\ \text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{1{,}25 \times 10^{-3}\ \text{kg}}{(10^{-2}\ \text{m})^3} = \frac{1{,}25 \times 10^{-3}\ \text{kg}}{10^{-6}\ \text{m}} = \frac{1{,}25 \times 10^{3}\ \text{kg}}{\text{m}} = 1250\ \text{kg/m}^3.$$

De même, la technique « anglo-saxonne », plus rudimentaire mais très sûre, conduit à écrire :

$$1{,}25\ \text{g/cm}^3 = \frac{1{,}25\ \text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{1{,}25\ \text{g}}{\text{cm}^3} \times \frac{1\ \text{kg}}{1000\ \text{g}} \times \frac{100\ \text{cm}}{1\ \text{m}} \times \frac{100\ \text{cm}}{1\ \text{m}} \times \frac{100\ \text{cm}}{1\ \text{m}} = \frac{1{,}25 \times 1000\ \text{kg}}{\text{m}^3} = 1250\ \text{kg/m}^3.$$

On voit ici, au reste, que l'erreur peut avoir sa racine dans une *technologie* inappropriée. A-t-on le « droit » de simplifier par kg, se demandera l'élève ? Ce symbole, au demeurant, est-il sécable (ce qui permettrait de simplifier par g ou par k) ou insécable (ce qui ne permet de simplifier que par kg) ? Les propriétés – et donc la « valeur » – d'une technique dépendent ainsi des propriétés de sa *technologie*.

4.5. D'une façon générale, l'erreur ne doit pas être regardée d'abord et seulement comme révélatrice d'une « propriété » momentanée de l'élève, mais comme la mise au jour par l'élève d'une « propriété » momentanée de la praxéologie mathématique que, *hic et nunc*, il s'efforce de mettre en œuvre ou de faire émerger. Elle révèle parfois, non pas une erreur proprement dite, mais un *échec* technico-technologique, éventuellement provisoire. Supposons ainsi un élève qui, familier des équations du *premier* degré, rencontre pour la première fois une équation du *second* degré, en l'espèce la suivante : $x^2 - 3x + 2 = 0$; mû par un *habitus* anciennement constitué, il écrit ceci $(x - 3)x = -2$ puis passe à : $x = \frac{-2}{x-3} = \frac{2}{3-x}$. Peut-être pensera-t-il un instant avoir ainsi résolu l'équation proposée : on le détrompera ! Mais une analyse *objectivante* (et non pas *subjectiviste*) de son « œuvre » conduira, positivement, à la regarder comme l'amorce d'une technique hypothétique qui, pour le moment, et dans les conditions où l'on opère, ne peut pas aboutir [5. À un autre niveau d'élaboration mathématique, on pourra voir là, en effet, le point de départ d'une des techniques les plus précieuses qui soient : la technique du *point fixe*. Posons ici $x = \frac{2}{3-x}$; en partant de $x_0 = 0$, on aura par exemple (à l'aide d'un tableur) : 0,66666667 ; 0,85714286 ; 0,93333333 ; 0,96774194 ; 0,98412698 ; 0,99212598 ; 0,99607843 ; 0,99804305 ; 0,99902248 ; 0,99951148 ; 0,9997558 ; 0,99987791 ; 0,99993896 ; 0,99996948 ; 0,99998474 ; 0,99999237 ; 0,99999619 ; 0,99999809 ; 0,99999905 ; 0,99999952 ; 0,99999976 ; 0,99999988 ; 0,99999994 ; 0,99999997 ; 0,99999999 ; 0,99999999 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; …].

4.6. Le travail sur les erreurs est au fond justifié *lorsqu'il ouvre une voie de progrès* qui s'intègrera au projet didactique collectif, et non pour « faire disparaître » l'erreur constatée – qui pourra disparaître d'elle-même avec l'avancée du travail de formation, sans traitement spécifique. Un élève de 4^e a écrit : $1/3^4 = 3^{-4} = 0{,}0003$. Que s'est-il passé ? L'*habitus*, ancien, est ici de donner une expression *décimale* d'un résultat numérique : voilà la cause agissante que l'erreur révèle. En ce cas encore la « correction » (collective !) ne pourra sans doute pas faire apparaître ce qu'il y a de mathématiquement *fort* derrière ce fourvoiement : comme il en va du nombre 10^{-4} en base 10, *en base* 3 le nombre 3^{-4} s'écrit 0,0001, puisque en ce cas $0{,}0001 = 0 + \frac{0}{3^1} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{1}{3^4}$. Mais elle devra revenir aux faits suivants, qui trouveront éventuellement un écho dans la synthèse : 1) tout nombre n'a pas forcément d'écriture décimale finie, c'est-à-dire tout nombre n'est pas forcément un *décimal* : si $a = \frac{1}{3^4}$ était décimal (comme on le suppose en l'égalant à 0,0003), il en serait ainsi de $27a = \frac{1}{3}$, ce qu'on sait n'être pas le cas, etc. ; 2) tout calcul doit être vérifié à l'aide d'une calculatrice ; or ici la calculatrice affiche ceci : 0,012345679012 ; 3) une vérification grossière, à la main, est souvent possible et utile : on a $\frac{1}{3^4} = \frac{1}{9 \times 9} \approx \frac{1}{10 \times 10}$ = 0,01, ce qui est très supérieur à 0,0003.

4.7. Dans le cas qu'on vient d'examiner, comment noter ? La réponse dépend de la position didactique de la classe par rapport à la question traitée. Ou bien ce qui vient d'être indiqué est bien connu par « la classe », mais non par tel élève : en ce cas, ce dernier devra être pénalisé – par le retrait d'une fraction des points prévus d'autant plus petite que l'enjeu didactique du contrôle sera plus clairement la maîtrise du calcul sur des puissances, et non pas la maîtrise de la distinction décimal / non-décimal (ou encore l'usage de la calculatrice à des fins de contrôle de ses résultats). Ou bien il s'agira là d'une erreur touchant un type de tâches *non encore travaillé* (à tort ou à raison), celui de *l'écriture décimale éventuelle d'une puissance*. En ce cas, l'erreur produite sera surtout regardée comme un point d'entrée dans l'étude de ce type de tâches, dont, ultérieurement, la synthèse se fera alors clairement l'écho : pour l'élève « fautif », on se bornera en conséquence à un avertissement sans frais.

b) Pour insister sur l'attitude vis-à-vis de l'erreur à dépasser puis à oublier, on visionnera une scène du film *Angèle*, de Marcel Pagnol (1934), mettant en scène Fernandel (Saturnin, un garçon de ferme au grand cœur) dans un monologue adressé à Orane Demazis (Angèle, fille d'un fermier aisé, contrainte de se prostituer) : « Et si un jour, par fantaisie, tu venais me dire : “Saturnin, tu te rappelles le jour où je suis tombé dans le fumier ?”, je te dirai : “Quel fumier ? Où ça ? Quand ? Comment ?”… »

1.4. DM & DS

a) La cinquième section permettre de précise encore certains éléments techniques et technologiques de l'évaluation en classe.

5. DM et DS

5.1. La construction d'un DS ou d'un DM propose des difficultés qu'il convient d'aborder à la lumière des principes et repères établis jusqu'ici, complétés par des notions simples sur lesquelles on s'arrête ici brièvement. On désigne par *zone d'étude normale* (ZEN) l'ensemble des types de problèmes relevant des organisations mathématiques élaborées en classe. On distingue de la ZEN la ZEP, *zone d'étude proche*, ensemble (flou) des types de problèmes que les praxéologies mathématico-didactiques de la ZEN permettent de résoudre moyennant une petite aide de l'énoncé. (Par contraste, on distinguera la ZEL, zone d'étude *lointaine*, dans laquelle on ne devrait pas pénétrer à l'occasion d'un DM ou d'un DS.)

5.2. On illustrera ces notions sur un exemple choisi volontairement hors des programmes français actuels. Dans le cadre du thème d'études « PPCM & PGCD », il s'agit du sujet d'étude qu'on peut énoncer sous la forme de la question suivante : « Comment déterminer les solutions rationnelles d'une équation algébrique à coefficients rationnels ? » Le résultat technologique clé est ici le suivant : « Si $P(X) = a_0X^n + \ldots + a_n$ est un polynôme à coefficients entiers relatifs, les racines rationnelles de P sont de la forme $\frac{p}{q}$, où p divise a_n et q divise a_0. » Un corollaire immédiat est le suivant : « Si $P(X) = a_0X^n + \ldots + a_n$ est un polynôme à coefficients entiers relatifs, une condition nécessaire pour que l'entier p soit une racine de P est que p divise a_n. » Voici alors ce que pourrait être un problème de *contrôle* : ses questions sont dans la ZEN, à l'exception de la question 4, qui appartient à la ZEP (mais non à la ZEL).

Lycée Jules Gal
2^{de} 7

Devoir de contrôle n° 3

I. Solutions rationnelles d'une équation

1. Décrire la technique permettant de rechercher les solutions rationnelles éventuelles d'une équation à coefficients entiers.

Corrigé. Pour rechercher les racines rationnelles éventuelles de l'équation $a_0X^n+ \ldots +a_n = 0$, on examine la valeur du premier membre sur l'ensemble fini des rationnels $\frac{p}{q}$ où p divise a_n et q divise a_0 : les solutions rationnelles éventuelles se trouvent parmi cet ensemble.

2. Utiliser cette technique pour déterminer les racines entières éventuelles de l'équation suivante : $x^5 + 3x^4 - 2x - 6 = 0$. (♥)

Corrigé. Dans le cas de l'équation étudiée, les solutions rationnelles éventuelles sont entières (puisque le coefficient directeur est 1). Les entiers qui divisent 6 sont ±1, ±2, ±3, ±6. Parmi ces valeurs, le calcul ne donne pour racine entière du polynôme considéré que l'entier –3 (voir ci-après). L'équation possède dont une unique racine rationnelle, à savoir –3.

3. En observant qu'on a $x^5 + 3x^4 - 2x - 6 = x^4(x + 3) - 2(x + 3)$, déterminer les autres solutions réelles de l'équation (♥).

Corrigé. On a $x^4(x + 3) - 2(x + 3) = (x + 3)(x^4 - 2)$, et donc : $x^5 + 3x^4 - 2x - 6 = (x + 3)(x^4 - 2)$. Les solutions réelles autres que 3 de l'équation étudiée sont les solutions de l'équation $x^4 = 2$, soit les nombres $\sqrt{\sqrt{2}}$ et $-\sqrt{\sqrt{2}}$.

4. Déduire de ce qui précède que le nombre réel $\sqrt{\sqrt{2}}$ est irrationnel.

Corrigé. $\sqrt{\sqrt{2}}$ étant solution de l'équation mais n'étant pas une solution rationnelle de cette équation, on peut conclure que $\sqrt{\sqrt{2}}$ est un nombre réel irrationnel.

5.3. L'incursion dans la ZEP a un coût : lors du travail de « correction » de ce contrôle, la classe enregistrera, dans la synthèse relative au thème « PPCM & PGCD », un nouveau type de tâches, à l'étude duquel on donnera toutefois une extension limitée : « Déterminer si un nombre, donné par une expression formée à partir d'entiers relatifs à l'aide des quatre opérations et de l'élévation à une puissance rationnelle, est irrationnel. » Par contraste avec ce qui précède, on ne devrait pas voir ceci, qui – au niveau supposé – relèverait de la ZEL.

Lycée Jules Gal
2de 4

Devoir de contrôle n° 3

II. Démonstrations d'irrationalité

Démontrer que le nombre réel $a = \sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel.

Solution. L'égalité $a = \sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ entraîne que $(a-\sqrt{3})^3 = 2$. Comme $(a-\sqrt{3})^3 = a^3-3\sqrt{3}a^2+9a-3\sqrt{3}$, l'égalité précédente s'écrit : $a^3+9a-2 = 3\sqrt{3}(a^2+1)$. Cette dernière égalité entraîne à son tour l'égalité $(a^3+9a-2)^2 = 27(a^2+1)^2$, qui s'écrit : $a^6 + \ldots - 23 = 0$. Les seules solutions rationnelles possibles sont donc ±1 et ±23 ; comme $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3} \in]2 ; 4[$, on a $a \neq \pm1, \pm23$, et donc $a \notin \mathbb{Q}$.

5.4. Le bon calibrage des tâches proposées dans un DS ne dépend pas de l'« intuition » du professeur mais de *prises d'information* qu'il aura multipliées. Il convient en tout premier lieu que les tâches proposées relèvent de *types* de tâches *effectivement étudiés en classe* – autrement dit, et sauf exception, se situent dans la ZEN. Mais il faut encore que le professeur se soit assuré de la maîtrise progressive par les élèves des organisations mathématiques construites autour de ces types de tâches. Pour cela, il devra conjuguer *l'observation et l'analyse cliniques* – en principe *sans évaluation* – du travail ordinaire de la classe avec des prises d'information réalisées dans des conditions d'autonomie plus proches de celles propres à un devoir de contrôle, telles des *micro-épreuves* ou des mini-épreuves [6. Au collège en particulier, on pourra parler de *micro-épreuve* pour désigner une « interrogation écrite courte » de 10 minutes, de *mini-épreuve* pour un « interrogation écrite courte » de 20 à 30 minutes, enfin d'*épreuve*, tout court, lorsque la durée est supérieure à la demi-heure. Il est judicieux, pour scander et impulser adéquatement l'effort didactique de la classe, de prévoir dans l'emploi du temps *hebdomadaire* un créneau fixe (par exemple le jeudi de 10 h 50 à 11 h 10) pour ce qui serait alternativement une micro-épreuve et une mini-épreuve – hormis les semaines où est programmé un DS.] qui permettront une évaluation (notée ou non) de la part du professeur et une *auto-évaluation* de la part de l'élève, relançant en cela le projet collectif d'étude et préparant la classe à s'affronter au devoir de contrôle.

5.5. La part de l'épreuve située en ZEP engendre une plus grande incertitude, même si celle-ci peut être réduite par l'observation et l'analyse du travail effectué en classe et en DM. En tout état de cause, les tâches relevant de la ZEP ne devraient occuper qu'une place réduite dans le contrôle. On notera que, en sens inverse, lorsqu'un devoir de contrôle se situe entièrement dans la ZEN, il n'est pas anormal que rien de substantiellement neuf n'y émerge : en un tel cas, le travail réalisé par la classe en cette occasion peut n'apporter aucun matériau nouveau à la synthèse. Deux observations s'imposent cependant. Tout d'abord, le fait ne pas modifier la synthèse à l'issue d'un DS doit apparaître, non comme une décision par défaut, presque automatique, mais comme la conclusion d'un examen explicite fait par la classe sous la direction du professeur. Ensuite, il est rare que tous les élèves d'une classe aient accompli de manière entièrement satisfaisante toutes les tâches proposées. On peut donc prendre des dispositions pour compléter l'étude sur les points les moins réussis. Cela pourra se faire par exemple sous la forme d'un DM suivi d'un micro-contrôle, ou simplement d'un micro-contrôle dont le programme sera alors clairement annoncé et justifié.

5.6. Les DM relèvent en principe des mêmes règles que les DS, qu'ils précèdent dans le temps de l'étude. À la différence des devoirs de contrôle, cependant, ces travaux ne sont pas « surveillés » et ne se font pas en « temps limité » : ils sont accomplis dans des conditions de ressources *a priori* « illimitées », ce qui, au désespoir ou au scandale de beaucoup de professeurs, inclut la possibilité de recopier le devoir d'un camarade. Contre ces pratiques, on peut décider que le DM fera *l'objet d'un contrôle*, sous la forme d'une micro-épreuve, par exemple selon le calendrier suivant, qui n'est bien sûr qu'indicatif [7. La possibilité de sa mise en œuvre dépend en particulier de l'emploi du temps de la classe.].

1. Chaque *jeudi*, hormis les semaines précédant un contrôle, les élèves reçoivent l'énoncé d'un DM et l'examinent rapidement sous la direction du professeur.
2. Une *foire aux questions* relative au DM a lieu lors de la séance du *lundi suivant*.
3. Les élèves rendent leur DM le *jeudi qui suit*, et sont soumis aussitôt à une *micro-épreuve de contrôle* (10 min) portant sur une question du DM (ou à une mini-épreuve dont une partie porte sur le DM).
4. La *correction* en classe du DM (incluant une reprise appropriée de la synthèse relative aux thèmes d'étude concernés) est faite le *lundi d'après*.
5. Une ou plusieurs questions du DM pourront réapparaître dans le DS qui clora l'étude du ou des thèmes concernés.

On retrouve ici le principe d'un dispositif tout classique : lorsqu'une personne présente un travail écrit élaboré librement, il est d'usage (à l'université pour un mémoire de thèse, au lycée dans le cadre des TPE, etc.) de contrôler, par une « soutenance » en principe orale, que cette personne est capable de *répondre de ce travail*, en ce sens qu'elle peut l'exposer et répondre à des questions à son propos. Faute de pouvoir mettre en place un tel dispositif, on peut instituer un dispositif simple de contrôle écrit : en ce cas, la note « de DM » ne sera pas attribuée au DM seul mais à l'ensemble DM *plus* micro-contrôle du DM. On pourra par exemple noter le DM sur 8 et le micro-contrôle (sans documents) sur 12, le DM apparaissant ainsi comme *un travail préparatoire au micro-contrôle*. Dans ces conditions, le travail aidé (par des camarades ou non) retrouve son sens véritable : il doit permettre à l'élève d'étudier et d'apprendre pour occuper (ou retrouver) sa place dans le projet collectif d'étude. Qu'il aura effectivement appris, l'élève en fera la preuve d'abord par sa « copie » (une par élève), ensuite et surtout par le contrôle en classe auquel il se soumettra lors de la remise de son travail écrit.

5.7. Un autre problème classique est celui des absences (volontaires ou non) lors des devoirs de contrôle. Ce problème ne peut guère être traité si l'on ne rappelle pas d'abord les fonctions des DS. Chaque élève doit être « contrôlé », pour deux ordres de raisons : les unes sont didactiques et internes à la classe, les autres institutionnelles et externes à la classe. La première fonction est évidemment de permettre au professeur comme aux élèves de prendre d'éventuelles décisions, à portée individuelle ou collective, concernant l'étude des organisations mathématiques sur lesquelles porte le contrôle : en arrêter l'étude, la poursuivre à propos de tel ou tel sujet, en reprendre certains aspects collectivement ou avec quelques élèves seulement, etc. La seconde fonction conduira à des décisions d'orientation formelle ou informelle, qu'on n'examinera pas plus avant ici [8. Voir la notice *Examens & orientation*.]. Cela noté, un tel contrôle prend ordinairement la forme d'une *épreuve commune* à l'ensemble des élèves de la classe. Mais rien ne l'impose : il en irait autrement s'il s'agissait d'un contrôle *oral* par exemple [9. Comme il en va dans le système des « colles » dans les CPGE.]. Le fait que la classe affronte une même épreuve dans un même temps et en un même lieu est un problème *d'économie* scolaire, non un problème *d'équité*. En conséquence, pour ceux qui auraient été « absents au contrôle », il est normal que soit organisée une *deuxième* session du contrôle – même si elle doit l'être sous des contraintes de temps, de lieu, de moyens parfois peu généreuses. Le contenu de l'épreuve de la deuxième session n'a nullement à se comparer *directement* au contenu de la première. En certains cas il serait même « injuste » que l'épreuve de la deuxième session réservée aux absents ne proposent que des variations minimes par rapport à l'épreuve de la première session. Un contenu d'épreuve doit être un moyen adéquat de contrôler la maîtrise qu'ont les élèves des praxéologies mathématiques sur lesquelles porte le contrôle (en sa première comme en sa deuxième session), et cela compte tenu du degré attendu de maîtrise des contenus mathématiques en question. Le fait que les deux épreuves soient quelque peu différentes – par exemple parce qu'elles porteraient sur des ensembles de types de tâches en partie distincts – doit bien sûr avoir été clairement explicité, non seulement à titre de disposition institutionnelle mais aussi comme une exigence didactique qui va de soi : *par sa nature même*, le degré de maîtrise mathématique requis doit en effet pouvoir être contrôlé, le cas échéant, par le moyen de *plusieurs* prises d'information *différentes*. Un dispositif judicieux consiste à élaborer *deux* épreuves de contrôle, regardées par le professeur comme *également utilisables* : afin de ne pas s'abuser soi-même à cet égard, celui-ci pourra d'ailleurs s'imposer de tirer au sort – assez tôt pour assurer la reprographie nécessaire – celle de ces épreuves qui sera utilisée pour la première session. Cela n'empêchera pas que, pour prémunir les élèves contre la tentation d'échanger avec leurs voisins lors de l'épreuve, l'énoncé choisi fasse l'objet de deux versions très légèrement différentes.

2. Forum des questions

2.1. Questions d'orientation

a) Plusieurs questions ont été récemment formulées à propos de l'orientation des élèves. On les reproduit ci-après.

1. Lors du conseil de classe s'est posée la question du passage en 1re S. Pour le cas d'un élève en balance, comment prendre la bonne décision ? Faut-il se baser sur ce que l'on pense de l'élève et de son potentiel, quitte à se tromper, ou se cantonner aux notes qu'il a eues ? (BR, MJ, 2de, 11)

2. Le choix des options en classe de 2de est-il déterminant pour l'orientation ? J'ai dans ma classe quelques élèves ayant choisi l'option SES qui souhaitent se réorienter vers la section SMS l'année prochaine (et inversement). (AG, CR, 2de, 12)

3. Certains élèves de ma classe de 2de sont en grande difficulté dans presque toutes les matières. Au conseil de classe, plusieurs professeurs, et même le proviseur, ont parlé d'une orientation dans un lycée professionnel car « ils n'ont rien à faire en seconde générale ». Dans mon cours, ils ont du mal à suivre et ralentissent le cours avec des questions basées parfois sur des lacunes du collège, questions auxquelles je réponds le plus possible. Dois-je répondre à ces questions en cours ou repousser cela en AI pour éviter de prendre du retard ? Plus brutalement, dois-je « laisser tomber » ces élèves dans les heures de cours et m'occuper plus d'eux en AI ? (SG, OS, 2de, 12)

4. Je pense demander aux élèves à la rentrée s'ils ont un peu réfléchi à leur choix pour l'année suivante, de manière à pouvoir proposer ensuite des DM avec un exercice spécifique pour ceux qui choisissent S ou ES option Mathématiques, et un autre plus classique pour le reste de la classe. Est-ce une bonne chose ? (SG, OS, 2de, 13) [choisie 1 fois]

5. Suite aux bulletins du premier trimestre, la question de l'orientation pour les élèves de 2de s'est posée. Quels sont les critères permettant de déterminer quels sont les élèves qui pourront accéder à la série S, à la série ES, L, STG, STL ? (Ma PCP m'a donné un critère pour la série S, qui est d'être bon en géométrie.) (VAC, MJ, 2de, 13) [choisie 5 fois]

6. Le conseil de classe approchant, je me pose la question suivante : « Comment conseiller un élève dans son choix d'orientation au niveau de ma discipline ? » Ma démarche est tout d'abord de regarder

les orientations possibles après la seconde et puis de regarder les orientations des programmes de premières générales et technologiques. Que faire d'autre ? (MB, CR, 2de, 17)

7. Le professeur principal de ma classe en responsabilité m'a clairement fait comprendre que mon opinion au sujet des élèves aura un rôle déterminant pour le passage des élèves en 1re S ou ES. Je trouve ces considérations démesurées… Néanmoins, je me demande en quoi le parcours d'un élève en mathématiques permet de savoir – de prévoir – si son orientation sera satisfaisante ? (PP, MJ, 2de, 17)

8. Où trouver des renseignements sur les différentes filières de première pour pouvoir orienter au mieux les élèves de 2de ? (JS, OS, 2de, 17)

b) Avant d'apporter des éléments de réponse aux questions ci-dessus, on se mettra un peu à distance de l'obligation faite aux professeurs de participer à l'orientation des élèves en prenant connaissance de plusieurs passages d'un ouvrage consacré à l'école en général par un observateur extérieur mais familier du monde scolaire et, dans l'ensemble, plutôt bienveillant à son endroit, Hervé Hamon. À l'origine professeur de philosophie devenu journaliste et écrivain, Hervé Hamon a été membre du Haut Conseil de l'évaluation de l'école et a tenu pendant des années une chronique dans le *Monde de l'éducation*. Auteur d'un premier ouvrage remarqué, *Tant qu'il y aura des profs* (1984), il a publié vingt ans après *Tant qu'il y aura des élèves* (Seuil, Paris, 2004), livre désormais disponible en poche, où il revisite le système éducatif français et dans lequel il s'arrête longuement sur la question de l'orientation.

• Le premier extrait que l'on parcourra (*op. cit.*, pp. 98-99) souligne ce qui apparaît à l'auteur comme une « anomalie » française.

Le chapitre le plus sensible de ce dossier tourmenté, c'est, fatalement, l'orientation des élèves. Si le label des diplômes est aussi crucial, si le cursus des années de formation annonce à ce point la configuration d'une vie, alors, logiquement, le moment de l'orientation est une étape très lourde de conséquences scolaires et extrascolaires. C'est celui où l'école agit directement, explicitement, sur la condition présente et future de l'élève, où l'on ne saurait se borner à dire qu'elle est passive, involontairement tributaire de son environnement, traversée par des forces qui lui sont étrangères.

Le choix français, en la matière, est une fois encore assez singulier : il confère à cette école, et aux enseignants, la charge quasi exclusive d'une décision qui, en elle-même, n'est pas incluse dans le contrat du maître, lequel revient à instruire et à éduquer. Les chercheurs insistent volontiers sur cette anomalie, soulignant que « l'orientation n'est pas un mécanisme scolaire en soi : elle n'est que la projection dans l'espace scolaire d'enjeux extérieurs à l'école [1. Marie Duru-Bellat, Jean-Pierre Jarousse et Georges Solaux, « S'orienter et élaborer un projet au sein d'un système hiérarchisé : une injonction paradoxale ? », in *L'Orientation scolaire et professionnelle,* 1997] » Il n'empêche : la France qui s'identifie passionnément à son système éducatif, qui aurait pu déléguer à des instances autres, professionnelles ou étatiques, le soin d'exploiter l'information transmise par les enseignants, reste farouchement adepte du « tout à l'école ». Celle-ci, note un spécialiste averti, Bernard Charlot, « fonde de plus en plus sa légitimité sur son propre fonctionnement, justifiant ce qu'elle propose à un niveau par ce qu'elle impose au niveau supérieur. Dès lors, le sens de l'école devient l'école elle-même, plus d'école encore, passer dans la classe supérieure, le bon cycle, la bonne section, la bonne option [2. Bernard Charlot, *L'École en mutation,* Paris, Payot, 1987]. » En termes vulgaires, l'école contrôle simultanément le terrain, les règles du jeu, la partie, les joueurs, les spectateurs et l'arbitre.

• Traditionnellement, l'orientation scolaire opère par soustraction par rapport à un modèle idéal, et non par composition de qualités (ou de potentialités) reconnues à l'élève (ou conjecturées en lui) : elle est une orientation « négative » (*ibid.*, pp. 100-101).

Indépendante, l'école l'est peut-être (et peut-être à l'excès). Juste et performante quand elle prononce des orientations, elle ne l'est certainement pas. Hors les murs, le fait n'est avoué que du bout des lèvres. En interne, c'est le secret de Polichinelle. Combien de professeurs, parmi mes interviewés, ont exprimé, là-dessus, plus qu'un trouble ? Combien disent leur doute et leur scrupule à l'issue des conseils de classe ? Une ample majorité – tant que les parents ne sont pas là pour les entendre.

Pourquoi ? Parce que le « roc » n'est pas si ferme, ou que s'il l'est, ce n'est pas, en maintes circonstances, au bénéfice de l'élève. Le « tout à l'école » devrait offrir une garantie d'équité. Mais nous sommes loin du compte. Car l'orientation, depuis toujours, est obstinément « négative ». Orienter un élève, le plus souvent, n'est pas détecter ses aptitudes mais ses inaptitudes. L'école, écrit Robert Ballion [1. *L'Évolution de la fonction d'orientation*, rapport à la Commission des communautés européennes, octobre 1987], observateur pénétrant, « sanctionne l'adéquation des performances de l'élève aux exigences de l'institution, ou plutôt l'inadéquation de ses performances, dans la mesure où, en règle générale, l'orientation est négative : l'élève orienté étant l'élève qui n'est pas jugé apte à suivre un cursus donné ».

Comme il existe, au Conservatoire des poids et mesures, un mètre étalon fixant une fois pour toutes le gabarit de tous les mètres, on peut imaginer qu'il existe, dans l'imaginaire collectif de la planète scolaire, un élève étalon : celui qui sera reçu premier à l'école des Mines et à celle des Ponts et Chaussées, ou bien à Polytechnique et à l'ENA réunies. Cet élève étalon, toujours dans l'imaginaire collectif, n'est pas l'exception. Il fixe la norme. Et tout élève en chair et en os se présentant à la porte de son collège ou de son lycée est cet élève-là *moins* quelque chose. Il ne sera pas défini par ses qualités, il sera défini par ses carences. L'orienter ne consistera pas à inventer avec lui la trajectoire la plus appropriée, mais à l'écarter, vu ses manques, de la trajectoire parfaite, celle que trace l'élève étalon.

• L'orientation pratiquée à l'école n'est pas seulement vécue par les professeurs comme une réalité plus ou moins douloureuse ou malheureuse. Des observateurs dont la mission n'est nullement de « charger » l'école, les corps d'inspection, les rejoignent sur un constat qui, semble-t-il, n'épargne personne (*ibid.*, pp. 107-108).

… les phrases les plus sévères émanent d'une institution à laquelle on prête volontiers un langage feutré : l'Inspection générale. Dans un document de synthèse –non public – destiné au ministre, au cabinet, aux directeurs de la Centrale et aux recteurs, et rassemblant les observations des inspecteurs de terrain, en particulier départementaux, le jugement porté sur le dispositif d'information et d'orientation oublie totalement d'arrondir les angles [1. *Les Académies sous le regard des inspections générales, bilan des dix premières évaluations de l'enseignement en académie*, cosigné par l'Inspection générale de l'Éducation nationale (IGEN) et l'Inspection générale de l'administration de l'Éducation nationale et de la Recherche (IGAENR) – quatre rédacteurs par corps –, non publié, juin 2003] : « Tous les rapports d'évaluation soulignent la mauvaise qualité de l'orientation et de tout ce qui touche à la construction du projet personnel de l'élève. Ils relèvent le manque d'investissement des professeurs principaux, des chefs d'établissement, parfois des conseillers d'orientation psychologues (COP) eux-mêmes. Quant à son contenu, l'orientation reste dominée par les parcours traditionnels et offre peu d'alternatives aux élèves. »

À l'appui, le document cite les comptes rendus académiques. « Le rapport Créteil note que les enseignants sont "relativement indifférents à leur responsabilité en ce domaine comme aux conséquences de leurs décisions". Le rapport Nice conclut : "L'orientation fonctionne bien là où elle est la moins nécessaire : dans les établissements où les élèves obtiennent de bons résultats et où leurs familles savent trouver les informations. En revanche, dans les secteurs défavorisés économiquement, le travail à faire reste important pour que des jeunes ne se retrouvent pas abandonnés à eux-mêmes..." Les observations conduites dans l'académie d'Orléans-Tours ont montré que les COP et les professeurs principaux s'en remettent, en matière d'éducation à l'orientation, aux outils de l'ONISEP [1. Office national d'information sur l'enseignement et les professions, créé en 1970], bien davantage qu'à leur propre connaissance du contexte économique et professionnel, local et national, qu'ils estiment eux-mêmes limitée. Le même constat vaut pour les chefs d'établissement… »

c) Quelques éléments de réponse peuvent d'ores et déjà être apportés à certaines des questions ci-dessus.

• La question 7, qui invite à s'interroger sur le rôle déterminant, voire « démesuré », assigné traditionnellement au professeur de mathématiques pour le passage en 1re S, a trouvé un écho plus large dans les développements précédents : la situation constatée est liée à ce fait que, en France, « l'école contrôle simultanément le terrain, les règles du jeu, la partie, les joueurs, les spectateurs et l'arbitre ».

➔ Dans ce qui suit on regardera cependant cette situation comme un fait : le professeur, dont le rôle cardinal est d'instruction et d'éducation, doit à certains moments assumer d'autres fonctions. De ce point de vue, on gardera présent à l'esprit les deux articles ci-après du code de l'éducation.

Article L331-7

(Loi nº 2005-380 du 23 avril 2005 art. 30 Journal Officiel du 24 avril 2005)

L'élève élabore son projet d'orientation scolaire et professionnelle avec l'aide de l'établissement et de la communauté éducative, notamment des enseignants et des conseillers d'orientation-psychologues, qui lui en facilitent la réalisation tant en cours de scolarité qu'à l'issue de celle-ci.

À cette fin, les élèves disposent de l'ensemble des informations de nature à permettre l'élaboration d'un projet d'orientation scolaire et professionnelle.

Ils bénéficient notamment d'une information sur les professions et les formations qui y préparent sous contrat de travail de type particulier et sous statut scolaire.

Cette information est destinée à faciliter le choix d'un avenir professionnel, de la voie et de la méthode d'éducation qui y conduisent.

Cette information est organisée sous la responsabilité des chefs d'établissement, dans le cadre des projets d'établissement ou de projets communs à plusieurs établissements. Elle est conjointement réalisée par les conseillers d'orientation-psychologues, les personnels enseignants, les conseillers de l'enseignement technologique et les représentants des organisations professionnelles et des chambres de commerce et d'industrie, de métiers et d'agriculture, en liaison avec les collectivités territoriales. Elle s'accompagne de la remise d'une documentation.

Article L912-1

(Loi nº 2005-380 du 23 avril 2005 art. 47 Journal Officiel du 24 avril 2005)

Les enseignants sont responsables de l'ensemble des activités scolaires des élèves. Ils travaillent au sein d'équipes pédagogiques ; celles-ci sont constituées des enseignants ayant en charge les mêmes classes ou groupes d'élèves ou exerçant dans le même champ disciplinaire et des personnels spécialisés, notamment les psychologues scolaires dans les écoles. Les personnels d'éducation y sont associés.

Les enseignants apportent une aide au travail personnel des élèves et en assurent le suivi. Ils procèdent à leur évaluation. Ils les conseillent dans le choix de leur projet d'orientation en collaboration avec les personnels d'éducation et d'orientation. Ils participent aux actions de formation continue des adultes et aux formations par apprentissage.

Ils contribuent à la continuité de l'enseignement sous l'autorité du chef d'établissement en assurant des enseignements complémentaires.

Leur formation les prépare à l'ensemble de ces missions.

➔ La capacité à émettre un pronostic juste sur la base des résultats observés au cours de l'année dans une matière est évidemment limitée, surtout dans les cas tangents : autre point bien connu et souligné dans le rapport des inspections générales mentionné plus haut. Dans ce qui suit, on tentera pourtant d'introduire certains repères pour guider cet impossible travail.

• Arrêtons-nous donc d'abord sur la dernière question – où trouver des renseignements sur les différentes filières de première pour pouvoir orienter au mieux les élèves de 2de ? En dépit de la référence plutôt critique vis-à-vis des « outils de l'ONISEP » dans le texte d'Hervé Hamon, la découverte de ces outils restent ***l'un*** des points d'entrée dans le repérage du maelström de l'orientation.

➔ On pourra tout d'abord se faire une idée d'ensemble du site de l'ONISEP en allant à l'adresse http://www.onisep.fr/onisep-portail/portal/group/gp.

(En cliquant sur l'onglet « En Région », on pourra se rendre sur les différents sites académiques de l'ONISEP.)

➔ On examinera encore le site ONISEP dédié aux enseignants et autres professionnels de l'orientation : http://www.onisep-reso.fr/onisep-portail/portal/group/pro.

➔ Pour l'orientation en fin de 2de, on examinera notamment le guide « Après la 2de générale et technologique » : on le trouvera en ligne à l'adresse http://www.onisep.fr/onisep-portail/DisplayFile?file=171494__0.pdf&filename=GP_06_07_guide_2nde.pdf&load=true.

➔ Par mesure de prudence, et d'une façon générale, on recoupera les informations trouvées dans les différents documents examinés, et on recherchera notamment l'avis de la conseillère d'orientation-psychologue de l'établissement où l'on intervient en responsabilité.

• Le problème principal évoqué par les questions examinées est abordé dans l'introduction du guide précité. On reproduit ici le passage correspondant.

Élise est en 2de dans un lycée parisien. Elle pensait faire un bac S, mais à la fin du 2^{e} trimestre, le conseil de classe estime ses résultats insuffisants dans les disciplines scientifiques et lui propose de passer en 1re ES. Mais le bac ES ne l'intéresse pas. En plus, on ne le prépare pas dans son lycée. Que faire ? Redoubler ? Faire appel ? Ses parents se demandent si elle peut suivre en S. Élise est perplexe.

La situation d'Élise n'a rien d'exceptionnel. Beaucoup d'entre vous voient arriver la fin de la 2de avec une certaine appréhension. D'abord, parce tout ce que vous pourriez envisager ne va pas être forcément possible. Vos résultats scolaires vont peser d'un grand poids le jour où le conseil de classe se réunira pour décider de votre orientation. Comme Élise, vous n'êtes peut-être pas sûr d'obtenir votre passage dans la série de 1re qui vous attire. Et vous ne savez peut-être pas ce que vous aimeriez faire après le bac. *« En 2de, les élèves ne sont pas encore sûrs de* ce *qu'ils veulent faire,* remarque Sophie Dridi, professeure de français. *Ils doivent pourtant prendre une décision. Certains élèves acceptent sans* se *poser beaucoup de questions de passer dans la série de 1re proposée par le conseil de classe. »* Avec 13 en maths, 14 en physique, 12 en français et le reste de ses notes entre 10 et 13, on se trouve sans doute dans une situation beaucoup plus confortable que si l'on obtient péniblement la moyenne dans la plupart des matières. On peut être tenté de se dire que l'important est d'avoir un bac, peu importe lequel, et qu'on verra bien plus tard. Cela vaut pourtant la peine de regarder de près quels bacs sont proposés dans votre lycée, ou même ailleurs. Car, il y a des différences importantes entre bac général et bac technologique, comme entre les spécialités d'un même bac. Tant en ce qui concerne les contenus, les méthodes de travail que pour les poursuites d'études.

Certains bacs sont encore peu ou mal connus. Connaissez-vous les trois spécialités du bac STL [1. Sciences et Technologies de Laboratoire], les huit spécialités du bac STI [2. Sciences et Technologies Industrielles], le bac ST2S [3. (remplace SMS) Sciences et Technologies de la Santé et du Social] ? Avez-vous entendu parler du bac hôtellerie ? La plupart de ces bacs technologiques ne sont sans doute pas préparés dans votre établissement. *« Ce n'est pas facile d'envisager un nouveau changement d'établissement en fin de 2de*, reconnaît Christine Bouysse, conseillère d'orientation-psychologue. *C'est sans doute pourquoi beaucoup d'élèves choisissent de faire un bac STG* [4. Sciences et Technologies de la Gestion] *sur place, plutôt que de changer d'établissement pour tenter, par exemple, un bac STI, peut-être mieux adapté à leurs goûts et à leurs résultats. »*

Les enseignants et les conseillers d'orientation-psychologues insistent beaucoup sur la nécessité, pour les élèves de 2de, de s'orienter vers un bac qui leur convient. Pour Françoise Delzongle, qui enseigne les mathématiques, *« il est normal, quand on est en 2de, de ne pas avoir d'idée de métier. Cependant, il faut trouver la série de 1re où l'on sera* à *l'aise et en situation de réussite. »* Ce qui signifie, par exemple, que vouloir faire un bac S à tout prix n'est pas forcément une bonne idée. De même, la préparation du bac L risque de ne pas convenir à quelqu'un qui peine à lire plusieurs livres par an.

Quel est le bac idéal ? Celui qui vous intéresse, celui que vous avez le plus de chances de réussir… et celui qui vous préparera le mieux à la poursuite des études que vous envisagez ! Des éléments que l'on n'a pas toujours réunis au moment de choisir. Si c'est votre cas, pas de panique ! Il est impossible de tout prévoir, de suivre sans dévier un itinéraire tracé une fois pour toutes. Bien sûr, prendre d'emblée la bonne direction quand on se trouve à un carrefour permet de gagner du temps. Mais un parcours de formation n'est pas un itinéraire routier ! *« Chaque parcours se construit peu à peu. Tout ne se joue pas au moment de choisir son bac »*, affirme Sylvie Gozzi, conseillère d'orientation-psychologue. Cela ne signifie pas qu'il faut laisser vos professeurs ou vos parents choisir à votre place, mais qu'il faut répondre aux questions au fur et à mesure qu'elles se posent.

Cette année, il vous faut déterminer, non pas quel est le bac idéal, mais quel est **le meilleur pour vous**, compte tenu de vos centres d'intérêt et de vos résultats scolaires. *« Il faut aller au bout de ses rêves, et, pour cela, avoir le souffle long ! »* Un conseil de Sophie Dridi à méditer, même si on n'a pas encore trouvé son rêve.

➔ Le même document consacre de façon explicite un développement au problème du passage en 1re S.

Avec 10 en maths et 10 en physique, puis-je faire une 1re S ?
À première vue, cela semble juste. Avez-vous beaucoup travaillé pour obtenir ces notes ? Quels sont vos résultats dans les autres matières ? Le point de vue des profs de maths et de physique peut vous éclairer. Pensez à regarder avec eux le programme de 1re S, pour savoir si les notions qui vous ont mis en difficulté en 2de sont importantes pour la suite. À vous de déterminer si vous aimez assez les sciences pour y consacrer le plus clair de votre temps. Si c'est le cas, vous pouvez passer en 1re S, ou bien choisir de redoubler la classe de 2de afin de consolider vos bases.

➔ Avant d'aller plus loin, arrêtons-nous encore sur la question du redoublement, tel que le guide l'envisage.

Ma 2de ne se passe pas bien. Ai-je intérêt à redoubler ?

Quelle moyenne faut-il pour passer en 1re ? Avant de prendre une décision, essayez de comprendre ce qui ne va pas, et pourquoi. Y a-t-il des difficultés dans certaines matières, un problème d'organisation, de compréhension ? Est-ce une question de rythme de travail ? Comment s'était passée votre année de 3^{e} ? Autant de questions à se poser. Le redoublement, dont on dit souvent qu'il est inutile, permet à certains de prendre un nouveau départ. Si, après mûre réflexion, vous pensez que le type de travail demandé au lycée d'enseignement général ne vous convient pas, vous pouvez demander à entreprendre un BEP. À condition d'avoir une idée du secteur professionnel vers lequel vous aimeriez vous diriger.

• Ce qui précède met en avant l'élève et son « projet » – le professeur n'y intervient qu'en contrepoint. Que peut faire ce dernier ? En même temps qu'un travail d'informations recoupées sur la structure des poursuites d'études et des secteurs professionnels, il convient sans doute, en premier lieu, de travailler à se déprendre d'une certaine vision « sélectionniste », dont l'expression la plus brutale tient dans un slogan d'exclusion : « Ils n'ont rien à faire là ! » – ou, plus doux, « Ils n'ont pas leur place en 2de » (ou : en 4^{e}, à l'université, etc.).

➔ Pour approfondir ce point, on examinera les notes ci-après, reprises du Séminaire 2005-2006.

1) Même si le professeur n'a pas de pouvoir thaumaturge, on l'a souligné, il ne saurait renoncer à rechercher des effets systématiques d'éducation mathématique et institutionnelle même chez ces élèves qui semblent parfois se désigner eux-mêmes comme « inéducables ». Si l'on peut comprendre le découragement et l'érosion de la volonté devant la rétivité ou l'opposition affichées par certains, on ne peut en revanche accepter le *principe* selon lequel l'École renoncerait à agir sur les cas les plus difficiles. Il y a là, en effet, une méprise qu'il convient encore et encore de dénoncer : dans la *scolarité obligatoire*, on ne cherche pas en priorité à sélectionner les plus capables (ce qui, en certains contextes de formation, est une problématique légitime), mais, en conformité avec le « pacte national d'instruction » que scellent les programmes des classes successives, *à augmenter autant que faire se peut l'instruction et l'éducation de chaque futur citoyen*. À cet égard, ni l'élève ni le professeur ne sont libres de décider d'un commun accord ! Dans le principe, le professeur doit chercher à instruire l'élève, tandis que l'élève ne peut refuser cette *instruction obligatoire* – quand bien même il serait tenté de le faire. Tel est le principe qui devrait prévaloir. Si quelques élèves semblent véritablement inaccessibles au dispositif de soutien mis en place, il appartient à l'établissement d'envisager d'autres dispositifs jugés plus appropriés. Quant au professeur, il ne doit pas se lasser d'assumer son rôle auprès de chacun de ses élèves.

2) Le non-investissement dans la formation scolaire qui est la tentation de trop élèves doit être évaluée avec eux à son juste prix : ne pas s'instruire, refuser de s'éduquer (aux

multiples sens du mot), c'est à *coup presque sûr* se faire du tort à soi-même (ce que tel élève peut ne pas entendre), mais aussi, dès aujourd'hui, faire du tort à ses futurs enfants – s'ils viennent un jour à la vie –, mais aussi à tout ceux qui vous entoureront dans dix, vingt, trente ans et plus, et plus largement à la société tout entière. *A contrario*, l'effort d'aujourd'hui, d'un côté, la bienveillance et la sollicitude à l'endroit de cet effort, de l'autre, sont un gage très sûr d'une amélioration de la vie future de l'élève, de ses descendants, de ses proches et de la société où il vivra. Même s'il n'est pas entendu, ce discours devra être tenu et médité.

➔ Le même passage des notes de la séance 9 de l'année 2005-2006 reproduisait la conclusion d'une étude récente, due à Éric Maurin et Sandra McNally, intitulé *« Vive la Révolution ! » Les bénéfices de long terme de mai 68*. (Le texte intégral de cette étude figure, sous le titre condensé *Vive Mai 68*, dans les *Documents* / *2nd degré* sur le site de l'IUFM.)

Mai 68 a eu des conséquences importantes pour les étudiants qui n'étaient au moment des événements plus très loin d'être éliminés du système éducatif et de devoir renoncer à poursuivre des études supérieures. De fait, les modifications des procédures d'examens et la volonté de les alléger ont conduit à des taux de réussite au bac et aux examens universitaires très supérieurs à ceux observés habituellement à l'époque. Pour beaucoup d'étudiants (notamment les meilleurs), cela n'a fait aucune différence. Tout au plus, cela a-t-il modifié le timing de leur progression à l'intérieur du système universitaire. Pour un groupe non négligeable, en revanche, les événements ont permis de différer le moment de l'élimination scolaire et significativement augmenté leur niveau final de qualification. Ce groupe appartient aux cohortes de naissance qui se trouvaient, au moment des événements de 68, aux étapes les plus sélectives du système universitaire, ce qui correspond en particulier aux cohortes de 48 et 49.

L'analyse du destin des étudiants de 1968 révèle que le surcroît de formation dont a bénéficié ce petit groupe s'est traduit par la suite par des salaires significativement plus élevés et des accès plus nombreux aux fonctions d'encadrement. Pour ceux de ces étudiants devenus pères, les effets se sont même transmis à la génération suivante puisqu'il est montré que leurs enfants ont moins redoublé à l'école (et qu'ils ont été plus souvent en mesure de sauter des classes). Rapporté au surcroît de formation, le surcroît de réussite professionnelle et familiale observé pour les étudiants bénéficiaires de la désorganisation des examens permet d'évaluer l'effet proprement causal de la formation supérieure sur les destins familiaux, à peu près exactement comme le permettrait un protocole vraiment expérimental. Il s'avère que cet impact est important, plus important que ce que laissent imaginer les évaluations non-expérimentales habituellement utilisées.

Le relâchement des examens en Mai 1968 est homologue à une expérience de laboratoire permettant d'évaluer les effets d'une formation universitaire pour les personnes qui, en temps ordinaire, seraient restées aux portes de l'université. Le fait que cet impact soit aussi particulièrement élevé et persistant à travers les générations est un argument de poids pour ceux qui aujourd'hui militent pour une expansion nouvelle de notre enseignement supérieur.

➔ Il convient aussi d'être averti d'une tendance récente, vers un « néo-sélectionnisme » qui a récemment conquis des positions dans les rangs de ceux-là mêmes qui, traditionnellement, refusaient tout malthusianisme éducatif. À ce propos, dans un article informé, le philosophe Frédéric Neyrat écrit ceci (« Le retour du sélectionnisme », *Les Temps Modernes*, mars-juin 2006, pp. 364-392).

Les accents antisélectifs... du nouveau sélectionnisme

Classiquement, ses partisans justifiaient la sélection, qu'elle soit à l'entrée de l'université ou en cours de cursus, en termes méritocratiques. Pour les conservateurs, comme pour les militants de l'École libératrice, la sélection scolaire était rationnelle, puisque sanctionnant les seuls dons scolaires. Le nouveau sélectionnisme n'exalte plus le don, il ne semble pas remettre en cause, comme c'était le cas dans le passé, l'égalitarisme. À front apparemment renversé, il dénonce la sélection qui s'opère à l'université, via l'échec en premier cycle. C'est l'idée que le système ouvert, puisque ne sélectionnant pas à l'entrée, serait en réalité très sélectif. Il s'y pratiquerait une sélection sauvage […], à laquelle seraient soumis les étudiants les plus démunis socialement, « échoués » […] à l'université, « malgré nous » […] des études longues. Et d'insister sur le coût psychologique de cet échec : c'est la thématique du marché de dupes. Et d'affirmer parfois, en usant d'une métaphore productive, qu'aucune entreprise ne pourrait accepter un tel taux de rebuts, de pièces mal usinées. Une analogie bien mal venue, en tant qu'elle dénie l'humanité de ces étudiants, sur le sort desquels les sélectionnistes font pourtant mine désormais de s'épancher. À l'inverse, le système sélectif serait venu à bout de l'échec, la grande majorité des étudiants de ces filières sortant finalement diplômés. D'où cette double conclusion : c'est l'Université qui produit l'échec, c'est l'absence de sélection qui l'explique…

………

On le voit, les sélectionnistes imputent l'échec (sélection sourde, insidieuse) à l'absence de sélection à l'entrée, en omettant d'évoquer toutes les raisons qui peuvent l'expliquer. Il faut pourtant revenir sur cet échec pour constater d'abord qu'il n'a pas l'ampleur et le sens que l'on veut bien dire : en particulier, il n'est pas, la plupart du temps, relégation définitive. Si le taux de réussite au DEUG, en deux ans, peut paraître effectivement réduit, qui s'établit en 2001 à 45,5 % […], peut-on parler d'échec dans ce que le terme a de définitif, alors qu'avec une année supplémentaire 21,1 %, par exemple, des étudiants obtiennent ce titre et qu'au bout des cinq ans ce seront 76,3 % des étudiants entrés à l'université qui l'auront validé. Ne mettre en avant que le taux de réussite en deux ans, comme le font fréquemment les sélectionnistes, c'est nier le droit à l'erreur, à la seconde chance, droit dont usent sans doute davantage les familles, lorsque l'on s'élève dans la hiérarchie sociale […]. Et un parcours plus lent dans le premier cycle ne signifie pas forcément une moindre réussite ultérieure. Il est piquant de voir ceux qui, pour remettre en cause la cohérence des cursus, ne jurent que par l'individualisation des parcours, ou en amont de l'université, le respect des rythmes de l'élève, ne pas admettre ici qu'il puisse y avoir des trajectoires plus ou moins rapides.

• Que peut faire le professeur en tant que tel ? Même si ce n'est certes pas le seul cas qui donne un rôle au professeur de mathématiques, restons ici dans le cas emblématique de l'entrée en 1re S lorsque les résultats de l'année de 2de obtenus jusque-là ne plaident pas en sa faveur selon les critères ***usuels***.

➔ En tant que participant à la décision d'orientation, le professeur peut, lorsque les résultats ne parlent pas d'eux-mêmes, décider soit de soutenir la demande de l'élève, soit de lui refuser son soutien (sans pour autant s'*opposer* au passage demandé). Sur quelle base peut-il décider de le soutenir, qui aille au-delà des résultats (on les suppose non complètement convaincants) et au-delà aussi de l'estimation à l'intuition de son « potentiel » (comme le dit la question 1) ?

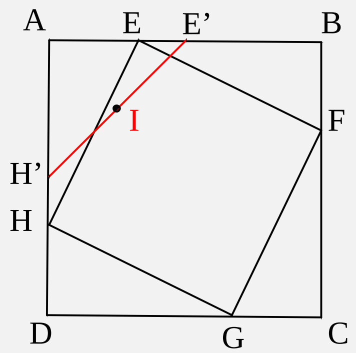
➔ Un dispositif pertinent consiste à passer ***contrat*** avec l'élève pour les mois à venir afin que, nonobstant ses difficultés ***passées***, il s'engage à faire la preuve de sa capacité à investir de manière visible et efficace (en termes de résultats) l'étude des mathématiques telle que le professeur la conduit. Les signes ainsi attendus seront pour le professeur les éléments lui permettant d'apporter son soutien – qu'il renoncera à accorder si de tels signes sensibles font défaut.

➔ Pour permettre à l'élève de remplir clairement son contrat, le professeur pourra, à partir d'une certaine période, pratiquer un enseignement ***spécifié*** – qui ménage des « poches » étudiées pour les différentes « espèces » d'élèves – ici, ceux désireux d'aller en 1re S notamment. Cette spécification ne saurait être que ***à la marge*** d'un enseignement par ailleurs conçu et réalisé pour être ***diversifié***. Pour illustrer le mécanisme de spécification, on reproduit ci-après un passage des notes de la séance 22 du Séminaire 2002-2003.

① La spécification de l'enseignement prodigué permet en principe de prendre en charge de manière appropriée les besoins de certains groupes d'élèves, notamment par la ***modularité des travaux*** qui y sont proposés, c'est-à-dire par le fait ***de retrancher, d'ajouter, de substituer telle ou telle tâche à telle autre dans le travail demandé***. Ce principe peut en vérité être appliqué dans l'ensemble de l'espace didactique, chaque fois du moins qu'il ne risque pas de nuire à la cohésion de la classe.

② En travail hors classe, ainsi, on pourra envisager l'étude modulaire suivante, où la question 3 est proposée à l'intention des seuls élèves visant la 1re S (et peut faire l'objet d'une évaluation à part, en vue de constituer, avec les appréciations obtenues sur les autres questions de même statut, un indicateur complémentaire en vue de la décision d'orientation vers la 1re S) :

Soit un carré ABCD de 8 cm de côté. Sur les segments [AB], [BC], [CD], [DA] on place les points E, F, G, H tels que AE = BF = CG = DH = x.



On rappelle que le quadrilatère EFGH est un carré. On cherche pour quelle valeur de x ce carré est d'aire minimale.

1. Que vaut l'aire de EFGH lorsque $x = 0$? Lorsque $x = 8$? Lorsque $x = 4$?

2. Montrer qu'on a : $2\mathcal{A}_{\text{AEH}} = 16 - (4-x)^2$. En déduire que l'aire du carré EFGH est minimale lorsque $x = 4$.

La question 3 ne concerne que les élèves visant une 1re S.

3. Soit E' et H' les milieux de [AB] et [AD], et soit I le milieu de [E'H']. Retrouver le résultat précédent en montrant, par des considérations géométriques d'aires, que l'on a : $\mathcal{A}_{\text{AEH}} \leq \mathcal{A}_{\text{AE'H'}}$.

5. L'utilisation d'un tel dispositif suppose que les élèves ayant déclaré leur intention d'orientation s'engagent dans un ***contrat*** simple et clair relatif au complément de travail attendu (et accepté) par le professeur, ainsi qu'aux conditions de ce travail – par exemple quant au fait que, ***en certains cas***, il pourra ne faire l'objet, de la part du professeur, que de corrigés écrits, et non de corrections *in praesentia*, cela afin de ne pas empiéter sur le temps d'enseignement commun à tous. Mais cette restriction même peut être relâchée dès lors qu'on exploite adéquatement les ***modules***, types de SDA sur lequel on revient rapidement maintenant.

• Ce qui précède peut bien sûr être étendu à d'autres poursuites d'études que celle considérée jusqu'ici. Lorsque la réussite en mathématiques n'est pas regardée comme une condition *sine qua non*, d'autres contrats peuvent être passés, même s'ils ont plutôt alors une fonction d'aide à la réussite dans un changement d'orientation qui, *a priori*, ne sera pas refusé mais que la pénurie de places peut rendre de réalisation délicate (voire impossible). Il semble qu'il appartienne davantage au professeur principal, alors, de prendre en charge le travail de mise en adéquation, s'il est encore possible, avec la nouvelle orientation souhaitée. On notera à propos de la question 2 (choix de la 1re ES abandonné pour une 1re SMS) ce commentaire plus large du Guide déjà plusieurs fois cité.

Il est préférable, pour obtenir une place en 1re STI, STL, ST2S, STAV, d'avoir déjà suivi en 2de les options correspondant aux différentes spécialités. Ainsi, les options culture-design et création-design sont quasiment indispensables pour être admis dans une 1re STI arts appliqués ; de même que l'option sciences médicosociales pour entrer en 1re ST2S.

2.2. Un enseignement diversifié ?

a) La question suivante a été avancée.

Je n'arrive pas bien à faire la distinction entre un enseignement diversifié et un enseignement différencié. Pourrait-on revenir sur ces deux types d'enseignement ? (OL1, OS, 5^{e}, 17)

b) L'expression « enseignement différencié » (ou plutôt « pédagogie différenciée ») employée depuis deux ou trois décennies est à la fois relativement imprécise ***et*** hantée par l'idée d'un enseignement « individualisé », en oubliant souvent qu'un individu a besoin des autres pour advenir comme personne. La notion d'enseignement ***spécifié*** introduite donne un contenu mieux fondé à l'idée de différenciation pédagogique, tout en rappelant que la référence au ***groupe*** reste essentielle. La formule « totale » serait donc : enseignement ***diversifié*** pour le ***groupe*** classe, ***plus*** éléments de ***spécification*** pour certaines « espèces » d'élèves (à définir), ***plus*** abord ***individuel*** de certaines difficultés impossibles à « travailler » autrement. Mais l'alpha et l'oméga, ce dont il faut partir et ce à quoi il faut revenir, c'est bien le groupe classe.

c) Il faut être conscient en particulier qu'une « différenciation » mal maîtrisée peut être la source d'effets pervers nombreux. Le professeur peut ainsi avoir tort de « réifier » en une « espèce », et de traiter alors comme telle, ce qui n'est fait que de la rencontre fortuite d'élèves qui se mettent en retrait de la classe en faisant argument (par exemple) de ne pas comprendre, de n'avoir pas compris, de n'avoir toujours pas compris, etc. – par exemple de ne pas savoir comment s'exprime l'égalité de Pythagore dans un triangle ABC rectangle en A alors même la classe a travaillé plusieurs heures autour de cette question. En ce cas, ce n'est pas le professeur qui peut décider ou refuser de « laisser tomber » ces élèves lors des séances en classe entière (pour se consacrer à eux dans les séances d'AI, comme l'évoque la question 3 ci-dessus) : ce sont les élèves en question qui laissent tomber la classe ! Il convient donc, non de les prendre à part pour leur « expliquer » une fois de plus, mais de les exhorter à rentrer dans le groupe et à en tirer le profit maximal pour leur formation (mathématique et autre), non de les en séparer un peu plus.

3. Problématique et fonctionnement du Séminaire

a) La journée du ***mardi 13 février*** comportera une séance de travaux dirigés de 9 h à 10 h 30 ; puis une séance plénière de 10 h 45 à 12 h 15 et de 17 h 15 à 18 h 45. La demi-classe appelée à réaliser le TD5 de 9 h à 10 h 30 a la composition suivante :

FLA – VAC – WB – FBA – JB – OB – MB – AC – KE – SF – MG1 – MG2 – SG – SH – IIP – SK – CL – FL – JL – SM2 – ALP – PP – CS1 – WT – FV

b) Chacune des participants pressentis se munira, ***dans toute la mesure du possible***, d'un ordinateur portable (avec carte Wi-fi).

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Travaux dirigés de didactique des mathématiques

➔ Séance 5 : mardi 13 février 2007 (9 h – 10 h 30)

Programme de la séance. 1. Fluctuation d'échantillonnage // 2. Simulations

1. Fluctuation d'échantillonnage

1.1. Ce que disent les textes officiels

a) La notion de « fluctuation d'échantillonnage » apparaît dans le programme de 2^{de}. Dans la partie présentant le domaine de la ***statistique***, ce programme précise ceci.

En seconde le travail sera centré sur :

– la réflexion conduisant au choix de résumés numériques d'une série statistique quantitative ;

– la notion de fluctuation d'échantillonnage vue ici sous l'aspect élémentaire de la variabilité de la distribution des fréquences ;

– la simulation à l'aide du générateur aléatoire d'une calculatrice. La simulation remplaçant l'expérimentation permet, avec une grande économie de moyens, d'observer des résultats associés à la réalisation d'un très grand nombre d'expériences. On verra ici la diversité des situations simulables à partir d'une liste de chiffres.

b) Le même texte formule ensuite les préconisations ci-après.

L'enseignant traitera des données en nombre suffisant pour que cela justifie une étude statistique ; il proposera des sujets d'étude et des simulations en fonction de l'intérêt des élèves, de l'actualité et de ses goûts.

La notion de fluctuation d'échantillonnage et de simulation ne doit pas faire l'objet d'un cours. L'élève pourra se faire un « cahier de statistique » où il consignera une grande partie des traitements de données et des expériences de simulation qu'il fait, des raisons qui conduisent à faire des simulations ou traiter des données, l'observation et la synthèse de ses propres expériences et de celles de sa classe. Ce cahier sera complété en première et terminale et pourra faire partie des procédures d'évaluation annuelle.

c) Le document d'accompagnement ajoute les développements suivants.

• La fluctuation d'échantillonnage

Nous appellerons échantillon de taille n d'une expérience la série des résultats obtenus en réalisant n fois cette expérience ; on dira aussi qu'un échantillon est une liste de résultats de n expériences identiques et indépendantes ; on se limite en seconde aux échantillons d'expériences ayant un nombre fini d'issues possibles. La distribution des fréquences associée à un échantillon est le *vecteur* dont les composantes sont les fréquences des issues dans l'échantillon ; on ne donnera pas de définition générale de la notion de distribution des fréquences, on se contentera de la définir comme liste des fréquences dans chacune des situations que l'on traitera. Les distributions des fréquences varient d'un échantillon à l'autre d'une même expérience : c'est ce qu'on appellera en classe de seconde la fluctuation d'échantillonnage.

Aborder la notion de fluctuation d'échantillonnage se fera en premier lieu dans des cas simples (lancers de dés, de pièces), où la notion d'expériences identiques et indépendantes est intuitive et ne pose pas de problème ; l'élève reprendra ainsi contact avec des expériences aléatoires familières (lancer de dés équilibrés) et les enrichira. Historiquement, l'honnête homme du XVII^{e} siècle s'est familiarisé à l'aléatoire en pratiquant les jeux de hasard ; maintenant, les calculatrices et les ordinateurs permettent la production aisée de listes de chiffres au hasard ; la production de telles listes fera partie, à coté des lancers de dés ou de pièces équilibrés, à côté de tirage de boules dans des urnes, du bagage d'expériences de référence de l'élève. L'étude de ces expériences de référence sera ainsi à la base de la formation sur l'aléatoire des élèves.

L'esprit statistique naît lorsqu'on prend conscience de l'existence de fluctuations d'échantillonnage ; en seconde, l'élève constatera expérimentalement qu'entre deux échantillons, de même taille ou non, les distributions des fréquences fluctuent ; la moyenne étant la moyenne pondérée des composantes de la distribution des fréquences est, elle aussi, soumise à fluctuation d'échantillonnage ; il en est de même de la médiane. On observera aussi que l'ampleur des fluctuations des distributions de fréquences calculées sur des échantillons de taille *n* diminue lorsque *n* augmente. Par ailleurs, on n'hésitera pas à parler de la fréquence d'un événement (« le nombre observé est pair », « le nombre est un multiple de trois », etc.) sans pour autant définir formellement ce qu'est un événement, ni donner de formules permettant le calcul automatique de la fréquence de la réunion ou de l'intersection de deux événements.

Le choix pédagogique est ici d'aller de l'observation vers la conceptualisation et non d'introduire d'abord le langage probabiliste pour constater ensuite que tout se passe comme le prévoit cette théorie.

1.2. Quelle distribution sur la population ?

a) Dans un groupe d'écoles supérieures publiques de formation professionnelle, les épreuves communes de passage de la 1re à la 2^{e} année ont vu la réussite de 1000 élèves, chacun d'eux recevant l'une des mentions suivantes : Passable ; Assez bien ; Bien ; Très bien.

b) Une association d'usagers souhaite connaître la distribution de ces mentions. N'ayant pas accès aux données détenues par l'administration des écoles, elle envoie plusieurs observateurs relever des données affichées (où les mentions figurent par ordre alphabétique des noms des lauréats). L'un des observateurs a relevé la suite de mentions ci-après en les codant ainsi : Passable, 1 ; Assez bien, 2 ; Bien, 3 ; Très bien, 4. La voici.

13123124312131243122222111312431213124312222431111.

En copiant cette liste et en la collant dans un fichier Word, il dénombre les différentes mentions (à l'aide de la fonction **Remplacer**) et obtient ceci.

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	18	17	10	5	50
%	36	34	20	10	100

c) Sur cette base, cet observateur croit pouvoir avancer les conjectures suivantes relatives à la population des 1000 mentions attribuées :

1) comme on pouvait s'y attendre, les effectifs décroissent quand la mention s'élève ;

2) environ un lauréat sur 10 a eu la mention « Très bien » ;

3) environ 70 % des lauréats ont reçu la mention « Passable ou « Assez bien ».

d) D'autres observateurs ont, de même, relevé d'autres séries de mentions.

• On reproduit ci-après 10 séries de 50 mentions.

Série 1 : 11122312311131222421113121312431243122224311111122

Série 2 : 43112124312431243122222311131243122312131222242111

Série 3 : 11124312311131222431113112231242123124312431213124

Série 4 : 31223123111312222421111311131223122224311111211312

Série 5 : 11111124121212311431243122312431213222431113124223

Série 6 : 12131243222421231243122312311131222431111311131243

Série 7 : 12222421111112111131211111122124312311431213124312

Série 8 : 23124322243111212134311243122322224311131213 4314312

Série 9 : 13124312231222242111312431213124312231231113122243

Série 10 : 11142111312231222243121111112112431221143124312431

• Chaque binôme de participants dresse, pour l'une de ces séries (qui lui est communiquée dans un fichier Word), le tableau des effectifs ci-dessous (en le reproduisant dans un fichier séparé).

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif					50
%					100

• Dans le tableau ci-après, on a reporté les séries de pourcentages pour chacune des quatre mentions. (Pour les 10 tableaux demandés ci-dessus, voir l'Annexe 1 ci-dessous.)

Mention	**1**	**2**	**3**	**4**	**Total**
Série 1	44	32	16	8	100
Série 2	34	36	18	12	100
Série 3	40	28	20	12	100
Série 4	48	30	18	4	100
Série 5	40	30	18	12	100
Série 6	38	30	22	10	100
Série 7	52	28	12	8	100
Série 8	32	30	24	14	100
Série 9	34	34	22	10	100
Série 10	46	28	14	12	100

• À l'aide du tableau précédent, on examine collectivement les trois conjectures formulées plus haut, à savoir

1) comme on pouvait s'y attendre, les effectifs décroissent quand la mention s'élève ;
2) environ un lauréat sur 10 a eu la mention « Très bien » ;
3) environ 70 % des lauréats ont reçu la mention « Passable ou « Assez bien ».

➔ Il n'est pas toujours vrai que « les effectifs décroissent quand la mention s'élève », même si c'est presque vrai : dans la série 2, ainsi, l'effectif des mentions « Assez bien » dépasse l'effectif des mentions « Passable » ; dans la série 9, ces deux effectifs sont égaux.

➔ La conjecture qu'« un lauréat sur 10 a eu la mention "Très bien" » n'est pas véritablement confirmée sur l'ensemble des dix séries examinées : le pourcentage de mentions « Très bien » attribuées varie de 4 % à 14 %, soit un rapport de 1 à 3,5 ; la proportion selon la série examinée varie de 4/100 = 1/20 à 14/100 ≈ 1/7. La série des pourcentages est la suivante : 4, 8, 8, 10, 10, 12, 12, 12, 12, 14 ; on voit ainsi que, toutefois, la médiane est égale à 10.

➔ La série des pourcentages de l'événement « Passable ou Assez bien » est la suivante : 62, 68, 68, 68, 70, 70, 74, 76, 78, 80 ; la médiane est 70. Mais on voit que l'étendue est de 18 points !

e) Chaque binôme examine et consigne par écrit les principaux problèmes – de tous ordres – qu'il conviendrait de résoudre pour faire vivre dans une classe (de 2^{de}) l'activité précédente.

1.3. Échantillons aléatoires

a) L'étude précédente illustre une situation typique.

• On s'y intéresse à la distribution d'un certain caractère X sur une certaine population Ω. Ici, le caractère X est la mention obtenue à un examen : c'est un caractère ***ordinal*** (voir les notes de la séance 12) ; la population Ω, d'effectif 1000, est celle des élèves reçus à l'examen.

• Pour étudier la distribution de X sur Ω, il faudrait connaître l'ensemble des mentions $\{ X(\omega) / \omega \in \Omega \}$. Comme cet ensemble n'est pas connu, on se tourne vers un échantillon E (ou plusieurs). À partir de la connaissance de la distribution de X sur E, on essaie d'***inférer*** la distribution de X sur Ω.

• Les échantillons E que l'on utilise pour tenter de cerner la distribution de X sur Ω sont ici les échantillons que l'on a été capable de se procurer : on parlera alors d'échantillons ***disponibles***. À cet égard, l'auteur d'un ouvrage intitulé (dans son édition originale) *Principles of* Statistics (1971), Victor E. McGee, écrit ceci (*Principes de statistiques*, Vuibert, Paris, 1975, p. 30).

> Beaucoup de recherches sont fondées sur des échantillons disponibles. En fait, aux États-Unis, la recherche effectuée dans le domaine psychologique sur des êtres humains a été caractérisée par l'étude des étudiants de deuxième année, et il est fréquent pour les étudiants suivant des cours d'introduction en psychologie d'être récompensés (par une note meilleure) pour avoir participé à des expériences psychologiques. Dans beaucoup de cas il n'y a rien à redire à cette procédure.

b) L'association d'usagers parvient enfin à obtenir communication de la liste (anonymée) des mentions attribuées.

• On la reproduit ci-après.

1312312431213124312222221113124312131243122224311111223123111312224211131213124312
4312222431111112243112124312431243122222311131243122312131222242111111243123111312 2
2431113112231242123124312431213124312231231113122242111131113122312222431111121131
2111111241212123114312431223124312132224311131242231431243124312131222223111312421 2
4312431223123111312222311123111312421222213111111241113121111112412131231142431223 1
2131242222431113124323113124312431223122224211131243121312431222243111243123111312 2
2221113124312431243121312431223122111322243111131111312231222243111111241113121111 11
2112423114312231243121312432224212312431223123111312224311113111312431222242111111 2
1111312111111221243123114312131243122312432224311121213431124312232224311131213431 4
3121312431223122224211131243121312431223123111312224311142111312231222243121111112 1
1243122114312431243122312432221311131243431423111312231243121312231231113122243111 1

```
1112211131211111124124312211131243223121312222421113124312431213122224211111243122
1113
```

• Cette liste est communiquée à chacun des binômes, qui établit alors l'effectif des différentes mentions (codées 1, 2, 3, 4).

• Les résultats de l'étude de cette population sont consignés dans le tableau suivant.

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	409	306	184	101	1000
%	40,9	30,6	18,4	10,1	100

➔ On observe que la première et la deuxième conjectures du premier observateur sont bien vérifiées sur la population totale.

➔ La troisième conjecture appelle un léger correctif : les mentions « Passable » et « Assez bien » représentent 71,5 % du total (et non 70 %).

➔ On notera surtout que, si l'échantillon disponible étudié par le premier observateur avait été l'un des neuf autres examinés ci-dessus, ses inférences auraient pu s'éloigner ***plus ou moins fortement*** de la réalité. On notera encore que la médiane des séries de 50 mentions elle-même fluctue légèrement : égale à 2 dans 9 séries sur 10, elle est égale à 1 dans la série 7 (où l'effectif de la valeur 1 atteint 52 %).

c) Informés des résultats de l'étude conduite par l'association d'usagers, plusieurs formateurs des écoles concernées sont inquiets de la manière dont seront constitués les groupes de formation (GF), dont il est prévu qu'ils regroupent chacun 20 élèves : ils pensent que si ces groupes sont déterminés par l'administration simplement selon l'ordre alphabétique, il y a de grandes chances pour que leur composition varie sensiblement, créant par là des conditions de travail inégalitaires pour les formateurs.

• Chaque binôme sélectionne un groupe formé des lauréats pris dans l'ordre alphabétique du rang $20n + 1$ au rang $20(n + 1)$, où $0 \leq n \leq 49$, puis dresse le tableau des effectifs des différentes mentions en comparant ces effectifs avec les effectifs « théoriques » indiqués dans le tableau ci-après.

Mention	1	2	3	4	Total
Moyennes	8,18	6,12	3,68	2,02	20
« Idéal »	8	6	4	2	20

(On a calculé la deuxième ligne ainsi : 8,18 = 40,9 % × 20, 6,12 = 30,6 % × 20, 3,68 = 18,4 % × 20, 2,02 = 10,1 % × 20 ; la troisième ligne découle de la deuxième en arrondissant les valeurs de cette dernière.)

➔ Pour n = 27, par exemple, on sélectionne dans la liste des mentions celles allant du rang 541 au rang 560.

```
1312312431213124312222221113124312131243122224311111223123111312224211131213124312
4312222431111112243112124312431243122222311131243122312131222242111111243123111312 2
2431113112231242123124312431213124312231231113122242111131113122312222431111121131
2111111241212123114312431223124312132224311131242231431243124312131222223111312421 2
```

4312431223123111312222311123111312421222213111112411131211111124121312311424312231
21312422224311131243231131243124312231222242111312431213124312222431112431231113122
2221113124312431243121312431223122111322243**1111311131223122224**31111124111312111111
211242311…

➔ Le tableau demandé est alors le suivant.

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	9	6	4	1	20
« Idéal »	8	6	4	2	20

➔ En l’espèce, le formateur en charge de ce GF pourra être tenté de réclamer que, dans son groupe, l’administration remplace une mention Passable par une mention Très bien…

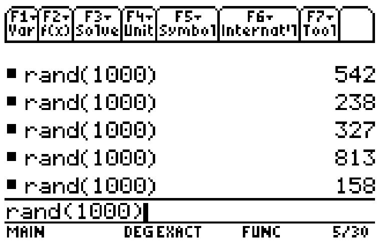
➔ On notera toutefois que chacun des 50 GF ne saurait avoir la composition « idéale ». On a en effet ceci : mention 1 : $50 \times 8 = 400 < 409$; mention 2 : $50 \times 6 = 300 < 306$; mention 3 : $50 \times 4 = 200 > 184$; mention 4 : $50 \times 2 = 100 < 101$.

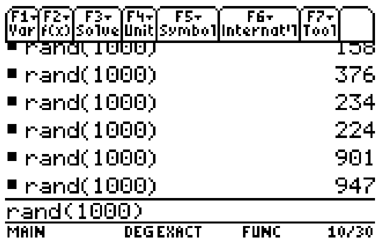
• Devant cette situation, certains formateurs n’hésitent pas à suggérer que les 9 meilleures mentions « Passable » soient reclassées en mentions « Assez bien », que les 15 meilleures mentions « Assez bien » soient reclassées en mentions « Bien » et que, enfin, la plus faible des mentions « Très bien » soit transformée en une mention « Bien », afin que chacun des GF puisse avoir la composition « idéale » (8 ; 6 ; 4 ; 2).

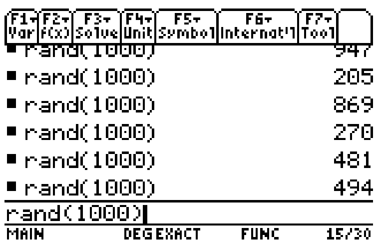
d) L’administration fait savoir que, sans rejeter par principe les modifications demandées, elle ne saurait les accepter dans la mesure où les résultats ont été rendus publics ! Elle propose en revanche que chaque GF soit constitué par ***tirage au hasard*** dans la liste des lauréats afin d’assurer une équité ***de principe*** entre tous les GF.

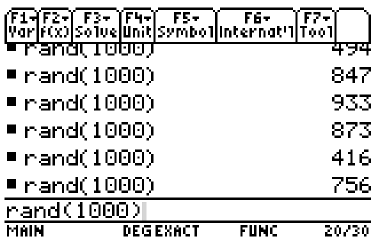
• Des formateurs veulent « tester » cette procédure.

➔ Ils utilisent pour cela une calculatrice donnant des entiers « au hasard » entre 1 et n où n est un paramètre entier que l’utilisateur peut fixer à son gré. Pour leur premier essai, ils obtiennent ceci.









➔ L'extraction de l'échantillon est chose plus délicate. On peut accélérer le repérage des valeurs à extraire en considérant que si, par exemple, chaque ligne contient 48 mentions, la mention de rang 542 se trouvera dans le premier tiers de la 12^e^ ligne (puisque 542/48 = 11,2916…), tandis que la mention de rang 238 se trouvera vers la fin de la 5^e^ ligne (puisque 238/48 = 4,9583…). On obtient ceci.

13123124312131243122222211131243121312431222243111111223123111312224211131213124312
4312222431111112243112124312431243122222311131243122312131222242111111243**2**31113122
24311131122312421231243124312131243122**3**1231113122242111113**1**113122312**2**224**3**11111121131
21111112412121231143**1**24312231243121322243111312422314312431243121312222231113**1**24212
4312431223123111312222311123111312421222213**1**111112411131211111124121312311424312231
2131242222431113124323113124312431223122224211131243121312431222**4**311124312311**1**3122
2221113124312431243121312431223122111322243**1**1113111312231222243111111241113121111111
21124231143122312431213124322242123124312231231113122243111131113124312222421111112
11113121111112212431231143121312431223124322243111212134311243122322243111312134314
31213124**3**12231222242111312431213124312231231113122243111421113122**3**12222431211111121
1243122114312431**2**4312231243222131111312**4**343**1**4231113122312431213122312311**1**131222431111
1112211131211111124**1**2431221113124**3**22312131222242111312431243121312222421111111243122
1113

➔ La série de taille 20 ainsi sélectionnée est la suivante : 23123111241133241113. Le tableau des effectifs est celui-ci.

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	9	4	5	2	20
« Idéal »	8	6	4	2	20

➔ Cette fois, « le hasard » n'a pas si mal fait les choses : deux « Assez bien » en moins, un « Passable » en plus, mais aussi un « Bien » en plus…

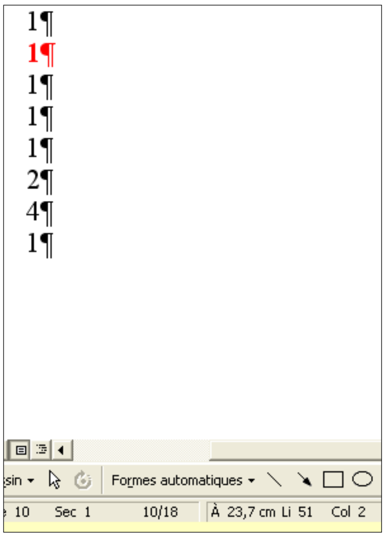
• On peut faciliter la procédure d'extraction en mettant les 1000 données sous la forme d'une « colonne » (c'est-à-dire d'une suite de 1000 lignes comportant une donnée par ligne). On le fait ici sur les 10 première valeurs, soit 1122431121.

➔ Pour cela, on recherche successivement dans la liste (que l'on aura préalablement copiée dans un fichier vierge) les codes 1, 2, 3, 4 et on les remplace par 1^p, 2^p, 3^p, 4^p. On obtient ceci.

1
1
2
2
4
3
1
1
2
1

➔ On notera que l'on obtient ainsi, en passant, l'effectif des différentes mentions. La procédure aurait pu être effectuée dès le début, sur la liste non numérotée des 1000 données, ce qui aurait facilité l'extraction des « échantillons disponibles » de taille 50 (de 50*n* + 1 à 50(*n* + 1), pour *n* = 0, 1, …, 19).

➔ Pour obtenir par exemple la mention de rang 564, on divise 564 par le nombre de lignes par page dans le fichier utilisé (ce sera par exemple 57) : le quotient augmenté de 1 donne alors la page (ici, 10) et le reste donne la ligne dans la page (ici, 51) où se trouve la 564ᵉ valeur, ici 1.



➔ Bien entendu, il est plus facile encore de glisser la « colonne » obtenue dans une colonne d'un fichier Excel. On obtient par exemple ceci.

560	4
561	3
562	1
563	1
564	1
565	1
566	1
567	1
568	2
569	4
570	1

• Chaque binôme extrait un échantillon au hasard de taille 20 de la population des 1000 données, et dresse le tableau correspondant (ci-après).

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	?	?	?	?	20
« Idéal »	8	6	4	2	20

2. Simulations

2.1. Ce que disent les textes officiels

a) Le programme de la classe de 2de présente ainsi le secteur des simulations.

Contenus

Simulation et fluctuation d'échantillonnage.

Capacités attendues

Concevoir et mettre en œuvre des simulations simples à partir d'échantillons de chiffres au hasard.

Commentaires

La touche « random » d'une calculatrice pourra être présentée comme une procédure qui, chaque fois qu'on l'actionne, fournit une liste de *n* chiffres (composant la partie décimale du nombre affiché). Si on appelle la procédure un très grand nombre de fois, la suite produite sera sans ordre ni périodicité et les fréquences des dix chiffres seront sensiblement égales.

Chaque élève produira des simulations de taille n (n allant de 10 à 100 suivant les cas) à partir de sa calculatrice ; ces simulations pourront être regroupées en une simulation ou plusieurs simulations de taille N, après avoir constaté la variabilité des résultats de chacune d'elles. L'enseignant pourra alors éventuellement donner les résultats de simulation de même taille N préparées à l'avance et obtenues à partir de simulations sur ordinateurs.

b) Le document d'accompagnement apporte d'autres précisions.

• Simulation

Formellement, simuler une expérience, c'est choisir un modèle de cette expérience puis simuler ce modèle : cet aspect sera introduit ultérieurement en première. Dans le cadre du programme de seconde, simuler une expérience consistera à produire une liste de résultats que l'on pourra assimiler à un échantillon de cette expérience (voir plus loin la fiche *listes de chiffres au hasard*). On se contentera de simuler des situations très simples, reposant le plus souvent sur la simulation d'expériences de référence où toutes les issues ont des chances égales d'apparaître.

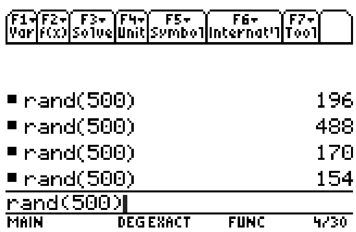
La simulation permettra de disposer d'échantillons de grande taille et d'observer des phénomènes appelant une explication dans le champ des mathématiques. Pour bien comprendre les mathématiques, il est utile d'apprendre quel type de questions sont à adresser à cette discipline et aussi d'apprendre à reformuler ces questions dans le langage propre des mathématiques ; le langage des probabilités présenté en première S, ES et en option de première L, formalisera le langage naïf des *chances* et du *hasard* employé en seconde ; le calcul des probabilités permettra ensuite d'expliquer certains phénomènes observés.

En seconde, on approche dans le cadre d'un langage simple et familier les techniques de simulation ; pour que l'élève ne soit pas écrasé par la puissance des outils modernes de simulation, il convient qu'il ait établi un lien concret entre l'expérience et sa simulation : certaines expériences simples pourront être réalisées par une partie de la classe et simulées par le reste de la classe ; il n'est pas nécessaire, dans un premier temps, de lier les premiers pas vers la simulation de l'aléatoire à l'introduction de concepts théoriques difficiles tel celui de modèle.

2.2. Simuler les fluctuations

a) On imagine une association dont une partie de l'activité est réalisée par des équipes de 4 personnes choisies par tirage au sort dans l'ensemble de ses adhérents.

b) L'association comporte 500 adhérents. Pour simuler la formation des équipes, on procède à la génération de 4 entiers au hasard parmi les entiers de 1 à 500. On obtient par exemple ceci.



c) L'association souhaite promouvoir l'égalité entre hommes et femmes : sur les 500 personnes qui la composent, la moitié sont des femmes (qui reçoivent des numéros pairs), la moitié sont des hommes (qui reçoivent des numéros impairs). Elle souhaite en conséquence que les équipes qui se forment soient toujours, sinon strictement égalitaires, du moins mixtes – ce qui n'est pas le cas, par exemple, de l'équipe correspondant au tirage ci-dessus !

• Le cas observé – une équipe non mixte – se produit-il souvent ? Par un procédé de son choix, chaque binôme effectue 10 tirages au sort d'équipes de quatre personnes (c'est-à-dire 10 tirages au hasard de 4 entiers entre 1 et 500).

➔ Chaque binôme indique la proportion d'équipes ***mixtes*** parmi les 10.

➔ Chaque binôme indique la proportion d'équipes ***égalitaires*** parmi les 10.

• On peut procéder plus rapidement grâce à un ***générateur de nombres pseudo-aléatoires***.

➔ On peut utiliser un générateur ***téléchargeable*** comme par exemple le générateur ***Truly Random*** (à l'adresse http://www.truly-random.com/), qui permet d'obtenir des séries de tirages comme ci-après (où le signe #, que l'on a rajouté « à la main », indique que l'équipe dont la composition précède le signe ***n'est pas mixte***).

302, 132, 164, 180, # ; 317, 13, 454, 469 ; 453, 30, 150, 153 ; 191, 392, 443, 343 ; 182, 249, 386, 124 ; 182, 162, 130, 206, # ; 251, 75, 238, 38 ; 451, 487, 328, 247 ; 461, 459, 101, 233, # ; 207, 100, 77, 136 ; 301, 403, 433, 155, # ; 327, 129, 420, 18 ; 243, 286, 405, 341 ; 435, 484, 267, 289 ; 223, 126, 448, 430 ; 157, 105, 167, 248 ; 455, 436, 35, 426 ; 181, 487, 467, 98 ; 60, 457, 206, 369 ; 202, 361, 285, 342 ; 395, 128, 322, 249 ; 258, 176, 96, 325 ; 160, 446, 54, 139 ; 172, 57, 179, 194 ; 244, 241, 190, 385 ; 250, 37, 173, 284 ; 314, 136, 466, 225 ; 162, 346, 421, 166 ; 78, 89, 366, 184 ; 203, 142, 70, 251 ; 138, 267, 41, 479 ; 365, 247, 210, 26 ; 303, 460, 79, 131 ; 100, 439, 6, 388 ; 146, 438, 333, 56 ; 209, 477, 459, 177, # ; 432, 106, 453, 147 ; 270, 231, 434, 255 ; 423, 162, 17, 205 ; 116, 54, 159, 104 ; 156, 77, 18, 215 ; 385, 92, 317, 409 ; 194, 211, 357, 76 ; 38, 186, 428, 461 ; 499, 487, 7, 125, # ; 101, 381, 109, 112 ; 42, 60, 253, 82 ; 489, 302, 291, 396 ; 387, 239, 236, 245 ; 197, 33, 373, 437, # ; 420, 236, 248, 366, # ; 339, 16, 71, 304 ; 344, 218, 405, 209 ; 475, 244, 275, 468 ; 134, 431, 176, 291 ; 293, 472, 90, 239 ; 318, 21, 253, 65 ; 146, 45, 396, 116 ; 98, 365, 81, 40 ; 479, 7, 295, 3, # ; 148, 435, 362, 437 ; 194, 458, 375, 395 ; 497, 499, 23, 192 ; 140, 426, 367, 368 ; 359, 216, 448, 55 ; 331, 174, 118, 425 ; 112, 29, 441, 119 ; 314, 342, 412, 133 ; 163, 333, 64, 212 ; 132, 60, 103, 206 ; 215, 213, 157, 230 ; 480, 52, 381, 482 ; 83, 261, 147, 398 ; 242, 338, 168, 477 ; 88, 101, 279, 289 ; 56, 187, 43, 158 ; 337, 400, 340, 130 ; 96, 274, 360, 290, # ; 34, 298, 61, 370 ; 490, 257, 438, 200 ; 70, 278, 72, 35 ; 478, 413, 429, 320 ; 321, 9, 232, 42 ; 335, 343, 95, 292 ; 171, 139, 13, 354 ; 160, 319, 73, 190 ; 17, 27, 463, 500 ; 120, 33, 188, 394 ; 302, 223, 48, 453 ; 155, 391, 415, 131, # ; 161, 177, 392, 222 ; 282, 305, 97, 411 ; 225, 175, 180, 211 ; 272, 104, 150, 346, # ; 110, 301, 185, 198 ; 410, 457, 231, 387 ; 111, 243, 419, 489, # ; 221, 102, 20, 254 ; 498, 427, 308, 316 ; 315, 165, 325, 6

➔ Sauf erreur, cette série de 100 tirages de 4 entiers comporte 13 quadruplets non mixtes.

• On peut aussi rechercher et utiliser des générateurs ***en ligne***.

➔ Le générateur ***Random.org*** (à l'adresse http://www.random.org/nform.html) permet, moyennant un seul clic, d'obtenir ce qui suit.

228	195	346	184
336	27	66	345
406	443	277	452
460	173	473	370
425	154	313	351
47	395	341	49
123	168	117	436
379	53	466	123
462	235	170	435
261	352	274	59
34	253	66	292
314	392	376	38
349	72	456	138
15	376	54	124
96	33	400	365
455	386	228	73
386	334	396	333
494	499	183	340

C'est à l'aide de ce générateur que l'on a obtenu la série ci-après de 100 tirages au hasard de quadruplets d'entiers compris entre 1 et 500.

150, 48, 32, 335 ; 406, 178, 33, 143 ; 165, 116, 84, 272 ; 31, 180, 325, 353 ; 499, 261, 44, 426 ; 77, 368, 343, 120 ; 361, 122, 231, 16 ; 202, 232, 127, 129 ; 125, 321, 71, 216 ; 202, 212, 35, 199 ; 154, 438, 244, 284 # ; 295, 454, 180, 334 ; 351, 40, 205, 325 ; 149, 185, 87, 246 ; 182, 34, 135, 271 ; 470, 405, 296, 458 ; 46, 362, 490, 445 ; 378, 493, 103, 283 ; 470, 215, 3, 122 ; 281, 191, 302, 331 ; 50, 357, 215, 378 ; 406, 415, 334, 74 ; 300, 400, 309, 463 ; 405, 246, 361, 452 ; 206, 160, 74, 431 ; 208, 171, 270, 165 ; 159, 123, 230, 178 ; 305, 104, 173, 144 ; 458, 303, 373, 455 ; 342, 481, 328, 293 ; 437, 317, 207, 8 ; 141, 27, 323, 66 ; 280, 6, 382, 462 # ; 31, 431, 460, 82 ; 25, 485, 338, 410 ; 78, 211, 25, 197 ; 472, 296, 27, 61 ; 17, 163, 296, 480 ; 70, 290, 233, 31 ; 482, 284, 422, 184 # ; 18, 43, 6, 30 ; 232, 192, 204, 317 ; 336, 287, 409, 113 ; 35, 374, 480, 255 ; 19, 185, 110, 87 ; 50, 194, 437, 275 ; 34, 88, 82, 177 ; 333, 204, 494, 8 ; 436, 266, 414, 323 ; 456, 180, 472, 468 # ; 392, 345, 132, 456 ; 380, 343, 374, 150 ; 220, 113, 280, 97 ; 241, 146, 152, 492 ; 199, 54, 285, 4 ; 152, 29, 65, 56 ; 244, 450, 332, 15 ; 475, 415, 22, 305 ; 329, 303, 189, 429 # ; 114, 411, 258, 60 ; 177, 184, 474, 192 ; 248, 238, 492, 489 ; 141, 490, 433, 94 ; 400, 120, 186, 117 ; 45, 286, 154, 476 ; 42, 481, 185, 371 ; 71, 317, 425, 485 # ; 69, 480, 107, 442 ; 289, 268, 197, 463 ; 92, 227, 151, 354 ; 310, 406, 478, 87 ; 159, 465, 298, 97 ; 478, 282, 120, 371 ; 366, 241, 422, 360 ; 59, 321, 232, 161 ; 377, 5, 116, 437 ; 396, 136, 442, 20 # ; 197, 255, 35, 419 # ; 257, 215, 318, 176 ; 207, 402, 95, 235 ; 129, 353, 157, 174 ; 468, 459, 413, 9 ; 405, 82, 75, 303 ; 152, 427, 274, 355 ; 327, 383, 269, 72 ; 451, 149, 19, 361 # ; 113, 180, 128, 258 ; 316, 311, 92, 60 ; 102, 465, 18, 68 ; 194, 378, 267, 274 ; 377, 496, 380, 154 ; 79, 305, 23, 14 ; 481, 405, 43, 163 # ; 319, 424, 411, 367 ; 114, 245, 300, 338 ; 174, 355, 385, 166 ; 308, 495, 251, 210 ; 344, 488, 3, 172 ; 77, 394, 199, 259 ; 465, 440, 466, 20

Sauf erreur, cette série de 100 tirages comporte 10 quadruplets non mixtes.

➔ Le générateur ***Research Randomizer*** (http://www.randomizer.org/form.htm) fournit des résultats sous la forme suivante.

Set #1:

276, 284, 422, 468

Set #2:

306, 361, 119, 65

Set #3:

On obtient par exemple ceci.

277, 194, 1, 22 ; 223, 228, 407, 63 ; 245, 101, 223, 130 ; 108, 106, 399, 130 ; 350, 353, 358, 114 ; 24, 61, 265, 184 ; 436, 43, 232, 356 ; 447, 384, 107, 92 ; 246, 301, 187, 351 ; 90, 34, 358, 268 # ; 398, 415, 347, 437 ; 220, 380, 9, 373 ; 489, 260, 257, 336 ; 153, 134, 8, 91 ; 205, 319, 274, 78 ; 334, 332, 267, 125 ; 383, 244, 216, 17 ; 33, 351, 354, 188 ; 127, 488, 384, 263 ; 315, 76, 41, 378 ; 209, 188, 224, 3 ; 74, 452, 43, 442 ; 82, 99, 492, 258 ; 30, 276, 366, 102 # ; 493, 499, 437, 321 # ; 227, 232, 349, 173 ; 287, 118, 116, 177 ; 189, 255, 72, 394 ; 108, 260, 104, 363 ; 19, 488, 460, 483 ; 373, 425, 471, 371 # ; 350, 171, 5, 41 ; 455, 343, 26, 265 ; 173, 458, 191, 105 ; 199, 480, 458, 374 ; 210, 283, 293, 475 ; 181, 128, 488, 112 ; 483, 375, 499, 121 # ; 259, 382, 164, 392 ; 74, 421, 17, 243 ; 443, 392, 324, 115 ; 140, 171, 451, 470 ; 240, 156, 491, 22 ; 459, 341, 221, 387 # ; 380, 397, 107, 357 ; 98, 51, 427, 481 ; 155, 248, 21, 305 ; 342, 392, 299, 91 ; 60, 224, 350, 93 ; 439, 207, 425, 430 ; 292, 105, 38, 378 ; 273, 264, 137, 428 ; 282, 476, 78, 244 # ; 206, 138, 83, 222 ; 63, 322, 466, 180 ; 443, 258, 115, 271 ; 381, 150, 101, 109 ; 416, 151, 284, 192 ; 122, 294, 455, 87 ; 284, 105, 302, 35 ; 203, 129, 473, 489 # ; 300, 45, 20, 350 ; 253, 99, 278, 67 ; 402, 71, 39, 500 ; 480, 30, 393, 432 ; 6, 214, 247, 342 ; 299, 380, 298, 98 ; 122, 117, 145, 464 ; 370, 166, 296, 391 ; 30, 427, 7, 358 ; 369, 448, 243, 112 ; 364, 500, 473, 398 ; 369, 379, 11, 113 # ; 25, 37, 252, 85 ; 384, 51, 199, 123 ; 95, 256, 386, 63 ; 422, 323, 316, 361 ; 304, 139, 108, 103 ; 368, 24, 331, 290 ; 60, 422, 17, 348 ; 356, 450, 32, 336 # ; 309, 50, 19, 177 ; 6, 53, 352, 75 ; 338, 83, 106, 390 ; 357, 68, 310, 363 ; 310, 62, 321, 498 ; 376, 154, 492, 270 # ; 486, 485, 376, 55 ; 31, 263, 85, 316 ; 196, 148, 25, 71 ; 78, 65, 139, 107 ; 241, 260, 409, 179 ; 286, 372, 331, 117 ; 50, 335, 212, 372 ; 9, 164, 137, 469 ; 26, 14, 116, 207 ; 72, 398, 459, 210 ; 144, 80, 128, 45 ; 130, 448, 346, 186 # ; 498, 55, 25, 231

Sauf erreur, cette série de 100 tirages de 4 entiers comporte 12 quadruplets non mixtes.

➔ Le générateur de ***GraphPad Software*** fournit des résultats sous la forme suivante (voir http://www.graphpad.com/quickcalcs/randomN1.cfm).

Row #	A	B	C	D
1	181	89	248	498
2	295	253	16	430
3	204	226	214	480
4	74	192	208	334
5	298	200	223	437
6	342	355	163	354
7	48	456	263	6
8	368	311	398	469
9	384	413	265	24
10	205	207	229	47
11	156	266	298	417

On obtient par exemple ceci.

401, 164, 411, 490 ; 307, 303, 489, 268 ; 490, 194, 29, 221 ; 186, 99, 333, 429 ; 233, 276, 121, 212 ; 268, 114, 131, 279 ; 21, 130, 26, 382 ; 154, 464, 191, 488 ; 427, 54, 216, 48 ; 421, 332, 399, 237 ; 360, 175, 423, 22 ; 122, 125, 180, 5 ; 86, 162, 112, 224 # ; 251, 31, 147, 269 # ; 446, 331, 118, 414 ; 384, 267, 420, 9 ; 395, 95, 363, 499 # ; 364, 72, 321, 405 ; 205, 490, 422, 183 ; 390, 274, 16, 82 # ; 83, 88, 228, 187 ; 91, 206, 109, 271 ; 162, 357, 270, 307 ; 139, 350, 472, 134 ; 103, 332, 24, 375 ; 292, 125, 452, 469 ; 225, 358, 148, 339 ; 221, 473, 414, 228 ; 321, 151, 468, 343 ; 260, 156, 296, 34 # ; 216, 75, 215, 182 ; 462, 134, 150, 126 # ; 259, 346, 106, 364 ; 240, 422, 500, 296 # ; 130, 227, 97, 346 ; 11, 367, 365, 222 ; 93, 459, 304, 268 ; 255, 375, 394, 43 ; 192, 381, 140, 477 ; 321, 475, 310, 255 ; 291, 145, 33, 264 ; 219, 399, 172, 31 ; 113, 473, 335, 496 ; 45, 22, 247, 364 ; 335, 294, 455, 107 ; 162, 426, 62, 57 ; 429, 322, 310, 406 ; 123, 214, 178, 419 ; 44, 412, 31, 214 ; 322, 424, 44, 133 ; 35, 87, 166, 300 ; 50, 150, 386, 387 ; 12, 88, 7, 350 ; 352, 65, 301, 159 ; 452, 114, 468, 224 # ; 259, 98, 275, 34 ;

116, 181, 262, 392 ; 500, 418, 85, 410 ; 458, 350, 34, 443 ; 382, 464, 155, 214 ; 493, 83, 70, 147 ; 259, 132, 227, 212 ; 62, 350, 91, 172 ; 286, 496, 198, 240 # ; 192, 102, 324, 470 # ; 236, 252, 211, 261 ; 315, 54, 73, 120 ; 253, 380, 148, 399 ; 94, 168, 274, 276 # ; 309, 119, 406, 213 ; 177, 292, 234, 157 ; 461, 436, 90, 82 ; 378, 130, 222, 281 ; 27, 103, 380, 442 ; 104, 491, 308, 77 ; 47, 427, 75, 246 ; 107, 11, 24, 4 ; 199, 404, 116, 200 ; 139, 276, 266, 287 ; 1, 132, 300, 458 ; 145, 35, 56, 229 ; 163, 105, 365, 298 ; 142, 62, 188, 350 # ; 386, 353, 197, 197 ; 229, 231, 93, 229 # ; 347, 300, 453, 461 ; 328, 375, 1, 66 ; 31, 306, 314, 260 ; 145, 326, 304, 143 ; 464, 232, 459, 39 ; 27, 438, 196, 258 ; 236, 4, 200, 225 ; 461, 477, 214, 371 ; 461, 167, 355, 427 # ; 36, 98, 277, 123 ; 329, 198, 202, 230 ; 243, 240, 183, 376 ; 200, 493, 10, 261 ; 71, 398, 462, 377 ; 476, 236, 46, 82 #

Sauf erreur, cette série de 100 tirages de 4 entiers comporte 15 quadruplets non mixtes.

➔ Il existe d'autres générateurs en ligne (voir ainsi http://www.randomnumbers.info/). Les 400 équipes tirées au sort jusqu'ici sont non mixtes pour 50 d'entre elles, soit une proportion de 1/8 ou 12,5 %. On peut calculer la ***probabilité*** de rencontrer une équipe non mixte (voir l'Annexe 2) : elle est d'environ 12,35 %.

d) La faiblesse des solutions précédentes tient à ce qu'elles exigent qu'on identifie les quadruplets « non mixtes » ***par inspection visuelle*** – et non de façon ***automatisée***. On va utiliser le tableur Excel pour accroître la fiabilité (et la rapidité) du procédé.

• Une solution possible est illustrée ci-après.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	0	1	1	0	2	0	0	0
2	1	0	1	1	3	0	0	0
3	1	1	0	1	3	0	0	0
4	1	0	0	1	2	0	0	0
5	0	1	1	1	3	0	0	0
6	1	1	1	1	0	1	1	16,6666667
7	0	0	1	1	2	0	1	14,2857143
8	1	0	1	1	3	0	1	12,5
9	1	0	0	0	1	0	1	11,1111111
10	0	0	1	1	2	0	1	10
11	1	1	0	0	2	0	1	9,09090909
12	1	0	1	0	2	0	1	8,33333333
13	1	1	0	1	3	0	1	7,69230769
14	1	1	1	1	0	1	2	14,2857143
15	1	0	1	0	2	0	2	13,3333333

➔ La colonne A donne le numéro de la ligne.

➔ Les colonnes B, C, D, E sont engendrées de la même façon, par la formule

=MOD(ALEA.ENTRE.BORNES(1;500);2)

qui fait apparaître le reste dans la division par 2 d'un entier pris au hasard entre 1 et 500.

➔ La colonne F est engendrée par la formule

=(1-B*C*D*E)*(B+C+D+E)

qui renvoie 0 si le quadruplet des restes (A, B, C, D) est « non mixte », soit parce que tous sont égaux à 1 (auquel cas le facteur 1-B*C*D*E est nul), soit parce que tous sont égaux à 0 (auquel cas le facteur B+C+D+E est nul), et qui renvoie l'un des entiers 1, 2 et 3 sinon.

➔ La colonne G est engendrée par la formule

=(1-F)*(F-2)*(F-3)/6

qui vaut 1 si F = 0, et 0 si F = 1, 2, 3.

➔ La colonne H compte le nombre de 1 dans la colonne G.

➔ La colonne I est engendrée par la formule

=100*H/A

qui donne le pourcentage de quadruplets mon mixtes.

• À l'aide de ce dispositif, chaque binôme étudie le comportement du pourcentage précédent sur 1500 tirages de 4 entiers pris au hasard entre 1 et 500. Quelles observations cela conduit-il à formuler ?

• En s'inspirant du dispositif d'étude précédent, chaque binôme étudie ce à quoi l'on peut s'attendre si l'on souhaite ne retenir par tirage au sort que des équipes ***égalitaires*** (deux femmes, deux hommes).

➔ Par rapport au dispositif de calcul précédent, on change la colonne F, qu'engendre maintenant la formule

=B+C+D+E

et la colonne G, qui est ici engendrée par la formule

=F*(F-1)*(F-3)*(F-4)/4

laquelle renvoie 1 lorsque F = 2 et 0 sinon, ce qui permet donc de compter les quadruplets « égalitaires ».

• Chaque binôme calcule la probabilité de rencontrer un quadruplet égalitaire lors du tirage de 4 entiers pris au hasard entre 1 et 500.

➔ Le calcul montre que cette probabilité est d'environ 37,65 %, soit un peu plus de 3/8.

Annexe 1

Série 1

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	22	16	8	4	50
%	44	32	16	8	100

Série 2

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	17	18	9	6	50
%	34	36	18	12	100

Série 3

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	20	14	10	6	50
%	40	28	20	12	100

Série 4

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	24	15	9	2	50
%	48	30	18	4	100

Série 5

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	20	15	9	6	50
%	40	30	18	12	100

Série 6

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	19	15	11	5	50
%	38	30	22	10	100

Série 7

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	26	14	6	4	50
%	52	28	12	8	100

Série 8

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	16	15	12	7	50
%	32	30	24	14	100

Série 9

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	17	17	11	5	50
%	34	34	22	10	100

Série 10

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	23	14	7	6	50
%	46	28	14	12	100

Annexe 2

1. La probabilité de tirer une équipe ***non mixte*** est donnée par

$$\frac{2\binom{n}{4}}{\binom{2n}{4}}$$

où $n = 250$. Il vient : $\frac{2\binom{n}{4}}{\binom{2n}{4}} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)} = \frac{249 \times 248 \times 247}{499 \times 498 \times 497} = \frac{30628}{248003} \approx 12{,}35\ \%$.

2. La probabilité de tirer une équipe ***égalitaire*** est donnée par

$$\frac{\binom{n}{2}^2}{\binom{2n}{4}}$$

où $n = 250$. Il vient : $\frac{\binom{n}{2}^2}{\binom{2n}{4}} = \frac{3n(n-1)^2}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)} = \frac{3 \times 250 \times 249^2}{499 \times 498 \times 497} = \frac{93375}{248003} \approx 37{,}65\ \%$.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 19 : mardi 13 février 2007

➔ **Matin** : 0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions

➔ **Après-midi** (explicitation) : 3. Les Archives du Séminaire // 4. À propos des TER : un forum express

Matin

0. Questions de la semaine

Journée 19 (13 février 2007)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4^e^ (et soutien en 5^e^)

Sachant que certains élèves ne viennent plus en cours fin juin, est-ce qu'il faut prévoir de finir le programme plus tôt ?

1. Forum des questions

1.1. À propos de statistique

a) Deux questions posées récemment font écho au thème de la séance de travaux dirigés de ce matin.

1. Dans la partie « Simulation et fluctuation d'échantillonnage », vaut-il mieux faire travailler à la calculatrice ou sur ordinateur, ou sur les deux (pour faire des simulations) ? Y a-t-il quelque chose d'obligé ? (MG1, CR, 2^de^, 12)

2. Dans le chapitre de statistique sur la fluctuation d'échantillonnage, faut-il donner les résultats d'une enquête sur plusieurs échantillons et observer qu'ils diffèrent d'un échantillon à l'autre, ou faut-il que les élèves réalisent eux-mêmes des enquêtes (par exemple en lançant une pièce, un dé, en utilisant « random » de la calculatrice) ? Si la deuxième option est la meilleure, y a-t-il d'autres manières de faire une enquête ? (J'ai vu dans le programme que la deuxième était obligatoire ; mais faut-il faire aussi la première ?) (MG1, CR, 2^de^, 13) [choisie 3 fois]

b) Chaque participant au Séminaire, qu'il ait ou non pris part au TD5, en examinera attentivement le contenu, avant qu'on revienne sur les questions ci-dessus.

1.2. Autour des TICE

a) On commence par un rappel et un bilan rapide.

• Chacun a été invité à se faire un cahier électronique de ***Questions de TICE*** pouvant relever de tout domaine lié à son ***activité professionnelle***. Les questions (avec ou sans éléments de réponse) consignées dans les cahiers de questions de TICE ***personnels*** peuvent être soumises à l'équipe de formation en vue de leur publication dans un ***cahier de questions de TICE*** de la filière, qui sera mis en ligne.

• Chacun a également été invité à se constituer un ***carnet d'adresses de TICE*** avec, pour chaque adresse URL, une ***fiche d'accompagnement*** décrivant et analysant sommairement les ressources disponibles à cette adresse (à une date donnée). Les adresses recensées et commentées dans les carnets d'adresses de TICE ***personnels*** peuvent être soumises à l'équipe de formation en vue de leur publication dans un ***carnet d'adresses de TICE*** de la filière mis en ligne.

• Chaque participant au Séminaire présent lors de la séance 14 avait été invité à estimer ses besoins de formation sur chacun des 29 items du B2i collège. Les « scores » obtenus par les différents items, classés par ordre croissant, sont les suivants :

0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 14 ; 15 ; 19 ; 23 ; 23 ; 27 ; 31 ; 33 ; 35 ; 40 ; 41 ; 44 ; 47 ; 52,5.

➔ L'unique item qui n'a suscité l'expression d'aucun besoin de formation est l'item 5.2.

5.2. Je sais ouvrir et enregistrer un fichier joint à un message ou à une publication.

➔ D'autres items ont obtenu un score négligeable : d'un unique point pour les trois premiers ci-après, de deux points pour les deux derniers.

1.2. Je sais accéder aux logiciels et aux documents disponibles à partir de mon espace de travail.

1.5. Je sais paramétrer l'impression (prévisualisation, quantité, partie de documents…).

5.3. Je sais envoyer ou publier un message avec un fichier joint.

1.1. Je sais m'identifier sur un réseau ou un site et mettre fin à cette identification.

1.4. Je sais lire les propriétés d'un fichier : nom, format, taille, dates de création et de dernière modification.

➔ On a pu voir que les items ayant suscité l'expression du plus fort besoin de formation ont obtenu respectivement 44, 47 et 52,5 points. En voici le libellé.

2.3. Lorsque j'utilise ou transmets des documents, je vérifie que j'en ai le droit.

3.7. Je sais traiter un fichier image ou son à l'aide d'un logiciel dédié notamment pour modifier ses propriétés élémentaires.

3.6. Je sais utiliser un outil de simulation (ou de modélisation) en étant conscient de ses limites.

➔ L'item 2.3 correspond à un élément de formation présent ***dans son principe*** dans la conférence « Responsabilité professionnelle » animée cette année, pour les professeurs stagiaires de mathématiques, par Jacques Mauger et Bruno Dugardin. On se reportera aux documents mis en ligne sur le site de l'IUFM, à l'adresse suivante : http://www.aix-mrs.iufm.fr/C2i/rubrique.php3?id_rubrique=30.

➔ L'item 3.7 semble bien être un besoin de la profession non pris en charge encore de façon claire : il resterait donc à rechercher sur ce point des moyens de formation adéquats. Le problème est posé, notamment en relation avec l'élaboration de certaines pièces qui pourraient être déposées dans le portfolio.

➔ L'item 3.6 relève en grande partie de la formation « didactique et disciplinaire ». Le travail entrepris jusqu'ici, par exemple dans le TD5 et, plus largement, autour de la notion d'expérimentation, sera poursuivi.

b) Ce qui précède a conduit à compléter (en bleu dans la version qui sera datée de ce jour) le document ***C2i2e – Repères & balises***. Ce sont ces compléments que l'on examine et que l'on prolonge ici.

B.1. « Travail en réseau avec l'utilisation des outils de travail collaboratif »

B.1.1. « Rechercher, produire, partager et mutualiser des documents, des informations, des ressources dans un environnement numérique »

a) *Repères*

b) *Balises*

• Cette compétence peut trouver à se montrer – et d'abord à se construire – dans le cadre du ***travail d'étude et de recherche*** (TER) mené en bien en trinôme. La ***supervision*** est en ce cas assumée 1) ***pendant*** le temps du travail d'étude et de recherche aboutissant à la rédaction du ***mémoire professionnel***, par le ***directeur du TER***, et 2) à l'étape de la soutenance du mémoire professionnel, par le ***jury d'évaluation des mémoires professionnels***.

• Cette compétence peut s'exprimer, au sein d'une équipe d'établissement ou de formation, par la recherche, l'identification et l'étude aboutissant à la constitution d'un mode d'emploi de calculatrices téléchargeables gratuites ou de calculatrices en ligne.

• Cette compétence peut s'exprimer à travers la constitution d'un ***cahier d'adresses de TICE*** personnel, visant à contribuer à la constitution d'un cahier d'adresses de TICE dans un cadre de formation ou au sein de l'établissement d'exercice.

• Cette compétence peut s'exprimer à travers la recherche concertée, au sein d'une équipe d'établissement ou de formation, d'éléments d'information et de moyens de formation en matière de droit de l'Internet, en relation notamment avec cet item du B2i collège : « Lorsque j'utilise ou transmets des documents, je vérifie que j'en ai le droit. » Une ***supervision*** appropriée (par exemple par des juristes spécialisés) doit en ce cas comme en d'autres être clairement mise en place.

• Cette compétence peut s'exprimer à travers la recherche et la mise en place concertées, au sein d'un établissement ou d'une équipe de formation, de logiciels dédiés au traitement du son et de l'image ainsi que l'identification des savoirs et savoir-faire utiles à leurs utilisateurs dans l'établissement, et cela en relation notamment avec cet item du B2i collège : « Je sais traiter un fichier image ou son à l'aide d'un logiciel dédié notamment pour modifier ses propriétés élémentaires. »

B.1.2. « Contribuer à une production ou à un projet collectif au sein d'équipes disciplinaires, interdisciplinaires, transversales ou éducatives »

a) *Repères*

b) *Balises*

• Cette compétence peut trouver à se montrer – et d'abord à se construire – dans le cadre du ***travail d'étude et de recherche*** (TER) mené en bien en trinôme. La ***supervision*** est en ce cas assumée 1) ***pendant*** le temps du travail d'étude et de recherche aboutissant à la rédaction du ***mémoire professionnel***, par le ***directeur du TER***, et 2) à l'étape de la soutenance du mémoire professionnel, par le ***jury d'évaluation des mémoires professionnels***.

• Cette compétence peut s'exprimer à travers la constitution d'un ***cahier de questions de TICE*** personnel, visant à contribuer à la constitution d'un cahier de questions de TICE dans un cadre de formation ou au sein de l'établissement d'exercice.

• Cette compétence peut s'exprimer à travers l'élaboration d'un dossier relatif à un sous-ensemble significatif d'items du B2i collège, à l'intention des enseignants de l'établissement d'exercice participant à la mise en place du B2i collège.

B.1.3. « Concevoir des situations de recherche d'information dans le cadre des projets transversaux et interdisciplinaires »

a) *Repères*

b) *Balises*

• Cette compétence non obligatoire, qui n'a pas trait à des « projets » disciplinaires mais, si l'on peut dire, à des projets ***au moins*** interdisciplinaires, peut faire l'objet d'un travail d'ampleur limitée, qui pourrait ***par exemple*** prendre la forme suivante : 1) sur l'un des six ***thèmes de convergence*** qui, en classe de 5^{e} cette année, doivent faire l'objet d'une étude concertée entre plusieurs disciplines, définir un ***sujet d'étude*** prenant la forme d'une question Q validée par le tuteur ; 2) amorcer l'exploration des ressources, disponibles sur l'Internet, appropriées à des élèves qui auraient à étudier Q ; 3) rédiger une fiche indiquant, outre le thème de convergence et le sujet Q, quelques liens conduisant à certaines des ressources ainsi repérées, avec un commentaire sur leur usage éventuel par des élèves du niveau considéré ayant à étudier Q.

• Cette compétence peut s'exprimer à travers la conception de situations de recherche d'information en matière de droit de l'Internet, en relation notamment avec cet item du B2i collège : « Lorsque j'utilise ou transmets des documents, je vérifie que j'en ai le droit. »

B.2. « Conception et préparation de contenus d'enseignement et de situations d'apprentissage »

B.2.1. « Identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE »

a) *Repères*

b) *Balises*

• À propos d'un thème mathématique à enseigner, cette compétence peut s'exprimer par le repérage et l'ébauche de diverses études expérimentales conduites à l'aide de logiciels disponibles et prenant place à l'intérieur d'un scénario d'organisation didactique relative à ce thème.

B.2.2. « Concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de la classe »

a) *Repères*

b) *Balises*

• Cette compétence peut s'exprimer dans le travail de conception d'un scénario d'AER incluant la simulation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique d'une expérience graphique relative à une propriété géométrique que cette AER conduit à conjecturer et à mobiliser à titre d'outil de résolution du problème étudié, et cela en relation notamment avec cet item du B2i collège : « Je sais utiliser un outil de simulation (ou de modélisation) en étant conscient de ses limites. »

• Cette compétence peut s'exprimer dans le travail de conception d'un scénario d'AER incluant la simulation à l'aide d'un tableur d'une expérience numérique relative à une propriété algébrique que cette AER conduit à conjecturer et à mobiliser à titre d'outil de résolution du problème étudié, et cela en relation notamment avec cet item du B2i collège : « Je sais utiliser un outil de simulation (ou de modélisation) en étant conscient de ses limites. ».

• Cette compétence peut s'exprimer dans le travail de conception d'un scénario didactique pour une classe de collège qui ait pour objectif la recherche et l'identification de calculatrices téléchargeables gratuites ou en ligne.

• Cette compétence peut s'exprimer dans le travail de conception d'un scénario didactique pour une classe de collège qui ait pour objectif l'étude et l'établissement de modes d'emploi d'un ensemble donné de calculatrices téléchargeables gratuites ou en ligne.

B.2.3. « Intégrer des outils et des ressources dans une séquence d'enseignement, en opérant des choix entre les supports et médias utilisables et leurs modalités d'utilisation »

a) *Repères*

b) *Balises*

• Cette compétence peut s'exprimer dans la conception d'un scénario d'AER incluant de façon articulée une exploration numérique à l'aide d'un tableur puis une étude à l'aide du calcul algébrique (à la main) pour confirmer le résultat suggéré par le tableur, travail algébrique dont certaines étapes cruciales sont à leur tour éventuellement contrôlées numériquement à l'aide du tableur.

B.2.4. « Préparer des ressources adaptées à la diversité des publics et des situations pédagogiques en respectant les règles de la communication »

a) *Repères*

b) *Balises*

• …

B.3. « Mise en œuvre pédagogique »

B.3.1. « Conduire des situations d'apprentissage en tirant parti du potentiel des TIC : travail collectif, individualisé, en petits groupes ; recherche documentaire »

a) *Repères*

b) *Balises*

• …

B.3.2. « Gérer l'alternance, au cours d'une séance, entre les activités utilisant les TICE et celles qui n'y ont pas recours »

a) *Repères*

b) *Balises*

• …

B.3.3. « Prendre en compte la diversité des élèves, la difficulté scolaire en utilisant les TICE pour gérer des temps de travail différenciés, en présentiel et/ou à distance »

a) *Repères*

b) *Balises*

• …

B.3.4. « Utiliser les TICE pour accompagner des élèves, des groupes d'élèves dans leurs projets de production ou de recherche d'information »

a) *Repères*

b) *Balises*

• …

B.3.5. « Anticiper un incident technique ou savoir y faire face »

a) *Repères*

b) *Balises*

• Cette compétence peut s'exprimer à travers l'élaboration de scénarios d'AER robustes par rapport à un certain nombre d'incidents techniques possibles, sans dénaturation des objectifs didactiques prévus.

• Cette compétence peut trouver à s'exprimer à travers l'élaboration d'une ***liste des conditions à contrôler*** (check-list) à propos des scénarios didactiques dont la mise en œuvre dans la classe est envisagée, ces conditions ayant trait tant aux conditions génériques qu'aux conditions spécifiques des activités projetées.

B.4. « Mise en œuvre de démarches d'évaluation »

B.4.1. « Identifier les compétences des référentiels TIC (B2i® ou C2i®) mises en œuvre dans une situation de formation proposée aux élèves, aux étudiants »

a) *Repères*

b) *Balises*

• Cette compétence peut trouver à se montrer à travers un document présentant une observation de séance en classe, analysée et évaluée du point de vue des compétences du B2i collège mobilisées ou travaillées.

• Cette compétence peut trouver à se montrer à travers le développement d'un scénario didactique (comportant la description de l'organisation mathématique visée et de l'organisation didactique correspondante), qui mobilise ou fasse travailler certaines compétences du B2i collège.

B.4.2. « S'intégrer dans une démarche collective d'évaluation des compétences TIC (B2i® ou C2i®) »

a) *Repères*

b) *Balises*

• Cette compétence peut notamment trouver à s'exprimer à travers un document présentant, analysant et évaluant le dispositif plus ou moins intégré de préparation au B2i collège et d'évaluation des élèves au B2i collège dans un établissement observé lors des stages de formation.

B.4.3. « Exploiter les résultats produits par des logiciels institutionnels d'évaluation des élèves »

a) *Repères*

b) *Balises*

• Cette compétence peut s'exprimer à travers le compte rendu, l'analyse et l'évaluation de l'approche du fonctionnement et de l'exploitation didactique du logiciel J'ADE.

d) Deux questions ont été récemment posées.

1. Il me semblait que logiciel Encarta Études était gratuit pour les enseignants et distribué dans les établissement. Or, dans mon collège, personne ne semble au courant. Pourriez-vous me donner davantage d'information concernant ce logiciel ? Est-il bien « gratuit » pour nous ? (YB, MJ, 4^{e}, 18)

2. Quand aura lieu la prochaine séance de TICE avec M. Denisot ? Et sur quels sujets va-t-elle porter ? (AEO, OS, 4^{e}, 18)

• Jusqu'à plus ample informé, il ne semble pas que le logiciel indiqué soit diffusé de façon préférentielle auprès des enseignants. En particulier, il ne figure pas dans la liste des produits RIP (voir http://www2.educnet.education.fr/sections/contenus/rip/les_produits_rip1750).

• Il reste actuellement trois heures de formation présentielle dédiées aux apprentissages de base en matière de TICE. Ces heures seront consacrées en particulier au ***calcul formel***. Leur programmation est différée compte tenu de la surcharge actuelle de travail (des formés ***et*** des formateurs).

1.2. Un enseignement diversifié, *suite*

a) On a eu l'occasion de distinguer trois niveaux de ***diversification*** d'un enseignement.

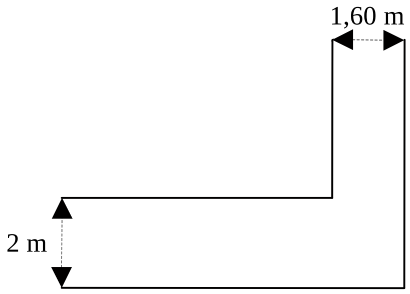
• Le premier niveau consiste à ***diversifier*** le contenu et les modalités de l'étude proposée ***à l'ensemble*** de la classe, en tenant compte pour cela des spécificités de certains élèves. L'ambition est de prodiguer un enseignement qui, moyennant un certain effort ***pour vivre et travailler ensemble***, soit recevable par chacun, et pas seulement, par exemple, par une « élite » d'élèves. C'est cela qu'on appellera, par défaut, ***diversifier son enseignement***.

• Le deuxième niveau consiste à ***spécifier*** son enseignement, c'est-à-dire à y situer de façon ***explicite et justifiée***, et toujours ***à la marge*** de l'enseignement ***pour tous***, des contenus d'étude spécifiques d'un projet scellé par contrat – qui peut-être un projet d'orientation (aller en 1re S, etc.) ou non (rattrapage après absence de longue durée, etc.).

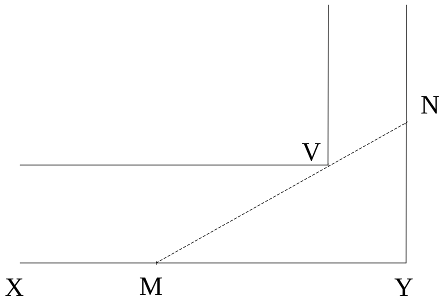
• Le troisième niveau consiste à ***personnaliser*** le travail accompli ***avec tel ou tel élève***, et cela en se situant toujours dans la marge du travail avec la classe ou avec telle « espèce » d'élèves, et ***en rapport avec ce travail***.

b) Dans tous les cas, on l'a dit, l'objectif reste de ***rassembler*** la classe par delà ses hétérogénéités. Pour ajouter un peu à ce qui a été dit jusqu'ici sur les techniques de diversification d'un enseignement, plusieurs points peuvent être notés.

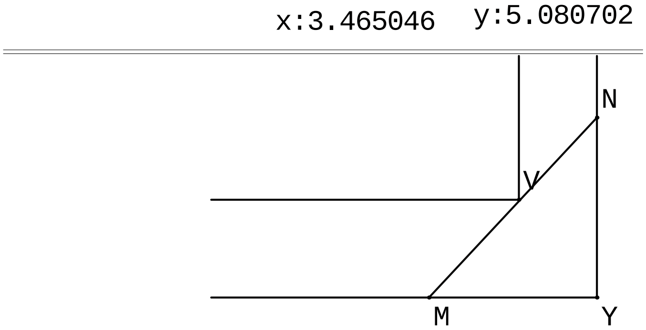
• La diversification advient d'abord à travers les ***contenus de l'étude***. Si d'un côté on peut (comme on l'a vu lors de la séance 18) amener une classe de 2^de^ à étudier le problème de l'irrationalité de $\sqrt{\sqrt{2}}$, de l'autre on peut aussi lui proposer de se pencher sur le problème de la longueur maximale d'une échelle qu'on veut transporter horizontalement dans le couloir schématisé ci-dessous.



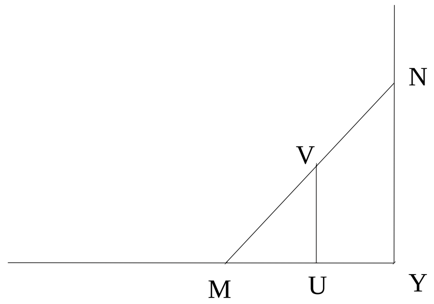
• Ce problème peut d'abord être abordé de façon « empirique », ***graphiquement***, avec l'aide d'une règle graduée (v. la figure ci-après) : une épure ayant été tracée à une certaine échelle, on fait pivoter la règle autour du point V en faisant glisser sur (XY) l'origine M de la graduation, tout en mesurant MN afin d'observer que, lorsque M se rapproche de coude du couloir, MN semble décroître, atteindre un minimum, puis croître à nouveau.



➔ La longueur ***maximale*** de l'échelle sera cette longueur ***minimale*** de MN. Une réalisation grossière montre que ce minimum est un peu supérieur à 5 m. On peut évidemment remplacer l'expérience graphique par une expérience avec un logiciel de géométrie dynamique, qui confirme la détermination graphique précédente (ci-après, x = MY et y = MN).



➔ Ce qui précède suggère une voie de modélisation algébrique, que l'on gagnera à généraliser en désignant par a et b les mesures (en mètres) des deux couloirs successifs (dans le problème proposé, $a = 2$ et $b = 1,6$).

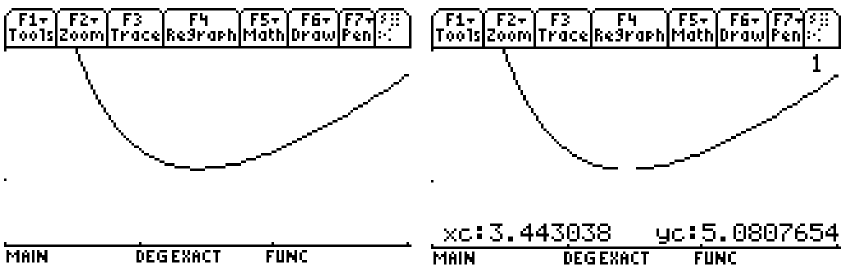


D'après le théorème de Thalès, on a ainsi $YN = UV \times \frac{MY}{MU}$. Comme $MU = MY - UY = x - b$, il vient : $YN = a \times \frac{x}{x-b} = \frac{ax}{x-b}$. D'après le théorème de Pythagore, on a alors

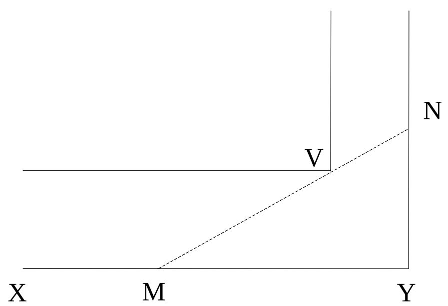
$$MN^2 = MY^2 + YN^2 = x^2 + \frac{a^2x^2}{(x-b)^2}$$

et donc $y = \sqrt{x^2 + \frac{a^2x^2}{(x-b)^2}}$.

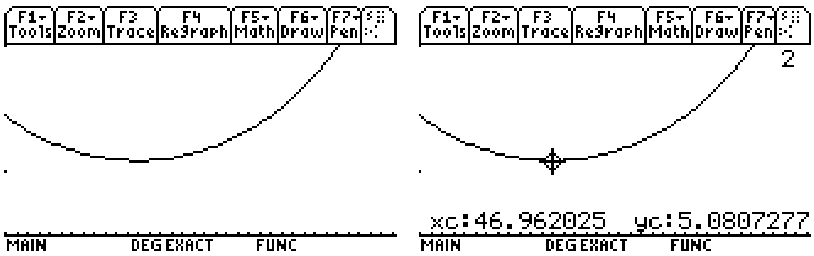
➔ Dans le cas examiné ($a = 2$ et $b = 1,6$), on peut alors étudier cette fonction avec une calculatrice scientifique. L'étude « géométrique » précédente conduit à prendre, disons, $2 \leq x \leq 5$ et $4,5 \leq y \leq 6$. On obtient alors ceci, qui confirme les résultats précédents.



➔ La modélisation peut prendre une autre voie – celle que permet la ***trigonométrie***. Soit θ la mesure en degrés de l'angle $\widehat{VMY}$: θ peut varier sur l'intervalle $]0 ; 90[$.On a alors $MV = \frac{a}{\sin \theta^o}$ et $VN = \frac{b}{\cos \theta^o}$ en sorte que $MN = \frac{a}{\sin \theta^o} + \frac{b}{\cos \theta^o}$.



À nouveau, une calculatrice graphique permet de confirmer les résultats déjà obtenus.

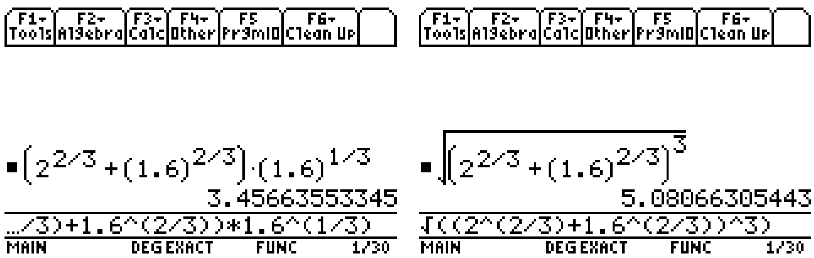


L'angle correspondant au minimum est donc voisin de 47º.

• Une conclusion ***pratique*** se dégage de ce qui précède : on pourra faire passer par le coude du couloir des échelles dont la longueur n'excède pas sensiblement 5 m. L'étude mathématique complète du problème proposé est hors de portée en 2$^{\text{de}}$. Mais on pourra introduire la formule donnant la longueur minimale y_{min} de y = MN en la présentant comme fournie par un certain ouvrage (auquel, sur ce point, on décide momentanément de faire confiance) et, de même, la valeur x_{min} de x = MY pour laquelle ce minimum est réalisé. On a en l'espèce

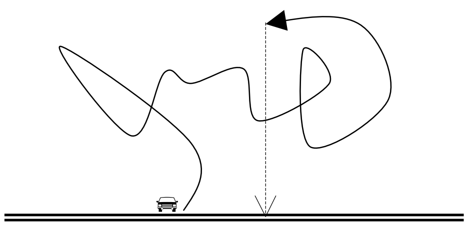
$$x_{\text{min}} = \sqrt[3]{b}\,\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}} \text{ et } y_{\text{min}} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3}.$$

Cette expression, qui utilise des racines cubiques, peut être l'occasion d'organiser un calcul d'une certaine complexité. On aura par exemple ceci.



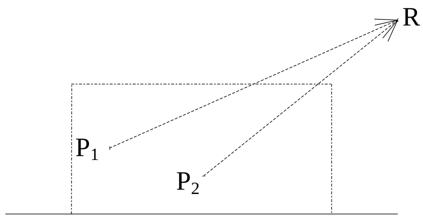
➔ On peut encore proposer la formule donnant l'angle θ_{min} correspondant au minimum : on a en l'espèce $\tan^3(\theta_{\text{min}}) = \frac{a}{b}$. Dans le cas examiné, il vient : $\tan(\theta_{\text{min}}) = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{2}{1{,}6}} = \sqrt[3]{1{,}25}$ = 1,07721734501… et donc : θ_{min} = 47,1289018103…

c) Revenons ici à la question du repérage, et cela à propos d'un problème tout simple. Une personne va se promener en forêt, en laissant sa voiture au bord d'un chemin rectiligne. Ce promeneur chemine à sa guise, de façon improvisée, et, au bout d'une demi-heure, décide de revenir à sa voiture. Comment peut-il repérer la direction (et le sens) dans lequel il doit marcher pour retrouver le chemin au bord duquel l'attend sa voiture ?

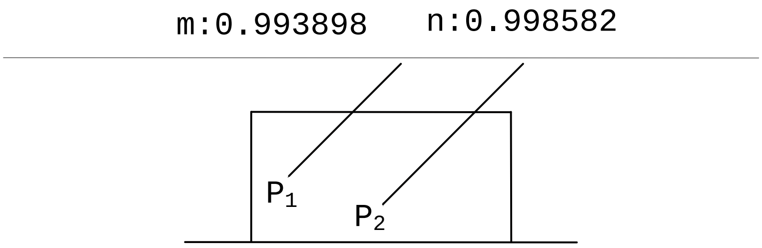


• On suppose que, en quittant son véhicule, le promeneur a repéré un point éloigné R visible au-dessus de la forêt – par exemple le sommet d'une montagne située à des kilomètres du chemin.

➔ Pour utiliser un tel repère, on est amené à considérer que, quel que soit le point où le promeneur P se trouve dans un rectangle de, disons, 200 m sur 100, la direction de la droite (PR) est ***la même***, ce qui est bien sûr, à strictement parler, ***inexact***, comme le montrent les droites (P_1R) et (P_2R) ci-après.

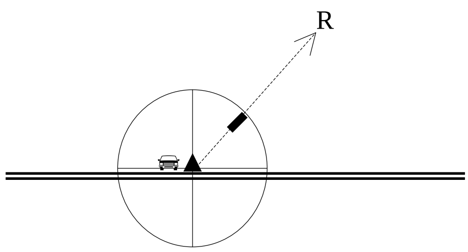


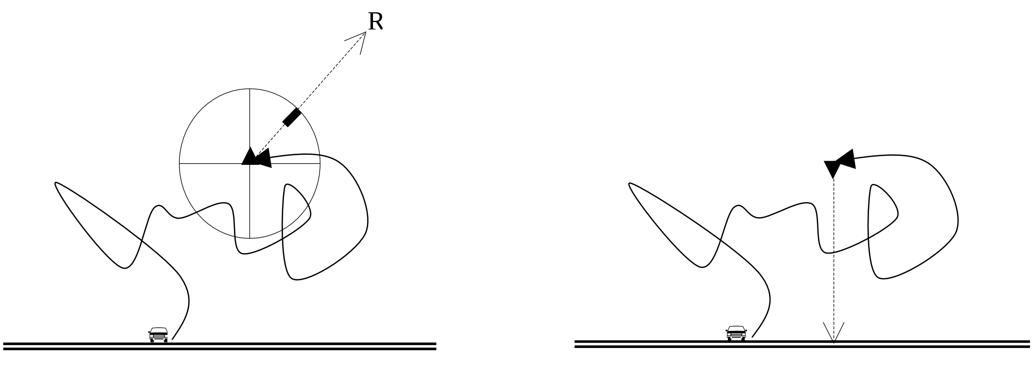
➔ Si le point R est assez éloigné, toutefois, les deux directions indiquées sont ***pratiquement*** parallèles, du moins pour l'usage que l'on veut en faire. Alors que, dans le schéma précédent, le point R avait, dans un certain repère, pour coordonnées (3 ; 3), il a, dans le même repère, les coordonnées (400 ; 400) dans le dessin ci-après : le quasi-parallélisme apparent est confirmé par la proximité des coefficients directeurs *m* et *n* des droites (P_1R) et (P_2R).



• Comment le promeneur pourra-t-il alors retrouver la direction du chemin où il a laissé son véhicule, une fois sa promenade en forêt achevée ?

➔ Au départ, et à l'aide de sa montre, le promeneur estime l'angle que fait la direction du repère R avec la perpendiculaire à la route. Arrivé au point où il décide de retourner à sa voiture, le promeneur positionne sa montre de façon que la marque qu'il y a repérée soit dirigée vers R ; il se positionne alors dans la direction de midi à sa montre (ci-après à gauche). Puis le promeneur fait un demi-tour sur lui même et part dans la direction ainsi repérée (ci-après, à droite).





➔ Bien entendu, le promeneur n’est pas obligé d’aller tout droit (ce que, d’ailleurs, il ne pourra peut-être pas faire toujours). Chaque fois que nécessaire, donc, il « refera le point » ainsi qu’on vient de le voir.

d) Dans le prolongement de ce qui précède, on s’arrête un instant sur la question que voici.

Quelle peut être l’utilité des triangles semblables dans le cadre extramathématique ? (VAC, MJ, 2^{de}, 18)

• La similitude est un outil essentiel ***par exemple*** pour la confection de ***plans*** et pour justifier leur emploi.

• On illustrera ces pratiques par quelques extraits d’un manuel de géométrie élémentaire publié en 1921 pour… le cours moyen.

I. – Mesure des distances inaccessibles

……………………………………………………………..……………………………………….

369. Problème IV. – *Mesurer la distance d’un point donné à un autre inaccessible, en se servant du graphomètre.*

Soit AC la distance à mesurer (fig. 324). On choisit une base AB telle que du point B on puisse voir le point C ; puis on mesure AB et, avec le graphomètre, les angles BAC et ABC.

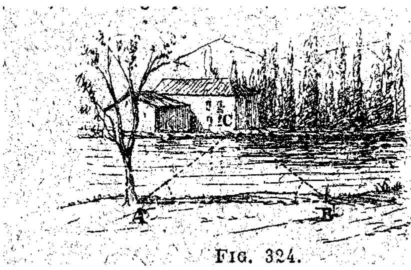


FIG. 324.

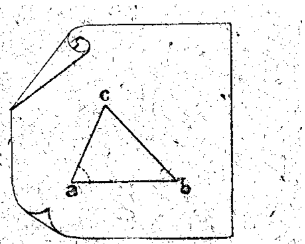


FIG. 325.

Après cela, on trace sur le papier une droite *ab* égale à la base AB réduite à l’échelle (fig. 325), et aux extrémités de cette droite, on construit les angles *bac* et *abc* respectivement égaux à BAC et à ABC. En mesurant à l’échelle la droite *ac* du triangle ainsi obtenu on a la distance AC demandée.

370. Problème V. – *Mesurer la distance de deux points inaccessibles.*

Soit à mesurer la distance des points A et B représentés par la figure 326.

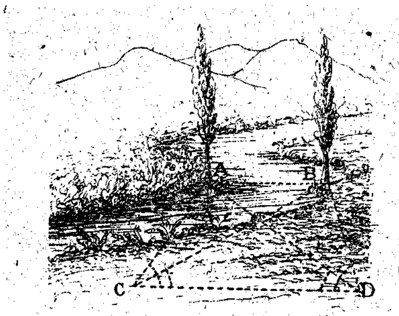


FIG. 326.

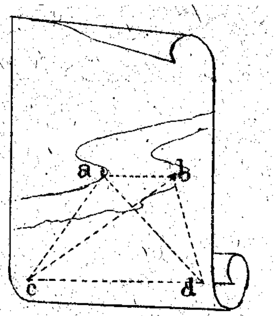


FIG. 327.

On choisit une base CD telle que de ses extrémités C et D on puisse voir les points A et B ; on mesure très exactement cette base ainsi que les angles ACD, BCD, ADC et BDC. Ces éléments permettent de construire le plan *abdc* (fig. 327), sur lequel on mesure à l’échelle la longueur AB.

II. – Mesure des hauteurs

……………………………………………………………………………………………..…………

371. Problème I. – *Mesurer à l'aide du graphomètre la hauteur d'une tour dont le pied est accessible.*

On installe le graphomètre à une certaine distance de la tour (fig. 328) et on le dispose de manière que le limbe soit vertical et l'alidade fixe horizontale.

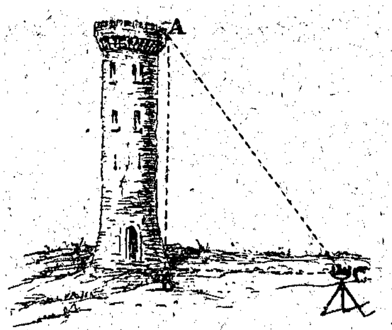


FIG. 328.

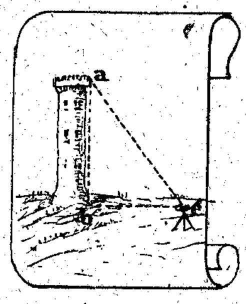


FIG. 329.

On mesure ensuite l'angle ACB formé avec l'horizontale CB et la ligne de visée CA allant du centre du graphomètre au sommet de la tour, ainsi que la distance BC qui séparer le graphomètre de la tour. Avec ces données, on peut construire un triangle rectangle *abc* semblable au triangle ABC (fig. 329) ; la longueur de *ab*, mesurée à l'échelle et augmentée de la hauteur du graphomètre, s'il y a lieu, donne la hauteur demandée.

………………………………………………………………………………………………..……

374. Problème IV. – *Déterminer la hauteur d'un édifice dont le pied est inaccessible.*

Soit l'édifice représenté sur la figure 332. On prend dans la direction de cet édifice une base CD dont on mesure la longueur ; puis, à l'aide du graphomètre, on détermine la valeur des angles CDA et BCA.

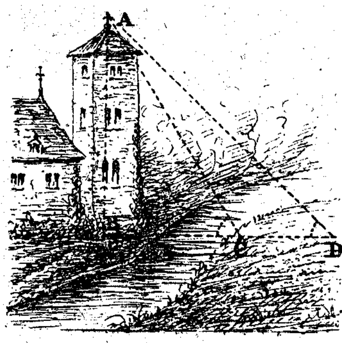


FIG. 332.

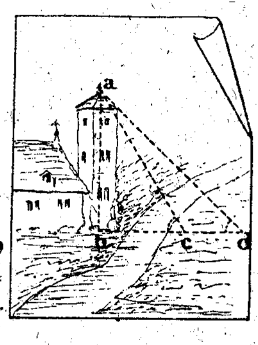


FIG. 333.

Ces éléments permettent de construire sur le papier un triangle *cad* semblable à CAD (fig. 333) ; ce triangle étant construit, on prolonge le côté *cd* et sur ce prolongement, on abaisse la perpendiculaire *ab*, que l'on mesure à l'échelle.

e) Les matériaux – très divers – qui précèdent, et dont l'un des objets est d'aider à la diversification de l'enseignement, relèvent des mathématiques ***pour l'enseignement***. Leur utilisation en classe, qui suppose leur intégration dans une organisation mathématique et la conception d'organisations didactiques appropriées, reste à développer.

1.3. Expérimenter, déduire

a) Comme l'illustrent les exemples précédents, la diversification de l'enseignement se réalise non seulement à travers les ***contenus*** étudiés mais aussi à travers les ***gestes d'étude*** qu'on accomplira. À cet égard, le dualisme (et la dialectique) entre ***expérimentation*** et ***déduction théorique***, essentielle au plan épistémologique, est précieuse au plan de la ***convivialité didactique*** : on l'exemplifie donc à nouveau ci-après, à propos de contenus évoqués lors de la séance 17.

• Considérons donc la question que voici : « Est-il vrai que, si n est un entier pair non nul, l'entier $n^4 + 9$ est divisible par 5 ? »

➔ L'étude de cette question peut d'abord comporter une phase d'exploration numérique « artisanale », chaque élève examinant un exemple dans la suite des premiers entiers 0, 1, 2, 3, …, n.

➔ On pourra ensuite passer à une exploration plus systématique à l'aide du tableur (voir ci-après, où on a D1 = C1^4+9, etc.).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	2	25	62	14776345	122	221533465	182	1097199385
2	4	265	64	16777225	124	236421385	184	1146228745
3	6	1305	66	18974745	126	252047385	186	1196883225
4	8	4105	68	21381385	128	268435465	188	1249198345
5	10	10009	70	24010009	130	285610009	190	1303210009
6	12	20745	72	26873865	132	303595785	192	1358954505
7	14	38425	74	29986585	134	322417945	194	1416468505
8	16	65545	76	33362185	136	342102025	196	1475789065
9	18	104985	78	37015065	138	362673945	198	1536953625
10	20	160009	80	40960009	140	384160009	200	1600000009
11	22	234265	82	45212185	142	406586905	202	1664966425
12	24	331785	84	49787145	144	429981705	204	1731891465
13	26	456985	86	54700825	146	454371865	206	1800814105
14	28	614665	88	59969545	148	479785225	208	1871773705
15	30	810009	90	65610009	150	506250009	210	1944810009
16	32	1048585	92	71639305	152	533794825	212	2019963145
17	34	1336345	94	78074905	154	562448665	214	2097273625
18	36	1679625	96	84934665	156	592240905	216	2176782345
19	38	2085145	98	92236825	158	623201305	218	2258530585
20	40	2560009	100	100000009	160	655360009	220	2342560009
21	42	3111705	102	108243225	162	688747545	222	2428912665
22	44	3748105	104	116985865	164	723394825	224	2517630985
23	46	4477465	106	126247705	166	759333145	226	2608757785
24	48	5308425	108	136048905	168	796594185	228	2702336265
25	50	6250009	110	146410009	170	835210009	230	2798410009
26	52	7311625	112	157351945	172	875213065	232	2897022985
27	54	8503065	114	168896025	174	916636185	234	2998219545
28	56	9834505	116	181063945	176	959512585	236	3102044425
29	58	11316505	118	193877785	178	1003875865	238	3208542745
30	60	12960009	120	207360009	180	1049760009	240	3317760009

La conclusion de cette étude expérimentale ne fait guère de doute : la propriété annoncée 1) est fausse puisque par exemple $50^4 + 9 = 6250009$; 2) est vraie si, et seulement si, n est un entier pair qui n'est pas un multiple de 10.

➔ Peut-on obtenir le résultat précédent par ***déduction théorique***, auquel cas « la théorie confirmerait l'expérience » ? On est amené à explorer le développement de $(10a + 2b)^4$, où $a > 0$ et où l'on peut avoir $b = 0, 1, 2, 3, 4$. Pour $b = 0$, on a : $(10a + 2b)^4 = (10a)^4 = 10^4 \times a^4$, en sorte que l'écriture décimale de $(10a + 2b)^4 + 9$ se terminera par un 9, comme prévu expérimentalement. Lorsque $b = 1$, on aura à examiner l'expression

$$(10a + 2)^4.$$

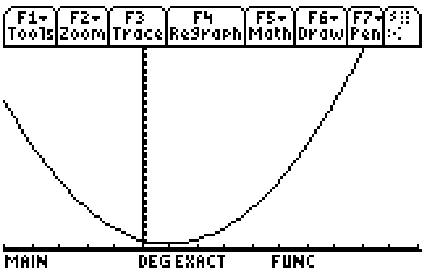
On pourra, par différents procédés, établir que le chiffre des unités de $(10a + 2)^4$ est celui de $2^4 = 16$, en sorte que le chiffre des unités de $(10a + 2b)^4 + 9$ sera celui de $16 + 9 = 25$, conclusion théorique qui confirme également le résultat expérimental obtenu. On a ***par exemple*** : $(10a + 2)^4 = (10a + 2)^2 (10a + 2)^2 = (100a^2 + 40a + 4) (100a^2 + 40a + 4) = (10A + 4) (10A + 4) = 100A^2 + 80A + 16 = 10B + 6$. On établira de même que le chiffre des unités de $(10a + 4)^4$ est celui de $4^4 = 256$, etc.

• Considérons ensuite l'autre question évoquée lors de la séance 17 : « Est-il vrai que, si n est un entier quelconque, l'entier $n^4 + 4$ est divisible par l'entier $n^2 + 2n + 2$? »

➔ On peut, là encore, faire une première étude « à la main » : pour $n = 0$, $n^4 + 4 = 4$ est divisible par $n^2 + 2n + 2 = 2$; pour $n = 1$, $n^4 + 4 = 5$ est divisible par $n^2 + 2n + 2 = 5$; pour $n = 2$, $n^4 + 4 = 20$ est divisible par $n^2 + 2n + 2 = 10$; etc. Puis on passe au tableur (on a pris ici B = A^4+4, C = A^2+2*A1+2, D = B/C).

	A	B	C	D
1	0	4	2	2
2	1	5	5	1
3	2	20	10	2
4	3	85	17	5
5	4	260	26	10
6	5	629	37	17
7	6	1300	50	26
8	7	2405	65	37
9	8	4100	82	50
10	9	6565	101	65
11	10	10004	122	82
12	11	14645	145	101
13	12	20740	170	122
14	13	28565	197	145
15	14	38420	226	170
16	15	50629	257	197
17	16	65540	290	226
18	17	83525	325	257
19	18	104980	362	290
20	19	130325	401	325

On peut encore étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{x^4 + 4}{x^2 + 2x + 2}$ à l'aide d'une calculatrice graphique. On obtient ceci.



Selon la culture mathématique de la classe, on peut conjecturer qu'on a là affaire à une parabole, ce qui peut conduire à penser que le quotient $\dfrac{x^4 + 4}{x^2 + 2x + 2}$ s'écrit sous la forme ax^2 +

$bx + c$. Pour $x = 0$, on obtient $c = 2$. Pour $x = 1$ il vient alors $a + b = –1$ tandis que, pour $x = –1$, on obtient $a – b = 3$; la résolution du système en a et b donne ensuite $a = 1$ et $b = –2$, en sorte que l'on parvient à la ***conjecture*** que $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 – 2x + 2)$, ce qui expliquerait le phénomène constaté expérimentalement. La vérification ***théorique*** de l'identité précédente constituera alors un autre petit travail pour la classe : $(x^2 + 2x + 2)(x^2 – 2x + 2) = [(x^2 + 2) + 2x][(x^2 + 2) – 2x] = (x^2 + 2)^2 – (2x)^2 = (x^4 + 4x^2 + 4) – 4x^2 = x^4 + 4$.

• Les deux résultats établis ne sont pas sans lien : $n^4 + 9$ est divisible par 5 si et seulement si $n^4 + 4$ est divisible par 5. Or l'examen des résultats de calcul obtenus à l'aide du tableur (ci-dessus) porte à penser que, lorsque n n'est pas un multiple de 5, l'un des deux facteurs $A = n^2 + 2n + 2$ et $B = n^2 – 2n + 2$ est un multiple de 5. C'est là une conjecture que l'on livre à la sagacité du lecteur.

b) Ce qui précède ne peut venir à la vie que si le professeur fait partager par ses élèves une compréhension adéquate de la dialectique expérimentation/déduction théorique. On y réfléchira ici à partir des questions suivantes.

1. Faut-il différencier les termes de « preuve » et de « démonstration » et dans quels cadres ? Par exemple, la « démonstration » par les aires du théorème de Pythagore me semble être une vraie démonstration (qui est donc aussi une preuve : elle avère une propriété… qui devient un théorème) si elle est bâtie et rédigée rigoureusement ; en revanche, cette « démonstration » me semble avoir un simple statut de « preuve » lorsqu'elle est motivée en classe en animation sous Géoplan (on fait bouger les triangles…). Est-ce exact ? Par ailleurs, l'expérimentation a-t-elle un statut de preuve ? Pour moi, l'expérimentation sert à renforcer une conjecture, à la rendre presque vraie, et la démonstration est la dernière pierre à poser pour faire passer la conjecture à l'état de théorème. S'il en est différemment, puisque vous distinguez monde sensible et monde mathématique, quelle est la raison d'être de la démonstration ? (SP, MJ, 4e, 17)

2. Finalement, quelle est la véritable utilité d'une démonstration quand l'expérimentation a été efficace et a convaincu tout le monde ? (CS2, OS, 2de, 17)

• L'expérimentation apporte des ***éléments de preuve*** de la vérité (ou de la fausseté) d'une assertion θ relative au « système » dont parle θ. Pour éclairer ce point, il convient de préciser à nouveau certains points d'épistémologie de la connaissance scientifique.

➔ Soit un système $\mathcal{S}$, qu'on ne précisera pas davantage pour le moment : $\mathcal{S}$ peut être de nature biologique, physique ou même… mathématique. Et soit une assertion θ à propos de $\mathcal{S}$. Le fait que θ soit vraie dans $\mathcal{S}$ sera notée

$$\models_{\mathcal{S}} \theta.$$

➔ Comment savoir si l'on a $\models_{\mathcal{S}} \theta$? La réponse poussée en avant par les mathématiques depuis des millénaires est la suivante : on construit une théorie déductive $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire une théorie telle que, ***au moins***,

$$\text{si } \vdash_{\mathcal{T}} \theta \text{ alors } \models_{\mathcal{S}} \theta$$

soit encore

$$\models_{\mathcal{S}} \theta \text{ si } \vdash_{\mathcal{T}} \theta$$

où $\vdash_{\mathcal{T}} \theta$ signifie que θ est ***déductible*** dans $\mathcal{T}$, c'est-à-dire est un ***théorème*** de $\mathcal{T}$ (au sens large, en comptant les axiomes de $\mathcal{T}$ comme des théorèmes). Bien entendu, l'idéal serait que l'on ait

$$\models_{\mathcal{S}} \theta \text{ si, \textit{\textbf{et seulement si}}, } \vdash_{\mathcal{T}} \theta.$$

➔ Lorsqu'on se trouve dans la situation précédente, on peut, pour établir que θ est ***vraie*** dans $\mathcal{S}$, chercher à établir que θ est ***déductible*** dans $\mathcal{T}$. Telle est la solution « magique » qu'apporte les mathématiques. À une condition : que l'on ait pu construire une théorie déductive $\mathcal{T}$ adéquate !

➔ La construction de $\mathcal{T}$ suppose essentiellement qu'on y mette des assertions vraies relatives à $\mathcal{S}$, assertions qui auront alors le statut d'axiome. Mais comment sait-on que telle assertion est vraie dans $\mathcal{S}$ sinon en « interrogeant » $\mathcal{S}$, c'est-à-dire en procédant à une expérimentation sur $\mathcal{S}$? Si, par exemple, $\mathcal{S}$ est l'espace physique autour de nous, $\mathcal{E}$, comment sait-on que, disons, « par deux points distincts il passe une droite et une seule » ? En interrogeant $\mathcal{E}$. Mais c'est là que le bât blesse : personne ne peut se targuer d'avoir vérifié cette assertion ***pour tous les couples de points distincts de l'espace !*** En d'autres termes, la théorie déductive $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ sera elle-même fondée sur un mécanisme d'***induction à partir de résultats de l'expérience***.

➔ En pratique, on devra construire $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ dans des allers et retours incessants entre déduction théorique et expérimentation : on met dans $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ des assertions que l'expérimentation a prouvé raisonnablement être vraies dans $\mathcal{S}$, et, en sens inverse, on vérifiera expérimentalement les théorèmes θ établis déductivement dans $\mathcal{T}(\mathcal{S})$, pour s'assurer que $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ est « fiable » dans ce qu'elle nous révèle sur $\mathcal{S}$.

• La confusion qui règne trop souvent sur le sujet évoqué résulte en partie de la confusion dans l'emploi de certains termes devenus courants en la matière.

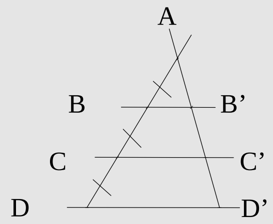
➔ Quand on parle de « conjecture » (du latin *conjectura* « supposition »), on peut parler d'une conjecture θ relative à $\mathcal{S}$, c'est-à-dire d'une conjecture « expérimentale », ou d'une conjecture relative à $\mathcal{T}(\mathcal{S})$, c'est-à-dire d'une conjecture « théorique » : dans le premier cas, on se demande si θ est vraie (ou non) dans $\mathcal{S}$, tandis que, dans l'autre, on se demande si θ est déductible dans $\mathcal{T}(\mathcal{S})$. Si $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ est « fiable », et si l'on peut établir que l'on a $\vdash_{\mathcal{T}(\mathcal{S})} \theta$, alors on pourra conclure que $\models_{\mathcal{T}(\mathcal{S})} \theta$: telle est la principale raison d'être des théories déductives, telle est la justification des efforts consentis pour les élaborer de façon bien contrôlée et pour apprendre à les faire « parler ».

➔ Des observations analogues peuvent être faites à propos du qualificatif d'***évident***, employé à tort et à travers. Une assertion θ peut être expérimentalement « évidente » en ce sens qu'il paraît aller de soi qu'elle est vraie dans $\mathcal{S}$, et ne pas être du tout déductivement « évidente », en ce sens qu'il ne paraît pas facile de la déduire dans telle théorie $\mathcal{T}(\mathcal{S})$.

➲ À cet égard on relira le passage reproduit ci-après des notes de la séance 13 du Séminaire 2004-2005.

Déduire, mais de quoi ?

Sur le thème du théorème de Thalès, pour travailler l'OMP relative au théorème des milieux, j'ai donné un DM utilisant le théorème des milieux et les propriétés du parallélogramme pour démontrer le théorème de Thalès dans le cas illustré par la figure suivante :



Certains élèves ont utilisé le « théorème » suivant, non vu en cours, mais qui est la pierre angulaire de la démonstration de Thalès : « Si AB = BC = CD et (BB')//(CC')//(DD'), alors AB' = B'C' = C'D'. » Ce n'est pas ce que j'attendais, mais, s'agissant, de travail personnel, l'énonciation de cette conjecture « évidente » relève tout autant d'un réel effort mathématique. Comment évaluer cette approche ? (…, 4e, 11)

Matériaux pour une réponse

1. La question soulève une difficulté connue : quand on doit déduire, sait-on exactement ce que l'on suppose « disponible » ? Même les candidats au CAPES ou à l'agrégation sont tentés d'utiliser des « théorèmes » opportunistes, qui paraissent vrais, mais dont ils ne savent pas toujours s'ils appartiennent à la théorie légitimement disponible !

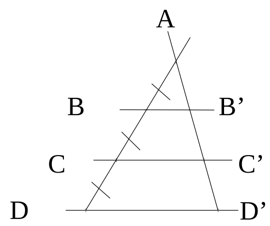
2. Si, par exemple, on suppose que la TGD contient le théorème de Thalès, il est facile d'en déduire que, dans la configuration considérée ci-dessus, on a bien AB' = B'C' = C'D'. Mais comment déduire ce fait spatial si l'on suppose simplement la disponibilité des théorèmes des milieux ?

① Bien entendu, il est indispensable que soit mise en place dans la classe la notion de ***déduction à partir de…*** – qui explicite de manière vitale la notion trop peu précise de ***démonstration***.

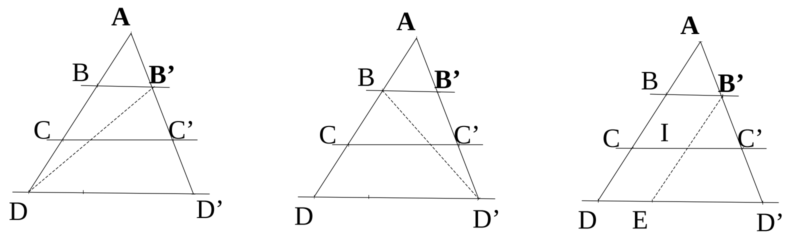
❶ La question « Comment démontre-t-on… ? » n'a guère de sens si on ne dit pas à partir de quels ensembles de faits « théorisés », c'est-à-dire de ***théorèmes***, on s'autorise à déduire.

❷ Dans le cas examiné, le 2e théorème des milieux (« Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, elle coupe le troisième en son milieu ») permet déjà de déduire, en considérant le triangle ACC', que l'on a AB' = B'C'.

❸ Peut-on déduire aussi l'égalité B'C' = C'D' ?



Plusieurs voies peuvent être tentées. La question cruciale – « Comment démontrer une égalité du type B'C' = C'D' ? » (où C' est entre B' et D') – peut recevoir ici la réponse suivante : en considérant un triangle B'D'M (respectivement, MB'D') tel que l'on puisse établir que la parallèle à (D'M) (resp., à (MB')) passe par le milieu de [B'M] (resp., de [MD']). Ici, deux tels triangles sont des candidats évidents, à savoir B'D'D et BB'D', auquel on peut rajouter B'D'E (où (B'E) // (AB)) ou, de façon équivalente, FB'D' (où F $\in$ (DD') et (BF) // (AD')).



a) Dans le cas de B’D’D, le fait que [B’D] est coupé en son milieu par (CC’) se déduit de l’application du 2^{e} théorème des milieux au triangle BB’D ; de même, dans le cas de BB’D’, le fait que [BD’] est coupé en son milieu par (CC’) se déduit de l’application du 2^{e} théorème des milieux au triangle BDD’.

b) Dans le cas du triangle EB’D’, l’égalité B’I = IE se déduit du fait que les quadrilatères B’ICB et IEDC sont des parallélogrammes et du fait que BC = CD.

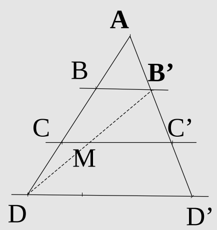
② Le travail déductif demandé aux élèves aurait sans doute mérité d’être cadré davantage qu’il ne l’a été – à l’aide, précisément, de la notion de ***déduction de… à partir de…*** Contre l’habitude des énoncés en forme de démonstration lacunaire, il est possible d’adopter une forme beaucoup plus proche du mouvement de production d’une déduction, comme il en va ci-après.

…

On rappelle l’énoncé du 2^{e} théorème des milieux : *Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d’un côté et est parallèle à un second côté, elle coupe le troisième en son milieu.*

1. En considérant le triangle ACC’, montrer qu’on peut déduire du 2^{e} théorème des milieux et du fait que B est le milieu de [AC] le fait que B’ est le milieu de [AC’].

2. a) On imagine ici qu’on a déduit des hypothèses et du 2^{e} théorème des milieux le fait que M est le milieu de [B’D] (v. la figure ci-contre). En considérant le triangle B’DD’, montrer qu’on peut déduire de ce fait et du 2^{e} théorème des milieux le fait que C’ est le milieu de [B’D’].



b) En considérant le triangle DBB’, montrer qu’on peut déduire du 2^{e} théorème des milieux et du fait que C est le milieu de [BD] le fait que M est le milieu de [B’D].

3. À partir des résultats des questions 1 et 2, rédiger une démonstration complète du fait que, si (BB’)//(CC’)//(DD’) et si AB = BC = CD alors on a AB’ = B’C’ = C’D’.

4. Le fait spatial θ que l’on demande aux élèves de démontrer est présenté dans la question examinée ici comme une « conjecture “évidente” ». Il y a là une affirmation qui mérite une attention particulière.

① Qu’est-ce qui est « évident », ici ? Ce n’est certainement pas le fait « théorique » que θ peut se déduire du 2^{e} théorème des milieux et des hypothèses faites ((BB’)//(CC’)//(DD’) et AB = BC = CD) ! Ce qui est quasi évident, en revanche, c’est le ***fait spatial lui-même***. L’évidence est, si l’on peut dire, ***physique***. Mais elle n’est certainement pas une « évidence » ***déductive***.

❶ Cette distinction est au cœur de l’activité mathématique depuis toujours. C’est ainsi qu’un autre fait spatial, ***l’inégalité triangulaire***, a constitué très tôt une bonne illustration de la confusion qui peut régner sur le sens de ce que font les mathématiciens. Dans la proposition 20 du livre I des *Éléments* (vers 300 av. J.-C.), Euclide établit déductivement que, en tout triangle ABC, on a BA + AC > BC. Or Proclus, commentateur du V^{e} siècle, rapporte à ce propos une critique qui, depuis, n’a guère cessé :

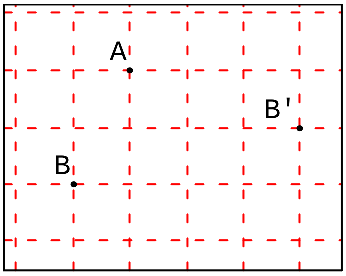
Les Épicuriens raillaient ce théorème, en disant qu'il était évident même pour un âne. Car si l'on place du fourrage à l'une des extrémités d'un côté, l'âne en quête de nourriture, parcourt un seul côté du triangle et non deux !

❷ D'emblée s'installe ainsi une confusion sur la nature de ce à quoi « jouent » les mathématiciens : une confusion qui dure encore, mais une confusion qui ***peut*** être levée, et qui ***doit*** l'être. Si vraiment la ***démonstration*** de l'inégalité triangulaire était indispensable pour être certain que l'inégalité triangulaire est ***vraie***, on devrait en effet en conclure, avec certains Épicuriens, que le mathématicien est plus… obtus qu'un âne !

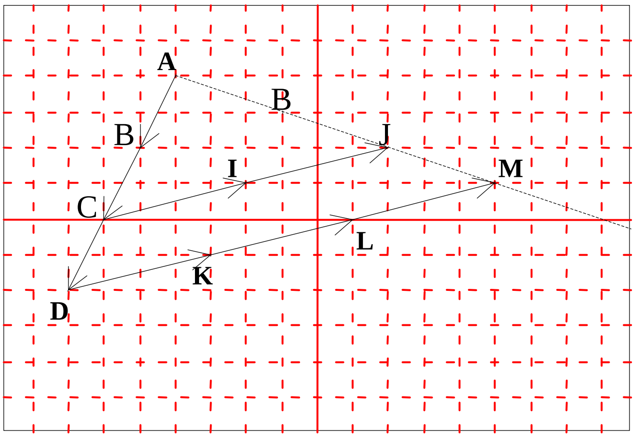
❸ Ce n'est donc pas parce que l'inégalité triangulaire est un ***fait spatial évident*** (du latin *evidens* « clair, apparent, manifeste ») que sa déduction de la TGD est, elle, « évidente » ! ***Inversement***, ce n'est pas d'abord pour être sûr qu'un fait spatial est vrai qu'on tente de le déduire de la TGD… Tels sont les principes épistémologique qu'il convient ***d'installer et de faire vivre dans la culture de la classe***.

② Le fait spatial θ a beau être physiquement « évident », il n'est pas inutile de s'assurer qu'il est ***vrai***, et cela au moyen d'une ***expérience graphique***.

❶ Pour cela, il suffit de choisir par exemple A, B, B' (ci-après) : les autres points de l'épure en découlent.



❷ Une telle expérience graphique, assortie d'un commentaire explicatif, gagne à être incluse dans le DM – à moins qu'elle ne soit réalisée à titre de préparation au DM, celui-ci se centrant alors sur la déduction de θ. Pour le choix de points indiqué ci-dessus (chaque élève ou équipe d'élèves fait un choix propre), un résultat graphique typique est le suivant [ci-après].



Quant au commentaire, il pourra prendre la forme suivante :

« Puisqu'on passe de A à B en faisant 2 pas vers le bas et un vers la gauche, on passe de B à C puis de C à D de même (c'est-à-dire en faisant 2 pas vers le bas et 1 vers la gauche). Puisqu'on passe de B à B' en faisant 1 pas vers le haut et 4 vers la droite, on obtient I sur la parallèle à (BB') passant par B en faisant 1 pas vers le haut et 4 vers la droite en partant de B, puis J en faisant de même à partir de I. On obtient de même, à partir de D, les points K, L, M situés sur la parallèle à (BB’) passant par D. En observant alors qu’on obtient des points de la demi-droite [AB’) en faisant 1 pas le bas et 3 pas vers la droite à partir de B’, on constate que J et M sont sur la demi-droite [AB’), c’est-à-dire que J = C’ et M = D’, et que l’on a bien AB’ = B’J = JM (= $\sqrt{10}$ cm) : l’expérience confirme la conjecture θ. »

• La pratique de l’expérimentation suppose la création dans la classe d’une ***culture*** de l’expérimentation. Mais celle-ci ne peut se développer qu’appuyée sur des savoirs et des savoir-faire, dont l’usage du quadrillage, ci-dessus, donne une idée. C’est ici, principalement, que se situe – à propos de chacun des trois grands domaines d’études, l’usage des TIC, dont il convient d’apprendre à user de manière pertinente…

Après-midi

Séance d'explicitation

3. Les Archives du Séminaire

3.1. En 4^e^ : « Médianes d'un triangle »

a) Le trinôme formé de *WB*, *FL* et *PV* répond à la question ci-après.

> Que proposent les *Archives du Séminaire* en matière d'***analyse didactique*** du compte rendu de séance en 4^e^ intitulé « À propos des médianes d'un triangle » ?

b) Remarques & commentaires…

3.2. En 5^e^ : « Comparer des relatifs »

a) Un deuxième compte rendu est présenté par le trinôme formé d'*AB*, *OB* et *OL2*, avec pour objet plus large la question suivante.

> Que proposent les *Archives du Séminaire* en matière d'***analyse didactique*** du compte rendu de séance en 5^e^ intitulé « Comparer des relatifs » ?

b) Remarques & commentaires…

3.3. En 2^de^ : « Modélisation & fonctions »

a) Un troisième compte rendu de recherche, présenté par *SF*, *SH* et *AG*, a trait à la question ci-après.

> Que proposent les *Archives du Séminaire* en matière d'***analyse didactique*** d'un passage d'une vidéo de séance en 2^de^ faisant par ailleurs l'objet d'un compte rendu écrit intitulé « Modélisation & fonctions » ?

b) On visionne un extrait de la vidéo de la séance.

c) Remarques & commentaires…

3.4. Recherches à venir

Les recherches à venir dans les *Archives du Séminaire* seront précisées ultérieurement. La prochaine séance d'explicitation devrait avoir lieu le ***mardi 20 mars***.

4. À propos des TER : un forum express

Le contenu du travail réalisé dans le cadre de ce forum express sera repris dans le ***Journal du TER*** (à l'adresse http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2006-2007/ombilic.html).

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 20 : mardi 13 mars 2007

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Problématique et fonctionnement du Séminaire // 2. Expérimenter, déduire // 3. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques // 4. Le Journal des TER

0. Questions de la semaine

Journée 20 (13 mars 2007)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4[e] (et soutien en 5[e])

En 4[e], on peut démontrer la formule $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ en calculant l'aire d'un rectangle de deux façons différentes. Comment généraliser à tous les nombres relatifs ? Comment motiver cette formule au collège ?

1. Problématique et fonctionnement du Séminaire

1.1. Archives du Séminaire : recherches à venir

a) Le trinôme formé de *FBA*, *MG2* et *CAR* répondra à cette question.

Que proposent les *Archives du Séminaire* à propos du thème des ***triangles isométriques et semblables*** ?

b) Le binôme formé d'*IIP* et *JN* répondra à la question que voici.

Que proposent les *Archives du Séminaire* à propos de la technique des ***comptes rendus d'observation fictifs*** ?

1.2. Dernière étape…

a) On commence ce matin une dernière série de quatre de séances. La participation et la contribution de *chacun* et de *chaque trinôme* est fortement sollicitée.

b) La journée du 20 mars aura la structure suivante : demi-classe de 9 h à 10 h 30 ; classe entière de 10 h 45 à 12 h 15 puis de 17 h 15 à 18 h 45. La demi-classe appelée à réaliser le TD6 de 9 h à 10 h 30 a la composition suivante :

VAC – AB – YB – TB – MBP – MD – VD – AEO – AG – SG – RH – AMJ – ML – OL1 – OL2 – SM1 – JN – SP – CAR – BR – SR – CS2 – JS – PV

Chacune des participants se munira, dans toute la mesure du possible, d'un ordinateur portable (avec carte Wi-fi).

2. Expérimenter, déduire

2.1. On revient ici encore une fois, mais sans doute pour la dernière fois, sur la dialectique de l'expérimentation et de la théorisation hypothético-déductive, en mettant l'accent sur le rôle, la valeur de la théorie et sur les difficultés de son élaboration.

2.2. Pour cela, on réexamine d'abord un matériel consigné dans les notes du Séminaire 2005-2006, à propos de la construction d'une théorie déductive adéquate – on ne se situe pas ici, bien évidemment, dans le cas de telle ou telle classe du collège, où pourtant on ne saurait échapper au type de difficultés envisagée, si implicites qu'elles demeurent.

On examine ci-dessous un exemple simple où ce qui est *vrai* n'est pas (encore) *déductible*.

1) On étudie le plan $\prod$ usuel, avec ses points A, B…, ses droites d, d'…, sa distance δ entre points : $\delta(A, B) = AB$. On peut procéder à des expérience sur $\prod$, mais les assertions vraies que l'on considère ci-après seront regardées comme décrivant des faits spatiaux « bien connus » et n'appelant pas de confirmation expérimentale supplémentaire. On veut en revanche construire une *théorie déductive* de la géométrie de $\prod$.

2) Pour cela, on retient pour axiomes les énoncés suivants :

Π_1. Étant donné des points A, B distincts, il existe une droite d unique qui passe par A et B.

Π_2. Il existe trois points non alignés.

Π_3. $\delta : \prod \times \prod \to \mathbb{R}_+$ est telle que, pour toute droite d, il existe une bijection f de d sur $\mathbb{R}$ telle que $\delta(A, B) = AB = |f(B) - f(A)|$, pour tous $A, B \in d$ (f est un *système de coordonnée* de d).

3) On examine alors les assertions suivantes, vraies dans le plan usuel, pour savoir si elles se laissent déduire de $\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \}$:

θ_1. Pour tous A, B, $AB = 0$ si et seulement si $A = B$.

☞ $\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash \theta_1$. Si en effet $AB = 0$ alors $|f(B) - f(A)| = 0$ et donc $f(B) = f(A)$; f étant une bijection, il vient $B = A$. Réciproquement on a : $AA = |f(A) - f(A)| = 0$.

θ_2. Pour tous A, B, $AB = BA$.

☞ $\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash \theta_2$. On a en effet $AB = |f(B) - f(A)| = |f(A) - f(B)| = BA$.

θ_3. Pour tous A, B, C, $AB + BC \geq AC$.

☛ $\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash \theta_3$?…

θ_4. Deux droites distinctes ont au plus un point commun.

☞ $\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash \theta_4$. Deux droites distinctes ont en effet au plus un point commun : car si elles en avaient (au moins) deux, elles seraient identiques (d'après Π_1).

θ_5. Si $d \,//\, d'$ alors $d' \,//\, d$ (d et d' sont dites parallèles si, ou bien $d = d'$, ou bien $d \cap d' = \varnothing$).

☞ $\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash \theta_5$. On a en effet $d \,//\, d'$ ssi $d = d'$ ou $d \cap d' = \varnothing$, c'est-à-dire ssi $d' = d$ ou $d' \cap d = \varnothing$, et donc ssi $d' \,//\, d$.

θ_6. Si $d \,//\, d'$ et $d' \,//\, d''$ alors $d \,//\, d''$.

☛ $\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash \theta_6$?…

θ_7. Si $O \in d$, et $x \in \mathbb{R}_+$, l'équation (en M) $OM = x$ a exactement deux solutions dans d.

☞ { Π_1, Π_2, Π_3 } $\vdash \theta_7$. On a en effet : $OM = x \Leftrightarrow |f(M)–f(O)| = x \Leftrightarrow f(M)–f(O) = \pm x \Leftrightarrow f(M) = f(O) \pm x \Leftrightarrow M = f^{-1}(f(O) \pm x)$.

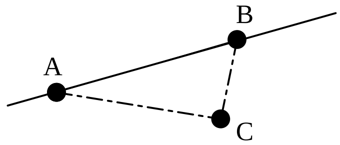
4) On reprend le problème relatif à θ_3 : a-t-on

$$\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash \forall A\ \forall B\ \forall C\ AB + BC \geq AC\ ?$$

• Dans le plan usuel $\prod$, δ étant la distance usuelle (en cm par exemple), on choisit une droite d et $k \in \mathbb{R}_+^*$ et on pose :

$$\delta_k(A, B) = \begin{cases} k\,\delta(A, B) \text{ si } A, B \in d \\ \delta(A, B) \text{ sinon} \end{cases}.$$

• Il est clair que $\prod$ muni de δ_k vérifie les axiomes Π_1, Π_2, Π_3. Montrons, en examinant le système ($\prod$, δ_k), que l'inégalité triangulaire θ_3 n'est pas déductible de { Π_1, Π_2, Π_3 }. Soit en effet A, B $\in d$ et C $\in \prod$, avec C $\notin$ (AB) et AC > BC.

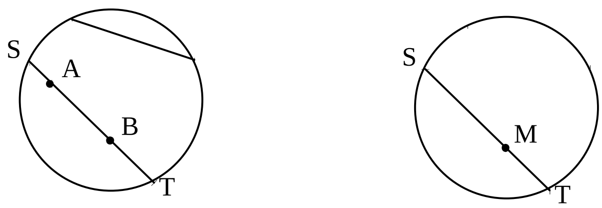


On a : $\delta_k(A, B) + \delta_k(B, C) = k\, AB + BC$. Pour k assez petit, on a donc : $\delta_k(A, B) + \delta_k(B, C) = k\, AB + BC < AC = \delta_k(A, C)$.

5) On reprend maintenant le problème relatif à θ_6 : a-t-on

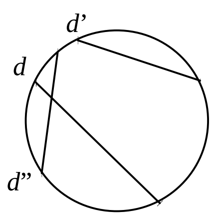
$$\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash (d\ //\ d' \wedge d'\ //\ d'') \Rightarrow d\ //\ d''\ ?$$

• On prend pour modèle de la théorie un disque ouvert, pour droites les cordes ouvertes (figure de gauche, ci-dessous). Ce système (dit de Cayley-Klein) vérifie clairement les axiomes Π_1 et Π_2.



• Pour toute corde]ST[et tout M $\in$]ST[, on pose $f_{]ST[}(M) = \ln \dfrac{MT}{MS}$ puis $\delta(A, B) = |f_{]ST[}(B) - f_{]ST[}(A)|$. Pour s'assurer que l'axiome Π_3 est vérifié, il suffit de vérifier que f est une bijection de]ST[sur $\mathbb{R}$. Posons ST = u et MT = $x \in\ ]0, u[$; on a $f_{]ST[}(M) = \ln \dfrac{x}{u–x}$, ce qui permet de conclure (…).

• Montrons alors que le système proposé ne vérifie pas θ_6. Sur la figure ci-dessous, on a $d\ //\ d'$, $d'\ //\ d''$, mais d et d'' sécants : θ_6 n'est donc pas vérifié.



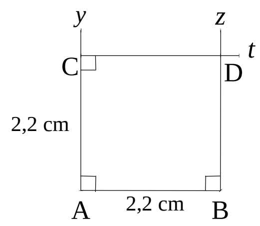
2.3. Un autre point sur lequel il convient d'insister est le fait que, dans l'ordinaire des classes, nombre de propriétés de l'espace sont utilisées *implicitement* comme allant de soi, *sans qu'aucun travail* – expérimental ou théorique – en justifie l'usage. À ce propos, on examine un passage figurant dans les notes du Séminaire 2002-2003, passage qui s’insère lui-même dans une réflexion sur l’*éducation à la citoyenneté*.

• On s’arrêtera ici sur une illustration relative au ***travail déductif en géométrie***.

① Considérons l’un des plus humbles types de tâches demandés à de jeunes élèves : produire ou reproduire une figure « simple », par exemple un carré, comme dans l’extrait ci-après d’un manuel de collège actuel.

● *Construire un carré de* 2,2 cm *de côté.*
Quel est son périmètre ? Quelle est son aire ?

Voir la figure ci-contre.



ABDC a trois angles droits ;
c’est un rectangle (*cf.* Rectangle, **83**).
Ce rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur :

AB = *AC* = 2,2 cm.

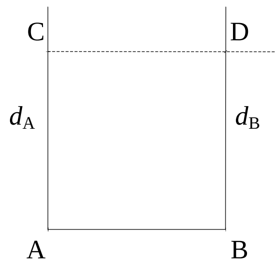
C’est un carré.

– Périmètre : $2{,}2 \times 4 = 8{,}8$ cm.

Aire : $(2{,}2 \times 2{,}2)$ cm^2 ou 4,84 cm^2.

---

❶ Pour cela, on trace d’abord un segment [AB] de longueur 2,2 cm, puis on élève en A et B, à l’aide d’une équerre par exemple, deux demi-droites, d_A et d_B, perpendiculaires à (AB) et situées du même côté de cette droite. On marque alors sur d_A le point C tel que AC = AB.



Arrivé là, deux voies sont possibles : on peut, comme semblent le faire les auteurs du manuel cité, tracer la perpendiculaire en C à (AC), qui coupe d_B au point D cherché ; ou on peut marquer sur d_B le point D tel que BD = AB, et tracer [CD].

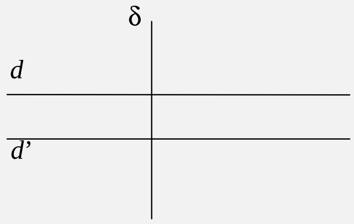
❷ Ce qui précède pose pourtant problème. Le carré demandé doit avoir ses quatre côtés de même longueur et ses quatre angles droits. Si l’on emploie la première voie, on est sûr (par construction) que les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ sont droits et que AC = AB ; affirmer que ABCD est un carré, c’est donc affirmer *ipso facto* que $\widehat{D} = 90°$ et que CD = DB = AB ! Si l’on choisit la deuxième voie, affirmer que ABCD est un carré c’est affirmer que (CD) est perpendiculaire à (AC) et (BD) et que, de plus, CD = AB.

② Passer sous silence les propriétés subrepticement mobilisées dans le travail précédent éloigne de l’idée d’une authentique ***éducation mathématique***.

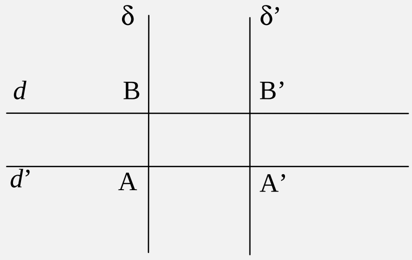
❶ Contre les mauvaises pratiques évoquées ici, un premier « geste éducatif » consiste à expliciter, à inventorier, à classer dans un ***trésor*** qui s’augmentera peu à peu, les propriétés géométriques que l’on est amené à regarder comme autant de ***faits spatiaux avérés*** dès lors qu’elles auront été confirmées ***par une expérimentation graphique systématique***. Après examen des propriétés utiles, la construction du carré vue ci-dessus conduira par exemple à ajouter au trésor des vérités géométriques – s’ils n’y sont pas déjà – les faits spatiaux suivants :

Ax$_{n-1}$. Si des droites *d* et *d*’ sont perpendiculaires à une droite δ, alors elles sont parallèles l’une à l’autre.

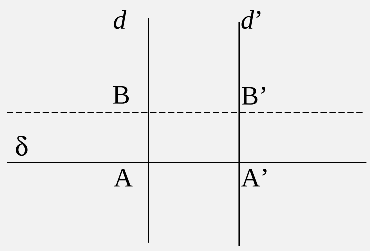
Ax$_n$. Si une droite δ est perpendiculaire à une droite *d*, elle est perpendiculaire à toute droite *d*’ parallèle à *d*.



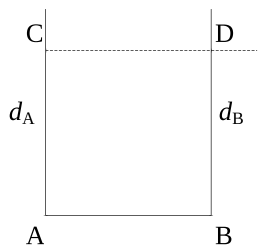
Ax$_{n+1}$. Si les droites *d* et *d*’ sont parallèles, et si les droites δ, δ’ sont perpendiculaires à *d* et *d*’, alors *d* et *d*’ découpent sur δ et δ’ des segments [AB] et [A’B’] de même longueur.



Ax$_{n+2}$. Les droites *d*, *d*’ perpendiculaires à la droite δ coupant cette droite en A et A’, si les points B ∈ *d* et B’ ∈ *d*’ situés d’un même côté de δ vérifient AB = A’B’, alors la droite (BB’) est parallèle à δ.



❷ Bien entendu, l’explicitation des propriétés précédentes, qu’on peut regarder comme autant d’***axiomes provisoires*** d’une organisation déductive ***en construction***, doit être corrélée avec de ***petits travaux déductifs***. Dans la première voie de construction, on pourra ainsi produire la démonstration suivante :



D’après Ax$_{n-1}$, les droites (AC) et (BD), qui sont perpendiculaires à (AB), sont parallèles entre elles. D’après Ax$_n$, la droite (CD), qui est perpendiculaire à (AC), est donc perpendiculaire à (BD).

Conclusion : $\widehat{D}$ = 90º.

D’après Ax$_{n+1}$, les droites (AC) et (BD) découpent sur (AB) et (CD) des segments égaux.
Conclusion : CD = AB.
D’après Ax$_{n+1}$, les droites (AB) et (CD) découpent sur (AC) et (BD) des segments égaux.
Conclusion : BD = AC = AB.

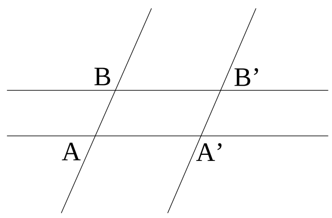
Dans la seconde voie, on aura de même :

D’après Ax$_{n+2}$, la droite (CD) est parallèle à (AB).
D’après Ax$_n$, (AC) est donc perpendiculaire à (CD), et de même (BD) est perpendiculaire à (CD).

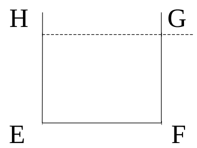
Conclusion : $\widehat{C} = \widehat{D} = 90°$.
Etc.

---

❸ Le trésor des propriétés géométriques sera progressivement à la fois ***augmenté*** et ***réorganisé***. C'est ainsi que, plus tard, et en tout cas en 5^{e}, l'énoncé Ax_{n+1} apparaîtra comme un simple cas particulier de l'énoncé suivant : si d // d' et δ // δ', et si d et δ sont sécantes, alors d et d' découpent sur δ et δ' des segments [AB] et [A'B'] de même longueur.

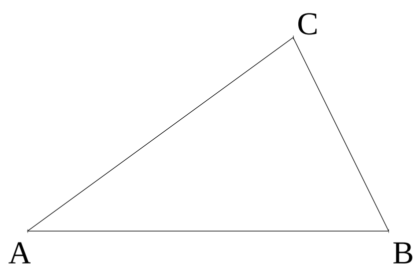


③ Il est instructif (c'est-à-dire éducatif !) de s'arrêter sur une variante de l'exemple précédent : supposons qu'on veuille ***reproduire*** un carré ABCD ***donné*** ; supposons même, un peu plus généralement, qu'on veuille reproduire un certain ***rectangle*** ABCD (non nécessairement carré).

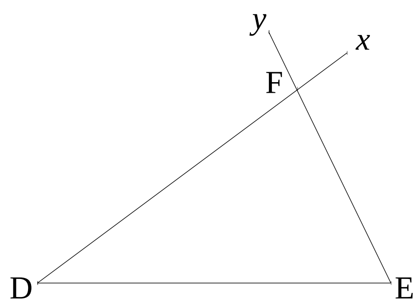


Pour cela, on marque des points E et F tels que EF = AB ; puis on construit des points G et H d'un même côté de (EF) tels que (EH) et (FG) sont perpendiculaires à (EF) et que EH = FG = AD = BC. Cela fait, la figure cherchée est ***complètement déterminée***. Par suite, deux cas se présentent : soit EFGH est le rectangle demandé, « copie » du rectangle ABCD donné ; soit il n'en est rien ! Si l'on admet le ***principe*** préalable à toute activité « géométrique » selon lequel ***toute figure du plan peut être reproduite en n'importe quel endroit du plan***, les points G et H tels que EFGH soit une réplique du rectangle ABCD donné étant déterminés uniquement par la construction indiquée, on peut inférer de ce principe que l'on a tout à la fois et nécessairement $\widehat{H} = \widehat{G} = 90°$ et HG = EF = AB.

④ On dispose ainsi d'un principe de création d'énoncés vrais dans l'espace – à moins que l'espace ne possède pas la propriété d'uniformité que nous lui prêtons ! Considérons, à titre d'application, le triangle ci-contre, qu'il s'agit de reproduire. Plusieurs voies s'offrent.

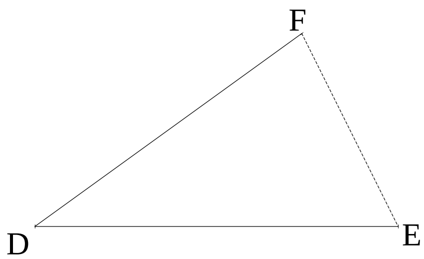


❶ On peut d'abord marquer des points D et E tels que DE = AB ; puis, du même côté de (DE), on trace une demi-droite [Dx) telle que $\widehat{EDx} = \widehat{BAC}$, et une demi-droite [E$y$) telle que $\widehat{DEy} = \widehat{ABC}$.



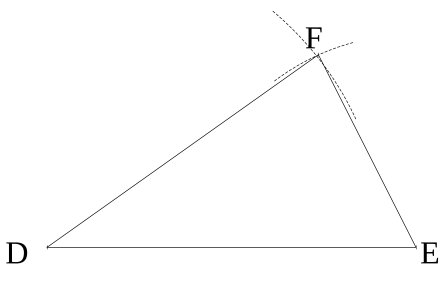
Ces droites se coupent en un point F, sinon le triangle ABC ne pourrait pas être reproduit ; pour la même raison on a alors $\widehat{F} = \widehat{C}$, DF = AC et EF = BC. En d'autres termes, le principe de reproductibilité engendre ici le ***premier cas d'isométrie*** des triangles.

❷ Procédons maintenant ainsi : ayant marqué les points D et E et tracé la demi-droite [D*x*) ainsi qu'on vient de le faire, on marque sur [D*x*) le point F tel que DF = AC.



Le même raisonnement que précédemment montre alors que EF = BC et que $\widehat{E} = \widehat{B}$ et $\widehat{F} = \widehat{C}$: on obtient ainsi le ***deuxième cas d'isométrie*** des triangles.

❸ On peut enfin procéder de la manière suivante : ayant marqué les points D et E, on trace les cercles de centre D et de rayon AC et de centre E et de rayon BC. Ici, le raisonnement indiqué bute sur une difficulté spécifique : puisque le triangle ABC peut être reproduit, les cercles doivent se couper en un point au moins de chaque côté de (DE) ; il faut alors admettre qu'ils se coupent en un point au ***plus***.



Cela fait, le raisonnement s'achève comme on a vu, et on obtient le ***troisième cas d'isométrie*** des triangles.

⑤ Dans la construction de la géométrie du plan, on optera pour une meilleure épistémologie ***et*** une meilleure éducation mathématiques en explicitant le « principe de reproductibilité en tout lieu », pour conclure de là à la ***vérité*** des cas d'isométrie – ce qu'on faisait autrefois, comme le montre l'extrait ci-après d'un manuel de 5e & 4e conforme au programme de 1912, dû à B. Niewenglowski, alors inspecteur général de l'Instruction publique.

CHAPITRE XII

CONSTRUCTIONS DE TRIANGLES

1. *Construire un triangle connaissant un angle et les longueurs des côtés qui comprennent cet angle.*

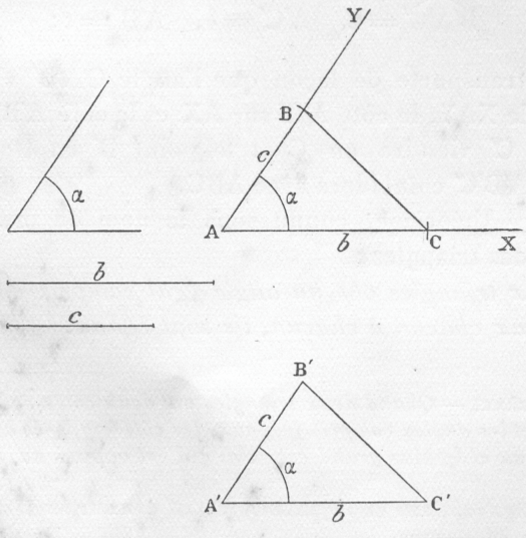


Fig. 124.

Soient α (fig. 124) l'angle donné, b et c les deux longueurs données.

On commence par faire, comme nous l'avons expliqué, un angle XAY égal à l'angle donné α ; puis, de A comme centre, avec un rayon égal à b, on décrit un arc de cercle qui coupe AX en un point C; de A comme centre, avec un rayon égal à c, on décrit un autre arc de cercle, qui coupe AY en un point B ; enfin on trace la droite BC. Le triangle ABC répond à la question.

Sans doute, on peut faire une infinité d'autres triangles répondant à la question, de même qu'on peut tirer une gravure à une infinité d'exemplaires ; mais ces triangles ne sont que la reproduction de ABC. En effet, soit A′B′C′ un triangle dans lequel

$$\widehat{B'A'C'} = \alpha, \quad A'C' = b, \quad A'B' = c;$$

si on le transporte de façon que l'angle C′A′B′ s'applique sur l'angle XAY, le côté A′C′ sur AX et le côté A′B′ sur AY, le point C′ viendra en C et le point B′ en B ; donc le triangle A′B′C′ coïncidera avec ABC.

D'où ce théorème, connu sous le nom de **premier cas d'égalité des triangles :**

Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, ils sont égaux.

• On voit ainsi que les cas d'isométrie enseignés aujourd'hui en classe de 2^de^ constituent en fait une explicitation mathématique ***tardive***, sous forme de ***théorèmes***, de ***propriétés*** fondamentales manipulées « intuitivement » (comme diraient les rédacteurs du programme) ***depuis la 5^e^ au moins***, puisque le programme de cette classe inscrit au tableau des compétences exigibles à ce niveau les types de tâches suivants :

Construire un triangle connaissant :

– la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents,
– les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés,
– les longueurs des trois côtés.

① Une véritable éducation mathématique devra mettre en avant le fait que, ***du point de vue expérimental***, toutes les propositions de la géométrie sont ***contemporaines***, et qu'il n'y a donc pas d'ordre naturel entre elles : vouloir démontrer telle proposition – et, à plus forte raison, parler de ***la*** démonstration de cette proposition – n'a pas de sens tant qu'on ne peut préciser ***à partir de quelles autres propositions*** il s'agirait de la déduire, c'est-à-dire tant que, selon une expression due au géomètre italien Mario Pieri (1899), on ne la situe pas à l'intérieur d'un ***système hypothético-déductif*** déterminé.

② Le corpus traditionnel des propositions géométriques assurait, en contrepartie de sa relative fermeture, une organisation déductive ***d'ensemble*** qui masquait le problème examiné ici. La critique de ses insuffisances conduisit d'abord, avec la réforme des mathématiques modernes, autour de 1970, à tenter une réorganisation systématique, dénuée de lacunes et de paralogismes. Rapidement abandonné à cause de sa lourdeur, ce projet a laissé place aujourd'hui à une apparente ***inorganisation*** qui, à défaut d'une structure déductive ***globale***, appelle la mise en place de systèmes hypothético-déductifs ***locaux***, sortes d'***îlots déductifs*** dont les « hypothèses » peuvent être aussi bien des propositions précédemment démontrées (théorèmes) que des propositions jusque-là inédites et acceptées alors sur une base expérimentale (axiomes). C'est bien à de telles organisations hypothético-déductives locales que se réfèrent implicitement les programmes lorsque, comme dans l'extrait suivant du programme de 5^e^, ils soulignent l'articulation entre expérimentation et travail déductif :

Les diverses activités de géométrie plane habitueront les élèves à expérimenter et à conjecturer. Elles permettront la mise en œuvre de brèves séquences déductives mettant en jeu les outils mathématiques du programme.

③ Au collège et encore au lycée, la construction d'organisations géométriques locales sur une base ***à la fois*** expérimentale et hypothético-déductive constitue la condition *sine qua non* d'une éducation mathématique qui n'usurpe pas son nom. Par contraste, l'oubli de l'***objet*** de la géométrie euclidienne – l'étude de l'espace sensible où nous évoluons – au profit de la seule ***structure déductive*** des connaissances géométriques conduit en bien des cas, paradoxalement, à des formes insidieuses de ***démathématisation*** du savoir géométrique, dont les analyses précédentes – relatives au « principe de reproductibilité en tout lieu » – donnent un exemple typique. En sens inverse, le risque existe que la pertinence et la fécondité du ***travail déductif*** et, plus largement, ***argumentatif*** en géométrie ***et ailleurs*** (notamment dans les disciplines dites expérimentales) soient masqués par le primat donné à l'invocation de l'origine prétendument « expérimentale », « empirique », « pragmatique » des propriétés manipulées. Dans la perspective d'une éducation à la lucidité, indissociable de toute éducation à la citoyenneté, l'étude des « mathématiques en… » devra en conséquence être élargie à celle du « déductif en… ».

2.4. Ce qui précède souligne que l'attention aux exigences de la construction d'une organisation déductive du trésor des propriétés de l'espace, c'est-à-dire de la construction d'une théorie géométrique, est souvent bien insuffisante ! On va voir maintenant que, contrairement à une idée très répandue *mais radicalement fausse*, la théorie construite ne saurait *définir* l'espace et ses propriétés : elle se contente de les organiser déductivement. Ici, on emprunte aux notes du Séminaire 2004-2005.

Expérimentation ou théorisation, encore !

La notion d'orthogonalité soulève, en 2de, une question délicate : on ne dispose, à ce niveau, d'aucune définition correcte de la perpendicularité de deux droites. Celle-ci ne peut s'appuyer que sur l'utilisation de l'équerre, donc sur une expérimentation physique. Par suite, la définition de l'orthogonalité d'une droite et d'un plan ne peut rester que subordonnée à la perception. Comment présenter, dès lors, le thème selon une démarche démonstrative rigoureuse ? Faut-il insister auprès des élèves sur le caractère empirique de l'orthogonalité, à leur stade d'apprentissage ? Comment ne pas se limiter à une suite de définitions et de théorèmes admis (au risque de faire naître une confusion entre l'observation physique et la démonstration mathématique) ? (…, 2de, 19)

Matériaux pour une réponse

1. La question posée appelle un assez long détour. Dans la construction de la science géométrique, les ***faits spatiaux*** sont l'alpha et l'oméga : c'est d'eux que l'on part, c'est vers eux que l'on revient. La question examinée tend à les faire apparaître, *volens nolens*, comme constituant un danger pour le travail mathématique, alors même que celui-ci, qui ne vise qu'à modéliser mathématiquement ces faits spatiaux, ne saurait s'en passer ! Il y a là une suspicion un peu étrange, même s'il est vrai qu'elle imprègne l'épistémologie spontanée de trop de professeurs de mathématiques. C'est cette perversion épistémologique – le mot n'est pas trop fort – que l'on doit donc entreprendre de faire reculer.

2. L'élaboration d'une théorie géométrique doit partir de faits spatiaux bien établis par l'expérience, puis revenir au verdict de l'expérience pour s'assurer de la validité des faits spatiaux qui peuvent – « théoriquement » – se déduire des axiomes de la théorie.

① On peut par exemple établir expérimentalement que, dans un plan, si une droite *d* est perpendiculaire à une droite *d*', et si celle-ci est elle-même perpendiculaire à une droite *d*", alors *d* et *d*" sont des droites parallèles. En usant des symboles usuels, on en tirera un axiome possible pour la théorie en construction : $d \perp d' \wedge d' \perp d'' \Rightarrow d \,//\, d''$. Bien entendu, pour avoir une « bonne » théorie de la perpendicularité des droites du plan, il faudra en général introduire dans la théorie ***plus d'un axiome !***

② Dans son ouvrage *L'enseignement de la géométrie*, déjà cité lors de la séance 17, Gustave Choquet retient par exemple l'axiomatique suivante (qui n'est évidemment qu'une partie d'une axiomatique de la géométrie plane) :

Axiome IV_a (des perpendiculaires)

La perpendicularité (notée $\perp$) est une relation binaire sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des droites de Π, telle que

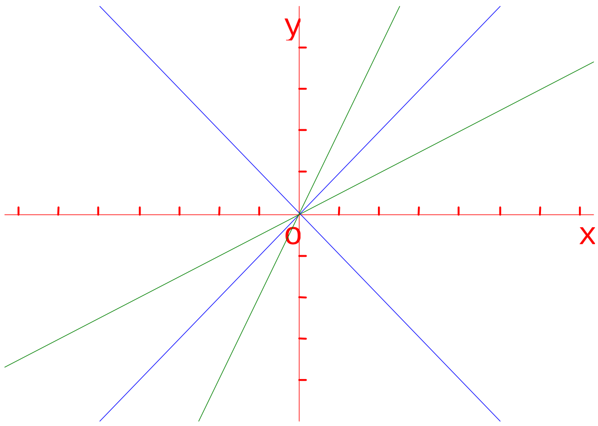
1. $(A \perp B) \Leftrightarrow (B \perp A)$ (symétrie de la relation)
2. $(A \perp B) \Rightarrow$ A et B ne sont pas parallèles
3. Pour toute droite A, il existe au moins une droite B telle que $A \perp B$.
4. Pour tout couple (A, B) tel que $(A \perp B)$, on a l'équivalence : $(B \parallel B') \Leftrightarrow (A \perp B')$.

Gustave Choquet observe alors ceci : pour définir une telle relation $\perp$ dans Π, il suffit de définir une partition de l'ensemble des ***directions*** de Π dont chaque classe contienne exactement ***deux*** directions distinctes, qui seront réputées alors perpendiculaires. Si l'on prend $\Pi = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{D}$ étant l'ensemble Δ des variétés affines de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$, on peut prendre par exemple la relation $\perp^\sigma$ suivante (définie ici sur les droites passant par l'origine) :

– les deux axes sont σ-perpendiculaires ainsi que les 1re et 2e bissectrices ;

– deux droites passant par l'origine appartenant aux 1er et 3e quadrants sont σ-perpendiculaires si elles sont symétriques par rapport à la 1re bissectrice (d'équation $x - y = 0$) ;

– de même, deux droites passant par l'origine appartenant aux 2e et 4e quadrants sont σ-perpendiculaires si elles sont symétriques par rapport à la 2e bissectrice (d'équation $x + y = 0$).



Il faudra donc imposer d'autres axiomes encore pour que la théorie « mime » convenablement la relation [physique] de perpendicularité !

3. Avant de revenir à la notion de perpendicularité, arrêtons-nous un instant sur la notion de ***droite***. Il s'agit *a priori* d'une notion ***physique***, que le mathématicien doit tenter (et se contenter) de ***modéliser mathématiquement***.

① Dans un manuel de 6^e on peut lire par exemple :

Si, dans le plan, on choisit un point que l'on note A, on peut tracer autant de droites passant par A que l'on veut.
Si, maintenant, on choisit deux points distincts notés A et B, il y a une droite, et une seule, qui passe par A et B. Il s'agit de la « droite (AB) ».

Ces deux énoncés formulent des propriétés de certains objets appelés ***droites***, sans que ces objets aient été autrement précisés. Les droites en question – les droites « physiques », au sens usuel du terme – seraient-elles ***caractérisées*** par ces propriétés ? Question naïve qui conduit en fait à mettre en lumière un phénomène que la naturalisation ordinaire de la notion de droite rend à peu près incompréhensible.

② Alors en effet que la notion ***sensible*** – physique – de droite est caractérisée par la ***rectilinéarité*** – une droite est... droite, c'est-à-dire rectiligne –, on va voir que la notion de rectilinéarité ***ne peut pas être caractérisée mathématiquement !***

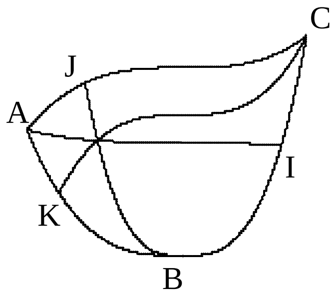
❶ La mathématisation de la notion de droite s'est faite, des *Éléments* d'Euclide (vers 300 av. J.-C.) aux *Grundlagen der Geometrie* d'Hilbert (dont la 1re édition est de 1899), par le moyen d'une ***définition axiomatique***. Mathématiquement, tout ce qu'on peut dire des droites, c'est que ***ce sont des objets qui satisfont certains énoncés***. D'une manière générale, soit Π un ensemble dont les éléments sont appelés ***points***, et $\mathcal{D}$ un ensemble de parties de Π dont les éléments sont appelés ***droites*** ; on impose alors au couple $(\Pi, \mathcal{D})$ de satisfaire certains ***axiomes***, d'où on déduira l'ensemble des ***théorèmes***. Les deux énoncés rencontrés ci-dessus dans un manuel de 6^e sont ainsi, dans l'axiomatique de Hilbert, pour le second un axiome (il s'agit du premier axiome d'incidence), pour le premier un théorème – le théorème n^o 7 de l'édition critique due à Paul Rossier (*Les fondements de la géométrie*, Dunod, Paris, 1971, p. 17).

❷ Cette axiomatique a pour modèle usuel le couple $(\mathbb{R}^2, \Delta)$, où Δ est l'ensemble des variétés affines de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$:

$$d \in \Delta \Leftrightarrow \exists\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\ (a, b) \neq (0, 0) \wedge d = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ ax + by + c = 0\ \}.$$

Mais cette axiomatique ***caractérise-t-elle*** l'ensemble Δ parmi les ensembles de parties de $\mathbb{R}^2$? Ou bien peut-on prendre pour ensemble de « droites » ***autre chose*** que les variétés affines de dimension 1 ? Plus concrètement, dans un plan « sensible », pourrait-on identifier les « droites » dont nous parle la TG a d'autres « courbes » que les droites physiques ?

❸ La réponse est immédiate, et positive : si φ est une bijection ***quelconque*** de $\mathbb{R}^2$, le couple $(\mathbb{R}^2, \varphi(\Delta))$ satisfait l'axiomatique de Hilbert (par transport de structure), et cette axiomatique ne caractérise donc pas les variétés affines de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$. Considérons par exemple la bijection définie par $\varphi(x, y) = (x^{1/3}, y)$. Si la droite $d \in \Delta$ admet l'équation $ax + by + c = 0$, on a : $(x, y) \in \varphi(d) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(x, y) \in d \Leftrightarrow (x^3, y) \in d \Leftrightarrow ax^3 + by + c = 0$. Si $a = 0$, $\varphi(d) = d$. Si $b = 0$, $\varphi(d)$ est la variété affine (parallèle à d) d'équation $x = (c/a)^{1/3}$. En revanche, si $ab \neq 0$, $\varphi(d)$ a pour équation $y = \alpha x^3 + \beta$, où $\alpha = \frac{-a}{b}$ et $\beta = \frac{-c}{b}$. On obtient ainsi une ***cubique*** de $\mathbb{R}^2$. Ainsi $\varphi(\Delta)$ est-il l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^2$ formé des variétés affines d'équation $x = \alpha$ ou $y = \beta$ et des courbes d'équation $y = \alpha x^3 + \beta$: cet ensemble de parties de $\mathbb{R}^2$ ***satisfait tous les axiomes***, et donc ***tous les théorèmes***, que satisfont les variétés affines de dimension 1 – par exemple le théorème de concours des hauteurs d'un triangle, ce qu'illustre la figure ci-après.



❹ D'une manière générale, si φ n'est pas une transformation affine, les « droites » $\varphi(d)$ ne sont pas rectilignes. Inversement, si l'on prend pour droites les éléments de $\varphi(\Delta)$, les variétés affines ne sont plus « rectilignes » par rapport à la structure euclidienne ainsi définie.

③ Le fait que la rectilinéarité, notion ***physique***, ne puisse pas être caractérisée en termes ***mathématiques*** entraîne que, avec des élèves de 6^e^ notamment, on ne peut faire « l'économie » d'une construction préalable de la notion ***sensible*** de droite, ***qu'aucune théorie mathématique ne saurait à elle seule engendrer***. D'une manière générale, en 2^de^ comme en 6^e^, il convient de revenir aussi souvent que c'est utile à l'espace sensible : comme en d'autres domaines, ***les mathématiques supposent ici le non-mathématique, qu'il s'agit précisément de mathématiser***.

❶ L'erreur épistémologique à ne pas commettre consiste à réduire les mathématiques à ce qui n'est que leur condition de possibilité : la séparation d'avec le non-mathématique, qui les rend possibles, et qui en vient à être regardée comme ***les définissant***. Ainsi occulte-t-on ***la dialectique du mathématique et du non-mathématique***, sans laquelle les mathématiques n'existeraient pas. Parce que la connaissance mathématique peut, après une réorganisation appropriée, procéder strictement par la voie interne de la pure déduction (ce qui la caractérise), on tend à oublier

– d'abord que les mathématiques trouvent leur origine dans certaines réalités prémathématiques qui en motivent la genèse,

– ensuite qu'elles sont productrices de connaissances à propos du réel extramathématique aussi bien que mathématique, selon un schéma qui relance indéfiniment le processus de création mathématique.

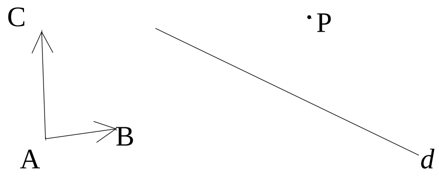
❷ Il est vrai que la construction des mathématiques comme articulée au non-mathématique, et en particulier l'exploitation expérimentale du non-mathématique dans le processus de mathématisation, ne trouve guère sa place dans la tradition « libérale » en mathématiques, où l'on confond ordinairement le fait que les constructions du mathématicien visent à permettre le libre jeu du raisonnement déductif avec la croyance que le mathématique ne pourrait pas faire l'objet d'expérimentations – ou, au moins, que la chose serait à la fois inutile et absurde. Or, ainsi qu'on l'a suggéré, une telle conclusion confond plusieurs aspects que, dans une perspective de formation, il s'agit au contraire de ***distinguer*** et d'***articuler***. Rappelons ici, en passant, que, par delà les siècles, le vocabulaire géométrique grec dont nous avons en grande partie hérité témoigne de cette articulation nécessaire : ***centre*** vient de ***kentron***,

« aiguillon », ***cylindre***, de ***kylindros***, « rouleau », ***sphère***, de ***sphaira***, « balle à jouer », ***prisme***, de ***prisma***, « morceau de bois découpé à la scie » (de *priein*, « scier »), etc. Ce témoignage des mots ne doit pas être regardé comme un vestige contingent, sans portée face au développement présent des mathématiques : l'oubli de l'ancrage du mathématique dans l'extramathématique est en fait largement préjudiciable à l'enseignement des mathématiques. La notion de « points alignés » (ou de points « coplanaires »), que la géométrie élémentaire mathématise, ne saurait être seulement ***mathématique***, mais demeurent irréductiblement ***physique***.

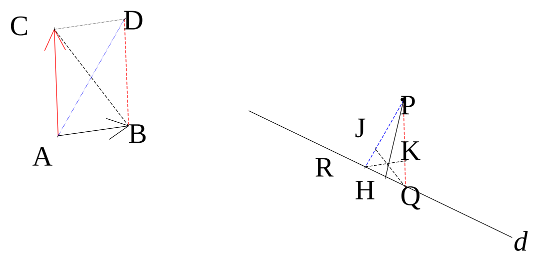
4. On peut montrer de la même façon que, même si l'on prend $(\prod, \mathcal{D}) = (\mathbb{R}^2, \Delta)$, il n'est pas possible de modéliser la relation de perpendicularité de façon à ***caractériser*** la perpendicularité ***physique*** – le phénomène devrait maintenant être presque évident !

① Pour tout triplet de points non alignés (A, B, C), il existe en effet une forme bilinéaire symétrique définie positive unique telle que le repère affine (A, B, C) soit orthonormal ***pour cette métrique***. Muni du produit scalaire correspondant, le plan affine $(\mathbb{R}^2, \Delta)$ devient un plan métrique, modèle mathématique canonique du plan physique muni de sa métrique ordinaire (pour laquelle l'équerre usuelle possède deux côtés perpendiculaires). Pourtant, la perpendicularité ainsi construite peut être ***fort différente*** de celle que l'on cherche à modéliser mathématiquement – même si elle donne lieu aux ***mêmes théorèmes***.

❶ Soit ainsi une droite d et un point $P \notin d$; comment construire la perpendiculaire d' à d passant par P ?

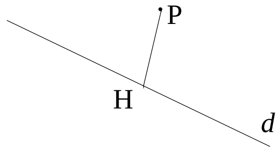


❷ On va voir que, (A, B, C) étant donné, il est possible de construire d' avec la règle seule. La donnée de A, B, C avec AB = AC = 1 et (AB) ⊥ (AC) fournit en effet ***deux*** paires de droites perpendiculaires : (AB) et (AC), mais aussi (AD) et (BC), où D est le transformé de C par la translation qui envoie A en B (voir ci-après).



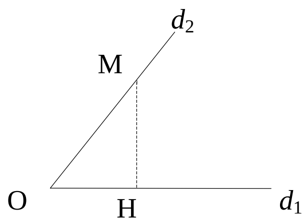
Pour construire la perpendiculaire (PH), on trace par exemple (PQ) // (AC) et (PR) // (AD). Puis on trace la parallèle (QJ) à (BC) et la parallèle (RK) à (AB) : (QJ) et (RK) sont les hauteurs issues de Q et R dans le triangle PQR. Il en résulte que la droite (PH) qui passe par leur point d'intersection est la hauteur issue de P : c'est donc la droite demandée.

② Il résulte de ce qui précède que ni l'alignement, ni la perpendicularité ***physiques*** ne sauraient être des acquis purement ***mathématiques*** : pour acquérir la première, il faut manipuler des « choses » rectilignes (règle, fil tendu, etc.) ; pour la seconde, il convient de même de manipuler des « choses » perpendiculaires (équerre, angle inscrit dans un demi-cercle, etc.). Un tel travail « matériel » est ***indispensable*** à la conquête de notions qui sont d'abord physiques, même si, en classe de mathématiques, on les aborde en vue de les mathématiser. Faute de ce travail « physique », on ne devra pas s'étonner que des élèves regardent parfois des droites telles (PH) et d ci-dessous comme perpendiculaires – ce qu'on ne peut contester du point de vue ***mathématique*** !



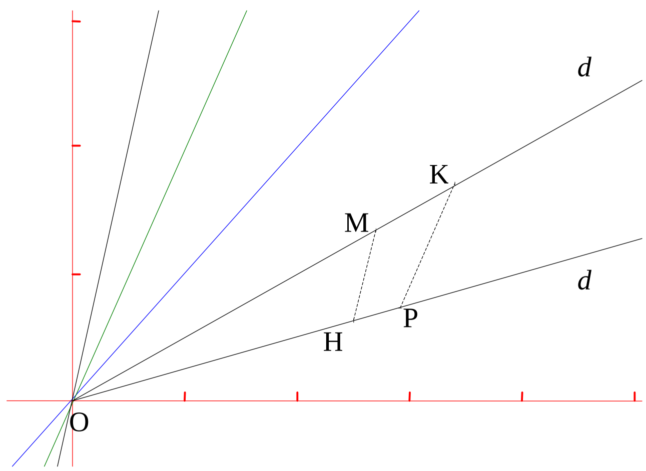
5. Comment maintenant peut-on modéliser ***plus*** qu'on ne l'a fait jusqu'ici la relation d'orthogonalité ? Comment peut-on obtenir une théorie déductive « complète », c'est-à-dire telle que toute assertion ***vraie*** dans l'espace sensible puisse y être établie à titre de théorème (si elle ne figure pas déjà à titre d'axiome) ?

① La construction que propose Choquet dans l'ouvrage mentionné s'appuie sur la notion de ***rapport de projection*** d'une demi-droite sur une autre demi-droite. Soit deux demi-droites d_1 et d_2 (ci-après).



Soit M ≠ O un point de la demi-droite d_2, et soit H son projeté orthogonal sur d_1. Le rapport $\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OM}}$ est le même quel que soit M. On appelle ce nombre le ***rapport de projection*** de d_2 sur d_1 et on le note $c(d_1, d_2)$.

❶ Revenons un instant à la σ-perpendicularité considérée plus haut. Sur la figure ci-après on a choisi les points M et P des demi-droites d_2 et d_1 tels que OM = OP ; on voit que l'on a, en l'espèce OH < OK et donc $c(d_1, d_2) = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OM}} < \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OP}} = c(d_2, d_1)$. Le rapport de projection de d_2 sur d_1 diffère donc du rapport de projection de d_1 sur d_2 !



❷ Pour « compléter » son axiomatique, Choquet impose donc un nouvel axiome – le dernier –, qu'il énonce simplement ainsi :

Axiome IV$_b$: Pour tout couple (A_1, A_2) de demi-droites de même origine, on a : $c(A_1, A_2) = c(A_2, A_1)$.

Lorsqu'il passera du plan à l'espace, cette partie de l'axiomatique restera inchangée :

IV. *Axiomes des perpendiculaires et de la symétrie*

a. Pour tout plan P, il existe sur l'ensemble des droites de P une relation binaire dite relation de perpendicularité et notée ⊥, telle que

1. (A ⊥ B) ⇔ (B ⊥ A) (symétrie de la relation)

2. (A ⊥ B) ⇒ A et B ne sont pas parallèles

3. Pour toute droite A, il existe au moins une droite B telle que A ⊥ B.

4. Pour tout couple (A, B) de droites de P tel que A ⊥ B, on a pour toute droite B' de P l'équivalence (B ∥ B') ⇔ (A ⊥ B').

b. Pour tout couple (A_1, A_2) de demi-droites de même origine, on a $c(A_1, A_2) = c(A_2, A_1)$.

② Pour le détail du travail de déduction, on se reportera à l'ouvrage de Choquet. Notons – on y reviendra plus loin – que cette construction axiomatique marquera durablement l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée. On va voir que la priorité donnée à l'introduction du cosinus (en 4^e^) sur celle du sinus et de la tangente (en 3^e^) est un vestige de cette construction (où l'on s'interdisait de parler d'angles).

2.5. On s'arrêtera maintenant sur une exigence didactique essentielle : faire vivre dans la classe l'expérimentation aussi soigneusement que la déduction (et la théorisation qui en fournit le cadre et les moyens). Le développement ci-après est extrait des notes du Séminaire 2004-2005.

Ah ! le sensible…

Avec ma PCP, nous avons abordé la question de l'expérimentation dans l'espace sensible à propos de géométrie. À ce propos, ma PCP m'a confié que la valeur de cette approche rencontrait un bec : les élèves auraient du mal à se détacher de la situation sensible vers le concept. Qu'en pensez-vous ? (…, 4^e^, 23)

Matériaux pour une réponse

1. Les élèves ont du mal à se saisir d'un grand nombre de choses ! Ce qui est évoqué ici renvoie, apparemment, à une vision ultra-traditionnelle des rapports, dans la classe de mathématiques, entre expérience et théorie, ce qui conduit presque immanquablement à une pratique dans laquelle l'expérience n'existe pas véritablement, et n'est vue que comme un piège dont il faut se garder.

① Rappelons d'abord, sommairement, le principe des liens entre expérimentation et théorisation, dans un cadre volontairement un peu restreint (le système « physique » *S* évoqué ci-après peut en fait être pleinement « mathématique »).

❶ Considérons un système physique *S* dont on tente d'élaborer une théorie déductive *T*. Soit *a* une assertion relative à *S*. ***« Prouver a »*** peut signifier deux choses : l'assertion *a* est ***vraie*** dans *S*, c'est-à-dire est une propriété de *S*, ce qui est un fait physique, et non « mathématique » ; l'assertion *a* est ***déductible*** dans *T*, c'est-à-dire est un ***théorème*** de *T* (à moins que ça n'en soit un axiome !), ce qui est un fait mathématique. Tous les cas de figure sont *a priori* possibles : *a* peut être vraie dans *S* mais non déductible dans *T* (ce qui conduira en principe à « renforcer » *T*), etc.

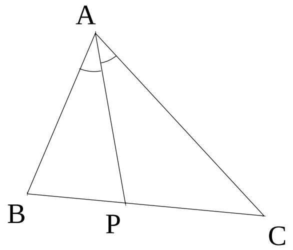
❷ Pour prouver que *a* est vraie dans *S*, deux voies s'offrent : mettre le système physique *S* à l'épreuve, le faire parler au moyen d'une expérience appropriée, qui, en physique comme ailleurs, ne peut conduire en principe qu'à tenir *a* pour, au mieux, très hautement vraisemblable ; ou interroger *T* pour savoir si *a* est un théorème de *T*, ce qui, si l'on s'est raisonnablement assuré que tout ce qui est déductible dans *T* est vrai dans *S*, conduira à affirmer que *a* est vraie dans *S*.

❸ C'est en fait toute l'épistémologie mathématique-scolaire qui est, à cet égard, à refonder. Si l'on veut savoir si *a* est vraie dans *S*, seule l'expérience peut, en dernière instance, trancher : pour savoir si, dans un triangle physique, les trois médianes concourent, le tribunal ultime est celui de l'expérience ! La consultation de *T* présente l'avantage que l'on connaît dans les sciences : celui d'aller vite, de faire l'économie d'une expérience peut-être coûteuse, ou peu claire dans ses résultats, ou même impossible (provisoirement). Notons en passant, à cet égard, qu'il n'est pas de saine justice épistémologique de comparer des déductions simplettes (souvent de moins d'une demi-page !) avec des expériences délicates pour conclure que, dans le premier cas, le fait que *a* serait un théorème de *T* ne souffre pas d'incertitude, tandis que, dans le second, la vérité de *a* ne possède au mieux qu'une très haute vraisemblance !

❹ La situation à gérer par le professeur est à vrai dire un peu plus compliquée, ou un peu plus ***riche***. Pour savoir si *a* est bien un théorème de *T*, on peut légitimement être tenté de déterminer si *a* est vraie dans *S* : si l'on a quelque certitude sur ce point, on peut alors être tenté de conclure quant à la déductibilité de *a* dans *T*. Cela est légitime, et même judicieux. Mais cela suppose que tout ce qui est déductible dans *T* soit vrai dans *S* et, surtout, que la réciproque soit valide, ce qui n'est pas toujours le cas ! Là se situe sans doute une difficulté cruciale : parce que *S* est « donné » et que *T* est à construire, on n'est presque jamais assuré que la vérité de *a* dans *S* implique la déductibilité de *a* dans *T* – ce qui, de toute façon, ne donne pas encore une déduction en bonne et due forme.

❺ Ce qui précède doit absolument faire l'objet d'une clarification dans le travail de la classe – mais il appert que la « boîte » doit être rendue plus claire aussi pour les professeurs ! Lorsque, par exemple, on dit que telle assertion *a* est ***« admise »***, que signifie-t-on au juste ? Veut-on admettre que *a* est vraie dans *S*, ou que *a* est un théorème de *T* (et que des « savants » en possède une déduction effective, qu'on n'étudiera pas) ? Il y a là un point opaque qui mérite davantage d'attention que ce qu'une tradition insoucieuse lui accorde !

② À titre d'exemple, revenons ici au résultat déduit plus haut, en nous situant mentalement ***avant*** qu'on ne l'ait déduit : dans le triangle ABC, on a $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$.



❶ Avant de se mettre en quête d'une déduction qui nous fuit – si l'on se reporte à la question –, ce qui est plus souvent le cas que beaucoup de participants au Séminaire ne voudraient peut-être l'avouer, il n'est nullement déraisonnable de vouloir s'assurer que la propriété est vraie dans l'espace sensible – sans quoi on doit espérer qu'on n'arrivera pas à la déduire dans la théorie disponible !

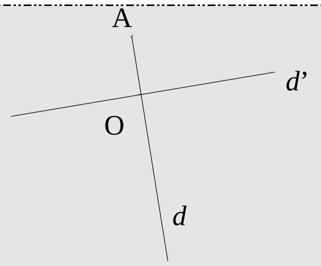
❷ Pour cela, il faut expérimenter, et, pour expérimenter, il faut d'abord ***concevoir une expérience*** possible, économique, dont les résultats soient « lisibles », etc. En pratique, la conception d'une telle expérience est un petit travail mathématique dont on ne frustrera pas la classe en le lui apportant tout fait !

❸ On peut par exemple envisager le montage expérimental suivant (on notera que l'usage d'un papier quadrillé simplifie beaucoup le travail évoqué) :

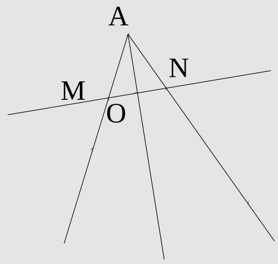
Expérience graphique

a) On marque un point A et on trace une demi-droite *d* d'origine A.

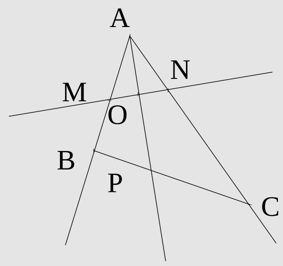
b) On marque un point O de *d* distinct de A et on trace la perpendiculaire *d'* à *d* en O (voir la figure).



c) On marque sur *d*’ un point M distinct de O, on marque son symétrique N par rapport à O (ou à *d*), puis on trace les demi-droites [AM) et [AN).



d) On marque un point B sur]AM) et un point C sur]AN) et on trace [BC] qui coupe *d* en P.



e) On mesure [AB], [BP], [PC], [CA].

On trouve par exemple (en « interpolant » visuellement la seconde décimale) : AB ≈ 2,92 ; BP ≈ 1,47 ; PC ≈ 2,56 ; CA ≈ 5,07. Il vient donc $\frac{AB}{AC} \approx \frac{2{,}92}{5{,}07} = 0{,}57\ldots$ & $\frac{PB}{PC} = \frac{1{,}47}{2{,}56} = 0{,}57\ldots$ La répétition de cette expérience – quelques réalisations par élève ! – conduit à penser que la propriété est ***vraie*** dans l’espace sensible. Il reste alors à voir si elle est ***déductible*** dans la théorie géométrique dont dispose la classe…

2. Pour bien distinguer les plans de *S* et de *T*, il est utile de travailler sur des « systèmes » *S* dont les propriétés sont presque évidemment vraies – même si, en bonne science, il conviendrait de les vérifier expérimentalement de manière soignée. À titre d’exemple, on s’arrête un instant sur un chapitre de géométrie intitulé autrefois ***Inégalités dans le triangle*** : aujourd’hui à peu près ignoré des programmes, il appartient pourtant à la tradition mathématique depuis Euclide.

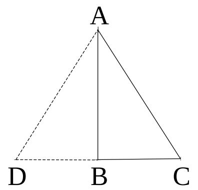
① Considérons d’abord l’assertion suivante :

A_1. Dans un triangle rectangle, les angles adjacents à l’hypoténuse sont aigus.

❶ Cette assertion se laisse ***déduire*** immédiatement du fait, acquis en 5^e, que la somme des angles d’un triangle est de 180º ; en conséquence elle est ***vraie*** (à moins que la TGD ne soit erronée…). Une vérification expérimentale directe est par ailleurs facile : elle consiste à tracer des triangles rectangles et à mesurer les angles adjacents à l’hypoténuse pour s’assurer qu’ils sont aigus.

❷ La démonstration qu’en donnaient autrefois les manuels de collège a l’intérêt de faire apparaître la motivation ***théorique*** de notions présentées trop souvent, à tort, comme purement descriptives – ici, celles d’angle ***saillant*** et d’angle ***aigu*** :

∂. Soit un triangle ABC rectangle en B. Soit D le symétrique de C par rapport à (AB) : le triangle CAD est isocèle.

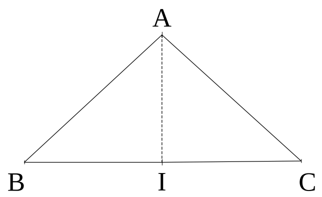


L'angle $\widehat{CAD}$ étant ***saillant*** (< 180º), l'angle moitié, soit $\widehat{CAB}$, est ***aigu***. On montre de même que $\widehat{BCA}$ est aigu.

② Ce premier travail déductif se poursuivait par l'examen de l'assertion suivante, elle aussi trivialement vraie dans l'espace sensible :

A_2. Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont aigus.

∂. Soit ABC un triangle isocèle en A et soit I le milieu de [BC].

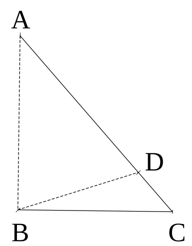


Le triangle AIB étant rectangle en I, l'angle $\widehat{ABC}$ est ***aigu***, et il en est de même de $\widehat{ACB}$ (= $\widehat{ABC}$).

③ Des angles on passait aux côtés : une technique relativement subtile permettait d'établir le résultat suivant :

A_3. Dans un triangle rectangle, les côtés de l'angle droit sont inférieurs à l'hypoténuse.

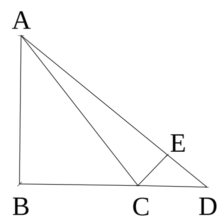
∂. ABC étant rectangle en B, soit D le point de]AC) tel que AD = AB. Le triangle BAD étant isocèle en A, $\widehat{ABD}$ est ***aigu***, de sorte que]BD) est ***intérieur*** à $\widehat{ABC}$: le point D appartient donc à]AC[. Il en résulte que AD < AC, soit que AB < AC. On montre de même que CB < CA.



④ C'est par la même technique qu'on établissait un quatrième résultat, lui aussi trivialement vrai dans l'espace sensible.

A_4. Soit ABC un triangle rectangle en B et soit D un point de]BC) tel que BD > BC. Alors AD > AC.

∂. Soit E ∈]AD) tel que AE = AC.

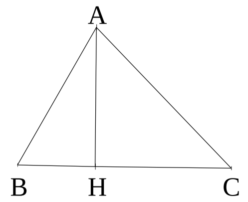


CAE étant isocèle en A, $\widehat{ACE}$ est aigu. Par ailleurs $\widehat{ACB}$ est aigu comme angle non droit du triangle rectangle ABC : son supplémentaire $\widehat{ACD}$ est ***obtus***, et donc supérieur à $\widehat{ACE}$: $\widehat{ACE} < \widehat{ACD}$. Il en résulte que E appartient à]AD[: on a ainsi AE < AD, soit AC < AD.

⑤ On arrivait ainsi à établir démonstrativement, ***more geometrico***, un résultat fameux.

A_5. Dans tout triangle le plus grand côté est inférieur à la somme des deux autres, et les angles adjacents sont aigus.

∂. On suppose que BC > CA > AB.



Dans le triangle rectangle AHB, on a BH < BA, et on a donc BH < BC. De même, dans le triangle AHC, CH < CA < CB. Comme on a à la fois BH < BC et CH < CB, le point H appartient à]BC[, et l'on a donc BC = BH+HC < BA+AC. Les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{ACH}$ sont aigus comme adjacents à l'hypoténuse dans les triangles rectangles AHB et AHC. Comme $\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{ACH} = \widehat{ACB}$, les angles en B et C du triangle ABC sont ***aigus***.

3. Concluons. Pour maîtriser conceptuellement la déduction mathématique – la « démonstration » –, il est indispensable de voir ce qu'elle n'est pas : on ne peut y parvenir qu'en travaillant encore et encore la dialectique du vrai et du déductible, de l'expérience et de la théorie !

3. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques

3.1. Questions posées

a) On poursuit ci-après l'étude de la notice intitulée ***Évaluation & notation – Aspects didactiques***. Avant cela, on s'arrête sur deux questions ayant trait aux pratiques d'évaluation.

1. Lorsque j'ai corrigé le dernier DM, je me suis rendue compte qu'un élève avait utilisé des notions hors programme pour arriver au résultat. En discutant avec lui, il m'a dit qu'il avait fait le devoir avec son professeur particulier. Comment évaluer et noter un tel devoir ? L'élève a-t-il vraiment compris ? Et si un élève utilise des notions hors programme en DS, doit-on noter plus ou moins de la même manière ? (FLA, OS, 5e, 18)

2. La micro-épreuve (de 10 à 15 min) me permet : a) d'évaluer la maîtrise qu'ont les élèves d'un type de tâches ; b) d'évaluer mon propre travail ; c) d'obliger certains élèves à travailler régulièrement. En cas de défaillance manifeste, je suis amené à refaire la micro-épreuve après avoir explicité la notion en question. C'était le cas avec les nouveaux nombres (nombres relatifs, nombres en écriture fractionnaire). Est-ce une bonne chose ? (FBA, OS, 5e, 18)

b) Se situant dans une conception individualiste de la « formation », certains professeurs sont portés à considérer que, si l'élève a résolu le problème, on ne saurait « officiellement » lui reprocher de ne pas l'avoir fait de la façon « préconisée » par l'énoncé (ou le professeur, etc.). Comme si l'essentiel pour lui était, en fin de compte, de résoudre le problème, sans tenir compte de rien d'autre !

• Ce n'est pas la conception qui fonde le pacte scolaire. On ne demande pas aux élèves de résoudre un problème tout court, mais de le résoudre ***sous des conditions déterminées***, avec une certaine ***économie de moyens***, avec certaines ***ressources didactiques*** (et en particulier certaines ressources ***mathématiques***), et pas d'autres. Cette remarque suffit pour considérer comme inappropriée une « solution » qui, ne satisfaisant pas aux contraintes imposées, n'en est pas une.

• Le contrat qu'on vient de rappeler ne se justifie que parce que ce qu'il est demandé à l'élève (y compris dans un examen comme le baccalauréat), c'est bien de participer solidairement à un certain ***projet*** de création et de diffusion de certaines organisations mathématiques – dont on s'affranchit dès lors qu'on en ignore les règles définitoires.

c) Les aides qu'un élève peut se procurer à l'occasion d'un DM ne sont pas en elles-mêmes un problème, dès lors qu'on a mis en place le dispositif, rappelé lors de la séance 18, de ***contrôle*** des DM par le moyen de ***micro-épreuves***, dont la deuxième question ci-dessus souligne plus généralement les principales fonctions. (Il faudrait y ajouter la fonction d'***auto-évaluation***, si frappante lorsque les micro-épreuves portent sur une matière dont il est clair pour tous qu'elle devrait être largement maîtrisée lorsque la micro-épreuve advient.) Faute d'un tel dispositif, ***rien*** ne garantit que l'élève n'ait pas recopié servilement une solution allogène. En un tel cas, et puisque un DM est évidemment, d'abord et avant tout, un dispositif ***de formation***, le professeur n'assure tout simplement pas sa mission.

3.2. Comment se « fabriquent » les notes

On poursuit maintenant l'examen de la notice ***Évaluation & notation – Aspects didactiques***.

6. La fabrication des notes

6.1. L'attribution d'une note « atomique » paraît un acte simple, quoique nimbé d'incertitude. Cette question était notée sur 3 points ; j'évalue la réponse apportée par l'élève en me référant à un projet collectif d'étude et d'apprentissage : *je lui mets* 2 sur 3. Pas 1 sur 3, pas 3 sur 3 : 2 sur 3. Quelle réponse aurait valu 3 sur 3, par exemple ? Le professeur-évaluateur n'a-t-il pas subrepticement modifié le projet collectif qu'avait fait connaître aux élèves le professeur-directeur d'étude ? Cette modification n'est-elle pas intervenue au moment où le directeur d'étude a dû se prononcer en tant qu'évaluateur ? La réponse évaluée, ainsi, aurait « obtenu » 3 sur 3 selon le projet ancien – hier ; mais le projet, *pour cela précisément*, s'est aujourd'hui modifié et cette réponse ne « vaut » plus que 2 sur 3 dans la perspective du projet qui émerge de la plongée évaluative du directeur d'étude dans les travaux de la classe. L'évaluation « formative » [10. Sur les notions d'évaluation « formative », « sommative », etc., voir la notice *Évaluation & notation – Aspects institutionnels et historiques*] est ainsi subtilement, perfidement réformatrice du projet du groupe. Selon le projet d'hier, les notes de la classe à cette question auraient été distribuées, par exemple, selon les effectifs suivants :

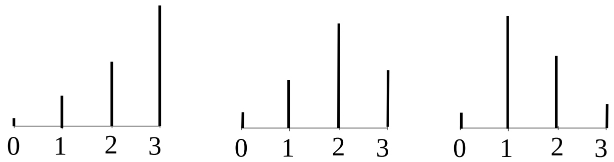
Note	0	1	2	3
Effectif	1	4	8	15

Cette distribution « en J » montre bien, justement, qu'on peut désormais *aller plus loin*, qu'on peut *avancer*, et qu'il convient pour cela de signifier par une note plus resserrée une exigence nouvelle, par exemple en matière de « rigueur » dans l'expression mathématique et/ou dans l'expression tout court.

6.2. Ce mouvement qu'imprime aux notes, dans son intimité de correcteur, le professeur-directeur d'étude fait glisser la distribution vers des valeurs plus basses, comme dans le tableau suivant.

Note	0	1	2	3
Effectif	2	6	13	7

On passe alors d'une distribution « en J » (ci-dessous, à gauche), à la classique distribution en cloche plus ou moins asymétrique (au centre), voire, dans le cas d'un mouvement inconsidéré du correcteur-directeur d'étude, à une courbe « en I » (ci-dessous, à droite).



Précisément parce qu'elle est formative, l'évaluation est étonnamment mobile : une distribution en J représente plutôt une évaluation de *fin* d'apprentissage – « sommative » –, *sans relance du projet didactique*. À l'inverse, la dynamique de l'étude porte souvent à des changements clandestins dans les critères d'évaluation, par anticipation *sans négociation préalable* sur le renouvellement du projet didactique de la classe que les élèves découvriront en découvrant les notes qui leur sont assignées. Bien entendu, la véritable négociation a sa place lors de la « correction », lorsqu'on passe ensemble, sous la direction du professeur, des réponses $R^{\lozenge}$ des élèves à la réponse $R^{\heartsuit}$ de la classe, laquelle, dépassant les réponses $R^{\lozenge}$, désignera *en acte* le renouvellement de certaines exigences du travail mathématique en cours ou à venir.

6.3. La situation se complique beaucoup quand on passe du niveau de l'évaluation « atomique » à l'évaluation « moléculaire ». L'évaluateur cède alors la place à un « algorithme ». *J'ai mis* 2 sur 3 à la réponse de l'élève à cette question, 3 sur 5 à cette autre : à son travail est donc attribuée la note de 5 sur 8. Cela *résulte* de mes évaluations atomiques, sans être le produit d'un acte évaluatif de ma part. On a dit que la déclaration préalable d'un barème précisait le projet collectif d'étude. Voyons-en ici le mécanisme arithmétique – « l'algorithme ». Supposons de façon générale un devoir D constitué de questions $Q_1, \ldots, Q_\ell$, la question Q_i faisant l'objet d'une note X_i sur N_i points. Pour $N_i = 5$, tel élève ω recevra par exemple la note $X_i(\omega) = 3$. Mais dire que ω a obtenu la note 3 à la question Q_i n'est pas suffisant : si Q_i était noté sur 10, ω n'aurait pas obtenu la « moyenne », qui serait alors de 5 ; etc. L'usage français est donc de dire que ω a obtenu « la note de 3 sur 5 » ou « 3/5 », et, plus généralement, la note $x_i(\omega) = X_i(\omega)/N_i$. Mais la notation 3/5 désigne-t-elle la fraction que l'on note habituellement $\frac{3}{5}$? Peut-on écrire que 3/5 = 0,6 ? On sait qu'on ne dit pas, usuellement, « ω a obtenu 0,6 à Q_i ». Mais on sait pourtant qu'on peut « traduire » une note sur 5, ou sur 10, en une note sur 20, etc. À certains égards, la note 3/5 équivaut donc à 6/10, à 12/20, etc. On peut en fait regarder les choses ainsi : une note « atomique », donnée à une question « isolée », peut toujours être regardée comme un nombre compris entre 0 et 1 ; ω pourra ainsi avoir obtenu 0,4 à Q_1, 0,9 à Q_2, 0,5 à Q_3, la moyenne arithmétique de ces trois nombres étant en l'espèce $\frac{0{,}4 + 0{,}9 + 0{,}5}{3} = 0{,}6$. Mais la note attribuée au *devoir* D n'est pas nécessairement cette moyenne arithmétique-là : elle est en général une moyenne *pondérée*. En règle générale, on donne à chaque question Q_i un « poids » p_i, la somme des poids étant égale à 1 ; la note x attribuée à D est alors $x = p_1x_1 + \ldots + p_\ell x_\ell$. Mais quels poids choisir ? L'idée est évidemment de donner à la note x_i un poids d'autant plus important que Q_i est jugée plus importante. Or son importance est, en principe, indiqué par la note maximale N_i qui peut être attribuée à la réponse de l'élève à cette question : un travail « noté sur 5 » est moins important qu'un travail « noté sur 12 », etc. En d'autres termes, on cherche un coefficient de proportionnalité k tel que $p_i = kN_i$; comme $p_1 + \ldots + p_\ell = 1$, on a $1 = kN_1 + \ldots + kN_\ell = k(N_1 + \ldots + N_\ell) = kN$, et donc $k = 1/N$, de sorte que $p_i = N_i/N$. La note x s'écrit donc : $x = p_1x_1 + \ldots + p_\ell x_\ell = \frac{N_1}{N}x_1 + \ldots + \frac{N_\ell}{N}x_\ell = \frac{N_1}{N}\frac{X_1}{N_1} + \ldots + \frac{N_\ell}{N}\frac{X_\ell}{N_\ell} = \frac{X_1}{N} + \ldots + \frac{X_\ell}{N} = \frac{X_1 + \ldots + X_\ell}{N} = \frac{X_1 + \ldots + X_\ell}{N_1 + \ldots + N_\ell}$. Ainsi obtient-on la note attribuée au devoir D en additionnant les numérateurs et les dénominateurs des fractions X_i/N_i. Dans un devoir D constitué par exemple de trois questions notées respectivement sur 2, 3 et 5, le coefficient de pondération de chaque note partielle est, *par convention*, égal respectivement à $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ et $\frac{5}{10}$, en sorte qu'un élève qui aurait obtenu à ces questions 2 sur 2, 1 sur 3 et 4 sur 5 aurait pour note au devoir

$$\frac{2}{10}\times\frac{2}{2}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{10}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{10}+\frac{1}{10}+\frac{4}{10}=\frac{2+1+4}{10}.$$

Plus généralement, s'il avait obtenu a points sur 3, b points sur 5, c points sur 12, il aurait pour note

$$\frac{3}{20}\times\frac{a}{3}+\frac{5}{20}\times\frac{b}{5}+\frac{12}{20}\times\frac{c}{12}=\frac{a}{20}+\frac{b}{20}+\frac{c}{20}=\frac{a+b+c}{20}.$$

6.4. La question examinée dans ce qui précède mérite d'être prise à rebours : si D se laisse décomposer en ℓ questions $Q_1, \ldots, Q_\ell$ et si le professeur veut donner aux travaux correspondants des poids $p_1, \ldots p_\ell$ (dont la somme soit égale à 1), « sur combien » doit-il noter les (réponses aux) questions $Q_1, \ldots Q_\ell$? Notons $N_1, \ldots, N_\ell$ ces notes maximales inconnues, et écrivons toujours $x_i = X_i/N_i$. En se restreignant à des poids rationnels $p_i = \frac{a_i}{b_i}$, cette fraction étant supposée réduite, si l'on veut que la note obtenue en ajoutant les notes X_i rapportées à la somme N des N_i corresponde aux poids souhaités, on doit avoir

$$\frac{N_1}{N}=\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{N_\ell}{N}=\frac{a_\ell}{b_\ell} \text{ et } N_1 = N\times\frac{a_1}{b_1}, \ldots, N_\ell = N\times\frac{a_\ell}{b_\ell}.$$

L'entier N doit en particulier être divisible par $b_1, \ldots, b_\ell$ et donc doit être un multiple de PPCM($b_1, \ldots, b_\ell$) : il existe ainsi un entier $k \geq 1$ tel que $N = k$ PPCM($b_1, \ldots, b_\ell$). L'entier k et donc l'entier N étant choisis, les notes maximales N_i sont données par $N_i = N\times\frac{a_i}{b_i}$. On a évidemment

$$N_1 + \ldots + N_\ell = N\times\frac{a_1}{b_1} + \ldots + N\times\frac{a_\ell}{b_\ell} = N(p_1 + \ldots + p_\ell) = N.$$

Supposons par exemple que $\ell = 3$ et que l'on souhaite donner à Q_1, Q_2, Q_3 les poids respectifs $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$; comme PPCM(6, 3, 2) = 6, la note du devoir D doit être un multiple de 6, par exemple 6, 12, 18 ou 24. Comme ces notes maximales sont inhabituelles, le professeur, en général, « bricole », par exemple pour arriver à 20. Ici, pour $N = 18$, on aurait $N_1 = 3$, $N_2 = 6$, $N_3 = 9$; le professeur peut alors décider d'ajouter un point à D_1 et un autre à D_3 : le système des poids devient alors $\frac{4}{20}, \frac{6}{20}, \frac{10}{20}$ soit encore $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}5$. L'opacité croît ; le lien avec le projet d'étude collectivement engagé cesse d'apparaître nettement, tandis que l'impression d'arbitraire gagne.

4. Le Journal des TER

4.1. On s'arrête d'abord sur des difficultés rencontrés par l'équipe formée de *VAC*, *YB* et *SM1* (MJ).

Notre mémoire est basé sur l'observation d'une séance d'exercices sur le thème de la proportionnalité en 6^e. Dans cette séance, il apparaît que le professeur d'accueil a instauré la technique du produit en croix comme technique de résolution lors de problèmes sur la proportionnalité, ce qui n'est pas au programme de 6^e. Notre sujet est donc d'améliorer ce point en particulier. (Courriel, extrait)

1. La pratique observée lors du SPA ne respecte pas le « pacte scolaire national » inscrit dans les programmes : les programmes du collège prescrivent en effet de réserver l'étude de la technique dite des produits en croix à la classe de… 4^e.

a) Le texte du programme relatif à la 5^e précise la chose en ces termes.

L'usage du « produit en croix » est réservé à la classe de quatrième où il pourra être justifié en liaison avec l'égalité des quotients (programme de la classe de quatrième § 1.2 et 2.2).

b) Comme on le voit, l'*une* des raisons de ce choix est lié à la capacité de *justifier* cette technique : derrière la facilité technique il y a une difficulté technologique. Le programme de 4^e comporte à cet égard d'abord le commentaire suivant.

> Aux diverses procédures étudiées en classes de sixième et de cinquième pour rechercher une quatrième proportionnelle, s'en ajoute une nouvelle, communément appelée « produit en croix » qui doit être justifiée (en lien avec l'égalité de quotients : voir § 2.2 ci-dessous).

Le paragraphe 2.2 fait apparaître la compétence que voici.

> … connaître et utiliser :
>
> • l'équivalence entre $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $ad = bc$ (b et d étant non nuls) ;
>
> • …

Le commentaire correspondant précise ceci.

> La première équivalence est notamment utile pour justifier la propriété dite « d'égalité des produits en croix », relative aux suites de nombres proportionnelles.

c) Qu'est-il prévu pour la classe de 6^e ? L'introduction du programme de 6^e comporte notamment l'indication que voici.

> Le programme de la classe de sixième a pour objectifs principaux :
> ■ dans la partie « **organisation et gestion de données, fonctions** » :
> – de mettre en place les principaux raisonnements qui permettent de traiter les situations de proportionnalité…

Dans le secteur « Proportionnalité » du domaine « Organisation et gestion de données, fonctions », le programme précise, sous la rubrique « Compétences », les manières de « traiter » les situations de proportionnalité.

> Traiter les problèmes « de proportionnalité », en utilisant des raisonnements appropriés, en particulier :
> – passage par l'image de l'unité ;
> – utilisation d'un rapport de linéarité, exprimé, si nécessaire, sous forme de quotient ;
> – utilisation du coefficient de proportionnalité, exprimé, si nécessaire, sous forme de quotient.

Ces manières de faire font l'objet d'un commentaire express.

> Les situations de proportionnalité se caractérisent par le fait que des raisonnements du type « fois plus » peuvent être mobilisés. Pour chaque situation, l'élève doit être en mesure de mobiliser l'une ou l'autre des trois compétences citées. Les raisonnements correspondants s'appuient :
> – soit sur la propriété de linéarité relative à la multiplication (homogénéité) qui correspond, par exemple, au fait que « 3 fois plus d'objets coûtent 3 fois plus cher »,
> – soit sur la mise en évidence du coefficient de proportionnalité : par exemple, sur un plan, une distance sur le terrain est traduite par une distance « deux cents fois plus petite »).
> La propriété additive de la linéarité est également utilisée.
> Ces différentes propriétés n'ont pas à être formalisées.
> Les rapports utilisés sont, soit des rapports entiers ou décimaux simples (2,5 par exemple, qui peut être exprimé par « 2 fois et demie »), soit des rapports exprimés sous forme de quotient : le prix de 7 m de tissu est 7/3 fois le prix de 3 m de tissu.

d) Le programme de 5^e confirme en ces termes l'inventaire des techniques « de 6^e » ; on y lit ceci.

> Les procédures utilisées pour traiter une situation de proportionnalité sont de même nature qu'en classe de sixième :
> – passage par l'image de l'unité
> – utilisation d'un rapport de linéarité exprimé, si nécessaire, sous forme de quotient
> – utilisation du coefficient de proportionnalité exprimé, si nécessaire, sous forme de quotient.

Le même texte ajoute alors ce que voici.

> Mais leur usage par chaque élève évolue en fonction notamment de la meilleure maîtrise qu'il a de la notion de quotient. La propriété additive de la linéarité est également utilisée. L'utilisation répétée du coefficient de proportionnalité est l'occasion d'exploiter certaines fonctions de la calculatrice (opérateurs constants, mémoire) ou d'un tableur *[B2i]*.

e) Notons ici une précision importante apportée par le programme de 6^e.

> Les problèmes à proposer (qui relèvent aussi bien de la proportionnalité que de la non-proportionnalité) se situent dans le cadre des grandeurs (quantités, mesures). L'étude de la proportionnalité dans le cadre purement numérique relève du programme de la classe de cinquième.

3. L'équipe de TER doit « améliorer » la séance observée, en l'espèce une séance conçue et animée par un professeur stagiaire P qui est une séance d'exercices portant sur la technique des produits en croix introduite par le professeur d'accueil Π lors d'une séance précédente.

a) Imaginons que, Π étant brusquement absent pour une assez longue période, un remplaçant P' est nommé qui doit assurer cette deuxième séance – qui se substituerait alors à la séance réellement observée. Il serait peu judicieux de la part de P' de poursuivre dans la voie ouverte par Π (et prolongée par P). Il est facile pour lui de préciser aux élèves qu'il *poursuit* le travail amorcé par la classe sur la proportionnalité, tout en laissant mourir discrètement la technique des produits en croix (ce qu'il peut se dispenser d'annoncer à l'avance aux élèves).

b) Pour cela, il doit pousser en avant d'autres techniques de « traitement » de la proportionnalité, qui n'entrent pas en conflit avec la technique des produits en croix. En réalité, il faut aussi « définir » la relation de proportionnalité entre deux variables x et y relatives à un même « système ». Pour cela, il est raisonnable de partir du plus élémentaire : on a $y \propto x$ si, lorsque la valeur de x est multiplié par n, alors la valeur de y est multiplié par n ($n \in \mathbb{N}^*$). En pratique, on peut demander de trouver les prix (en euros) pour un produit (par exemple une navette) dont on connaît le prix à la douzaine : le tableau ci-après évoque et résume le travail que la classe devra effectuer.

Nombre	12	24	4	8	3	6	2
Prix (€)	10,20	20,40	♣	♥	♠	♦	*

Les raisonnements et les calculs à réaliser sont résumés ci-après.

> ❶ $3 \times 4 = 12 \Rightarrow 3 \times ♣ = 10{,}20 \Rightarrow ♣ = \frac{10{,}20}{3} = 3{,}40$.
>
> ❷ ① $8 = 2 \times 4 \Rightarrow ♥ = 2 \times 3{,}40 = 6{,}80$.

② $3 \times 8 = 24 \Rightarrow 3 \times ♥ = 20{,}40 \Rightarrow ♥ = \frac{20{,}40}{3} = 6{,}80$.

❸ $4 \times 3 = 12 \Rightarrow 4 \times ♠ = 10{,}20 \Rightarrow ♠ = \frac{10{,}20}{4} = 2{,}55$.

❹ ① $6 = 2 \times 3 \Rightarrow ♦ = 2 \times 2{,}55 = 5{,}10$.
② $2 \times 6 = 12 \Rightarrow 2 \times ♦ = 10{,}20 \Rightarrow ♦ = 5{,}10$.

❺ ① $2 \times 2 = 4 \Rightarrow 2 \times * = 3{,}40 \Rightarrow * = \frac{3{,}40}{2} = 1{,}70$.

② ? $2 = 8 - 6 \Rightarrow * = 6{,}80 - 5{,}10 = 1{,}70$.

Le dernier cas (qu'il faut justifier) amorce le travail sur la propriété *additive* des relations de proportionnalité. En outre, en faisant apparaître le prix d'une unité, on amorcera ultérieurement une simplification *générale* notable de la technique employée jusqu'ici.

Nombre	1	24	4	8	…
Prix (€)	0,85	$24 \times 0{,}85$	$4 \times 0{,}85$	$8 \times 0{,}85$	…

c) Formellement, si l'on écrit $y = f(x)$, c'est la propriété d'*homogénéité*, selon laquelle $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ que l'on manipule, ainsi que, finalement, la propriété d'*additivité*, selon laquelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$; plus généralement, on recourra à la propriété de *linéarité*, selon laquelle $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$, en particulier dans les cas où elle s'écrit $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ ou $f(x + \mu y) = f(x) + \mu f(y)$. Les *jeux* avec les nombres est ici important, et devront être développés.

d) Dans cette perspective, et avant même l'exploitation de la découverte éventuelle du « passage par l'unité », on provoquera la rencontre avec des « rapports de linéarité » *non entiers*, comme dans le cas suivant :

Nombre	12	24	4	5
Prix (€)	10,20	20,40	3,40	◊

$$? \; 5 = \frac{5}{4} \times 4 \Rightarrow ◊ = \frac{5}{4} \times 3{,}40$$

Pour justifier la technique précédente, on peut procéder comme ébauché ci-après.

Nombre	4	5	$20 = 5 \times 4$	$20 = 4 \times 5$
Prix (€)	3,40	◊	$5 \times 3{,}40$	$4 \times ◊$

e) Par contraste, on écartera de tout ce travail le coefficient de proportionnalité (qui découle de la structure « verticale » du tableau). On notera enfin que le ministère propose un projet de document d'accompagnement relatif à la proportionnalité couvrant l'ensemble des années de collège (voir http://eduscol.education.fr/D0015/LLPHAG00.htm#college). On y lit en particulier ce qui suit.

• Toutes les procédures de résolution utilisables peuvent être reliées à des propriétés de la fonction linéaire qui sont d'abord utilisées de façon implicite :

– utilisation de la propriété d'additivité, qui peut être exprimée, en troisième par : $f(x + y) = f(x) + f(y)$;

– utilisation de la propriété d'homogénéité (appelée aussi procédure scalaire), qui peut être exprimée, en 3e par : $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ avec le cas particulier « du passage par l'unité » ou « règle de trois » [Note. La « règle de trois » a longtemps été enseignée comme un procédé permettant de résoudre les problèmes de recherche d'une quatrième proportionnelle. Un problème de cette époque comme « En 6 jours, un ouvrier gagne 250 F. Combien gagne-t-il en 15 jours ? » donne lieu à la mise en forme suivante : $\frac{250 \text{ F} \times 15}{6}$, avec la recommandation de simplifier avant d'effectuer les calculs.] ;

– utilisation d'une combinaison linéaire, faisant intervenir les deux procédures précédentes ;

– utilisation du coefficient de proportionnalité (appelée aussi procédure fonctionnelle) ;

– utilisation de l'égalité des rapports ;

– utilisation de l'égalité des produits en croix ;

– utilisation d'une représentation graphique.

• Trois objectifs peuvent être assignés à l'enseignement au cours de la scolarité obligatoire :

– augmenter la capacité à mobiliser une procédure donnée et en accroître l'efficacité, notamment en permettant aux élèves de l'utiliser avec d'autres types de nombres que ceux avec lesquels elle a d'abord fonctionné ;

– augmenter la variété des procédures utilisables et inciter les élèves à opérer le choix le plus approprié à la situation particulière à traiter ;

– renforcer la compréhension des liens qui existent entre ces différentes procédures, avec, en fin de collège, une synthèse possible à l'aide de la fonction linéaire et de ses propriétés.

La séance à concevoir et à développer, qui est en quelque sorte – en l'espèce – la toute première consacrée à la proportionnelle au collège, apportera sa contribution à ce programme de formation.

4.2. On examine maintenant une difficulté soulevée par l'équipe s'arrête d'abord sur des difficultés rencontrés par l'équipe constituée de *IIP* et *JN* (CR).

Dans le séminaire 2004-2005 à partir de la page 363 (en bas de page), il est discuté de la pertinence d'une AER sur la fonction inverse suite à une question d'un stagiaire. Page 365, en milieu de page, on arrive à la conclusion que « la recherche d'une situation dans laquelle on soit conduit ***exactement*** à la considération de la fonction inverse ***est dénuée de sens*** », les expressions n'étant pas invariantes par un changement d'unité. Dans notre TER, nous sommes conduit à essayer de proposer une AER sur la fonction inverse.

Avec l'exercice ci-dessous, il me semble que l'on supprime « un peu » ces problèmes d'invariance puisque un éventuel changement d'unité est « compensé » dans la relation : $\frac{\text{ON}}{\text{OB}} = \frac{\text{OA}}{\text{OM}}$ qui donne $\text{ON} = \frac{1}{x}$ même si on prend OA et OB différent de 1. Bien sûr, il faut toujours garder la contrainte OA = OB.

Activité

Soit A et B les points de coordonnées respectives (1, 0), (0, 1). Soit M un point du plan distinct de O et situé sur l'axe des abscisses. On notera x l'abscisse du point M. La droite parallèle à (MB) passant par A coupe l'axe des ordonnées en N.

En utilisant le logiciel Geoplan-Geospace, construire la figure précédente.

Quelles sont les coordonnées de N ? Justifier.

Construire le point d'intersection M' de la perpendiculaire en M à l'axe des abscisses et de la perpendiculaire en N à l'axe des ordonnées. Quel est le lieu des points M' lorsque M se déplace sur l'axe des abscisses ?

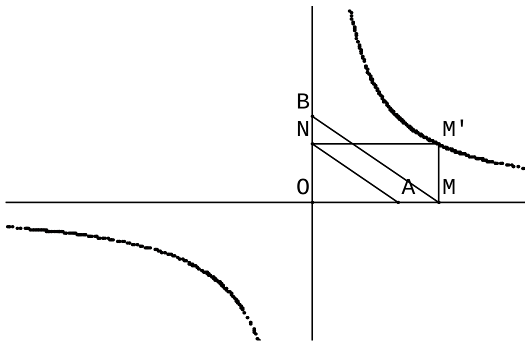
Est-ce que l'on peut concevoir de proposer ce genre d'activité pour introduire la fonction inverse ? Je ne vois pas vraiment comment motiver l'étude de ce problème.

a) On a représenté ci-après la configuration à laquelle se réfère l'énoncé de l'activité ci-dessus. En outre, en utilisant la fonction « Trace » de Géoplan, on a fait apparaître le « lieu » demandé – une hyperbole équilatère.

b) On a bien sûr y = ON = $\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OM}} = \frac{1}{\mathrm{OM}} = \frac{1}{x}$. Si l'on remplace l'unité de mesure des longueurs du plan u par $v = \frac{u}{k}$, on aura OA = OB = k et donc, x et y désignant les longueurs de [OM] et [ON] mesurées avec la nouvelle unité, on aura :

$$y = \mathrm{ON} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OB}} \times \mathrm{OB} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OM}} \times \mathrm{OB} = \frac{\mathrm{OA} \times \mathrm{OB}}{\mathrm{OM}} = \frac{k^2}{x}.$$

Le fait d'arriver « exactement » à $\frac{1}{x}$ ne tient pas au fait que OA = OB, mais au fait que OA = OB = 1.



c) Redisons donc encore une fois le caractère artificiel de la volonté d'arriver « exactement » à $\frac{1}{x}$: on ne saurait y parvenir que par un choix d'unité approprié. À l'inverse, derrière *la* fonction de référence $x \mapsto \frac{1}{x}$ il faut voir *les* fonctions $x \mapsto \frac{a}{x}$.

• La chose était autrefois évidente, comme l'on s'en convaincra en examinant les extraits ci-après d'un ouvrage publié en 1938 pour la classe de 3$^{\mathrm{e}}$. Dans le premier de ces extraits, l'auteur motive l'étude de « la fonction $y = \frac{a}{x}$ », avant d'aborder l'étude de la fonction particulière $y = \frac{1}{x}$. Dans le second, l'étude de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ ayant été menée à bien – elle occupe quatre pages et demie du chapitre –, l'auteur passe aux fonctions $x \mapsto \frac{a}{x}$: cette fois, l'étude n'occupe plus qu'une page du manuel…

Extrait 1

CHAPITRE III

ÉTUDE DE LA FONCTION $y = \frac{a}{x}$

44. On rencontre, dans les applications, d'autres fonctions que la fonction $y = ax^2$. Ainsi :

Si x et y sont les côtés d'un rectangle dont la surface demeure constante et équivalente à celle d'un carré de côté c, on a :

$$xy = c^2, \qquad \text{ou :} \qquad y = \frac{c^2}{x};$$

Si x et y sont les segments déterminés sur l'hypoténuse par la hauteur d'un triangle rectangle, et si h est la longueur de cette hauteur, on a :

$$xy = h^2; \qquad \text{ou :} \qquad y = \frac{h^2}{x};$$

Si x et y sont les segments déterminés par un cercle sur les sécantes issues d'un point, à partir de ce point, on a :

$$xy = k \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{k}{x}$$

k étant un nombre constant lorsque le point est donné.

Si y est le volume d'une masse de gaz à température constante et x la pression de cette masse de gaz, la loi de Mariotte donne :

$$xy = a; \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{a}{x},$$

a étant un nombre fixe.

Si x et y sont les distances au foyer d'un miroir sphérique concave d'un point situé sur l'axe principal du miroir et de son image, on a :

$$xy = f^2; \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{f^2}{x}$$

Toutes les fonctions y ainsi définies sont de la forme :

$$y = \frac{a}{x}.$$

Nous allons étudier les fonctions de cette forme.

Etude de la fonction $y = \frac{1}{x}$.

45. Nous commencerons par étudier la fonction :

$$y = \frac{1}{x}.$$

Extrait 2

Etude de la fonction $y = \dfrac{a}{x}$.

54. L'étude de la fonction :

$$y = \frac{a}{x}$$

se déduit de celle qui vient d'être faite en écrivant :

$$y = a \times \frac{1}{x},$$

les deux fonctions y et $\dfrac{1}{x}$ varient donc dans le même sens ou en sens contraire suivant que a est positif ou négatif.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Travaux dirigés de didactique des mathématiques

➔ Séance 6 : mardi 20 mars 2007 (9 h – 10 h 30)

Programme de la séance. 1. Une recherche sur Internet // 2. Questions de mots // 3. À suivre…

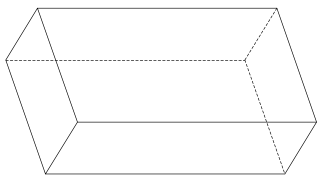
1. Une recherche sur Internet

1.1. L'objet de la recherche

a) La recherche sur Internet envisagée ici concerne la notion de *perspective cavalière*. Notons déjà cette question de la semaine 8 laissée jusqu'ici en souffrance.

> En géométrie dans l'espace, nous utilisons la perspective cavalière pour représenter des solides dans un plan. D'où vient le mot « cavalière » ? Existe-t-il d'autres représentations que celle-là et que la représentation « classique » avec point de fuite ? Quel en est l'intérêt ? (PP, MJ, 2^{de}, 8)

b) La *cible* de la recherche envisagée sera cependant autre que ce que vise immédiatement le questionnement précédent. La consigne sera en effet la suivante, où le point 1 est le cœur de cible, tandis que les points 2 et 3 sont plus périphériques.

> Q_1. Que recèle Internet à propos de la théorie mathématique de la perspective cavalière (définition mathématique, technique, technologie) ? La figure ci-après peut-elle, selon une telle théorie mathématique, être regardée comme représentant en perspective un cube ?
>
> 
>
> Q_2. Que peut-on trouver sur Internet à propos de la signification du qualificatif « cavalière » dans l'expression « perspective cavalière » ?
>
> Q_3. Que trouve-t-on sur Internet quant à l'identification et à la classification de différents types de perspective ? Quelles indications y trouve-t-on quant aux avantages et inconvénients prétendus de chacun d'eux ?

c) Dans la recherche à entreprendre, deux principes doivent absolument être respectés.

> **• Principe d'ignorance méthodique**
>
> Quant aux questions sur lesquelles porte la recherche, on ne mêle pas ses connaissances éventuelles (relatives à des réponses allogènes supposées) aux éléments de réponse explicites ou implicites rencontrées sur Internet.

• **Principe de doute méthodique**

Toute affirmation recueillie sur Internet et relative aux questions sur lesquelles porte la recherche doit être regardée d'abord comme conjecturale (et non pas accréditée ou rejetée *a priori*) en vue d'être ultérieurement *travaillée* quant à sa vérité (notamment lorsqu'il ne s'agit pas d'une assertion déjà *beaucoup travaillée* par l'opérateur de la recherche – par exemple, ici, le fait que, disons, sin 30º = 0,5).

1.2. Un cadre directeur pour la recherche

a) Chaque équipe ouvre un fichier de texte où sont portés les noms des membres de l'équipe, chacun d'eux étant suivi entre parenthèses des initiales du tuteur de GFP, selon le patron ci-après.

Damien Diderot (UV)
Émilie Gassendi (XY)

Une recherche sur Internet :
la perspective cavalière

Notes du 20 mars 2007

……

b) Chaque équipe se voit attribuer la recherche à l'aide de l'un des moteurs de recherche suivants : **Google – Yahoo! – Exalead – Ixquick**.

c) Sur le moteur de recherche assigné, chaque équipe prend pour requête l'expression "perspective cavalière" (entre guillemets).

Notes du 20 mars 2007

1. Le moteur de recherche

Le moteur de recherche sollicité était **…**

2. La requête

Requête adoptée : **"perspective cavalière"**

……

d) Chaque équipe examine alors *les deux premières pages affichées* par le moteur de recherche utilisé, en indiquant, pour chaque item, les renseignements illustrés sur l'exemple ci-après.

2. La requête

Requête adoptée : **"perspective cavalière"**

3. Les deux premières pages

3.1. …

……

3.7. …

3.8. *Introduction à la perspective cavalière*

∗ Adresse :

http://www.univ-irem.fr/commissions/ci3m/CDci3m/toulouse/perspective/PP%20with%20Cabri.htm

∗ Site : Commission Inter Irem Informatique et Mathématiques
http://www.univ-irem.fr/commissions/ci3m/

∗ Auteur : Jean-Jacques Dahan, IREM de Toulouse.

∗ Décision : **non retenu**.

∗ Motif de la décision :
Q_1. Traitement mathématique explicite minimal.
Q_2. Pas d'indication quant au sens de l'adjectif « cavalier » dans ce contexte d'emploi.
Q_3. Pas de référence à d'autres types de perspectives.

∗ Commentaire : ce document peut être utile pour **mettre à l'épreuve** les connaissances mathématiques que la recherche vise à permettre de dégager et de mettre en forme en réponse à la question Q_1.

3.9. …

……………………………………………………..………………………………………………

3.20. …

1.3. Un bilan collectif de la recherche

a) On examine les accords et désaccords en recueillant les décisions de chaque équipe.

b) On procède à un classement des documents jugés les plus « pertinents » en prenant pour critère premier l'existence d'éléments de réponse supposés notamment à la question Q_1. Ici, en pratique, on retient les quatre documents dont les adresses sont indiquées ci-après, les deux premiers parce qu'ils semblent contenir des éléments de réponse à la question Q_1, le troisième comme répondant semble-t-il à la question Q_2 et le quatrième à la question Q_3.

➔ http://fr.wikipedia.org/wiki/Perspective_cavali%C3%A8re
➔ http://www.ac-creteil.fr/maths/puissances/N9/910persective_cavaliere.html
➔ http://www.marseille.archi.fr/pages/travaux/perspective/Internet%20PDF/persparalleles.pdf
➔ http://serge.mehl.free.fr/exos/perspective1.html

c) Ces documents seront exploités ultérieurement.

2. Questions de mots

2.1. Cavalière, dites-vous ?

a) On recense d'abord les éléments de réponse trouvé répondant à la question Q_2 ; puis on approfondit la recherche sur la question Q_2. Le choix du moteur et de la requête est cette fois libre. La recherche se fait néanmoins dans le respect scrupuleux des principes d'ignorance et de doute méthodiques.

b) Les éléments de réponse trouvés sont reportés dans le fichier de travail de l'équipe, selon le modèle suivant.

3.9. …

………………………………………………………………………………………………………

3.20. …

4. Perspective « cavalière » ?

4.1. Étymologies rencontrées sur Internet

a) On tente ici de répondre à la question Q_2 : pourquoi la perspective cavalière est-elle dite « cavalière » ?

b) Première réponse rencontrée

⁎ Le texte trouvé :

Avertissement : la plupart des explications avancées ici, bien qu'issues des sources citées en bibliographie, ne sont que des hypothèses, parfois transmises comme des légendes de livre en livre. Si vous pouvez me contredire avec certitude, envoyez-moi un mail (ferreol@mathcurve.com).

………

Pourquoi des perspectives *cavalières* ?

Une perspective cavalière est une perspective où les parallèles restent parallèles (contrairement à une perspective conique où les droites parallèles deviennent en général concourantes) ; elle est obtenue théoriquement pour un observateur situé à l'infini. Une origine possible de l'expression « perspective cavalière » est qu'un cavalier regardant du haut de son cheval un objet à terre le voit quasiment en perspective cavalière. Le terme datant du XVI^{e} siècle où il était utilisé en architecture militaire, une autre interprétation proviendrait du fait qu'un cavalier est, en matière de fortification, un haut monticule de terre. La vue cavalière est alors la vue qu'a sur la campagne, un observateur situé sur le haut du cavalier ; la perspective cavalière serait donc le procédé utilisé par le dessinateur de fortifications pour rendre la vue cavalière.

Par contre l'interprétation disant que l'expression viendrait du mathématicien Cavalieri est fantaisiste.

⁎ Adresse :
http://mapage.noos.fr/r.ferreol/langage/notations/notations.htm

⁎ Site : site personnel de Robert Ferréol, professeur agrégé de mathématiques en classe de mathématiques supérieures au lycée Carnot à Paris.
http://mapage.noos.fr/r.ferreol/

⁎ Auteur : Robert Ferréol.

⁎ Décision : **retenu**.

⁎ Motif de la décision : bien qu'il soit sans doute non spécialiste des questions d'origine, l'auteur apporte des éléments de réponse dans le respect au moins apparent du principe du doute méthodique.

⁎ Commentaire : ce document est évidemment à confronter à des sources situées en amont de lui du point de vue du travail sur l'origine des mots.

c) Deuxième réponse rencontrée

………..

2.2. La perspective cavalière en anglais

a) Afin de poursuivre la recherche sur la perspective cavalière, on souhaite passer au domaine *anglophone*. Une question cruciale est donc de savoir comme se dit en anglais « perspective cavalière ».

b) La rencontre avec le document de Jean-Jacques Dahan a pu être l'occasion d'identifier une version en anglais de ce document (http://www.univ-irem.fr/commissions/ci3m/CDci3m/geometrie/geom.htm). Dans ce document, « perspective cavalière » est rendu par "parallel perspective". Chaque équipe s'emploie à vérifier cette traduction, en utilisant comme elle le pense bon les ressources de l'Internet. (On peut toujours tenter audacieusement de requérir l'expression, *a* *priori* peu « anglaise », de “cavalier perspective”, ne serait-ce que pour débusquer des expressions indiquées comme « synonymes ».)

c) À partir de l’une des expressions identifiées pour rendre en anglais « perspective cavalière », on reprend la recherche effectuée en français sur les ressources de l’Internet en matière de perspective cavalière.

4. Perspective « cavalière » ?

4.1. Étymologies rencontrées sur Internet

……………………………………………………………………..…………………………………

4.2. La perspective cavalière en anglais

a) Traduction adoptée : …

b) La requête : …

b) Le moteur de recherche : …

c) La première page

Premier item

∗ Adresse : …

∗ Site : …

∗ Auteur : …

∗ Décision : [**retenu/non retenu**.]

∗ Motif de la décision :
Q_1. …
Q_2. …
Q_3. …

∗ Commentaire : …

Deuxième item

∗ Adresse : …

………………………………………………………………………………………………………

3. À suivre…

3.1. Chaque équipe adressera son fichier de travail, après d’éventuelles retouches, à l’adresse suivante : y.chevallard@aix-mrs.iufm.fr.

3.2. Ce fichier pourra être inséré dans le portfolio de ses auteurs – on reviendra là-dessus lors de la séance du 27 mars.

3.3. Les questions au principe de ce travail seront revisitées, afin notamment d’apporter une réponse à la question sur le « cube ».

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 21 : mardi 20 mars 2007

➔ Matin : 0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions I // 2. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques

➔ Après-midi (explicitation) : 3. Les Archives du Séminaire // 4. Forum des questions II

Matin

0. Questions de la semaine

Journée 21 (20 mars 2007)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4e (et soutien en 5e)

Comment, d'ici à la fin de l'année et pour les années à venir, continuer notre formation ?

1. Forum des questions I

1.1. Une question de géométrie

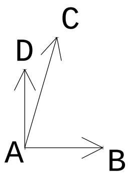
a) On s'est arrêté, lors de la séance 20, sur la situation suivante : dans un plan $\prod$ de l'espace physique, un triplet de points non alignés $\Delta = (A, B, C)$ définissent une métrique euclidienne pour laquelle, par définition,

$$||\overrightarrow{AB}||_\Delta = ||\overrightarrow{AC}||_\Delta = 1 \text{ et } \overrightarrow{AB} \overset{\Delta}{\cdot} \overrightarrow{AC} = 0.$$

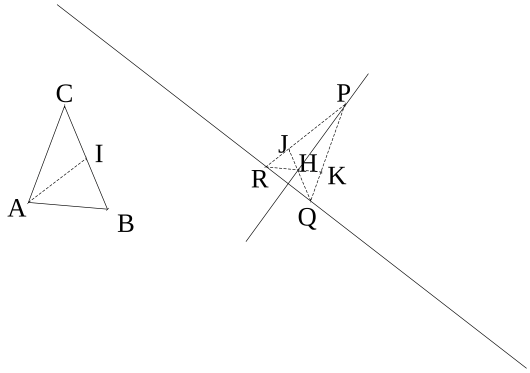
On écrira aussi : $AB_\Delta = AC_\Delta = 1$, $(AB) \perp_\Delta (AC)$. On dira que (A, B, C) est un repère affine Δ-orthonormal.

b) Lorsque c'est utile, on notera par l'indice (ou le préfixe) φ les entités relatives à la métrique physique ordinaire. Imaginons alors, pour simplifier, que, dans le plan $\prod$, on choisit l'unité de longueur de façon que $AB_\varphi = 1$, et soit D un point de $\prod$ tel que le repère (A, B, D) soit φ-orthonormal. (On pourra donc identifier φ au triplet (A, B, D).)

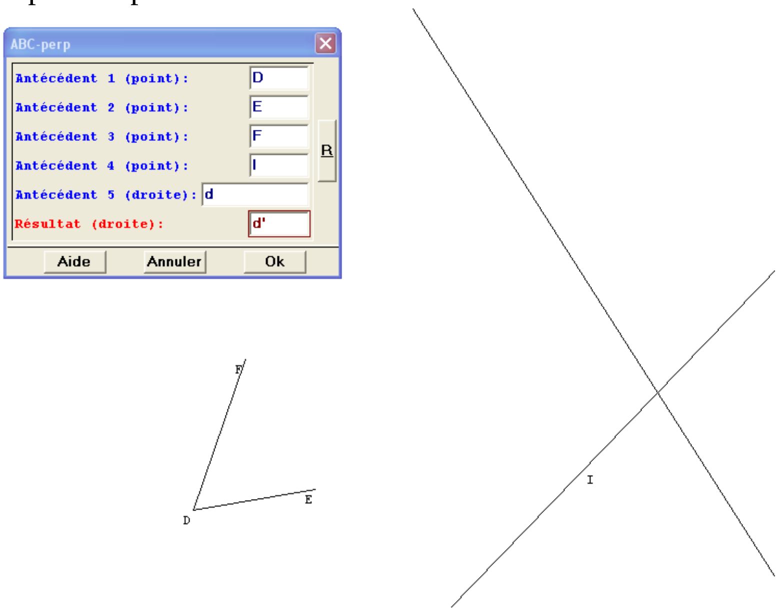
c) Dans ce qui suit, on va simuler à l'aide de Géoplan un certain nombre de notions relatives à une Δ-métrique donnée. Les réalités qui apparaissent à l'écran sont des φ-réalités. On prend ici pour points A, B, D les points de coordonnées (0, 0), (1, 0) et (0, 1). Soit C un point libre non aligné avec A et B. On a $\varphi = (A, B, D)$ et on pose $\Delta = (A, B, C)$.



• On avait résolu le problème suivant : étant donné une droite *d* et un point P hors de *d*, construire avec les φ-instruments usuels (règle et compas) la Δ-perpendiculaire à *d* passant par P. La réponse est figurée ci-dessous.



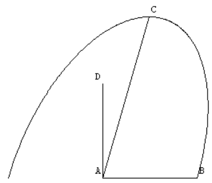
• Travaillant avec Géoplan, on peut *créer un prototype* permettant, étant donné un triplet de points non alignés D, E, F, un point I et une droite *d*, de faire tracer la (D, E, F)-perpendiculaire à *d* passant par I.



• On peut aussi définir la fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et la faire représenter sur l'intervalle [–1, 1], mais cela *par rapport au repère noté r ci-dessous*.

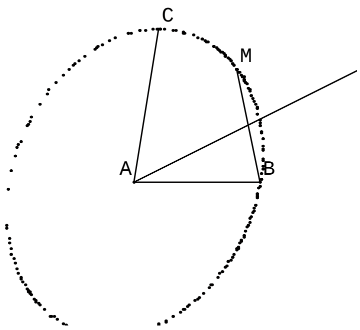
----- OBJETS CRÉÉS -----
A point de coordonnées (**0**,**0**) dans le repère $\mathbf{R}_{\mathbf{oxy}}$
B point de coordonnées (**1**,**0**) dans le repère $\mathbf{R}_{\mathbf{oxy}}$
Segment [**AB**]
D point de coordonnées (**0**,**1**) dans le repère $\mathbf{R}_{\mathbf{oxy}}$
Segment [**AD**]
C point libre
Segment [**AC**]
r repère ($\mathbf{A}, \overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{AC}}$) (graduations: **1**,**1**)
f fonction: $\mathbf{x} \mapsto \sqrt{\mathbf{1}-\mathbf{x}^2}$
c graphe de **f** sur [**-1**,**1**] (**300** points, repère **r**)

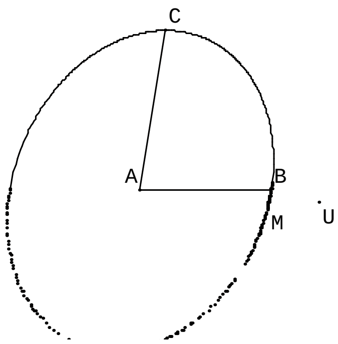
On obtient alors le Δ-demi-cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$, pour $y \geq 0$.



d) Prenons maintenant un point U libre dans le plan. L'un des problèmes évoqués oralement lors de la séance 20 était le suivant : comment obtenir, à l'aide des instruments de tracé usuels (règle et compas), le point M où [AU) coupe le Δ-cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans le repère r ?

• Avant de s'y affronter, observons d'abord que l'on peut obtenir facilement des points du Δ-cercle « trigonométrique » C_Δ. Soit en effet un point U du plan distinct de A ; on sait que le point M Δ-symétrique de B par rapport à (AU) appartient C_Δ. En utilisant la fonction « Trace » appliquée au point M, on obtient alors des points de C_Δ (ci-dessous à gauche), comme le confirme le tracé de la fonction f déjà observé (ci-dessous à droite).





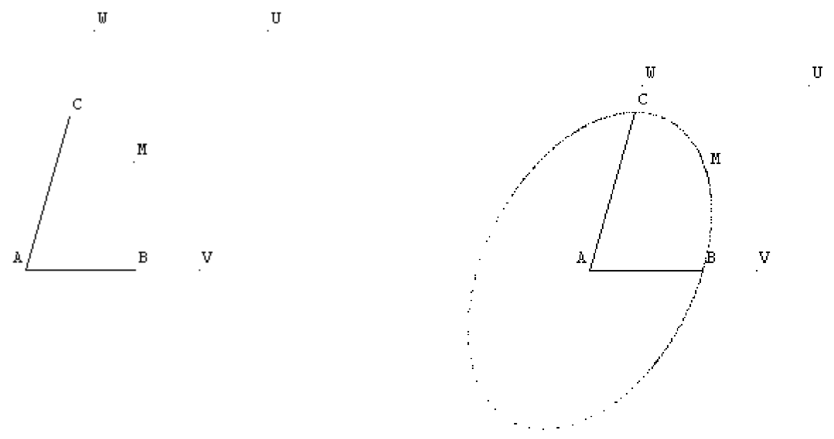
• Revenons au problème soulevé : étant donné un point U ≠ A, déterminer le point M de [AU) où cette demi-droite coupe le Δ-cercle C_Δ. On a très normalement

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AU}}{AU_\Delta}$$

et, là aussi très normalement, $AU_\Delta = \sqrt{{x_\Delta}^2 + {y_\Delta}^2}$, où x_Δ et y_Δ sont les coordonnées de U dans le repère r : $\overrightarrow{AU} = x_\Delta\,\overrightarrow{AB} + y_\Delta\,\overrightarrow{AC}$. Pour obtenir x_Δ et y_Δ, on peut procéder ainsi : on crée le projeté V (resp. W) de U sur (AB) (resp. (AC)) parallèlement à (AC) (resp. (AB)) ; on crée ensuite l'abscisse x (= x_Δ) de V sur la droite (AB) munie du repère (A, B) ; et de même l'ordonnée y (= y_Δ) de W sur la droite (AC) munie du repère (A, C). Enfin on crée le point M, image du point U par l'homothétie de centre A et de rapport

$$\frac{1}{\sqrt{{x_\Delta}^2 + {y_\Delta}^2}}.$$

Les figures ci-après confirment qu'on obtient bien ainsi le Δ-cercle C_Δ. (On reproduit à leur suite les lignes de programme correspondantes.)

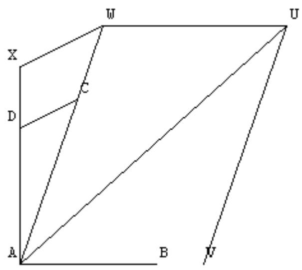


----- OBJETS CRÉÉS -----

A point de coordonnées (**0**,**0**) dans le repère $\mathbf{R}_{\mathbf{oxy}}$
B point de coordonnées (**1**,**0**) dans le repère $\mathbf{R}_{\mathbf{oxy}}$
Segment [**AB**]
C point libre
Segment [**AC**]
U point libre
V projeté de **U** sur (**AB**) parallèlement à (**AC**)
W projeté de **U** sur (**AC**) parallèlement à (**AB**)
x abscisse de **V** dans le repère (**AB**)
y abscisse de **W** dans le repère (**AC**)
M image de **U** par l'homothétie de centre **A** et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

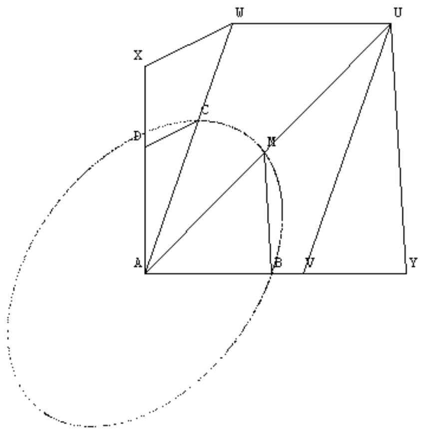
• La « construction » précédente n'en est pas complètement une : elle utilise en effet le *calcul* de $\sqrt{x_\Delta{}^2 + y_\Delta{}^2}$ par le logiciel (dont il faut rappeler qu'il permet de définir des modèles *numériques*, dont certains éléments reçoivent une expression graphique). Comment résoudre le problème posé avec ces instruments usuels de tracé que sont la règle et le compas, dont le second est adapté à la φ-géométrie mais inadéquat à la Δ-géométrie ?

• Considérons la figure ci-après.

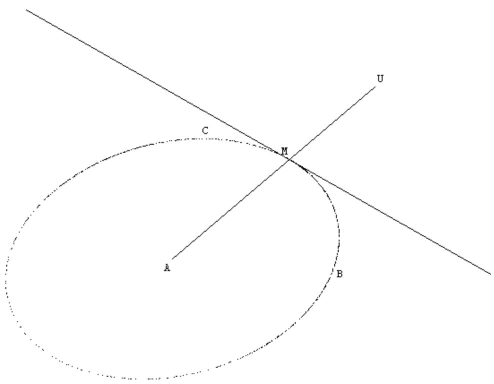


On a : $x_\Delta = \mathrm{AV}_\Delta = \dfrac{\mathrm{AV}}{\mathrm{AB}} = \mathrm{AV}$; $y_\Delta = \mathrm{AW}_\Delta = \dfrac{\mathrm{AW}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{AX}}{\mathrm{AD}} = \mathrm{AX}$. On a ainsi $\sqrt{x_\Delta{}^2 + y_\Delta{}^2} = \mathrm{VX}$.

• Sur [AB], on crée le point Y tel que AY = VX ; puis on crée le point M intersection de [AU] et de la parallèle à (YM) passant par B. On a : $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AU}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AY}} = \dfrac{1}{\mathrm{AY}} = \dfrac{1}{\mathrm{VX}} = \dfrac{1}{\sqrt{x_\Delta{}^2 + y_\Delta{}^2}}$. On retrouve le Δ-cercle C_Δ.



• Comme pour la Δ-perpendiculaire, on peut créer un prototype permettant de créer le point M $\in C_\Delta \cap$ [AU) (à partir de A, B, C et de U, bien entendu). En utilisant le prototype de création de la Δ-perpendiculaire, on peut alors, par exemple, et en prenant certaines précautions (lesquelles ?), créer un nouveau prototype donnant, à partir d'un point P, la tangente au Δ-cercle C_Δ (voir ci-après) au point M de C_Δ. (Pour les deux prototypes créés, on se reportera au fichier Avec ABC-perp&ptcerc.g2w.)



1.2. Une question de TER

a) On s'arrête ici sur des difficultés rencontrées par l'équipe de TER constituée de *FBA*, *MG2* et *CAR* (OS).

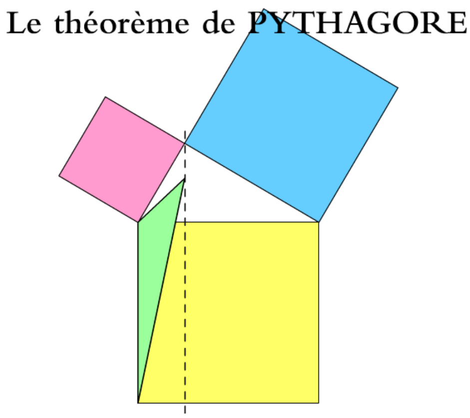
b) L'équipe a présenté les difficultés en cause dans les termes suivants.

> 1. Le théorème de Pythagore en 4^e est le sujet de mon TER. D'après le compte rendu de la séance observée, P n'a fait aucun commentaire historique. Pouvez-vous nous préciser 1) la règle à suivre, 2) les sources à utiliser pour expliquer l'aspect historique des mathématiques en classe, 3) sous quelle forme. (FBA, OS, 5^e, 16)
>
> 2. Dans le cadre de notre TER, le professeur observé a proposé une animation tirée d'un site Internet montrant la démonstration du théorème de Pythagore. Peut-on considérer cela comme une utilisation des TICE ? Une animation de ce genre peut-elle se substituer à une démonstration « classique » ? Comment gérer ce dispositif pour améliorer l'apprentissage des élèves (du point de vue de la topogenèse et des traces écrites) ? (MG2, OS, 2de, 17)

3. L’utilisation d’une animation tirée d’un site Internet peut donner le fil directeur d’une démonstration. Comment gérer ce dispositif pour améliorer l’apprentissage des élèves ? (MG2, OS, 2de, 19)

4. J’ai besoin de références et/ou d’articles sur l’usage de l’outil TICE comme dispositif didactique dans l’enseignement de la géométrie et particulièrement dans la démonstration en classe. Certes, je vais regarder les archives des séminaires. Mais existe-t-il des articles à utiliser absolument ? (FBA, OS, 5e, courriel)

c) On commence par *observer* l’animation utilisée lors de la séance retenue pour le TER : on trouvera cette animation (sonore) sur « Le Kangourou des Mathématiques » (http://217.128.112.58/mathkang/default.html).

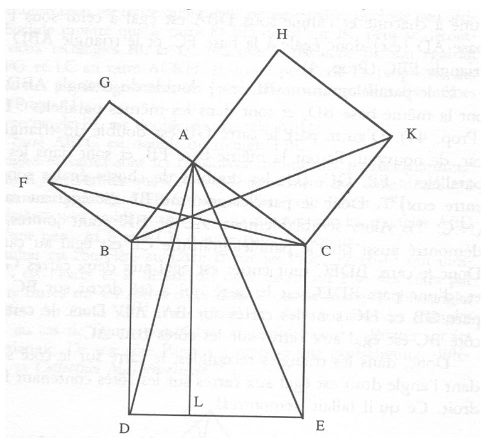


d) Pour *analyser* ce que l’on vient d’observer, qui relève de la visite – agréable – d’un « monument » mathématique, il convient d’abord de le questionner en le plaçant dans son cadre historico-mathématique.

• À cet égard, on commence par prendre connaissance du texte euclidien dans la traduction de Bernard Vitrac (Euclide, *Les Éléments*, volume 1, *Livres I à IV*, PUF, Paris, 1990) : le théorème « de Pythagore » constitue la proposition 47 du Livre I.

Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l’angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l’angle droit.

Soit le triangle rectangle ABC ayant l’angle sous BAC droit. Je dis que le carré sur BC est égal aux carrés sur BA, AC.



En effet d’une part que le carré BDEC soit décrit sur BC, d’autre part les carrés GB, HC sur BA, AC (Prop. 46) et que par le point A, soit menée AL, parallèle à l’une quelconque des BD, CE (Prop. 31). Et que AD, FC soient jointes (Dem. 1).

Puisque chacun des angles sous BAC, BAG est droit, alors relativement à une certaine droite : BA, et en un point qui est sur elle : A, les deux droites AC, AG, non placées du même côté, font des angles adjacents égaux à deux droits. Donc CA est en alignement avec AG (Prop. 14). Alors pour la même raison BA est aussi en alignement avec AH.

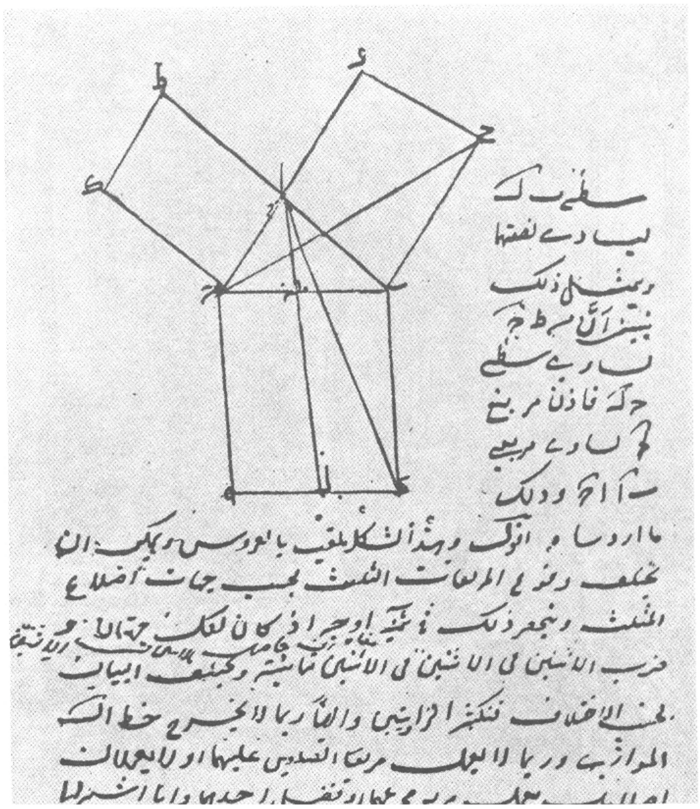
Et puisque l'angle sous DBC est égal à celui sous FBA car chacun est droit (Dem. 4), que celui sous ABC soit ajouté de part et d'autre : celui sous DBA tout entier est donc égal à celui sous FBC tout entier (N.C. 2).

Et puisque, d'une part DB est égale à BC, d'autre part FB à BA, alors les deux DB, BA sont égales aux deux FB, BC, chacune à chacune et l'angle sous DBA est égal à celui sous FBC. La base AD est donc égale à la base FC, et le triangle ABD égal au triangle FBC (Prop. 4).

Et le parallélogramme BL est double du triangle ABD, car ils ont la même base BD, et sont dans les mêmes parallèles : BD, AL (Prop. 41). D'autre part le carré GB est double du triangle FBC, car, de nouveau, ils ont la même base FB, et sont dans les mêmes parallèles : FB, GC. Or les doubles de choses égales sont égaux entre eux. Donc le parallélogramme BL est égal au carré GB (N.C. 1). Alors semblablement, AE et BK étant jointes, il sera démontré aussi que le parallélogramme CL est égal au carré HC. Donc le carré BDEC tout entier est égal aux deux carrés GB, HC, et, d'une part BDEC est le carré qui a été décrit sur BC, d'autre part GB et HC sont les carrés sur BA, AC. Donc le carré sur le côté BC est égal aux carrés sur les côtés BA, AC.

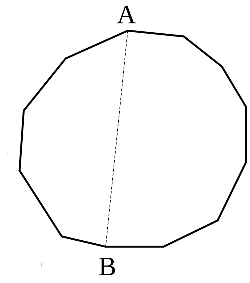
Donc, dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit. Ce qu'il fallait démontrer.

• La démonstration précédente, on l'a dit, est un « monument » : elle sera reprise encore et encore par les traités de mathématiques au fil des siècles. À titre d'exemple, voici un passage d'un manuscrit arabe du XIV[e] siècle qui reprend la figure caractéristique de cette démonstration.

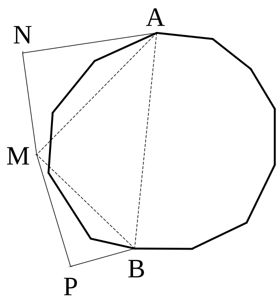


• Ce traitement graphique du théorème de Pythagore n'est en fait pas tant lié à l'*énoncé* du théorème lui-même qu'à l'*appareil démonstratif* mis en jeu, à savoir une certaine « théorie des aires (polygonales) » développée par Euclide dans le Livre I de ses *Éléments*. Cela ne doit pas faire oublier que le théorème énonce une certaine relation *entre longueurs* (même si celle-ci s'exprime à l'aide des carrés desdites longueurs et peut donc être *interprétée* en termes d'*aires*). Le problème suivant illustre ce fait essentiel.

Pour organiser une course à la nage, on désire déterminer la distance entre deux points A et B situés de part et d'autre d'une étendue d'eau limitée comme on le voit ci-dessous.

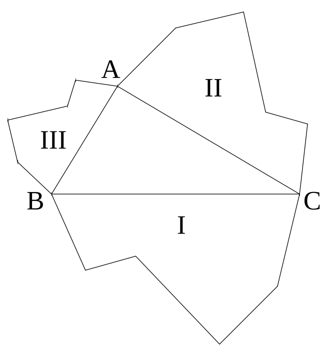


Le théorème de Pythagore permet de résoudre ce problème comme le montre la figure ci-après (où les angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{ANM}$ et $\widehat{MPB}$ sont droits).



On a en effet : $AB^2 = AM^2 + MB^2 = AN^2 + NM^2 + MP^2 + PB^2$. Il suffit alors de mesurer les distances AN, NM, MP, PB. Si on a par exemple AN ≈ 28,1 m, NM ≈ 21,5 m, MP ≈ 24,1 m, PB ≈ 13,8 m, il vient $AB^2 \approx (28{,}1^2 + 21{,}5^2 + 24{,}1^2 + 13{,}8^2)\ \text{m}^2 = 2023{,}11\ \text{m}^2$. On a donc AB ≈ 45 m.

• De fait, l'égalité $a^2 = b^2 + c^2$ valable (avec les conventions habituelles de notation) dans tout triangle ABC rectangle en A entraîne que, si on construit sur les trois côtés des figures *semblables*, l'aire de la figure construite sur [BC] est égale à la somme des aires des figures construites respectivement sur [AB] et [CA], comme l'illustre la configuration ci-après.



Soit en effet k l'aire d'une plaque polygonale semblable aux plaques I, II et III, dont le côté homologue aux côtés [BC], [CA] et [AB] est de longueur 1. Comme on passe de cette plaque à la plaque I par une similitude de rapport a, l'aire de la plaque I est ka^2. De même, les plaques II et III ont pour aire, respectivement, kb^2 et kc^2. Il en résulte que l'on a : Aire II + Aire III = $kb^2 + kc^2 = k(b^2 + c^2) = ka^2$ = Aire I.

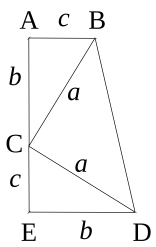
e) L'usage des carrés construits sur les côtés du triangle rectangle a donc avant tout un intérêt *démonstratif*, dans la mesure du moins où, la TGD incluant une théorie naïve des aires (des triangles et, plus généralement, des plaques polygonales), on procède à une démonstration « par les aires ». La démonstration euclidienne, on l'a vu, repose sur deux outils théoriques : 1) la déformation à aire constante d'un triangle, un sommet se déplaçant sur une parallèle au côté opposé (ce qu'on appelle en anglais un *shear*) ; 2) un cas d'isométrie (pour l'original) ou la rotation (pour l'animation). Comme l'animation l'illustre parfaitement, cette démonstration est cependant longue et subtile. On peut donc songer à opter pour des démonstrations « par les aires » plus simples.

• On en trouvera un certain nombre par exemple aux adresses suivantes :

➔ http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

➔ http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Euclid/java/html/pythagoras.html

• On notera en particulier la démonstration dite « du Président Garfield » (président des États-Unis d'Amérique de mars 1881 à sa mort – des suites d'une tentative d'assassinat – le 19 septembre 1881), sans doute l'une des plus simples, qu'illustre la figure ci-après.



L'aire du trapèze ABDE s'écrit d'une part $\frac{b+c}{2}(b+c)$, et d'autre part $\frac{a^2}{2} + bc$, ce qui donne après calculs l'égalité $b^2 + c^2 = a^2$. Bien entendu, le travail avec la classe doit justifier soigneusement et les propriétés utiles de la figure examinée et les calculs à effectuer (qui pourront d'abord porter sur des valeurs numériques).

1.3. TICE et C2i2e

Le point sera fait lors de la séance prochaine du Séminaire, mardi 27 mars.

2. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques

On achève ici l'examen de la notice ***Évaluation & notation – Aspects didactiques***.

7. L'arithmétique des notes : ses vertus et ses faiblesses

7.1. Considérons à nouveau un devoir D comportant trois questions, Q_1 notée sur 2, Q_2 notée sur 3, Q_3 notée sur 5. Et soit d'abord un professeur notant en J, comme sur les tableaux suivants.

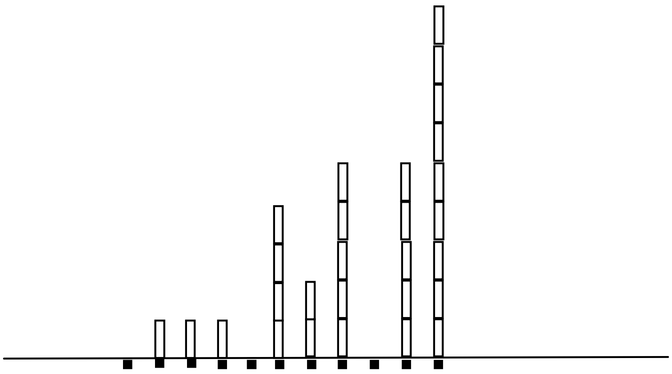
Note /2	0	1	2
Effectif	1	7	20

Note /3	0	1	2	3
Effectif	1	4	8	15

Note /5	0	1	2	3	4	5
Effectif	1	3	4	4	7	9

Il est clair qu'on ne peut passer sans plus d'information de ces tableaux au tableau des notes sur 10 obtenues par les élèves au devoir D : il faut pour cela savoir quel élève a obtenu quelles notes aux questions Q_1, Q_2, Q_3. En supposant ainsi une certaine assignation de notes compatible avec les distributions précédentes, on arrive par exemple à la distribution de notes sur 10 ci-après (voir le diagramme ci-après).

Note /10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	0	1	1	1	0	4	2	5	0	5	9



La moyenne des notes ainsi « fabriquées » est de 7,43 environ. Considérons maintenant un professeur notant plutôt « en cloche ».

Note /2	0	1	2
Effectif	3	16	9

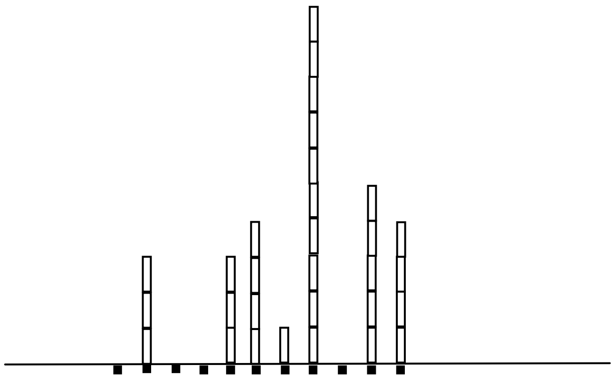
Note /3	0	1	2	3
Effectif	2	5	16	5

Note /5	0	1	2	3	4	5
Effectif	1	2	8	10	5	2

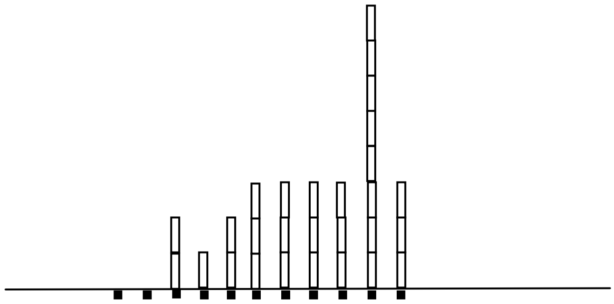
À nouveau, on suppose une certain assignation de notes aux 28 élèves de la classe qui conduise aux distributions précédentes ; on arrive alors à la distribution de notes sur 10 ci-après (voir le diagramme ci-après).

Note /10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	0	3	0	0	3	4	1	8	0	5	4

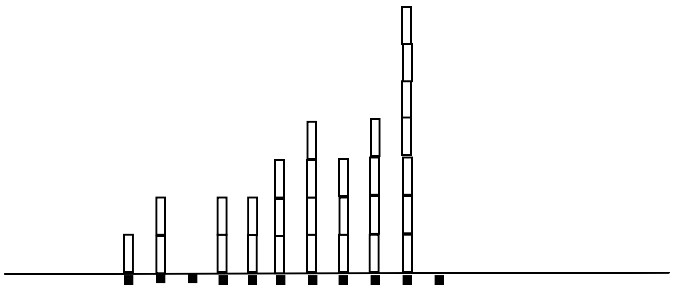
La moyenne, ici, est de 6,5 : la chute est sensible, de l'ordre de 12,5 %. Cela noté, on voit que les allures – en J ou en cloche – sont globalement conservées. Mais on voit aussi que la distribution est « fragmentée », avec des « trous » : elle désigne une classe « en plusieurs morceaux ».



7.2. Reprenons les notes des 28 élèves conduisant aux distributions « en J » ci-dessus, mais en leur ajoutant aléatoirement –0,5, 0 ou 0,5. La distribution des notes sur 10 est alors la suivante (…).



La moyenne baisse un peu : elle vaut maintenant 7,21 environ. De la même façon, reprenons les notes des 28 élèves conduisant aux distributions « en cloche » ci-dessus, en leurs ajoutant –0,5, 0 ou 0,5 de façon aléatoire.



À nouveau, la moyenne baisse légèrement : elle est ici de 6,36 environ. Mais les distributions « avec demi-points » donnent l'image d'une classe *davantage rassemblée*. Alors que l'écart type des notes « en J » *sans* demi-points est de 2,61 environ, celui des notes « en J » *avec* demi-points est d'environ 2,38. De même, alors que l'écart type des notes « en cloche » *sans* demi-points est de 2,68 environ, celui des notes *avec* demi-points est à peu près de 2,60. (Les coefficients de variation sont respectivement de 35,1 % et de 41,2 % *sans* demi-points, ils sont de 32,9 % et de 41 % *avec* demi-points.) Le resserrement, sans doute limité numériquement, est graphiquement sensible. On voit ainsi que l'usage des demi-points a une vertu cachée : faire apparaître la classe comme plus « homogène » qu'elle n'apparaîtrait sinon.

7.3. Le mode de fabrication des notes, le « bricolage algorithmique » auquel se livre le professeur souvent sans en avoir conscience a des effets *didactiques*, en ce sens qu'il crée des conditions qui se révèleront favorables ou au contraire hostiles à la poursuite ou à la relance de l'étude. Le fait qu'une classe apparaisse « rassemblée » est sans doute essentiel pour que ses membres puissent concevoir de partager un projet d'étude *commun* : dans une classe trop « éclatée », l'enseignement devient, à la limite, impossible. À cet égard, le bricolage algorithmique des notes peut conduire à un meilleur rassemblement ou, au contraire, favoriser l'éclatement de la classe. On va voir, de ce point de vue, que le rassemblement de la classe à l'occasion d'un devoir se produit notamment lorsque les diverses questions Q_1, … Q_ℓ ne sont pas réussies ou échouées par les *mêmes* élèves. Considérons, pour simplifier, le cas d'un devoir D comportant deux questions Q_1 et Q_2 notées respectivement sur N_1 et N_2. L'hypothèse précédente se traduit par le fait que le coefficient de corrélation $r(X_1, X_2)$ (où $X_i : \Omega \to [0 ; N_i]$, $i = 1, 2$, sont les assignations de notes « atomiques ») reste largement inférieur à 1 (dans l'intervalle [–1 ; 1]). La note de devoir sur $N = N_1 + N_2$ vaut $X = X_1 + X_2$. La moyenne de la classe (sur N) est égale à $\overline{X} = \overline{X_1} + \overline{X_2}$. Il faut se rappeler ici que la variance $s^2(X)$ est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique $\mathrm{cov}(X, Y) = s(X)s(Y)r(X, Y)$, où $r(X, Y)$ est le coefficient de corrélation des variables X et Y. On a $s^2(X) = \mathrm{cov}(X, X) = \mathrm{cov}(X_1 + X_2, X_1 + X_2) = \mathrm{cov}(X_1, X_1) + \mathrm{cov}(X_2, X_2) + 2\,\mathrm{cov}(X_1, X_2) = s^2(X_1) + s^2(X_2) + 2s(X_1)s(X_2)r(X_1, X_2)$ et il vient donc

$$s(X) = \sqrt{s^2(X_1) + s^2(X_2) + 2s(X_1)s(X_2)r(X_1, X_2)} \leq s(X_1) + s(X_2),$$

l'écart type $s(X)$ étant d'autant plus inférieur à la *somme* des écarts types $s(X_1)$ et $s(X_2)$ que $r(X_1, X_2)$ est plus proche de –1.

7.4. Le résultat précédent se généralise au cas d'un devoir D composé de ℓ questions $Q_1, \ldots Q_\ell$. Avec des notations évidentes, on a

$$s(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\ell} s^2(X_i) + 2 \sum_{i\neq j} s(X_i)s(X_j)r(X_i, X_j)} \leq \sum_{i=1}^{\ell} s(X_i).$$

Dans l'exemple des notes « en J » sans demi-points, par exemple, on a vu que $s(X) \approx 2{,}61$ alors que l'on a $s(X_1) + s(X_2) + s(X_3) \approx 2{,}88$. Pour les notes « en cloche » sans demi-points, on a $s(X) \approx 2{,}68$ alors que $s(X_1) + s(X_2) + s(X_3) \approx 2{,}91$. Dans les cas « en J » et « en cloche » *avec* demi-points, on a de même, respectivement, $s(X) \approx 2{,}38 < s(X_1) + s(X_2) + s(X_3) \approx 2{,}68$, et $s(X) \approx 2{,}60 < s(X_1) + s(X_2) + s(X_3) \approx 3{,}03$. La réduction de la dispersion (par rapport à la somme des écarts types) peut être bien plus forte que ce qu'on observe ici. C'est ainsi que, en réassignant adéquatement les notes partielles X_1, X_2, X_3 (en l'espèce en triant les colonnes des notes X_1 et X_2 par ordre *décroissant* et la colonne de X_3 par ordre *croissant*), il est possible d'obtenir $s(X) \approx 0{,}65$, alors qu'on a toujours $s(X_1) + s(X_2) + s(X_3) \approx 3{,}03$.

7.5. S'il est bon, lorsqu'un groupe doit continuer à œuvrer, que ce groupe n'apparaisse pas, *à lui-même et aux autres*, comme trop éclaté, ce qui mettrait en cause la faisabilité de l'enseignement projeté, il est des cas où, en sens inverse, on cherche à sélectionner une fraction « supérieure » du groupe : ainsi en va-t-il dans le cas d'un *concours*. Dans un tel cas, si la question Q_i notée sur N_i points fait, dans le groupe Ω, l'objet de notes très peu dispersées sur l'intervalle $[0 ; N_i]$, par exemple parce que la notation est d'une sévérité extrême, cette question, qui contribuera bien sûr à « rassembler » le groupe, n'aura guère d'influence sur le « classement » – à la limite, si l'écart type $s(X_i)$ est nul, c'est-à-dire si X_i est constante sur Ω, les notes globales seront simplement translatées d'une valeur identique pour tous les membres du groupe. En d'autres termes, la question Q_i jouera un rôle faible ou nul sur la réussite audit concours. La même chose pourrait être dite d'un devoir D prenant place dans une série d'épreuves d'un concours : c'est ainsi que la série des notes sur 10 évoquée ci-dessus et dont l'écart type est de 0,65 correspond au tableau d'effectifs suivant.

Note /10	[0 ; 5[	[5 ; 6[	[6 ; 7[	[7 ; 8[	[8 ; 10]
Effectif	0	5	15	8	0

On conçoit que cette note joue un rôle assez limité dans la réussite au concours.

7.6. En sens inverse, le phénomène de réduction de la dispersion du groupe est fortement accentué par l'algorithme de fabrication des *moyennes trimestrielles* qui consiste, classiquement, à prendre la *moyenne arithmétique pondérée* d'un certain nombre de notes de devoirs D_j. Supposons que les assignations de notes

$$X_j : \Omega \to [0 ; 20] \ (1 \leq j \leq n)$$

sont ainsi les notes entrant dans la formation de la moyenne trimestrielle : chacun des élèves $\omega \in \Omega$ reçoit au cours du trimestre une série de n notes $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)$. La moyenne trimestrielle Y est alors donnée par $Y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$. La moyenne de la classe est $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{X_j}$. Avec des notations obvies, on a alors :

$$s(Y) = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} s^2(X_j) + 2 \sum_{k\neq j} s(X_j)s(X_k)r(X_j, X_k)} \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} s(X_j).$$

On retrouve ici un phénomène déjà rencontré : l'écart type des notes trimestrielles, $s(Y)$, est d'autant plus inférieur à la moyenne des écarts types $s(X_j)$ que les notes aux devoirs D_j *sont deux à deux plus faiblement corrélés*. Il est même possible – on pourra s'en assurer – que l'écart type « trimestriel » $s(Y)$ soit *inférieur à chacun* des écarts types $s(X_j)$: la classe, alors, est plus unie au rendez-vous de fin de trimestre qu'elle ne l'avait jamais été au cours du trimestre.

7.7. Le resserrement de la classe autour de sa moyenne trimestrielle apparaît notamment lors du *conseil de classe*, où un regard « extérieur » se porte officiellement sur la classe de mathématiques (de même que sur les autres SDP qui composent « la classe »). Dans ce contexte, plusieurs facteurs de réduction de la dispersion jouent, dont les élèves « nomades » qui, parce qu'ils ont des résultats variables au fil des devoirs D_j, diminuent les coefficients de corrélation $r(X_j, X_k)$ et font donc décroître l'écart type $s(Y)$.

On arrive alors à deux grands problèmes qu'on se contentera de signaler. Le premier problème est celui des effets didactiques en retour de l'exigence mal maîtrisée de réduire la dispersion des notes, notamment quand le souci de cette réduction porte le professeur, parfois malgré lui, voire à son insu, à resserrer les notes d'un devoir au prix d'une plus grande sévérité dans la notation et donc d'un abaissement général des notes assignées – avec cette conséquence éventuelle d'une classe bien regroupée mais dépressive. Le second grand problème est celui des usages de la note $Y(\omega)$ en vue de l'orientation de l'élève $\omega \in \Omega$ et, plus largement, de la fabrication des classes et de l'organisation des flux d'élèves. On se limitera à cet égard à noter l'influence de l'« algorithme » de détermination de la moyenne trimestrielle Y qui, contrairement à la simplification introduite plus haut, ne s'écrit que rarement sous la forme $Y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$, où $X_j : \Omega \to [0\ ;20]$ $(1 \leq j \leq n)$. Les textes officiels, on le sait, distinguent plusieurs types de travaux notés rédigés « à la maison et en classe », cette dernière catégorie comportant des « interrogations écrites courtes », des « devoirs de contrôle » plus longs, voire des « bilans trimestriels », le tout « pondéré par un bilan chiffré des divers travaux (cahier de statistique, travail sur ordinateur…) portant sur les sujets difficiles à évaluer lors de ces contrôles », à quoi a dû s'ajouter, à la rentrée 2006, au collège, une « note de vie scolaire » [11. Sur la note de vie scolaire, voir la notice *Évaluation & notation – Aspects institutionnels et historiques*.]. Sur cette base officielle mais floue, les « algorithmes » de fabrication des notes trimestrielles et annuelles, souvent laissée à la discrétion des professeurs, montrent une diversité anarchique – avec notamment une variété non régulée de coefficients assignés aux différents types de travaux notés – qui ne semble guère traduire un véritable *projet collectif de formation*, qu'il soit propre à l'établissement, à l'académie ou au pays (ou groupe de pays), projet par rapport auquel ces notes seraient censées « dire la valeur » des travaux de l'élève.

7.8. Les pratiques – ou plutôt les praxéologies – de notation évoquées dans ce qui précède appellent à l'évidence une clarification des principes (et des mécanismes) sur lesquels elles reposent. On se limitera ici à souligner que, dans d'autres ensembles culturels – on pense en l'espèce aux pays « anglo-saxons » – la critique de certains usages traditionnels dans le système scolaire français a été menée depuis longtemps, ce qui ne signifie nullement que des formes « définitives » de fabrication et d'emploi des notes en aient résulté [12. Pour plus d'information, on se reportera à la notice *Examens & orientation*.]. On empruntera ici à un ouvrage intitulé *Statistics for the Teacher* dont la première édition a paru en 1963. Dans un chapitre intitulé *Interpretation of Marks*, l'auteur, Douglas M. McIntosh, écrit [13. Nous citons ici la deuxième édition de l'ouvrage, parue en 1967 chez Pergamon Press.] :

A mark by itself has no meaning. There is a tradition, from which many teachers and parents find it difficult to depart, of taking 50 or 50% to be the pass mark. Fifty per cent might be a good mark or a bad mark depending on a variety of factors such as the difficulty of the examination, the ability of the class, and the standard of marking of the examiner.

Autant que la tradition précédente, « anglo-saxonne », se trouve récusé l'usage « français », à propos de laquelle l'auteur que nous suivons écrit :

Another somewhat meaningless method of denoting the worth of a test performance is to express the mark as being "out of" the maximum mark. For example, 80 out of 150 means little: more needs to be known before it can be judged a good, average or poor mark.

C'est que l'interprétation évaluative d'une note obtenue à une épreuve dépend de la *série* des notes attribuées :

It is not possible to interpret a mark unless something is known about the marks of other pupils who sat the examination. For example, 50% may be good in one case and poor in another.

Dans la série 20 – 30 – 40 – 50 – 60, le score 50 n'a pas la même signification que dans la série 50 – 60 – 70 – 80 – 90. Un même score présent dans deux séries ayant la même moyenne n'aura pas la même « interprétation » si les deux séries ont des dispersions sensiblement différentes. Considérons les scores d'une classe de 36 élèves à un test d'arithmétique et à un test d'anglais.

Arithmétique	Score	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
	Effectif	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Anglais	Score	35	40	45	50	55	60	65				
	Effectif	3	5	6	8	6	5	3				

Comment comparer un score d'arithmétique et un score d'anglais ? La première série a une moyenne de 70 et un écart type de 12,1 environ ; la seconde a une moyenne de 50 et un écart type d'environ 8,6. Le score 85 en arithmétique (par exemple) est-il « meilleur » que le score 60 en anglais ? On peut, pour répondre, calculer la « cote *Z* », c'est-à-dire le score centré réduit. La note 85 dans la première série correspond à la cote $\frac{85-70}{12{,}076\ldots} \approx 1{,}24$; la note 60 dans la seconde série correspond à la cote $\frac{60-50}{8{,}58} \approx 1{,}14$: on conclura donc que 85 en arithmétique est un score un peu meilleur qu'un score de 60 en anglais [14. On parviendrait à une conclusion légèrement différente en observant que le score 85 en arithmétique et le score 60 en anglais ne sont l'un comme l'autre dépassés que par 3 des 36 scores : le pourcentage des scores qui leur sont inférieurs ou égaux vaut en chaque cas 91,7 % environ.]. L'auteur écrit :

The value of a mark cannot therefore be determined unless both the average and the scatter of the marks is known. Marks should not be compared or combined unless the standard of marking and the spread or scatter of marks are the same.

Il y a là un principe qui contraste fortement avec les usages français. L'auteur cité en explicite en ces termes certaines conséquences.

What significance has the total of an English mark and an arithmetic mark? Even worse is the old practice of combining all the pupil's class marks to give his average mark. If the average and scatters of the marks in all subjects are made the same, the total of the marks may have some statistical significance. It is doubtful whether it has any educational significance.

Devrait-on donc passer d'une évaluation *scalaire* à une évaluation *vectorielle*, où la note unique serait remplacée par une série de notes, élément d'un espace évaluatif à plusieurs dimensions ? C'est là un problème à propos duquel on ne peut que souligner l'actuelle stagnation de la réflexion en matière d'évaluation scolaire.

Après-midi

Séance d'explicitation

3. Les Archives du Séminaire

3.1. Un compte rendu différé

a) Le trinôme formé de *FBA*, *MG2* et *CAR* devait répondre à la question suivante.

> Que proposent les *Archives du Séminaire* à propos du thème des ***triangles isométriques et semblables*** ?

b) Il présentera son compte rendu lors de la séance prochaine du Séminaire.

3.2. Comptes rendus fictifs ?

a) Le binôme formé d'*IIP* et *JN* répond à la question que voici.

> Que proposent les *Archives du Séminaire* à propos de la technique des ***comptes rendus d'observation fictifs*** ?

b) Remarques & commentaires…

4. Forum des questions II

4.1. Expérimentation et déduction

a) On s'arrête d'abord sur la question que voici.

> Dans mon établissement, les ressources informatiques sont très pauvres. Donc pour faire les expérimentations, j'ai coutume de considérer l'échantillon formé par l'ensemble des figures des élèves comme une expérience correcte sur la validité d'une propriété, avant de la démontrer. Qu'en pensez-vous ? (OB, OS, 5^{e}, 20)

• Un ensemble de *n* figures représente *n* répétitions d'une certaine expérience graphique : en règle générale, cela suffit, en géométrie élémentaire, pour parvenir à une conclusion très hautement vraisemblable.

• Il est même raisonnable, sinon toujours impératif, au collège, de demander aux élèves de réaliser l'expérience graphique *aux instruments* (règle, équerre, compas, papier quadrillé, etc.) avant tout recours à un logiciel.

• Même dans un cas de grande pauvreté (état dont les raisons sont tout de même à interroger), un objectif minimal, et qui devrait être réaliste, est que le professeur accomplisse l'expérimentation numérico-graphique à l'aide d'un logiciel, avec vidéoprojection en classe, à des fins de contrôle de l'expérimentation graphique réalisée par les élèves.

b) On réunit maintenant les trois questions ci-après.

1. Lors de l'étude du calcul littéral en classe de 4e, j'ai trouvé dans un livre un exercice dans lequel, à propos des deux programmes de calcul $P_1 = 4(x + 1) + 2x – 4$ et $P_2 = 6x$, la question était : montrer que les programmes de calcul sont identiques. Je me demandais la signification de « programmes identiques ». Je le comprends comme : « les résultats des deux programmes sont égaux. » Est-ce une définition que les élèves doivent connaître ? Je n'ai pas trouvé d'indication dans le programme officiel sur ce sujet-là. (KE, MJ, 4e, 20)

2. Dans le manuel de 4e en vigueur dans la classe, de nombreux exercices de calcul littéral se font suivant le schéma suivant : 1) développer et réduire une expression algébrique en *a* (par exemple) ; 2) tester/vérifier pour une ou deux valeurs de *a*. Est-il judicieux de modifier ces énoncés en demandant aux élèves pour la question 2 de vérifier à l'aide d'un tableur pour un grand nombre de valeurs de *a* ? Il me semble que la vérification pour seulement une ou deux valeurs peut poser problème. Les élèves auront-ils compris que l'égalité algébrique qu'ils ont écrite doit être vraie pour toutes les valeurs de *a* ? (WB, MJ, 4e, 20)

3. La formule « On le voit mais pour en être sûr on va le démontrer », que l'on a beaucoup entendue étant élève, avait sûrement pour but de nous « forcer » à faire des démonstrations. Comment donner envie aux élèves de faire des démonstrations ? Cela demande en effet un effort de formalisation et de réflexion, auquel beaucoup d'élèves sont réfractaires (en tout cas les « miens »). (CS2, OS, 2de, 20)

• En vue de cadrer les interrogations précédentes, on examine une partie du *projet de document d'accompagnement* daté du 5 avril 2006 intitulé « Du numérique au littéral » (voir http://eduscol.education.fr/D0015/LLPHAG00.htm#college).

5. Les deux aspects d'une expression algébrique : « procédural » et « structural »

Une même expression peut être considérée de deux points de vue :

– soit elle exprime un programme de calcul : elle indique une suite d'opérations qu'il faut effectuer afin d'obtenir le nombre que « retourne » le programme de calcul quand on donne des valeurs numériques aux lettres qui y figurent ; on évoque alors le caractère « procédural » de l'expression ;

– soit elle est considérée comme un objet dont on peut décrire la forme et avec lequel on va pouvoir faire de nouveaux calculs (réduction, factorisation, développement, substitution dans une autre expression, ...) ; on évoque alors le caractère « structural » de l'expression.

Les expressions algébriques sont introduites et très largement utilisées au collège sous leur aspect « procédural », pour formaliser, pour mathématiser un programme de calcul (voir les paragraphes 1 et 3). Les élèves sont alors confrontés au type de tâches suivant : évaluer l'expression algébrique lorsqu'on donne aux variables qui y figurent des valeurs numériques. Le qualificatif « procédural » résume le caractère à la fois « dynamique, séquentiel et détaillé » [3. Sfard A. 1991, On the dual Nature of mathematical Conceptions: Reflexions on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), 1-36, cité dans la thèse de Caroline Bardini (2003) : *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*, Université Paris 7, page 24.] que revêt l'expression algébrique. Cet aspect procédural est également sollicité lors d'un test d'égalité comportant un ou deux nombres indéterminés (programme de 5e). Les règles de priorités opératoires sont largement utilisées.

Les expressions algébriques n'ont pas pour seul but de formaliser des programmes de calcul. Elles constituent également des objets avec lesquels on peut faire des calculs sans remplacer les lettres par des nombres, calculs qui sont donc des *calculs sur des programmes de calcul* [4. Selon la formulation due à Yves Chevallard, Séminaire PLC2 2004-2005, qui propose de définir l'algèbre élémentaire comme la science des programmes de calcul. L'emploi de programmes de calculs dans l'enseignement de l'algèbre est par ailleurs développé dans la thèse de Dominique Brouin (2002), *Arithmétique et Algèbre élémentaires scolaires*, Université Bordeaux I.]. Un des types de problèmes qui conduit à considérer cet aspect « structural » des expressions algébriques est le suivant : on veut savoir si deux programmes de calcul relatifs à une même variable sont équivalents, c'est-à-dire s'ils « retournent » toujours les mêmes valeurs quand on « rentre » n'importe quelle valeur. Si la réponse est négative, elle est facile à justifier. Mais quelle justification fournir dans le cas où la réponse est affirmative ? Par exemple, comment justifier que les programmes de calcul « $4n – 4$ », « $n + 2(n – 1) + (n – 2)$ », « $n^2 – (n – 2)^2$ » sont équivalents ? On peut expérimenter en utilisant un tableur pour faire afficher les valeurs retournées par ces trois programmes pour une liste de valeurs de *n*. Mais comment prouver que le résultat demeure pour n'importe quelle valeur de *n* ? On peut y arriver en utilisant des règles de calcul qui garantissent l'équivalence des programmes de calcul que les expressions traduisent, au rang desquelles figure la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, résultat que l'on admet dès la classe de 5^{e}. Ces équivalences de programmes se traduisent par des identités algébriques, qui sont déduites d'identités algébriques admises pour certaines (distributivité…), démontrées pour d'autres (double distributivité, identités remarquables).

Dans ce type de travail, c'est bien l'aspect « structural » qui est sollicité, par opposition à l'aspect « procédural ». Cette fois-ci, il s'agit de considérer l'expression comme une forme, que l'on peut décrire ; le qualificatif « structural » résume le caractère à la fois « statique, instantané et intégral » [5. Cf. note 3.], qui s'oppose terme à terme au caractère « dynamique, séquentiel et détaillé » évoqué plus haut. Ainsi, du point de vue « procédural », pour évaluer $a + bc$ pour $a = 5$, $b = -3$, $c = 2$, il convient de savoir quelles opérations effectuer et dans quel ordre : la multiplication est ici prioritaire. Du point de vue « structural » $a + bc$ est d'emblée perçu comme une somme (en référence à l'assembleur de plus haut niveau figurant dans l'expression, qui correspond à la dernière opération que l'on ferait si on évaluait l'expression pour des valeurs données aux lettres).

La prise en compte de l'aspect « structural » d'une expression dans l'enseignement est moins « visible » pour les élèves que l'aspect « procédural ». Pour rééquilibrer l'enseignement des deux aspects, l'étude du type de problèmes « Les programmes de calcul que traduisent deux expressions algébriques sont-ils équivalents ? » permet de motiver le travail « structural » sur les expressions algébriques, qui nécessite l'identification de la forme d'une expression et souvent le changement de cette forme (trans-formation), selon le but poursuivi. On est alors conduit à apprendre aux élèves à déterminer la forme d'une expression, selon des catégories qui évoluent au cours de l'enseignement. Savoir si une expression est une somme ou un produit est une tâche incontournable, que l'élève doit à terme savoir faire seul, sans indication de la part du professeur ou de l'énoncé de l'exercice.

Plusieurs activités peuvent aider les élèves à faire la distinction entre ces deux aspects d'une expression algébrique :

– La description en langue naturelle d'une expression algébrique conduit à la considérer sous son aspect « structural » : par exemple, énoncer que $(3x - 1)(x^2 + 2)$ est le *produit* d'une différence et d'une somme, différence du produit de 3 et de x et 1 et somme du carré de x et de 2, ou que $3x^2 + 3x$ est la somme du produit de 3 et du carré de x et du produit de 3 et de x. Le premier nom de la phrase ainsi construite donne la forme de l'expression (il n'est donc pas indispensable de la produire entièrement). Inversement, l'explicitation orale de la suite des opérations à effectuer pour exécuter le calcul met en évidence l'aspect « procédural » de l'expression. On peut faire un parallèle, en géométrie, avec la description d'une figure (aspect « structural ») et un programme de construction qui permet de la réaliser (aspect « procédural »).

– L'usage d'un arbre : la réalisation de l'arbre s'appuie sur les priorités opératoires et l'ordre des calculs à effectuer (aspect « procédural »), mais l'assembleur de plus haut niveau donne la forme de l'expression (aspect « structural »).

– L'usage du tableur : les étapes successives permettant d'élaborer une formule relèvent de l'aspect « procédural » alors que la nature de l'opération inscrite dans la dernière cellule donne la forme de l'expression (aspect « structural »).

– …

Ce qui précède montre la difficulté à distinguer le travail sur l'aspect « procédural » de celui sur l'aspect « structural » et fait apparaître une des raisons pour lesquelles, dans l'enseignement, le deuxième est souvent écrasé par le premier.

Une expression algébrique traduit un programme de calcul, mais elle permet également de décrire des nombres. Cette « fonction désignative ou descriptive » [6. Expression introduite par Tarski (1971), dans le premier chapitre de son *Introduction à la logique*, Gauthier-Villars.] d'une expression algébrique est par exemple sollicitée dans l'écriture $2k + 1$, expression qui décrit les nombres entiers impairs, qui apparaissent en tant que nombres « retournés » par le programme de calcul que constitue cette expression, dès que l'on remplace la variable k par un nombre entier naturel.

Après qu'une transformation d'expression algébrique (factorisation, développement, réduction, …) a été faite, un type de tâches doit faire l'objet d'une meilleure visibilité pour les élèves : comment contrôler qu'elle a été faite sans erreur ?

Il est souhaitable d'aider les élèves à se doter de moyens de contrôle économiques du développement ou de la factorisation d'une expression auquel l'expert recourt constamment, comme, par exemple, la vérification du coefficient de plus haut degré ou du terme constant. Il faut aussi en montrer les limites qui justifient le recours à des tests sur un nombre restreint de valeurs bien choisies. Le recours à une calculatrice pour effectuer des tests sur des valeurs numériques en facilite la validation. En classe, le professeur peut montrer l'usage du tableur pour contrôler l'exactitude de l'égalité $(3x - 1)(2x + 5) = 6x^2 + 13x - 5$: on entre une valeur de x, dans la cellule A1, l'expression $(3x - 1)(2x + 5)$ dans la cellule B1 et l'expression $6x^2 + 13x - 5$ dans la cellule C1 (en recourant par exemple à l'outil fonction). Si le développement est exact, en faisant varier la valeur attribuée à x dans la cellule A1, les valeurs numériques qui s'affichent dans les cellules B1 et C1 varient également, mais restent égales. Il est important que les élèves soient conscients que ce type de contrôle conduit à penser que deux expressions sont effectivement égales sans toutefois en avoir la certitude (des critères permettant de l'obtenir seront étudiés plus tard). En revanche, le fait que pour une valeur attribuée à x, il n'y ait pas égalité des valeurs des deux expressions suffit à prouver qu'elles ne sont pas égales.

Le calcul littéral et la démonstration

Le domaine des nombres entiers, familier aux élèves, permet de mettre en évidence dans la seconde moitié du collège la puissance du calcul littéral. En particulier, son utilité pour rendre compte d'une forme (somme, produit…) ou d'une propriété d'un nombre peut être mise en évidence. C'est ce que nous avons désigné par l' « aspect structural » des écritures littérales. Ainsi, la question peut être posée de la désignation du suivant d'un nombre, d'un nombre pair, d'un nombre impair, d'un multiple d'un nombre donné, de trois nombres consécutifs. Le tableur permet de vérifier que l'écriture proposée convient pour un grand nombre de valeurs. Pour ce faire, il suffit d'entrer une valeur entière dans une cellule et dans une autre cellule la formule sensée produire le nombre suivant, un nombre pair, un nombre impair, un multiple d'un nombre donné…

Dans le cadre numérique, mieux qu'en géométrie, les élèves sont à même de concevoir l'infinité des cas possibles et, après un travail sur la notion d'exemple et de contre-exemple, d'appréhender la nécessité de disposer d'outils de preuve. Ainsi le calcul littéral permet de prouver des résultats sur les nombres entiers, notamment les propriétés de divisibilité comme « La somme de deux multiples d'un nombre est un multiple de ce nombre ». C'est l'aspect « structural » d'une expression qui est alors particulièrement sollicité.

Le calcul littéral est également sollicité pour justifier ou établir des règles, comme celle dite du « produit en croix » ou encore les règles de calcul sur les écritures fractionnaires en mobilisant la notion de quotient installée en classe de 6^e^. Par exemple en classe de 4^e^, la règle de sommation de deux quotients en écritures fractionnaires de même dénominateur, installée en classe de 5^e^, peut être démontrée :

On veut démontrer que $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$

Désignons par Q le quotient $\frac{a}{b}$ *et par Q' le quotient* $\frac{c}{b}$.

On veut donc démontrer que Q + Q' est égal à $\frac{a + c}{b}$*, c'est-à-dire, par définition d'un quotient que*

a + c = b(Q + Q').
Or d'après cette même définition, puisque Q est le quotient de a par b : a = bQ.
De même, c = bQ'. Donc a + c = bQ + bQ'.
Or bQ + bQ' = b(Q + Q'). D'où le résultat…

On peut diminuer dans un premier temps le nombre de lettres utilisées en traitant un exemple générique (par exemple, en prenant $b = 7$). Après avoir fait le raisonnement pour cet exemple, le professeur fait remarquer que l'on peut remplacer 7 par n'importe quel nombre non nul, désigné par la lettre b.

Si la démonstration de propriétés comme par exemple « La somme de trois nombres consécutifs est un multiple de 3 » peut être confiée aux élèves, d'autres, comme celles utilisant la notion de quotient, sont conduites par l'enseignant devant les élèves ou largement guidées par celui-ci.

• On dit qu'un énoncé P(x, y, …) = Q(x, y, …) est une identité lorsque l'égalité a lieu pour tous x, y, … Cela revient à dire que les programmes de calcul correspondants sont *équivalents*. L'équivalence de deux programmes de calcul se traduits formellement par une *identité*, celle de leurs *expressions algébriques* ; et inversement. Étant donné un nombre, lui ajouter 1, multiplier le résultat par 4, ajouter deux fois le nombre initial, puis retrancher 4 est équivalent au fait de multiplier le nombre donné par 6 ; ce qui se traduit par l'identité (non « remarquable ») $4(x + 1) + 2x – 4 = 6x$, qu'on écrivait autrefois $4(x + 1) + 2x – 4 \equiv 6x$.

• Le manuel mentionné dans la deuxième question en est resté à des pratiques qui datent d'un temps où tout calcul était « coûteux ». Ces pratiques dépassées ne facilitent pas une bonne compréhension de la dialectique de l'expérimentation et de déduction. Est-il *vrai* par exemple que l'on ait l'identité suivante ?

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+2)=\frac{1}{3}x(x-1).$$

L'expérimentation peut avantageusement se faire ici à l'aide d'un tableur. La déduction dans la TAD se fera par un calcul. À un niveau plus élevé, on disposera d'une TAD « avancée » qui permettra d'établir l'identité des deux expressions algébriques de la manière suivante :

1. l'expression du premier membre est en fait au plus du second degré (les termes en x^3 s'annulent).

2. En multipliant par 6 l'égalité étudiée, on a $(3x + 2)(x + 3)(2x + 1) – (2x + 3)(3x + 1)(x + 2) = 2x(x – 1)$.

• Pour $x = 0$, l'expression du premier membre prend la valeur $2 \times 3 \times 1 - 3 \times 1 \times 2 = 0$, comme l'expression du second membre.

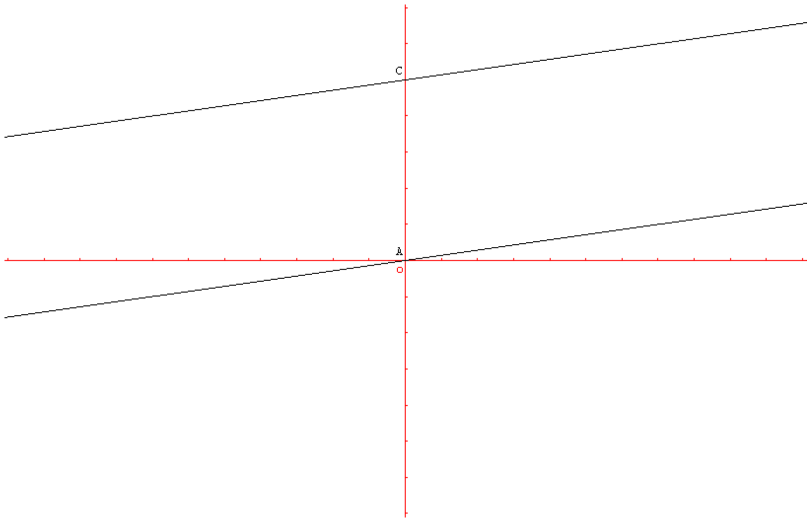
• Pour $x = 1$, l'expression du premier membre prend la valeur $5 \times 4 \times 3 - 5 \times 4 \times 3 = 0$, comme l'expression du second membre.

• Pour $x = –1$, l'expression du premier membre prend la valeur $(– 1) \times 2 \times (–1) – 1 \times (–2) \times 1 = 4$, comme l'expression du second membre.

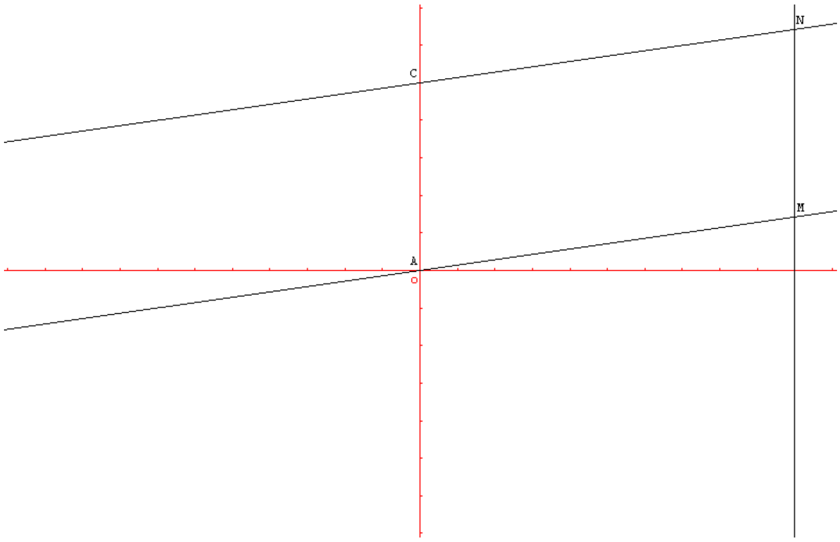
3. Les deux expressions, de deux degré au plus 2, prenant les mêmes valeurs en trois valeurs distinctes de x, l'égalité examinée est une identité.

• Il est fort douteux que la formule « On le voit mais pour en être sûr on va le démontrer » ait jamais constitué une ruse didactique visant à « forcer » les élèves à faire des démonstrations ! Sa capacité de résistance montre qu'elle traduit sans malice aucune une croyance bien établie dans la culture ancienne de la profession. Et c'est cela qu'il faut d'abord faire évoluer, *déjà dans son propre « équipement praxéologique »*, si l'on veut obtenir une évolution des pratiques des élèves.

• Cela souligné, la troisième question soulève une question centrale de notre temps : les moyens d'expérimentation aujourd'hui disponibles tendent en effet à rendre en pratique moins indispensables le recours à des théories déductives. Supposons par exemple que, il y a trente ans, on se soit posé le problème suivant : dans un repère orthonormal, on considère la droite d passant par les points A (0, 0) et B (10633, 1519) et la droite d' passant par les points C (0, 5) et D(11666, 1669) ; d et d' sont-elles parallèles ? Traditionnellement il n'était déjà pas possible même de placer les points C et D, et donc d'inspecter visuellement les directions de d et d'. À supposer qu'on puisse le faire, l'observation à l'œil nu des droites aurait plaidé en faveur du parallélisme – comme on le verra ci-après.



Si l'on tente d'apprécier ce parallélisme en coupant *d* et *d'* par la sécante d'équation $x = 10$, par exemple, on obtient ceci.



Le mesurage de MN ne permet pas de conclure que MN $\neq$ 5 et donc qu'il n'y a pas parallélisme. Traditionnellement, on n'avait plus qu'à recourir (par exemple) à la notion théorique de *pente* : la pente p de d = (AB) est $\frac{1519}{10633}$ tandis que la pente p' de d' = (CD) vaut $\frac{1669}{11666}$. On pouvait alors écrire : $p = \frac{1519}{10633} = \frac{1519 \times 11666}{10633 \times 11666} = \frac{17720654}{10633 \times 11666}$; $p' = \frac{1669}{11666} = \frac{10633 \times 1669}{10633 \times 11666} = \frac{17746477}{10633 \times 11666}$. On voit que $p' > p$: les droites ne sont pas parallèles. Aujourd'hui, déjà, on peut utiliser une calculatrice pour déterminer que l'on a

$$p = \frac{1519}{10633} = 0{,}14285\ldots \ ; \ p' = \frac{1669}{11666} = 0{,}143065\ldots$$

et parvenir à la même conclusion. Mais surtout, on peut faire *calculer* d'un clic par le logiciel utilisé une valeur beaucoup plus précise de MN ; on obtient ici MN $\approx$ 4,997796.

• Bien entendu, si le logiciel peut répondre si précisément, c'est qu'il contient « de la théorie » (mathématique, sous forme logicielle) ; mais il est vrai que l'utilisateur n'a pas à manipuler ces éléments de théorie. En rester là, toutefois, serait ne pas faire de mathématiques. Faire des mathématiques suppose de parcourir sans barguigner les deux Voies : la voie de l'expérience (graphique, numérique, etc.), la voie de la déduction au sein d'une théorie. Comme le montre l'exemple développé plus haut à propos de l'identité algébrique

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+2)=\frac{1}{3}x(x-1).$$

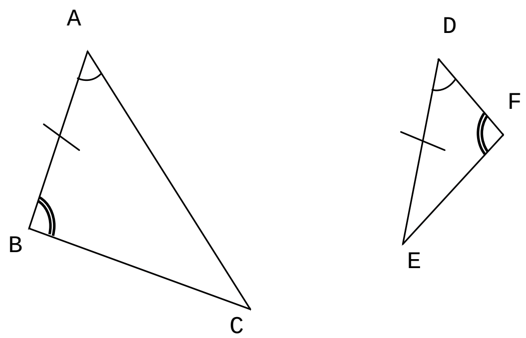
très rapidement l'expérience ne peut se passer de la théorie, sauf à devenir impraticable. En sens inverse, l'expérience « intègre » de la théorie, qui lui est bientôt indispensable : c'est la théorie qui nous dit que, dans le cas précédent, il suffit d'expérimenter pour trois valeurs distinctes de *x* seulement, ce qu'il reste alors à faire – et ce qui, traditionnellement, n'est pas vu comme une expérience…

4.2. Un problème de formulation

a) On s'arrête ici sur la question suivante.

> Un des trois cas d'isométrie : deux angles et un côté *compris entre les deux angles*. On retrouve la précision « compris entre les deux angles » dans l'ensemble des livres ; mais pourquoi faire cette précision ? En effet, si on connaît deux angles quelconques, on peut calculer la mesure du 3^{e} angle du triangle. (MB, CR, 2de, 20)

b) Le schéma ci-après donne la réponse.



IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 22 : mardi 27 mars 2007

Programme. 0. Questions de la semaine // 1. Théorie et pratique des PER // 2. Forum des questions // 3. Les Archives du Séminaire

0. Questions de la semaine

Journée 22 (27 mars 2007)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4e (et soutien en 5e)

Après le conseil de classe du troisième trimestre, dans l'hypothèse où le programme est terminé, peut-on commencer celui de l'année scolaire suivante ?

1. Théorie et pratique des PER

1.1. Le schéma « classique »

a) Des questions ont été formulées récemment à propos de la notion de *parcours d'étude et de recherche* (PER). On y revient donc ici plus longuement.

1. Pourriez-vous ré-expliquer ce qu'est concrètement un PER ? (AB, OS, 3e, 20)

2. Un PER peut-il être un regroupement d'AER portant sur des praxéologies « proches » ou doit-il nécessairement porter sur la réponse à une question « transcendante » ? (OL2, OS, 5e & option 1re L, 20)

3. Quel parcours d'étude et de recherche pourrait motiver la recherche d'un maximum et l'étude de la variation ? (OL2, OS, 5e & option 1re L, 21)

b) Un parcours d'étude et de recherche résulte du fait qu'un collectif d'« étudiants », X, s'efforce d'apporter, sous la direction et avec l'aide d'une équipe Y de « directeurs d'étude » et autres « aides à l'étude », une réponse R à une certaine question Q, ce qu'on peut noter schématiquement ainsi (ce schéma sera complété plus loin) :

$$S(X\,;\,Y\,;\,Q) \Rightarrow R.$$

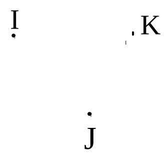
• L'exemple « canonique » (aujourd'hui) d'un tel schéma est celui d'une classe scolaire *X* qui, sous la direction de son professeur *y* (on a alors $Y = \{ y \}$), étudie une certaine question *Q*. En ce cas, on voit que le PER peut alors se réduire à une « simple » AER.

• Ainsi, en 3[e], un professeur de mathématiques peut-il proposer la question *Q* suivante : quels sont les diviseurs de l'entier $A = 64^2 - 1$? Dans ce cas, la classe peut éventuellement parvenir assez vite au résultat suivant. On a d'abord

$$A = 64^2 - 1 = 64^2 - 1^2 = (64 - 1)(64 + 1) = 63 \times 65 = (9 \times 7)(5 \times 13) = 3^2 \times 5 \times 7 \times 13.$$

On en déduit que *A* possède $3 \times 2^3 = 24$ diviseurs, à savoir : 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 21, 35, 39, 45, 63, 65, 91, 105, 117, 195, 273, 315, 455, 585, 819, 1365, 4095.

c) Mais le parcours peut être de beaucoup plus longue durée ! Plusieurs variables peuvent ici entrer en jeu. Le schéma sur lequel on a tout particulièrement insisté dans ce Séminaire est celui dans lequel la question *Q* est « générique » : par exemple, comment construire, à la règle et au compas, telle figure dont une description est proposée. Ici, le parcours peut être régulièrement interrompu, puis régulièrement relancé dès lors que se présente un cas particulier inédit de la question *Q*. Telle est la version « classique » de la notion de PER, à laquelle fait manifestement allusion la question 2 ci-dessus.



• Par exemple, on pourra étudier s'il est possible – et comment – de reconstruire un triangle ABC dont on ne connaît plus que les milieux des côtés, I, J, K – problème que les participants au Séminaire pourront résoudre pour leur propre compte.

• On pourra de même lancer un PER autour de la question « Comment déterminer une distance inaccessible ? », et un autre autour de la question « Comment calculer sur des nombres s'écrivant avec beaucoup de chiffres ? » : il s'agit là d'exemples particulièrement pertinents au collège.

d) La question 3, de même, fait allusion à ce schéma classique. En l'espèce, le parcours d'étude et de recherche évoqué était autrefois un « standard » (de la même façon que les « distances inaccessibles », en géométrie).

• Donnons d'abord un inventaire partiel de questions dites « de maximum et de minimum » (à propos de systèmes géométriques) travaillées dans un livre d'*Exercices d'algèbre* du XIX[e] siècle. (L'orthographe et la terminologie n'ont pas été modifiées.)

1. Parmi toutes les rectangles de même surface, trouver celui qui a le périmètre minimum.
2. Inscrire dans un carré le rectangle maximum.
3. Inscrire dans un carré le carré minimum.
4. Trouver le triangle isocèle maximum qu'on peut inscrire dans un cercle.
5. Parmi tous les triangles rectangles de même périmètre trouver celui dont l'hypoténuse est minimum.
6. L'hypoténuse d'un triangle rectangle restant constante, trouver le maximum de la surface.
7. Trouver le triangle rectangle de périmètre maximum parmi les triangles rectangles de même hypoténuse.
8. Parmi tous les triangles rectangles de même périmètre, trouver celui dont la surface est maximum.

9. Le périmètre d'un triangle rectangle restant constant, trouver le maximum de la différence b – c des deux côtés de l'angle droit.

10. Circonscrire à un cercle donné le triangle isocèle de surface minimum.

11. Parmi tous les triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, trouver le maximum.

12. Parmi les cylindres de même volume, trouver celui dont la surface totale est minimum.

13. Inscrire dans une sphère le cône maximum.

14. Inscrire dans un cône le cylindre maximum.

15. Déterminer les côtés d'un rectangle dont le périmètre est $2p$, de façon que le cylindre engendré par ce rectangle, en tournant autour d'un de ses côtés, ait un volume maximum.

16. Circonscrire à une sphère donnée un cône droit de surface totale minimum.

17. Trouver le maximum du volume d'un cône dont l'arête est donnée.

18. Trouver le maximum du volume d'un cylindre dont la surface totale est donnée.

19. Trouver le maximum du volume d'un cône dont la surface totale est donnée.

• Ces « questions de maximum et de minimum » étaient (et sont) motivées par des problèmes élémentaires d'optimisation souvent très « concrets ». Considérons par exemple le problème 18 : « Trouver le maximum du volume d'un cylindre dont la surface totale est donnée. » On veut fabriquer une boîte fermée cylindrique – une boîte de conserve – avec une certaine quantité de métal ; comment choisir les dimensions de la boîte pour que sa capacité soit la plus grande possible ? Admettons ici que la surface totale soit S ; si x est le rayon de la base et y la hauteur, on doit avoir

$$2\pi x^2 + 2\pi xy = S.$$

Le volume de la boîte est $V = \pi x^2 y$. L'égalité précédente donne :

$$\pi xy = \frac{S}{2} - \pi x^2.$$

On a donc : $V = \pi x^2 y = x\left(\frac{S}{2} - \pi x^2\right)$. Posons, pour simplifier, $S = 2\pi a^2$: on a $V = \pi x(a^2 - x^2)$. Comme la quantité $x(a^2 - x^2)$ est maximale en même temps que V, il faut donc étudier le maximum – s'il existe – de la fonction $f : x \mapsto x(a^2 - x^2)$ sur $[0, a]$. On a $f(0) = f(a) = 0$: s'il existe, le maximum est donc atteint en un point de $]0, a[$. La dérivée de f est $f' : x \mapsto a^2 - x^2 + x(-2x) = a^2 - 3x^2$. Comme on a

$$a^2 - 3x^2 = -3\left(x - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

cette dérivée est positive lorsque $0 \leq x < \frac{a}{\sqrt{3}}$, nulle en $\frac{a}{\sqrt{3}}$, et négative lorsque $\frac{a}{\sqrt{3}} < x \leq a$. La fonction f a donc un maximum en $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Comme $xy = a^2 - x^2$, on a alors : $y = \frac{a^2}{x} - x = a\sqrt{3} - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = 2x$. La boîte « optimale » a pour rayon de la base $x = \frac{a}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ et pour hauteur $y = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. On aura noté que sa hauteur est égale au diamètre de sa base : elle est aussi haute que large.

• Notons que, au XIX^e siècle, l'outillage précédent – celui du calcul différentiel à une variable – ne devient que progressivement disponible, au lycée, au moment où l'on étudie les problèmes recensés plus haut. L'outil technologique de base est alors le suivant :

Étant donné des réels a et $S > 0$, soit E l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $0 \leq x_i \leq a$ (où $i = 1, 2, \ldots, n$), et $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$. Alors le produit $P = x_1x_2\ldots x_n$ est maximal sur E lorsque $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ (= S/n).

L'emploi de ce théorème (qui n'était démontré alors qu'avec une grosse lacune) est, dans le cas envisagé, assez subtil : la quantité $x(a^2 - x^2)$ est bien un produit mais la somme de ses termes n'est pas constante lorsque x varie sur $[0, a]$. On peut observer alors que $x(a^2 - x^2)$ s'écrit $x(a - x)(a + x)$, ce qui ne convient toujours pas, mais est maximal en même temps que le produit

$$\left(\frac{1}{2}x\right)(a-x)\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}x\right)$$

dont la somme des facteurs vaut $\frac{3}{2}a$. Le maximum serait donc atteint lorsque

$$\frac{1}{2}x = a - x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}a.$$

Ce système d'équations du 1^er degré en x n'a malheureusement pas de solution… Il faut donc reprendre le travail, ce qu'on peut faire ainsi : la quantité $x(a^2 - x^2)$ est maximale lorsque son carré $x^2(a^2 - x^2)^2$ l'est ; or on a $x^2(a^2 - x^2)^2 = x^2(a^2 - x^2)(a^2 - x^2)$, expression maximale en même temps que $(2x^2)(a^2 - x^2)(a^2 - x^2)$, laquelle est maximale lorsque $2x^2 = a^2 - x^2 = \frac{2}{3}a^2$. Cette fois, le système d'équations en x^2 possède une solution, à savoir $x^2 = \frac{a}{3}$, soit $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, CQFD.

1.2. Première extension du schéma scolaire

a) Pour produire une réponse R à une question Q autant que pour la valider, le régime scolaire – et tout particulièrement le régime de la classe de mathématiques – tend à créer artificiellement une *pénurie de ressources* : à la limite, on n'a droit qu'à des ressources toutes personnelles, « incorporées » !

b) Ces restrictions institutionnelles n'ont guère de sens du point de vue social : l'élève qui demande à un de ses camarades, à la sortie du DS, ce qu'il a trouvé à telle question ne le fait qu'en marge de la société scolaire ; or c'est pourtant là un *geste essentiel* dans la création et la validation sociales des connaissances.

• On a trouvé plus haut que, pour une surface totale donnée, une boîte cylindrique fermée est de volume maximal lorsque sa largeur égale sa hauteur. Est-ce sûr ? Tout est-il sûr dans le travail que nous avons accompli ? L'extrait suivant d'un forum en ligne (http://www.ilemaths.net/forum-sujet-121236.html) illustre la relative fragilité de tout travail de production d'une connaissance, fût-il « coopératif ». (Voir aussi http://www.maths-forum.com/showthread.php?t=4888.)

Dimensions d'un volume maximal — *posté le 14/02/2007 à 18:46*
posté par : **Hypercube**

Bonjour à tous,
Voici une question que je n'arrive pas à résoudre :

La somme de l'aire latérale d'un cylindre de révolution et de ses deux bases est égale à 6 dm². Déterminer les dimensions à donner à ce cylindre afin que son volume soit maximal.

J'ai essayé de résoudre sous forme d'un polynome, de faire les variations de la fonction, masi c'est vraiment hardu...
Pourriez-vous m'aider à le résoudre ? Merci d'avance.

re : Dimensions d'un volume maximal — *posté le 14/02/2007 à 18:48*
posté par : **garnouille**

La somme de l'aire latérale d'un cylindre de révolution et de ses deux bases est égale à 6 dm²
quelle est la hauteur? le rayon?
comment peut-on écrire cette somme?

re : Dimensions d'un volume maximal — *posté le 14/02/2007 à 19:18*
posté par : **Hypercube**

Je nomme x la longueur du rayon d'une base et y celle de l'aire latérale ;
J'obtiens A = 2πx²+y, il faudrais idéalement que j'exprime y en fonction d'une hauteur h mais de toutes manières j'obtiens une équation à deux inconnues :/

re : Dimensions d'un volume maximal — *posté le 14/02/2007 à 19:21*
posté par : **Hypercube**

Heu non, V = πx².h plutot...

re : Dimensions d'un volume maximal — *posté le 14/02/2007 à 19:24*
posté par : **garnouille**

y=2PIrh
exprime A=6 en fonction de x et h
isole h en fonction de x
puis remplace h par ce que tu auras trouvé dans V=pix².h
il n'y auras plus qu'une seule variable (c'est "x")

re : Dimensions d'un volume maximal — *posté le 14/02/2007 à 21:21*
posté par : **Hypercube**

Donc à partir de tout ça, je trouve V = $\frac{3}{2}-\pi x^2$

À ce stade, on n'a pas encore trouvé de réponse. « Hypercube » ne semble pas très à l'aise. L'échange se poursuit ainsi.

re : Dimensions d'un volume maximal — *posté le 14/02/2007 à 21:21*
posté par : **Hypercube**

Donc à partir de tout ça, je trouve V = $\frac{3}{2}-\pi x^2$
Je ne comprend pas comment exprimer le fait que ce soit maximal ?

re : Dimensions d'un volume maximal — *posté le 14/02/2007 à 22:50*
posté par : **Hypercube**

Merci d'avance...

re : Dimensions d'un volume maximal — *posté le 14/02/2007 à 23:05*
posté par : **garnouille**

à vérifier, moi , je trouve $V=3x-\frac{\pi x^3}{2}$
pour trouver le volume max, il faut les variations de la fonction...
tu as dû apprendre à dériver...

On voit – ce n'est pas inattendu – que les intervenants semblent ne disposer que *d'une* technique – par le calcul différentiel élémentaire.

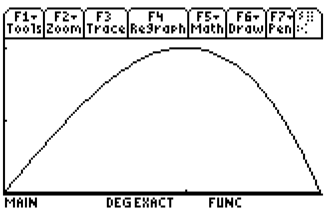
• Une fois une réponse obtenue, il faudra la *vérifier*. Contrairement au diktat scolaire usuel, il est possible *et sain* de le faire en vérifiant que tel document ou tel auteur fournit bien la « même » réponse. Les ressources de l'Internet permettent aujourd'hui fréquemment une telle opération, même à qui n'a pas accès à une bibliothèque adéquate ! Ainsi, à l'adresse http://www.lacim.uqam.ca/~bedard/cours_A05/Cours_21_10_05.pdf, on trouvera un extrait d'un cours portant sur la technologie des « multiplicateurs de Lagrange » où celle-ci est illustrée précisément à l'aide de la question que nous nous sommes posée : il s'agit de déterminer « le cylindre d'aire totale fixe égale à 6π et de volume maximal ». Sans chercher à *comprendre* la technologie mise en œuvre (à laquelle on donne ainsi – provisoirement ou non

– le statut de *boîte noire*), on se reporte à la conclusion que cette technologie permet à l'auteur du document de produire : « De tout ceci, nous obtenons que le cylindre de volume maximal et d'aire totale fixe égale à 6π est le cylindre de rayon $r = 1$ et de hauteur $h = 2$. » On constate donc l'accord avec la conclusion à laquelle nous sommes arrivés plus haut – de deux façons différentes.

• Il n'est pas inutile de s'acharner – contrairement à un certain ascétisme probatoire, artificiel mais induré. Soit l'expression $x(a^2 - x^2)$: on croit savoir qu'elle est maximale sur $[0, a]$ lorsque $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Prenons $a = \sqrt{3}$, de façon que le maximum soit atteint en $x = 1$; si nos conclusions sont valides, la valeur maximale sera $y = 2$. On peut donc par exemple demander au logiciel Excel de nous le confirmer : avec un pas de 0,02, on explore la zone [0,8, 1,2] ; on obtient ce qui suit, qui confirme les résultats obtenus.

x	$x(3 - x^2)$
0,8	1,888
0,82	1,908632
0,84	1,927296
0,86	1,943944
0,88	1,958528
0,9	1,971
0,92	1,981312
0,94	1,989416
0,96	1,995264
0,98	1,998808
1	2
1,02	1,998792
1,04	1,995136
1,06	1,988984
1,08	1,980288
1,1	1,969
1,12	1,955072
1,14	1,938456
1,16	1,919104
1,18	1,896968
1,2	1,872

• Bien entendu, d'autres moyens de contrôle sont disponibles : une calculatrice scientifique confirme l'allure de la courbe représentative de la fonction (et, de façon plus incertaine, le fait que le maximum est 2 et est atteint en 1) ; etc.



c) D'une façon très générale, il faut apprendre à agir en faisant comme si…

1) … il n'existait pas une instance unique (le professeur, la démonstration, etc.) qui puisse nous dire *à coup sûr* si « c'est vrai ou faux » (le professeur peut se tromper, la démonstration peut être erronée, etc.) ;

2) … le fait de parvenir à établir ou à rejeter la vérité de la réponse étudiée était *vital*, c'est-à-dire d'engager totalement sa responsabilité dans l'affaire.

• C'est par rapport à ces principes que l'on situera l'ensemble des développements consacrés dans ce Séminaire à la dialectique de l'expérience et de la déduction, qu'il faut situer à l'intérieur d'une dialectique plus large – de la conjecture et de la preuve.

• Est-on sûr par exemple d'avoir donné, ci-dessus, tous les diviseurs de $A = 64^2 - 1$? Que faire pour vérifier s'il en est bien ainsi ? Peut-on considérer que le travail accompli rend un résultat insoupçonnable ? Autant de questions abondamment énoncées et ré-énoncées qu'il faut apprendre à assumer. On laissera ici le lecteur à sa propre initiative en la matière.

• Faute d'entrer avec ses élèves dans une dialectique élargie de la conjecture et de la preuve, un professeur risque fort, soit de renoncer à l'exigence de prouver, soit d'adopter vis-à-vis du monde qui nous entoure une attitude de plus en plus *obsidionale*. À titre d'illustration de ce risque, voici un extrait d'un article récemment publié (dans le numéro de février 2007 de la revue *The Mathematics Teacher*) par un enseignant américain, Jeffrey J. Wanko, sous le titre "The Internet: Problem Solving Friend or Foe?".

> A few years ago, students could turn to advanced mathematical software like Mathematica, Maple, or Derive to simplify complicated expressions, factor polynomials, extrapolate missing data from a given set, and plot a variety of different graphs simultaneously. Today, many of these tasks are also readily performed for free on a number of Web sites that anyone can access easily. When they are used to increase understanding through exploration and discovery, these Web sites hold a great deal of potential and promise in our mathematics classrooms. But these Web sites can also be used to find direct or indirect solutions to some problem-solving tasks. This disconnect between the problems and the available technology exposes a common misconception held by novice problem solvers-that their goal is simply to get an answer to the problem. Understanding the difference between "locating a solution" (obtaining an answer without actually solving the problem) and "finding a solution" (using mathematical problem-solving strategies to arrive at an answer) lies at the crux of the matter.

• On voit que l'auteur tente de penser le problème qui l'assaille à travers une distinction fragile : « *localiser* une solution » (sur Internet par exemple) contre « *trouver* une solution » (par ses seules ressources incorporées). En l'espèce, les élèves auxquels il se réfère ont eu à étudier le problème suivant.

> The number $2^{48} - 1$ has two factors bteween 60 and 70. What are they?

Le désagrément pour le professeur est qu'ils ont eu recours au logiciel de calcul en ligne Factoris, que l'on trouve sur le site de l'Université de… Nice ! Or ce logiciel leur a donné ceci, qui permet alors de résoudre aisément le problème proposé.

À partir de ce résultat, il est facile en effet de conclure que $2^{48} - 1$ est divisible par $5 \times 13 = 65$ et par $9 \times 7 = 63$ (et par ces nombres-là seulement entre 60 et 70).

• Bien entendu, ce qu'attendait le professeur n'appelait aucunement l'usage de « Factoris ». On a en effet (par exemple) : $2^{48} - 1 = (2^{24} - 1)(2^{24} + 1) = (2^{12} - 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1) = (2^6 - 1)(2^6 + 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1) = (64 - 1)(64 + 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1)$.

La preuve est faite à l'aide d'un outil de calcul dont l'élève est censé disposer de façon permanente, *sans dépendre de quiconque ou de quoi que ce soit*, à savoir l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. C'est cela la tâche de résolution de problème que le professeur aurait souhaité voir ses élèves accomplir. C'est cela qu'il se désole de voir Internet, le cas échéant, rendre désormais d'apparition plus improbable.

• En vérité, le problème est beaucoup plus large : Internet ne fait que le poser plus nettement. Si je recherche les diviseurs éventuels de $2^{48} - 1$ compris entre 60 et 70, je peux aussi, tout simplement, utiliser une calculatrice adéquate, par exemple celle que fournit Microsoft avec Windows. On a ainsi les résultats suivants.

$\frac{2^{48}-1}{60} =_{\text{calc}} 4691249611844{,}25$

$\frac{2^{48}-1}{61} =_{\text{calc}} 4614343880502{,}5409836065573770492$

$\frac{2^{48}-1}{62} =_{\text{calc}} 4539918979204{,}1129032258064516129$

$\frac{2^{48}-1}{63} =_{\text{calc}} 4467856773185$

$\frac{2^{48}-1}{64} =_{\text{calc}} 4398046511103{,}984375$

$\frac{2^{48}-1}{65} =_{\text{calc}} 4330384257087$

$\frac{2^{48}-1}{66} =_{\text{calc}} 4264772374403{,}8636363636363636364$

$\frac{2^{48}-1}{67} =_{\text{calc}} 4201119055382{,}9104477611940298507$

$\frac{2^{48}-1}{68} =_{\text{calc}} 4139337892803{,}75$

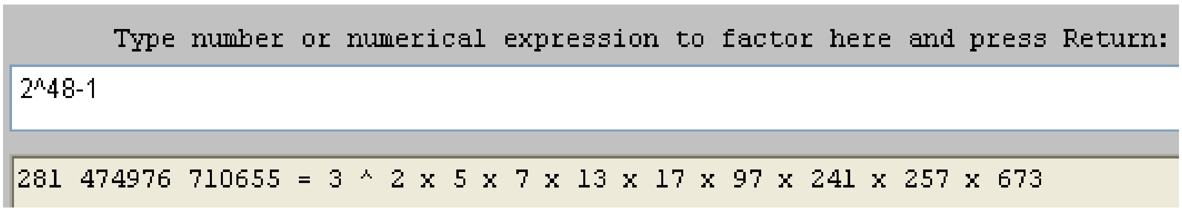
$\frac{2^{48}-1}{69} =_{\text{calc}} 4079347488560{,}217391304347826087$

$\frac{2^{48}-1}{70} =_{\text{calc}} 4021071095866{,}5.$

Ces résultats confirment ce qu'on a tiré du logiciel Factoris. Ils confirment aussi le résultat du « travail » de l'expression $2^{48} - 1$ à l'aide de l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

• Bien d'autres « contrôles » peuvent encore être effectués. Par exemple, le même logiciel en ligne Factoris donne ceci : $a^{48} - 1 = \pm (a - 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)(a^2 + 1)(a^2 + a + 1)(a^4 - a^2 + 1)(a^4 + 1)(a^8 - a^4 + 1)(a^8 + 1)(a^{16} - a^8 + 1)$. On aperçoit les facteurs $a^2 + 1$ et $a^4 - a^2 + 1$ qui, pour $a = 2$, valent respectivement 5 et 13 ; et de même encore le facteur $a^2 + a + 1$ et le produit de facteurs $(a + 1)(a^2 - a + 1)$, qui valent respectivement 7 et 3×3. Nouvelle confirmation donc.

• On peut contrôler le résultat donné par Factoris en recherchant un autre logiciel de factorisation en ligne, tel le dispositif intitulé *Factorization using the Elliptic Curve Method* (voir à l'adresse http://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM). On y obtient ceci, en accord avec ce que donne Factoris.



• On peut aussi s'appuyer sur *d'autres connaissances élémentaires* que celles envisagées plus haut. Sachant que $2^{48} = (2^6)^8 = 64^8$ et que $a^n - 1$ est divisible par $a - 1$, on obtient que

$$2^{48} - 1 = 64^8 - 1$$

est divisible par $64 - 1 = 63$. Sachant en outre que $a^n = (-a)^n$ lorsque n est pair, on a

$$2^{48} - 1 = 64^8 - 1 = (-64)^8 - 1$$

d'où l'on déduit que $2^{48} - 1$ est divisible par $-64 - 1 = -65$, et donc par 65. On notera que cette manière de faire permet d'établir que tout entier de la forme $2^{12k} - 1$ est divisible par 63 et 65 ; par exemple, pour $k = 2$, on a $2^{24} - 1 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 13 \times 17 \times 241 = (9 \times 7)(5 \times 13)(17 \times 241)$. Ou encore : $2^{60} - 1 = 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 31 \times 41 \times 61 \times 151 \times 331 \times 1321$; etc.

1.3. Seconde extension du schéma scolaire

a) Le schéma exprimé plus haut sous la forme

$$S(X ; Y ; Q) \hookrightarrow R$$

peut désormais s'écrire sous sa forme la plus générale, à savoir comme ceci :

$$(S(X ; Y ; Q) \hookrightarrow R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge, O_{n+1}, \ldots, O_m) \hookrightarrow R.$$

Cette « formule » indique que le système didactique $S(X ; Y ; Q)$ « localise » des réponses $R_1^\lozenge$, $R_2^\lozenge$, …, $R_n^\lozenge$ à la question Q et mobilise des « œuvres » à titre d'outils du travail accompli en relation avec ces réponses, dans le cadre du projet de créer une réponse R. (Ici, les « œuvres » utilisées ou entr'aperçues sont, par ordre croissant de sophistication, la technologie du maximum d'un produit dont la somme des facteurs est constante, la technologie du calcul différentiel, enfin la technologie des multiplicateurs de Lagrange.

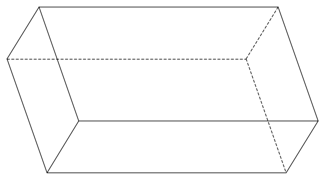
b) À la réalisation « canonique » du schéma d'étude et de recherche (SER) évoquée plus haut, s'est ajoutée depuis 2000 une autre réalisation, celle des TPE, des *travaux personnels encadrés* : en ce cas, X est une équipe de quelques élèves (deux ou trois), Y une équipe de professeurs « encadreurs » (en général au nombre de deux), et Q une certaine « question » qui, hélas ! souvent n'en est pas une, en même temps que le travail de production d'une « réponse » à cette question absente livre le produit d'une activité de simple « recopiage culturel », ce qu'on peut schématiser ainsi.

$$(S(X, Y ; Q) \hookrightarrow R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge) \hookrightarrow \oplus_i R_i^\lozenge.$$

c) Dans le cadre précédent, on le sait, la question Q à étudier n'est pas une question « de mathématiques », même si, parmi les œuvres O_{n+1}, …, O_m à mobiliser, il se trouve des œuvres mathématiques.

• Le travail amorcé lors du TD6 s'inscrit dans le schéma précédent, à ceci près que la question posée était *a priori*, sinon mathématique, du moins « mathématisée » et se déclinait en trois questions connexes que l'on reproduit ici.

Q_1. Que recèle Internet à propos de la théorie mathématique de la perspective cavalière (définition mathématique, technique, technologie) ? La figure ci-après peut-elle, selon une telle théorie mathématique, être regardée comme représentant en perspective un cube ?



Q_2. Que peut-on trouver sur Internet à propos de la signification du qualificatif « cavalière » dans l'expression « perspective cavalière » ?

Q_3. Que trouve-t-on sur Internet quant à l'identification et à la classification de différents types de perspective ? Quelles indications y trouve-t-on quant aux avantages et inconvénients prétendus de chacun d'eux ?

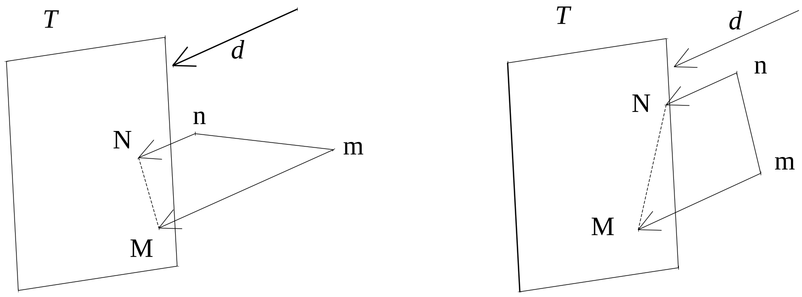
• Le temps manquera, désormais, pour poursuivre l'esquisse de PER sur la question de la perspective. C'est l'occasion de souligner que, dans la version scolaire usuelle du schéma d'étude et de recherche présenté plus haut, il revient au professeur d'effectuer seul – et souvent, par sa formation, très en amont de la classe où il intervient à propos d'une question Q – le PER qui lui permettra de constituer la réponse R qu'il « apportera » à la classe, et que les élèves auront seulement à apprendre à connaître, sans avoir eu l'occasion de participer à son élaboration. À titre d'illustration, et faute de mieux, voici donc un développement « tout constitué », qu'on livrera à titre de réponse $R^\lozenge$ à la question de la théorie mathématique de la perspective cavalière : il s'agit en fait d'un « cours » proposé il y a quelques années aux élèves professeurs de 1re année préparant le CAPES de mathématiques à l'IUFM d'Aix-Marseille.

Perspective cavalière

• La représentation plane des objets de l'espace est une exigence vitale en géométrie dans l'espace, que les élèves rencontrent dès le collège, où l'un des objectifs de formation est le suivant : « Être familiarisé avec les représentations de l'espace, de l'application des conventions usuelles (lignes cachées, perspective) aux traitements permis par les représentations »

• Cependant, la technique de représentation adoptée en mathématiques – la perspective cavalière – conserve le statut d'outil d'étude, et n'accède pas, dans le curriculum actuel, au statut d'objet d'étude, avec une technologie explicite et rigoureuse. C'est cette technologie manquante (dans l'état actuel des choses) que l'on examine sommairement ci-après.

1. Pour définir une perspective cavalière, on choisit d'une part un plan T de l'espace E, sur lequel on va projeter l'espace E tout entier, et qui est appelé ***plan du tableau*** (ou ***tableau***), d'autre part une direction de droite δ non parallèle à T, qui fournit la ***direction*** δ de la projection. On appelle alors ***perspective cavalière*** de tableau T et de direction δ la projection de E sur T parallèlement à δ



2. On appelle ***perspective de F*** ($F \subset E$: point, droite, cercle, etc.) l'image de F par la perspective considérée. On notera que la perspective d'une ***droite projetante*** d ($\in \delta$), est un point.

3. Toute ***perspective cavalière*** est une application affine, de sorte que…

… la perspective d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment de E de direction $\neq \delta$ est une droite, une demi-droite, un segment de T ;

… la perspective d'une courbe du second degré (cercle, ellipse, etc.) est une courbe du second degré (éventuellement dégénérée) ;

… la perspective du milieu d'un segment est le milieu de la perspective du segment ;

… plus généralement, la perspective du barycentre de n points pondérés (a_i, α_i) est le barycentre des points (A_i, α_i), où A_i est la perspective de a_i.

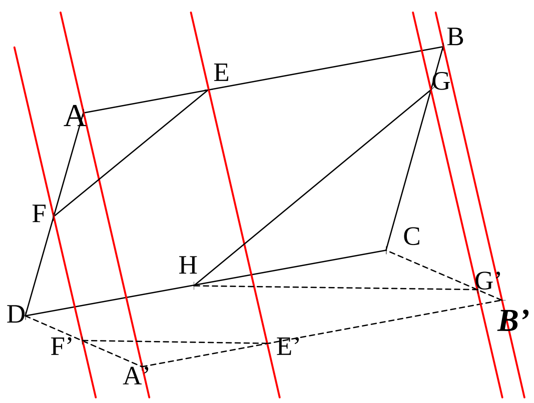
4. Désignons par π_δ l'application linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{T}$ associée à la perspective (T, δ). Soit $\vec{u} \in \vec{E}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, et soit m, p $\in E$ tels que $\overrightarrow{mp} = \lambda\,\vec{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Si M et P sont la perspective de m et p, alors…

… $\overrightarrow{MP} = \pi_\delta(\overrightarrow{mp}) = \pi_\delta(\lambda\,\vec{u}) = \lambda\pi_\delta(\vec{u})$: les perspectives de droites parallèles ($\notin \delta$) de E sont des droites parallèles de T ;

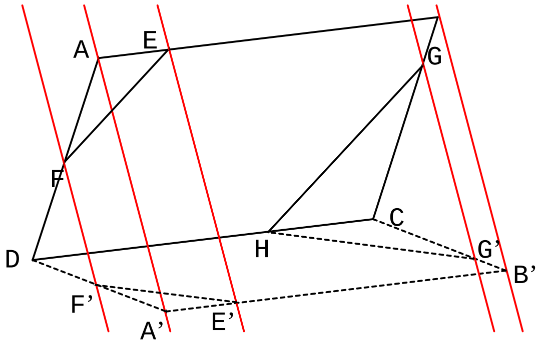
… on a de plus : $\dfrac{MP}{mp} = \dfrac{\|\lambda\pi_\delta(\vec{u})\|}{\|\lambda\,\vec{u}\|} = \dfrac{|\lambda|\,\|\pi_\delta(\vec{u})\|}{|\lambda|\,\|\vec{u}\|} = \dfrac{\|\pi_\delta(\vec{u})\|}{\|\vec{u}\|} = k_{\vec{u}}$.

Le scalaire $k_{\vec{u}}$ est le coefficient de réduction-agrandissement des longueurs de direction $\vec{u}$: MP = $k_{\vec{u}}$ mp. Si $\pi_\delta(\vec{u}) = \vec{u}$ on a $k_{\vec{u}} = 1$; dans ce cas, on a $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{mp}$, d'où $\overrightarrow{mM} = \overrightarrow{pP}$: la droite (mp) est parallèle à T, et la restriction de (T, δ) au plan parallèle à T passant par m et p est une translation.

5. À l'aide d'un cadre de bois, il est facile de vérifier expérimentalement les résultats précédents sur les ombres au sol provoquées par le soleil (ci-dessous).

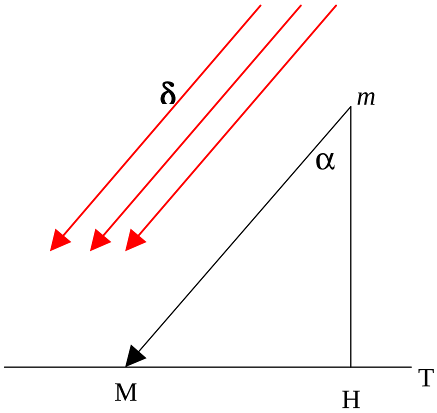


6. On peut aussi simuler l'expérience : à propos de la figure ci-dessous, le logiciel Geospacw fournit ainsi les mesures EF = 2, E'F' = 1,7 ; d'où E'F'/EF ≈ 0,85 ; GH = 3 & G'H = 2,5, d'où G'H/GH ≈ 0,83 ; en sorte qu'on a bien E'F'/EF ≈ G'H/GH, etc.



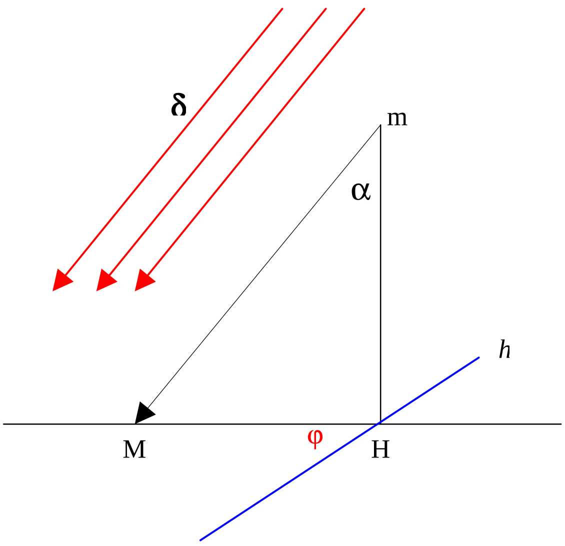
7. On imagine en général que T est, à l'instar d'un tableau de peintre, disposé verticalement : pour cette raison tout plan parallèle à T est dit ***frontal*** ou ***de face***, toute perpendiculaire à T est appelée ***ligne de fuite*** ou ***fuyante***. On notera que, en perspective cavalière, ou ***axonométrie oblique***, on prend $\delta \not\perp T$: si $\delta \perp T$ on parle d'***axonométrie orthogonale***.

8. Soit m $\in$ E, H son projeté orthogonal sur T, et M sa perspective. Le rapport de réduction-agrandissement pour les fuyantes est $k_\perp = \dfrac{\mathrm{MH}}{\mathrm{mH}}$.



On a $k_\perp = \tan \alpha$, α étant l'angle de δ avec la normale à T. Si $\alpha = 30$ °, $k_\perp = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$; pour avoir $k_\perp = 0{,}5$ (norme AFNOR), on doit prendre $\alpha \approx 26{,}5°$; si $\alpha > 45°$, la « réduction » est… un agrandissement : $k_\perp > 1$

9. Soit une direction de T désignée comme horizontale. Soit alors φ l'angle que fait le plan (mHM) avec l'horizontale h.

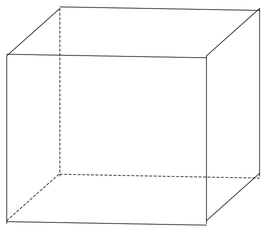


L'angle φ est l'***angle de fuite***, celui que fait la perspective de toute fuyante avec l'horizontale. La norme AFNOR est ici $\varphi = 45°$.

10. La perspective d'un cube a par exemple l'allure ci-après.

Sur la perspective de gauche, on a $\varphi < 45°$ et $\alpha > 45°$ (car $k_\perp = \tan \alpha > 1$) ; sur la perspective de droite, $\varphi < 45°$ et $\alpha < 45°$ (car $k_\perp = \tan \alpha < 1$). On recherchera où apparaît l'angle α…

• Il est conventionnel de supposer semi-transparents les solides à représenter : on dessine alors les segments cachés en trait discontinu. On a par exemple le dessin suivant (où α est « petit » et φ « grand ») :



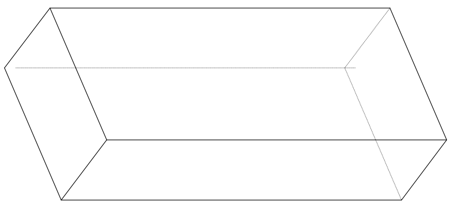
• Représentations libres

1. Deux problèmes distincts doivent être résolus :

[P_1]. Étant donné un plan T, une direction δ de E ($\delta \not\parallel T$, $\delta \not\perp T$), une figure F de E, il s'agit de déterminer la perspective de F selon (T, δ) (on admet comme perspective l'image de la perspective de F par une similitude de T : sinon, F étant un cube d'un mètre de côté, sa représentation sur une feuille A4 ne pourrait guère se faire…).

[P_2]. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille, stable par isométrie, de parties de E (cubes, tétraèdres, etc.). Sur un plan T, dessiner une figure F' qui soit une perspective d'une partie F_i : il s'agira de « dessiner un cube », de « dessiner un tétraèdre », etc.

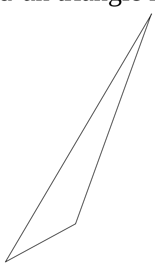
2. On s'arrête dans ce qui suit sur P_2 : le dessin ci-contre, par exemple, peut-il représenter un cube ?…



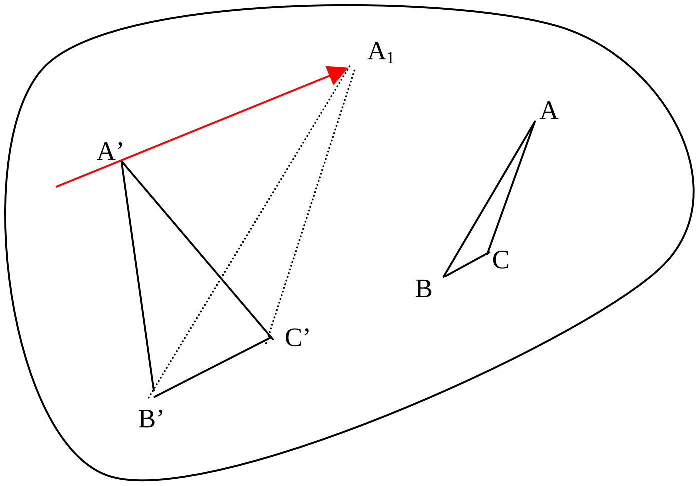
Pour répondre à ce type de questions, on a besoin des théorèmes ci-après.

Théorème 1. Soit un triangle A'B'C' de E et soit ABC un triangle quelconque de T. Alors ABC est la perspective d'un triangle semblable à A'B'C'.

Ce résultat implique par exemple que le triangle ci-après peut être regardé aussi bien comme perspective d'un triangle équilatéral, d'un triangle rectangle isocèle, etc.



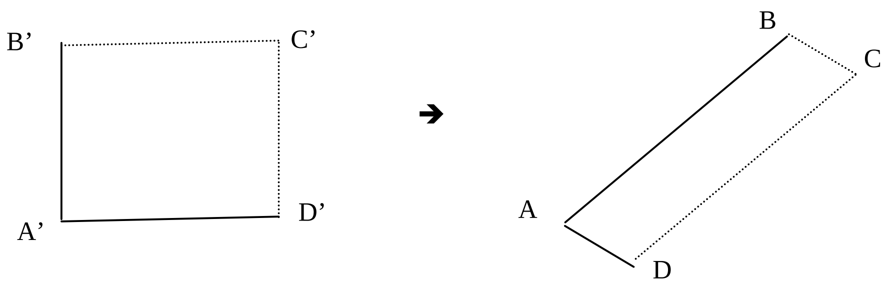
Démonstration du théorème 1



Soit A'B'C' un triangle isométrique à l'original tel que (B'C') $\subset$ *T* et (B'C')//(BC), et soit alors $A_1 \in$ *T* tel que A_1BC soit homothétique à ABC. La perspective de direction (A'A_1) convient.

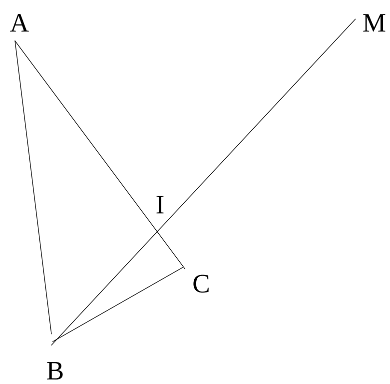
Théorème 2. Si on a fixé la perspective ABC d'un triangle A'B'C', la perspective de tout point du plan (A'B'C') est déterminée.

Ce résultat implique par exemple que, si un triangle ABD de *T* est la perspective d'un triangle rectangle isocèle A'B'D' (où $\widehat{A'}$ = 90°), le carré A'B'C'D' a pour perspective le parallélogramme ABCD.



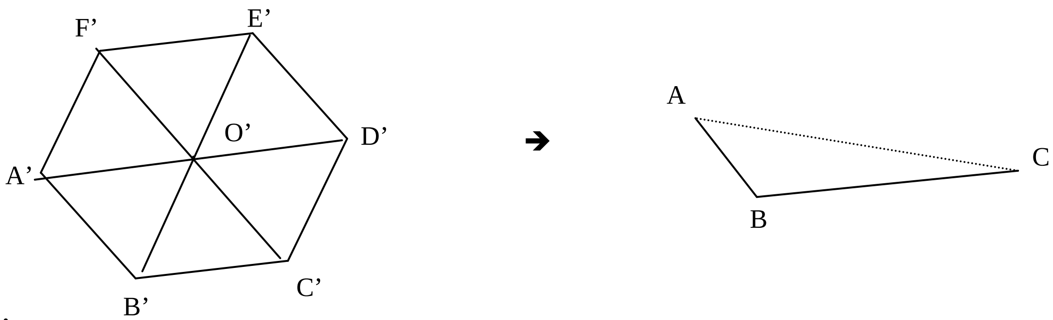
Démonstration du théorème 2

Tout point du plan (A'B'C') s'écrit en effet comme un barycentre de A', B', C' : son image est le barycentre des images A, B, C affectés des mêmes poids.



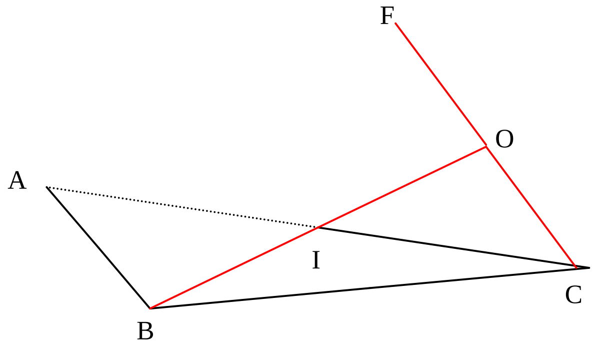
3. À titre d'exemple, on examine le problème suivant :

Soit ABC un triangle de T et soit A'B'C'D'E'F' un hexagone régulier de E. Construire la perspective de cet hexagone en supposant que A', B', C' ont pour perspective A, B, C.

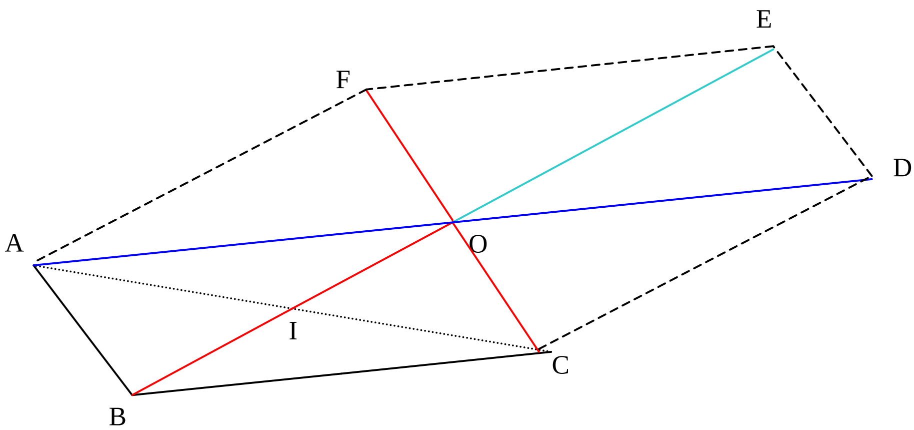


Solution

Soit I le milieu de [AC], O le symétrique de B par rapport à I : F est le symétrique de C par rapport à O.



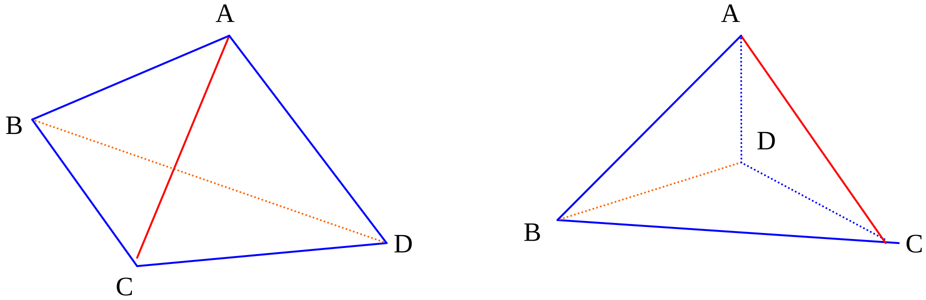
De même, D et E sont les symétriques de A et B par rapport à O



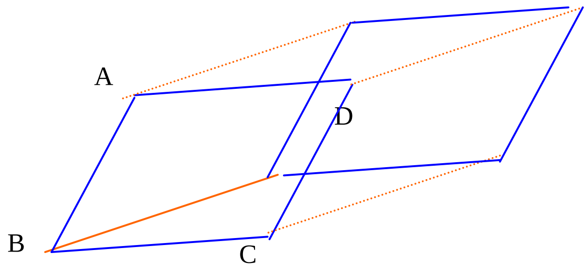
4. Les théorèmes suivants sont fondamentaux.

Théorème 3. Soit A’B’C’D’ un tétraèdre de *E* et soit ABCD un quadrilatère de *T*. Alors ABCD est la perspective d’un tétraèdre semblable à A’B’C’D’.

On notera que ABCD peut être convexe ou non : ses 4 côtés et ses 2 diagonales représentent les $C_2^2 = 6$ arêtes de A’B’C’D’.

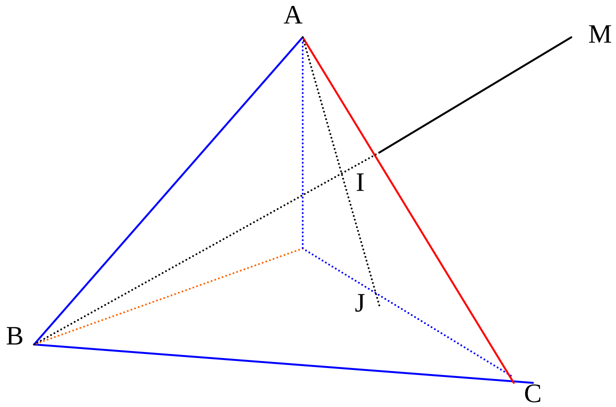


Le théorème 3 est dit de Polke-Schwartz (Polke l'établit en 1853 dans un cas particulier ; Schwartz en donna en 1864 une démonstration générale). Il permet par exemple d'affirmer que la figure ci-après peut représenter un cube…



Théorème 4. Si on a fixé la perspective ABCD d'un tétraèdre A'B'C'D', la perspective de tout point de l'espace est déterminée.

La démonstration est analogue à celle du théorème 2 : voir la figure ci-après.

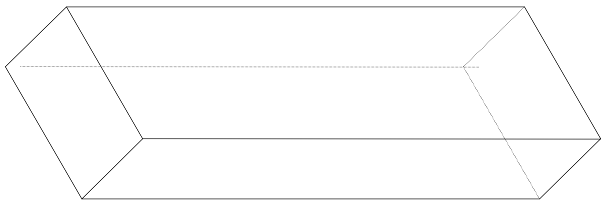


5. Il résulte de ce qui précède que…

– … la représentation d'une figure de l'espace est irréversible : on ne peut, à partir d'elle, déterminer (à une similitude près) l'original dont elle est la perspective ;

– … la représentation devient réversible si l'on connaît le tétraèdre représenté par un quadrilatère apparaissant dans la représentation (pour les figures planes, il suffit de connaître le triangle représenté par un triangle figurant dans la représentation).

6. La polysémie de la perspective d'une figure de l'espace explique que des conventions de représentation (pas toujours explicites) soient nécessaires pour diminuer l'ambiguïté de lecture : il est rare, ainsi, que l'on représente un ***cube*** par la figure ci-après, qui vaut aussi bien pour tout parallélépipède.



d) On mentionnera ici deux autres questions encore, qui ont trait au thème général des PER, et sur lesquels on reviendra lors de la séance prochaine.

1. Dans le cadre de la formation à la sécurité routière, je dois pendant une heure avec ma classe parler et travailler sur les distances d'arrêt et les distances de sécurité. Je voudrais savoir s'il m'est possible d'intégrer cette heure dans mon chapitre sur la proportionnalité. (TB, CR, 4^{e}, 20)

2. Durant les journées « portes ouvertes », nous avons abordé l'interdisciplinarité (en dehors des TPE et des IDD). Il m'intéresserait de développer ce sujet et notamment d'avoir des idées d'organisation, de projets, etc. (MB, CR, 2de, 21)

2. Forum des questions

2.1. La calculatrice

a) On partira de la question que voici.

Lors de calculs avec les puissances de nombres, l'écriture scientifique de nombres, les élèves se sentent « frustrés » si on leur interdit l'utilisation de la calculatrice. Poser une multiplication ou une division, même simple, leur semble être un pas en arrière : « On savait faire cela en CM2, on ne sait plus et puis on a la calculatrice, autant s'en servir. » Je n'interdis pas l'utilisation de la calculatrice parfois, mais lors d'un contrôle, je m'efforce de trouver des exercices où elle est inutile, ou sert peu (par exemple, pour simplifier des fractions de puissances). Mais les élèves sont tentés et en général font les calculs d'abord avec la calculatrice, puis se rendent compte qu'elle ne sert pas. Comment arriver à leur apprendre à utiliser la calculatrice pour des calculs adaptés et pas pour tout calcul ? (MD, CR, 4^{e} & demi-5^{e}, 21)

b) Il y a en effet une *bonne éducation* à l'usage de la calculatrice qui, aujourd'hui, est mal définie, et cela d'abord parce qu'elle est *mal pensée*. En revanche, il est à peu près inenvisageable désormais de résister à un argument tout pratique, qui a la force d'une mouvement tellurique – « on a la calculatrice, utilisons-la ! ».

• Qui, en effet, aujourd'hui, ayant à multiplier ou à diviser 2345 par 47 (par exemple), « pose » la multiplication ou la division ? La calculette de mon téléphone mobile me donne aussitôt 110 215 pour ce qui est du produit (exact), et 49,893617 pour ce qui est du quotient décimal approché.

• Je peux contrôler *grossièrement* ces résultats par calcul « mental » : 2300 multiplié par 50, cela donne 115 000 ; 2500 divisé par 50, cela donne 50.

• Si, s'agissant du quotient, je souhaite disposer de plus de décimales, je pourrai

1) attendre d'être devant mon ordinateur pour recourir à une calculatrice plus puissante, qui donne ici : 2345/47 $=_c$ 49,89361702127659574468085106383.

2) ou bien, *tout de suite*, calculer (avec l'aide de la calculette) la valeur de 2345 – 47 × 49, soit 42, et demander alors à la calculette le quotient décimal approché qu'elle peut offrir de 4200 par 47 : celle-ci répond 89,361702, ce qui me donne deux décimales de plus :

2345/47 $=_c$ 49,89361702127659574468085106383.

Je peux itérer la manip' : calculer 4200 – 47 × 89, soit 17, puis demander à la calculette le quotient de 17000 par 47, à savoir 316,70212, ce qui me fournit encore deux décimales supplémentaires : 2345/47 $=_c$ 49,89361702127659574468085106383. Etc.

3) Bien entendu, si j'ai *vraiment* besoin de toutes ces décimales, il me reste à *vérifier* que l'on a bien 2345/47 = 49,8936170212… ou, plus exactement, que l'on a :

$$49{,}8936170212 < 2345/47 < 49{,}8936170213.$$

Je peux alors « poser » les complexes d'opérations utiles. On a :

$$\begin{array}{lrl} 47 \times 49{,}8936 & = 2344, & 9992 \\ 47 \times 170212 \times 10^{-10} = & 0, & 0007999964 \\ \hline & 2344, & 9999999964 \end{array}$$

Et encore :

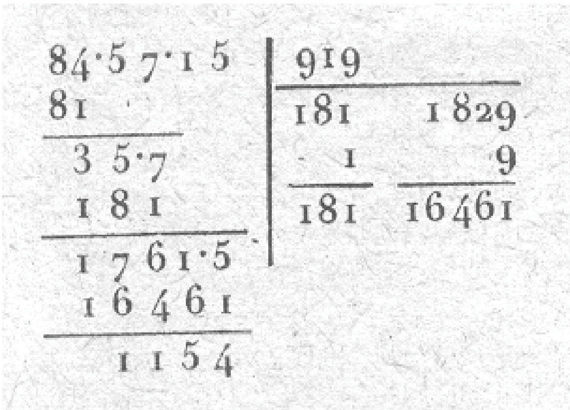
$$\begin{array}{lrl} 47 \times 49{,}8936 & = \ 2344, & 9992 \\ 47 \times 170213 \times 10^{-10} = & 0, & 0008000011 \\ \hline & 2345, & 0000000011 \end{array}$$

La conclusion semble, ici, des plus certaines.

b) Les candidats au « brevet élémentaire » devaient autrefois maîtriser la « pratique de l'extraction de la racine carré », qu'illustre l'exemple suivant, emprunté à un manuel de 1922.

721. – PREMIER EXEMPLE. – *Soit à extraire la racine carrée à une unité près de* 845 715.

Voici l'opération :



Nous partageons le nombre en tranches de deux chiffres en commençant par la droite. Nous nous servons, pour cela, de points *en haut*. La racine carrée de 84 est 9. Le carré de 9 est 81. Nous retranchons 81 de 84, il reste 3, et nous abaissons, à droite, la tranche suivante ; ce qui donne 357. Nous séparons dans 357 le dernier chiffre à droite par un point *en haut*. Nous formons le double du chiffre calculé 9 qui est 18 et nous divisons 35 par 18. Le quotient est 1. Pour essayer ce chiffre, nous l'écrivons à la droite de 18, ce qui donne 181 que nous multiplions par 1. Le produit 181 peut être soustrait de 357 : 1 est donc le second chiffre de la racine. Nous effectuons la soustraction 357 – 181 = 176, et nous abaissons à droite la tranche suivante, ce qui .donne 17615. Nous séparons le dernier chiffre à droite et nous divisons le nombre ainsi obtenu par le double de 91 qui est 182. Le quotient est 9. Pour essayer 9, nous l'écrivons à la droite de 182 et nous multiplions 1 829 par 9. Le produit 16 461 peut être retranché du reste ; 9 est donc bien le dernier chiffre de la racine.

Le *reste* de l'opération est 17 615 –16 461 = 1 154.

La *racine* cherchée est 919.

Comme vérification, on peut constater que

$$845\,715 = \overline{919}^2 + 1154.$$

$$\begin{array}{r} 919 \\ 919 \\ \hline 8271 \\ 919 \\ 8271 \\ \hline 844561 \end{array}$$

$844561 = \overline{919}^2$, *carré de la racine.*
1154 *reste.*
845715 *nombre donné.*

c) Cette façon de « poser » l’extraction de la racine carrée fit longtemps partie des connaissances de quiconque avait une certaine instruction scolaire. Bien entendu, elle n’est plus de mise aujourd’hui. Elle peut cependant être *étudiée* pour en comprendre le mécanisme. C’est plutôt *cela* qui peut être fait aujourd’hui pour les algorithmes scolaires encore vivants de la multiplication et de la division « posées ».

• On peut par exemple « mimer » la multiplication « posée » comme suit :

$47 \times 49 = (40 + 7)(40 + 9) = (40 + 7) \times 9 + (40 + 7) \times 40 = 63 + 40 \times 9 + (40 + 7) \times 40 = 63 + 360 + (40 + 7) \times 40 = 423 + ((40 + 7) \times 4) \times 10 = 423 + (28 + 40 \times 4) \times 10 = 423 + (28 + 160) \times 10 = 423 + 1880 = 2303.$

La comparaison est cruelle avec l’algorithme de calcul suivant :

$47 \times 49 = (40 + 7)(40 + 9) = 1600 + 40 \times 9 + 7 \times 40 + 7 \times 9 = 1600 + 360 + 280 + 63 = 1960 + 280 + 63 = 2240 + 63 = 2303.$

Et plus encore avec celui-ci : $47 \times 49 = (50 - 3)(50 - 1) = 2500 - 50 - 150 + 3 = 2303.$

• On peut faire de même avec la *division* :

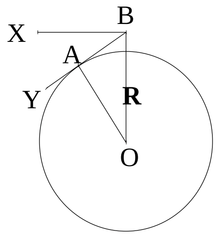
$$\frac{2345}{47} = \frac{234 \times 10 + 5}{47} = \frac{(4 \times 47 + 46) \times 10 + 5}{47} = 40 + \frac{465}{47} = 40 + \frac{9 \times 47 + 42}{47} = 49 + \frac{420}{47} \times \frac{1}{10} = 49 + \frac{8 \times 47 + 44}{47} \times \frac{1}{10} = 49 + \frac{8}{10} + \frac{440}{47} \times \frac{1}{100} = \ldots$$

d) L’exemple précédent suggère que, dans le cas de la division notamment, la calculatrice rend d’inappréciables services. On partira ici de la question suivante.

> Lors du chapitre sur les puissances, est-il bon de faire réaliser aux élèves que la calculatrice est à utiliser avec précaution ? Par exemple pour $A = 10^{11} + 10^{-5} - 10^{11}$, la calculatrice fournira $A = 0$ alors qu’à la main on a $A = 10^{-5}$ très facilement. Je cherche un moyen d’expliquer cela clairement aux élèves mais je crains que cela ne les perturbe beaucoup. (JN, CR, 4e & demi-4e, 18)

• On peut toujours réussir à mettre en difficulté une « machine », quelle qu’en soit la nature ! De fait, le bon point de vue est plutôt que, pour calculer $A = a + 10^{-5} - a$, on n’a tout simplement pas besoin d’une calculatrice. Ce qui importe, en revanche, c’est de connaître les *usages efficaces* de la calculatrice.

• Longtemps, l'absence de moyens de calcul efficaces a été une plaie pour l'humanité. Voici un simple exemple des effets de cette situation de pénurie. Dans un ouvrage intitulé *Pour comprendre la trigonométrie* publié en 1930 chez Gaston Doin & C^{ie}, à Paris, l'auteur, Georges Durand, propose un problème classique, celui du calcul du rayon de la Terre. Un observateur se trouve en B, à 2000 mètres au-dessus du niveau de la mer.



Il mesure ce qu'on appelle la *dépression de l'horizon*, soit l'angle que fait avec l'horizontale (BX) un rayon visuel (BY) tangent en A avec la surface de la mer. Il trouve, en l'espèce, un angle $\widehat{XBY}$ de 1,5º (ou plutôt de 1º 30'). Comme on a $\widehat{BOA} = \widehat{XBY}$, si l'on mesure les longueurs en kilomètres, il vient : OA = $R = (R + 2) \times \cos \widehat{BOA} = (R + 2) \times \cos 1{,}5^\circ$. La résolution de cette équation en R donne :

$$R = \frac{2 \cos 1{,}5^\circ}{1 - \cos 1{,}5^\circ}.$$

Voici alors le calcul que propose l'auteur : $R = \dfrac{2 \cos 1^\circ\, 30'}{1 - \cos 1^\circ\, 30'} = \dfrac{2 \times 0{,}9997}{1 - 0{,}9997} = \dfrac{1{,}9994}{0{,}0003} =$ 6 665 km. Si l'on reprend ce calcul, aujourd'hui, avec une calculatrice, on trouve ceci :

$$\frac{2 \cos 1{,}5^\circ}{1 - \cos 1{,}5^\circ} =_{co} 5834{,}4335225554\ldots$$

La différence est sensible : l'erreur relative commise est supérieure à 14 % ! D'où provient-elle ? Le dernier quotient est correct ; on a en effet : $\dfrac{1{,}9994}{0{,}0003} =_{co} 6664{,}666666\ldots$ Qu'en est-il alors du numérateur et du dénominateur de ce quotient ? On a ceci :

$$2 \cos 1{,}5^\circ =_{co} 2 \times 0{,}99965732497555728003676088836768 =$$
$$1{,}9993146499511145600735217767354 < 1{,}9994$$

$$1 - \cos 1{,}5^\circ =_{co} 0{,}00034267502444271996323911163232012 > 0{,}0003.$$

On retrouve ainsi que, à cause des arrondis auxquels il est tenu de procéder, l'auteur surestime sensiblement le quotient à calculer. Il est vrai que l'erreur commise était peut-être intéressée : le résultat *obtenu* (6665 km), certes numériquement faux, est plus proche du « rayon terrestre moyen » que celui qui résulte *vraiment* du calcul entrepris (5834 km). Il est à cet égard piquant de lire la conclusion que l'auteur donne à sa petite étude :

> La valeur obtenue est un peu trop forte, car on sait que le rayon terrestre moyen est 6371 km. On pourrait d'ailleurs améliorer le résultat en tenant compte de différentes causes d'erreurs, en particulier de la réfraction ; mais ce calcul suffit pour comprendre le principe de la méthode.

Rien n'est dit, on le voit, sur ce qui est sans doute la principale source d'erreur : *l'imprécision du calcul*.

e) La résistance aux moyens de calcul modernes – qui nous libéré de la pénurie calculatoire précédente – conduit pourtant certains, non seulement à vouloir les mettre en échec, mais aussi à faire courir des rumeurs qui sont mathématiquement ineptes. Il circule encore parmi les professeurs une croyance protéiforme qui peut prendre la forme suivante : « La calculatrice donne le même affichage quand on lui demande ce que valent, d'une part $3\sqrt{5}$, d'autre part $\sqrt{45}$. Cela signifie simplement que les premières décimales de ces deux nombres réels sont bien identiques, mais l'on ne sait pas s'il en sera de même par exemple avec la 30^{e} ou la 40^{e} décimale. On ne peut donc pas en conclure que $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$. » Il s'agit là d'un bel exemple de légende scolaire, de rumeur infondée : la chose devrait sauter aux yeux de ceux qui la propagent si une attitude irrationnelle à l'encontre de la calculatrice n'exténuait pas leur sensibilité mathématique.

• Soit en effet $a, b, c \in \mathbb{N}^*$; si $a\sqrt{b} \neq \sqrt{c}$, on a :

$$|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| = \frac{|a^2b - c|}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} \geq \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

On a donc ainsi la proposition suivante :

$$a\sqrt{b} \neq \sqrt{c} \Rightarrow |a\sqrt{b} - \sqrt{c}| \geq \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

Cette proposition équivaut encore à ceci :

$$|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| < \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} \Rightarrow a\sqrt{b} = \sqrt{c}.$$

Si l'on prend $a = 3$, $b = 5$ et $c = 45$, on a :

$$\frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} > \frac{1}{3 \times 3 + 7} = \frac{1}{16} > 0{,}06.$$

En sorte que, si l'on avait $3\sqrt{5} \neq \sqrt{45}$ la chose se verrait sur les affichages de la calculatrice *avant la 3^{e} décimale*. Inversement, si ces affichages sont *identiques jusqu'à la 2^{e} décimale incluse*, alors $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$.

• Le phénomène se produit tant qu'on reste dans le domaine numérique où il est depuis toujours usuel d'évoluer au collège. Si, par exemple, on prend $a = 2$, $b = 2$ et $c = 8$, on a

$$\frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} > \frac{1}{2 \times 2 + 3} = \frac{1}{7} > 0{,}1$$

en sorte que, si l'on avait $2\sqrt{2} \neq \sqrt{8}$, les affichages de la calculatrice différeraient *avant* la 2^{e} décimale. La calculatrice est donc un outil de confiance, tant qu'on en use avec doigté. Soit ainsi à tester l'égalité *supposée* que voici :

$$\sqrt{13} + \frac{2}{\sqrt{13}} = \sqrt{17 + \frac{4}{13}}.$$

Que dit la calculatrice ? Ceci :

$$\sqrt{13} + \frac{2}{\sqrt{13}} =_{cc} 4{,}160251472 \text{ ;}$$

$$\sqrt{17+\frac{4}{13}} =_{\text{cc}} 4{,}160251472.$$

La conclusion est-elle sûre ? Le calcul ci-après, où l'on suppose $\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}} \neq \sqrt{b+\frac{4}{a}}$, permet de répondre :

$$\left|\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}-\sqrt{b+\frac{4}{a}}\right| = \frac{\left|\left(\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2-\left(b+\frac{4}{a}\right)\right|}{\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}+\sqrt{b+\frac{4}{a}}} =$$

$$\frac{\left|a+4+\frac{4}{a}-b-\frac{4}{a}\right|}{\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}+\sqrt{b+\frac{4}{a}}} \geq \frac{1}{\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}+\sqrt{b+\frac{4}{a}}}.$$

Pour $5 \leq a \leq 16$ et $b \leq 24$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}+\sqrt{b+\frac{4}{a}}} > \frac{1}{4+1+5} = \frac{1}{10}.$$

Ainsi, lorsque $5 \leq a \leq 16$ et $b \leq 24$, si $\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}} \neq \sqrt{b+\frac{4}{a}}$, *les affichages diffèrent avant la 2^e^ décimale*.

• Ce qui précède vaut pour la plupart des calculs élémentaires. Considérons ainsi les fractions $\frac{221}{481}$ et $\frac{119}{259}$; la calculatrice donne ceci : $\frac{221}{481} =_{\text{cc}} 0{,}459459459459$; $\frac{119}{259} =_{\text{cc}} 0{,}459459459459$. Peut-on en conclure en toute sécurité à l'égalité des deux fractions ? Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier naturel $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d} = \frac{\pm k}{\text{PPCM}(b,\, d)}.$$

Si $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ on a alors : $\left|\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right| = \frac{k}{\text{PPCM}(b,\, d)} \geq \frac{1}{\text{PPCM}(b,\, d)}$. On a donc la proposition suivante :

$$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \Rightarrow \left|\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right| \geq \frac{1}{\text{PPCM}(b,\, d)}.$$

Cette proposition est encore équivalente à la suivante :

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right| < \frac{1}{\text{PPCM}(b,\, d)} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Qu'en est-il dans le cas envisagé plus haut ? On a $481 - 259 = 222$, $259 - 222 = 37$, $222 - 6 \times 37 = 0$: le PGCD de 481 et 259 est 37 et on a donc : $\text{PPCM}(481, 259) = \frac{481 \times 259}{37} = 3367$. Par suite, $\left|\frac{a}{481}-\frac{c}{259}\right| \geq \frac{1}{3367} > \frac{1}{4000} = 0{,}00025$. Ainsi, si $\frac{a}{481} \neq \frac{c}{259}$ la chose se voit sur les affichages de la calculatrice *avant la 5^e décimale*. Inversement, si ces affichages sont *identiques jusqu'à la 4^e décimale incluse*, alors $\frac{a}{481} = \frac{c}{259}$.

• D'une façon générale, considérons deux fonctions f et g sur un ensemble *fini* de n-uplets de nombres, $E \times F \times \ldots$; et considérons alors l'ensemble

$$V = \{ \ |f(a, b, \ldots) - g(a, b, \ldots)| \neq 0 \ / \ (a, b, \ldots) \in E \times F \times \ldots \ \}.$$

L'ensemble V étant fini, *il a un minimum* δ. On a donc ceci :

$$\text{Si } |f(a, b, \ldots) - g(a, b, \ldots)| < \delta, \text{ alors } f(a, b, \ldots) = g(a, b, \ldots).$$

Cette remarque triviale conduit à ceci : étant donné une valeur décimale approchée y^* assez précise de $f(x)$, où x et f sont inconnus mais appartiennent à des ensembles finis connus, il n'est pas impossible de déterminer f. C'est ce qu'a réalisé le mathématicien Simon Plouffe (http://pi.lacim.uqam.ca/fra/) avec son *inverseur* (dit inverseur de Plouffe). Considérons ainsi le nombre $\sin \frac{\pi}{12}$. La calculatrice Microsoft donne :

$$\sin \frac{\pi}{12} =_c 0{,}2588190451025207623488988\ldots$$

Consulté sur l'origine *possible* du nombre 0,25881904510252076, l'inverseur de Plouffe répond comme suit (on ne donne que les premières possibilités qu'il propose).

Résultat de la recherche...:

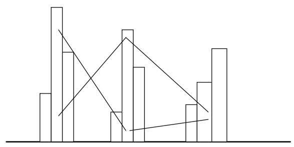
```
        Votre nombre .25881904510252076 a été généré par l'une
        des fonctions ou trouvé dans l'une des tables suivantes.
        Les réponses sont données par ordre de taille.

Mixed constants with 5 operations
2588190451025207 = sin(Pi/12)

cos(Pi*p/q) with p/q small rationals smaller than 1/2 and in F60.
2588190451025207 = cos(Pi*5/12)

Roots of Orthogonal Polynomials: H,T,U,P, n=3..48
2588190451025207 = Chebyshev1(6,x)

sin(Pi*p/q) p/q in F24 (0,1/2)
2588190451025207 = sin(Pi*x) x=1/12

Roots of Orthogonal Polynomials: H,T,U,P, n=3..48
2588190451025207 = Chebyshev1(18,x)

Roots of Orthogonal Polynomials: H,T,U,P, n=3..48
2588190451025207 = Chebyshev1(30,x)

Roots of Orthogonal Polynomials: H,T,U,P, n=3..48
2588190451025207 = Chebyshev1(42,x)

Roots of Orthogonal Polynomials: H,T,U,P, n=3..48
2588190451025207 = Chebyshev2(11,x)

Roots of Orthogonal Polynomials: H,T,U,P, n=3..48
2588190451025207 = Chebyshev2(23,x)
```

2.2. Des outils logiciels qui résistent

a) On examine ici la série de questions pratiques suivantes, dont la formulation n'est cependant pas toujours dénuée d'ambiguïté.

1. Y a-t-il un logiciel permettant de tracer deux plans et de les faire bouger (comme on déplace des droites sur Cabri ou Géoplan), pour observer les différents cas : parallèles, sécants, confondus ? J'ai essayé sur Géospace, sans succès. (MG1, CR, 2^{de}, 20)

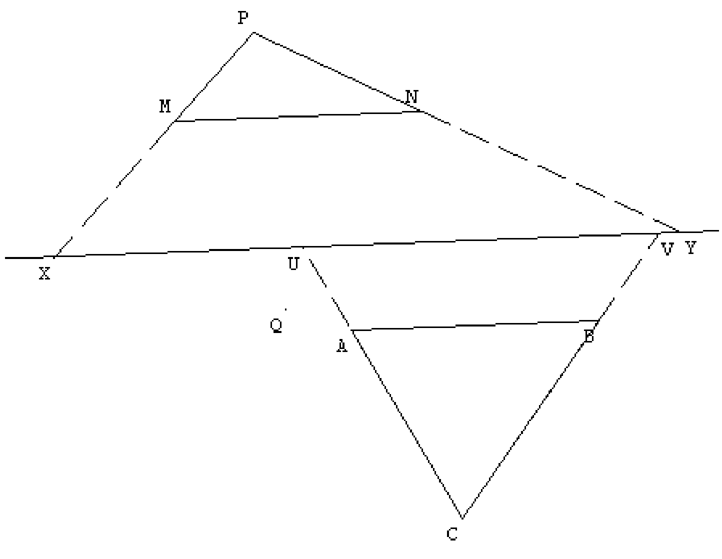
2. J'ai voulu faire sous Excel un graphique mélangeant diagramme en bâtons et courbes.



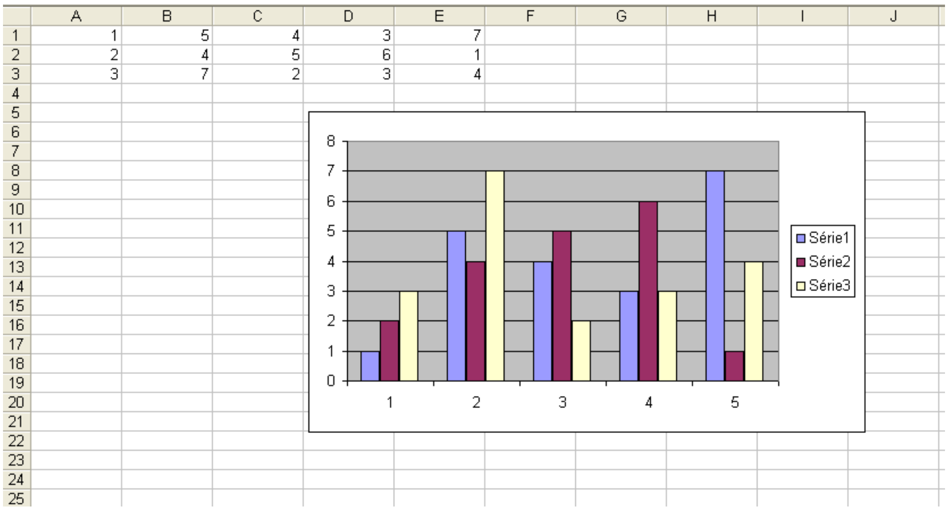
Le problème est que j'avais étudié 5 séries en ligne et le seul programme répondant à mon problème scindait systématiquement la situation en deux parties égales : si j'avais 5 lignes, il représentait 3 diagrammes en bâtons et 2 courbes ; si j'avais 6 lignes, il représentait 3 diagrammes en bâtons et 3 courbes. En fait, ce que je voulais, c'est choisir et sélectionner le nombre de diagrammes en courbe, par exemple 4 diagrammes en bâtons et une courbe. Comment dois-je m'y prendre pour ce faire ? (BR, MJ, 2^{de}, 21)

3. Existe-t-il des grapheurs donnant des courbes approchées par des méthodes numériques ? Par ailleurs, est-il possible d'insérer des formules pour les coordonnées d'un point (par exemple $y = f(a) + f'(a)\,h$) ? (RH, MJ, 4^{e}, 20)

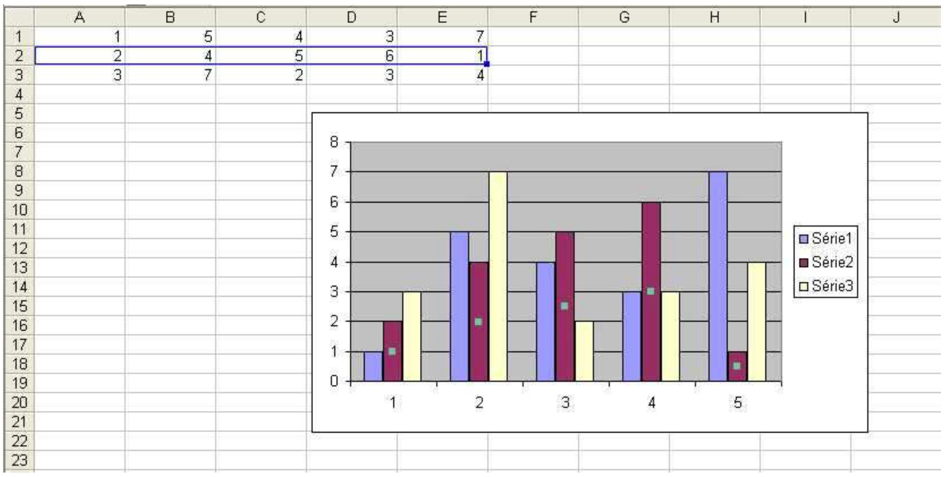
1. La difficulté soulevée dans la question 1 peut trouver une « solution » avec Géospace, du moins en ce qui concerne, pour des plans de l'espace, le fait d'observer « les différents cas : parallèles, sécants, confondus ». On examinera à cet égard la figure ci-après, où A, B, C, M, P sont des points libres, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AC}$: les plans (ABC) et (MNP) sont *sécants* selon la droite (XY) = (UV). Quand on place le point P sur le point Q, les deux plans sont *parallèles*. Quand on place le point M sur le point A, les plans se coupent selon (MN) = (AB) ; si l'on place alors P en Q, les plans sont *confondus* (voir le fichier Plans de l'espace.g3w).



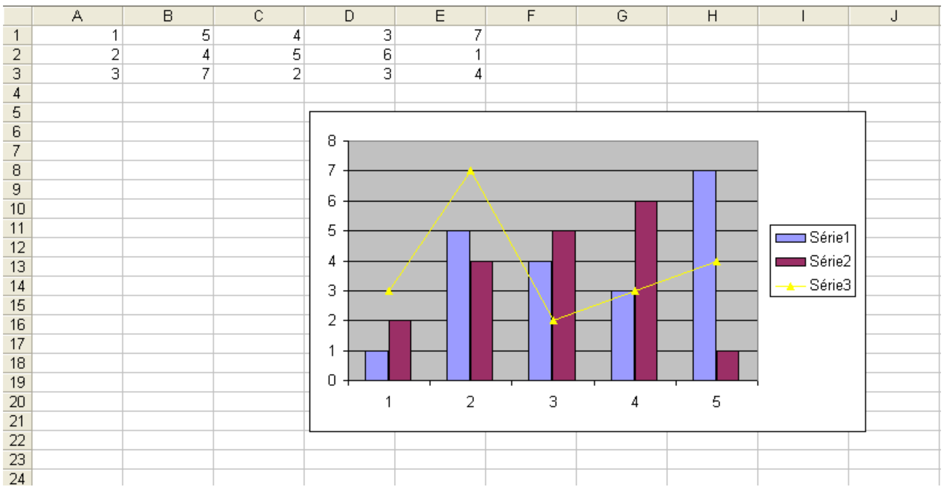
2. Pour répondre à la question 2, on a pris ici trois séries de longueur 5 et on a demandé la représentation des trois séries par des histogrammes : on obtient ce qui suit.



Si l’on veut obtenir la 2e série sous la forme d’une courbe, on clique sur l’une des barres de la 2e série, ce qui fait apparaître une marque carrée sur chacune des barres de cette série.

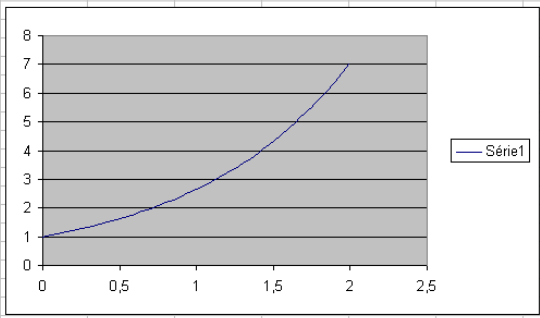


Puis on clique droit sur l’une des marques carrées, ce qui fait apparaître un menu dans lequel on choisit **Type de graphique…** : on choisit alors « Courbes », et l’affaire est faite !



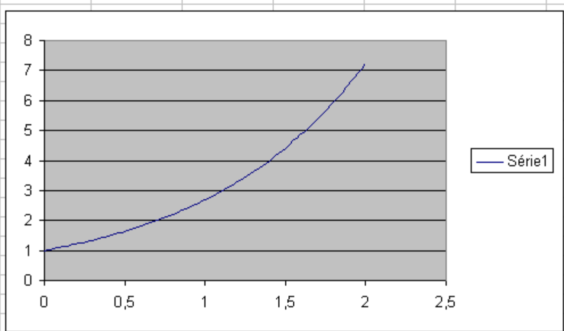
4. Les difficultés soulevées dans la question 3 sont moins claires : des formulations plus précises seront peut-être utiles. On trouvera ci-après le graphique approché de la fonction exponentielle obtenu par la méthode d'Euler sur l'intervalle [0, 2] (avec un pas de 0,05). Les colonnes A et B ayant été remplies, on les sélectionne puis on choisit, dans l'assistant graphique, « Nuage de points », etc.

	A	B	C
1	0	1	0,05
2	0,05	1,05	
3	0,1	1,1025	
4	0,15	1,157625	
5	0,2	1,21550625	
6	0,25	1,27628156	
7	0,3	1,34009564	
8	0,35	1,40710042	
9	0,4	1,47745544	
10	0,45	1,55132822	
11	0,5	1,62889463	
12	0,55	1,71033936	
13	0,6	1,79585633	
14	0,65	1,88564914	
15	0,7	1,9799316	
16	0,75	2,07892818	
17	0,8	2,18287459	
18	0,85	2,29201832	
19	0,9	2,40661923	
20	0,95	2,5269502	
21	1	2,65329771	
22	1,05	2,78596259	
23	1,1	2,92526072	
24	1,15	3,07152376	
25	1,2	3,22509994	
26	1,25	3,38635494	
27	1,3	3,55567269	
28	1,35	3,73345632	
29	1,4	3,92012914	
30	1,45	4,1161356	
31	1,5	4,32194238	



Pour construire la colonne B on a procédé ainsi : un point (x_0, y_0) étant considéré comme appartenant au graphique à tracer, on considère que le point d'abscisse x_0 + 0,05 de la tangente au point (x_0, y_0) appartient audit graphique ; or la tangente ayant pour équation, ici, $y - y_0 = y_0(x - x_0)$, ce point a pour ordonnée $y_0 + 0{,}05y_0$, soit $1{,}05y_0$. D'où la construction de la colonne B ci-dessus : B1 contenant la valeur 1, B2 contient la formule =1,05*B1. Si, plus généralement, le pas est de h, on aura de même $y = (1 + h)y_0$. On peut alors procéder en donnant à h différentes valeurs. Ci-après la valeur de h occupe la cellule C1 : on peut la changer à volonté. On peut aussi appeler h le contenu de la cellule C1 (qui doit être désigné sinon par $C$1) : pour cela, après s'être positionné sur la cellule C1 (contenant la valeur de h), choisir **Insertion**, puis **Nom**, enfin **Définir…** et indiquer comme nom h ; on pourra alors écrire =(1+h)*B1 au lieu de =(1+$C$1)*B1.

	A	B	C
1	0	1	0,02
2	0,02	1,02	
3	0,04	1,0404	
4	0,06	1,061208	
5	0,08	1,08243216	
6	0,1	1,1040808	
7	0,12	1,12616242	
8	0,14	1,14868567	
9	0,16	1,17165938	
10	0,18	1,19509257	
11	0,2	1,21899442	
12	0,22	1,24337431	
13	0,24	1,26824179	
14	0,26	1,29360663	
15	0,28	1,31947876	
16	0,3	1,34586834	
17	0,32	1,37278571	
18	0,34	1,40024142	
19	0,36	1,42824625	
20	0,38	1,45681117	
21	0,4	1,4859474	
22	0,42	1,51566634	
23	0,44	1,54597967	
24	0,46	1,57689926	
25	0,48	1,60843725	
26	0,5	1,64060599	
27	0,52	1,67341811	

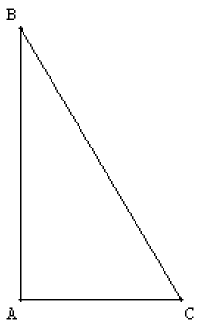


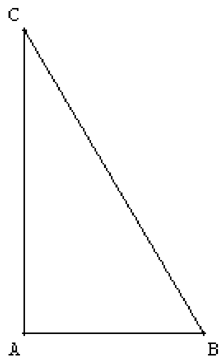
2.3. Pythagore encore

a) On s'attachera d'abord à examiner une difficulté soulevée par l'une des équipes de TER (formée de SF, AG et SH) : dans l'abord de la propriété de Pythagore, comment y faire apparaître les « carrés » comme non inattendus ?

b) Montrons par exemple qu'une relation linéaire de la forme $a = kb + \ell c$, où k, ℓ sont des constantes réelles valables pour *tout* triangle rectangle, *ne saurait exister*.

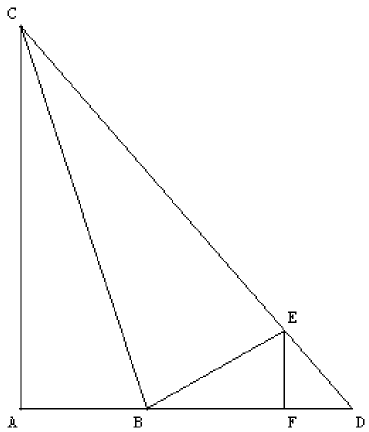
• Tout d'abord, considérons un triangle ABC rectangle en A ; on aurait donc $a = kb + \ell c$. Renommons les points B et C en les appelant respectivement C et A.





On aurait donc aussi $a = \ell b + kc$, et donc $kb + \ell c = \ell b + kc$ ou $(k - \ell)b = (k - \ell)c$. En prenant $b \neq c$, on en déduit que $k = \ell$.

• Par suite, on aurait maintenant $a = k(b + c)$, pour tout triangle ABC rectangle en A, et donc aussi $k = \dfrac{a}{b + c}$.



Sur la figure ci-dessus, où CE = CB et où (EF) est perpendiculaire à (BD), on aurait donc :

$$k = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC} + \mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AC} + \mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{DC} - \mathrm{BC}}{\mathrm{AD} - \mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{BF} + \mathrm{FD}}.$$

Dans le triangle rectangle EFD, on aura aussi $k = \frac{ED}{EF + FD}$. Supposons qu'on ait pris $\widehat{ABC} > 45^o$ et $\widehat{BCD} < 2(\widehat{ABC} - 45^o)$, en sorte qu'on aura $-\left(\widehat{ABC} - \frac{\widehat{BCD}}{2}\right) < -45^o$. Il vient alors :

$$\widehat{EBF} = 180^o - \widehat{ABC} - \frac{180^o - \widehat{BCD}}{2} = 90^o - \widehat{ABC} + \frac{\widehat{BCD}}{2} = 90^o - \left(\widehat{ABC} - \frac{\widehat{BCD}}{2}\right) < 45^o.$$

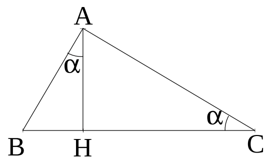
On a donc $\widehat{EBF} < \widehat{BEF}$ et, par suite, EF < BF. Il en résulte que

$$\frac{ED}{BF + FD} \neq \frac{ED}{EF + FD}$$

en contradiction avec l'hypothèse initiale.

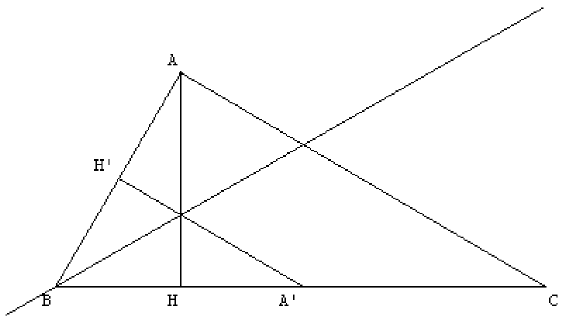
c) Il n'est pas simple de montrer *a priori* que l'on doit avoir une relation impliquant les carrés des longueurs des côtés : on se reportera pour cela à la section intitulé *Proof by differential equations* de l'article "Pythagorean theorem" de l'encyclopédie Wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_theorem).

• En revanche, il est possible de montrer comment ces carrés apparaissent « naturellement » comme conséquence du fait que les aires de régions semblables du plan sont proportionnelles au carré de l'une quelconque de leurs dimensions linéaires – propriété qui est, pour l'essentiel, au programme de la classe de 3^e. Considérons en effet un triangle ABC rectangle en A, et soit H le pied de la hauteur issue de A.



Les triangles ABC, HBA et HAC ont même forme, paramétrée ici par l'angle α. Il existe donc un réel k_α tel que l'on a, pour un triangle rectangle Δ ayant un angle égal à α et pour longueur de l'hypoténuse ℓ, Aire de $\Delta = k_\alpha\,\ell^2$. On a donc : Aire de ABC $= k_\alpha\,BC^2$, Aire de HBA $= k_\alpha\,BA^2$, Aire de HAC $= k_\alpha\,AC^2$. Comme on a Aire de ABC = Aire de HBA + Aire de HAC, il vient $k_\alpha\,BC^2 = k_\alpha\,BA^2 + k_\alpha\,AC^2$ et donc finalement : $BC^2 = BA^2 + AC^2$, CQFD.

• La démonstration précédente, éclairante, n'est malheureusement pas mobilisable en 4^e (mais elle le serait en 3^e). On peut toutefois procéder ainsi. La symétrie d'axe la bissectrice de $\widehat{ABC}$ transforme A en A' et H en H'.



Comme $\widehat{\text{BA'H'}} = \widehat{\text{BAH}} = \widehat{\text{BCA}}$, les droites (A'H') et (CA) sont parallèles. Les triangles BA'H' et BCA sont donc en position de Thalès et on a : $\frac{\text{BH'}}{\text{BA}} = \frac{\text{H'A'}}{\text{AC}} = \frac{\text{BA'}}{\text{BC}}$. Comme BA' = BA, la valeur commune de ces rapports est $k = \frac{\text{BA}}{\text{BC}}$. L'aire du triangle rectangle BH'A' est Aire de BH'A' $= \frac{1}{2}\,\text{BH'} \times \text{H'A'} = \frac{1}{2}\,(k\,\text{BA} \times k\,\text{AC}) = \frac{1}{2}\,\frac{\text{BA}^2}{\text{BC}} \times \frac{\text{BA} \times \text{AC}}{\text{BC}}$. On a donc :

$$\text{Aire de BHA} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{BA}^3 \times \text{AC}}{\text{BC}^2}.$$

On montre de même que l'on a : Aire de AHC $= \frac{1}{2}\,\frac{\text{BA} \times \text{AC}^3}{\text{BC}^2}$. Il vient ainsi :

$$\frac{1}{2}\,\text{AB} \times \text{AC} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{BA}^3 \times \text{AC}}{\text{BC}^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{BA} \times \text{AC}^3}{\text{BC}^2}$$

soit encore : $\text{AB} \times \text{AC} \times \text{BC}^2 = \text{BA}^3 \times \text{AC} + \text{BA} \times \text{AC}^3$. En simplifiant par $\text{AB} \times \text{AC}$, on obtient enfin $\text{BC}^2 = \text{BA}^2 + \text{AC}^2$, CQFD.

3. Les Archives du Séminaire

a) Le trinôme formé de *FBA*, *MG2* et *CAR* répond à la question suivante.

Que proposent les *Archives du Séminaire* à propos du thème des ***triangles isométriques et semblables*** ?

b) Remarques & commentaires…

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 23 : mardi 3 avril 2007

Programme. 0. Questions de la semaine // 1. Problématique et fonctionnement du Séminaire // 2. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques // 3. Validation & titularisation // 4. Forum express

0. Questions de la semaine

Journée 23 (3 avril 2007)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4[e] (et soutien en 5[e])

Comment gérer les dernières séances de cours qui prennent place – en ce qui me concerne – entre le conseil de classe et les épreuves du brevet puis entre le brevet et la fin des cours ?

1. Problématique et fonctionnement du Séminaire

1.1. Le calendrier de fin d'année

a) Aujourd'hui a lieu la dernière séance de ce Séminaire *avant* les procédures de validation (qui débutent mardi prochain 10 avril, et s'achèveront le samedi 5 mai).

b) Une 24[e] et ultime séance du Séminaire aura lieu après la validation, le *mardi 22 mai*, aux horaires usuels (de 9 h à 12 h 15).

c) L'après-midi de ce même mardi 22 mai aura lieu la *séance de clôture* de la formation (de 14 h à 17 h).

1.2. Deux outils pour prolonger la formation

a) Malgré l'arrêt des séances du Séminaire (notamment entre aujourd'hui et le 22 mai), le *Forum des questions* se poursuivra dans le cadre d'un bulletin hebdomadaire, *Excursus*, mis en ligne pendant quelques semaines. Ce bulletin apportera des éléments de réponse à des questions posées au cours de l'année mais insuffisamment travaillées (ou non travaillées) faute de temps. À cela pourront s'ajouter les questions « fraîches » que les participants au Séminaire feront parvenir par courrier électronique (y.chevallard@aix-mrs.iufm.fr).

b) Dans le même temps, la rubrique *Petite bibliographie* (qu'on trouvera à l'adresse http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2006-2007/index.html) sera activée et progressivement enrichie.

2. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques

2.1. À propos d'évaluation

a) On trouvera désormais en ligne la notice ***Évaluation & notation – Aspects didactiques***. À cette notice s'en ajoute une autre, intitulée ***Évaluation & notation – Aspects institutionnels et historiques***, sur laquelle on s'arrêtera un instant, et dont la structure est la suivante.

1. Le professeur et l'évaluation
2. Les dispositifs d'évaluation dans les textes officiels
3. Le foisonnement des « évaluations »
4. La question des notes

b) On examine d'abord une partie de la section 3.

3. Le foisonnement des « évaluations »

3.1. Longtemps le terme d'évaluation est demeuré inconnu dans les usages qui sont aujourd'hui les siens dans l'institution scolaire. Le *Dictionnaire de la langue pédagogique* de Paul Foulquié, paru en 1971, l'ignore, alors que cet ouvrage traite longuement de la *note*.

3.1.1. Un récent rapport ministériel brosse l'introduction du mot dans les termes suivants – on notera le lien fondateur entre « évaluation » et « objectifs pédagogiques » [5. Inspection générale de l'éducation nationale & Inspection générale de l'administration de l'éducation nationale et de la recherche, *Les acquis des élèves, pierre de touche de la valeur de l'école ?*, Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, Paris, juillet 2005.].

La première promotion officielle du mot apparaît dans la revue du ministère *L'éducation* du 13 juin 1974, sous la signature de Lucien Géminard et Victor Marbeau, respectivement inspecteur général, représentant permanent au Conseil de l'Europe et inspecteur d'académie, chargé de mission aux affaires internationales du ministère. L'article rend compte de différentes conférences internationales : sont évoquées les critiques faites aux examens traditionnels, la volonté de promouvoir des systèmes de contrôle continu, d'unités capitalisables, de définitions de programmes par objectifs, de procédures d'évaluation formative et d'auto-évaluation. La question de la définition des objectifs pédagogiques est ensuite reprise par René Haby dans le *Courrier de l'Éducation* du 12 avril 1976 : le ministre souligne notamment la priorité qu'il convient de donner « aux objectifs sur les programmes au sens étroit du terme ». En 1977, Lucien Géminard organise un séminaire sur l'évaluation ; à cette occasion est publiée, à destination de tous les inspecteurs généraux, une brochure intitulée *Notions générales sur l'évaluation*. Enfin, consécration suprême, la pédagogie par objectifs et, avec elle, l'évaluation entrent en 1977 dans les programmes nationaux qui définissent « des objectifs à atteindre à la fin du cycle, objectifs formulés en termes de comportement et de compétence (savoir et savoir-faire) » (*Contenus de formation à l'école élémentaire, cycle préparatoire*, MEN, CNDP, 1977).

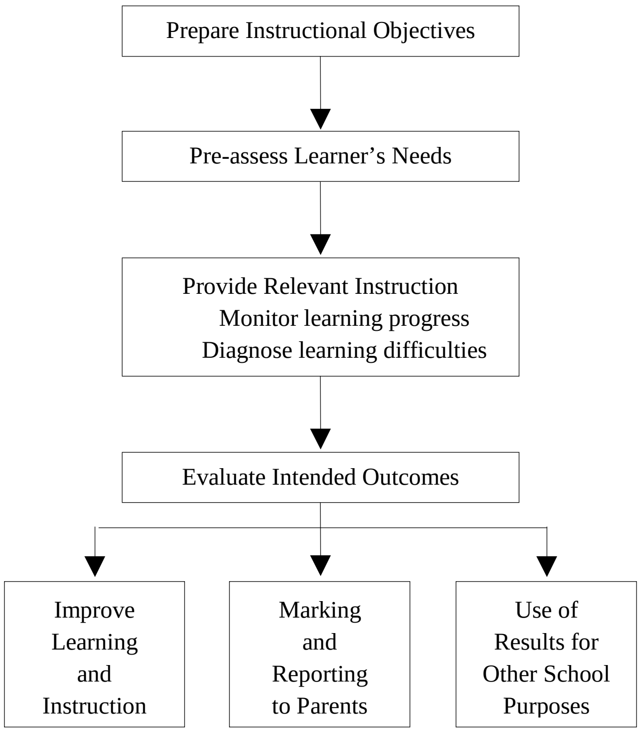
3.1.2. En cette matière comme en d'autres, la France apprend les doctrines venues d'Outre-Atlantique. À titre d'illustration, on s'arrêtera un instant, dans ce qui suit, sur un ouvrage que nous citerons dans sa troisième édition, parue en 1976 (les deux premières éditions sont de 1965 et de 1971, respectivement) : sous le titre *Measurement and Evaluation In Teaching*, il est dû à Norman E. Gronlund, professeur de psychologie de l'éducation à l'Université de l'Illinois ; il aura une sixième et dernière édition en 1990. La préface présente le schéma que le contenu proposé développera en un peu moins de 600 pages :

… classroom evaluation is viewed as an integral part of the teaching-learning process. It involves three fundamental steps: (1) identifying and defining the intended learning outcomes, (2) constructing or selecting tests and other evaluation instruments that are relevant to the specific outcomes, and (3) using the results to improve learning and instruction.

3.1.3. La table des matières de la première partie de l'ouvrage – *The Evaluation process* – est reproduite ci-après : on y saisit à nouveau le nouage entre évaluation et objectifs de formation.

[6. S'agissant des notions de *validity* et de *reliability* mentionnées ici, on se limitera à reproduire le propos de l'auteur en tête des chapitres qui leur sont respectivement consacrés. Chapitre 4 : "In selecting or constructing an evaluation instrument the most important question is: To what extent will the results serve the particular uses for which they are intended? This is the essence of validity." Chapitre 5 : "Next to validity, reliability is the most important characteristic of evaluation results. Reliability (1) provides the consistency which makes validity possible, and (2) indicates how much confidence we can place in our results. The practicality of the evaluation procedure is, of course, also of concern to the busy classroom teacher."].

Ce nouage s'inscrit en un schéma classique et fondamental, que l'on reproduit ci-après.



3.1.4. En réalité, ce schéma va se trouver rapidement surchargé par des apports multiples et variés, dont le premier et le plus célèbre est la distinction entre ce qu'un auteur travaillant sur l'évaluation *des curriculums*, Michael Scriven, baptise (en anglais) *summative evaluation* et *formative evaluation*, notions que l'auteur que nous suivons présente – dans leur cadre d'origine – dans les termes suivants :

… evaluation of the curriculum itself also plays an important role in curriculum development. During the early stages, when new methods and materials are being tried, evaluation data enable the curriculum developer to determine the effectiveness of the new procedures and to identify areas where revision is needed. When the new curriculum program has been fully developed, evaluation data make it possible to determine the degree to which the new curriculum is effective in meeting the instructional objectives for which it was designed. The first type of curriculum evaluation has been called *formative evaluation* and the second *summative evaluation* [M. Scriven, “The Methodology of Evaluation,” in *Perspectives of Curriculum Evaluation*, AERA Monograph Seires on Curriculum Evaluation, No 1 (Chicago: Rand McNally, 1967)].

3.1.5. On aura noté que la réalité dont il s’agit d’assurer le « développement » n’est nullement un élève mais… un *curriculum* ou, comme on disait en français autrefois, un *cours d’études*. Le même auteur explicite ce fait ainsi :

The main purpose of formative evaluation is to improve the instructional methods and materials so that greater student learning will result. The main purpose of summative evaluation is to appraise the overall effectiveness of a curriculum program.

3.1.6. L’adaptation de ce couple notionnel au cadre de la classe va se faire en articulation avec un grand nombre de notions auxiliaires. L’auteur du manuel examiné propose ainsi d’abord de distinguer entre cinq « évaluations » dont on reproduit partiellement la description [7. On peut traduire *placement evaluation* par « évaluation d’entrée » ou « de niveau » ou « pronostique ».].

Placement Evaluation. Placement evaluation is concerned with the pupil’s entry behavior and typically focuses on questions such as the following: (1) Does the pupil possess the knowledge and skills needed to begin the planned instruction? For example, does the beginning algebra student have a sufficient command of computational skills? (2) To what extent has the pupil already mastered the objectives of the planned instruction? Sufficient mastery might indicate the desirability of the pupil’s skipping certain units or of his being placed in a more advanced course. (3) To what extent do the pupil’s interests, work habits, and personality characteristics indicate that one mode of instruction might be better than another (e.g., group instruction versus independent study)?
Formative Evaluation. As noted earlier, formative evaluation is used to monitor learning progress during instruction. Its purpose is to provide continuous feedback to both pupil and teacher concerning learning successes and failures. Feedback to students provides reinforcement of successful learning and identifies the specific learning errors that need correction. Feedback to the teacher provides information for modifying instruction and for prescribing group and individual remedial work.
Diagnostic Evaluation. Diagnostic Evaluation is concerned with the pupil’s persistent or recurring learning difficulties that are left unresolved by the standard corrective prescriptions of formative evaluation. If a pupil continues to experience failure in reading, mathematics, or other subjects, despite the use of prescribed alternate methods of instruction (e.g., programmed materials, visual aids), then a more detailed diagnosis evaluation is indicated. To use a medical analogy, formative evaluation provides first aid treatment for simple learning problems, and diagnostic evaluation searches for the underlying causes of those problems that do not respond to first aid treatment.
Summative Evaluation. Summative Evaluation typically comes at the end of a course (or unit) of instruction. It is designed to determine the extent to which the instructional objectives have been achieved and is used primarily for assigning course grades or for certifying pupil mastery of the intended learning outcomes.

3.1.7. Une autre distinction doit être notée, qui oppose évaluation « critériée » et évaluation « normée ». L’auteur pris pour guide la présente dans les termes suivants [8. Un *sixth-grader* est un élève de 6e.].

There are two basic ways of interpreting pupil performance on tests and other evaluation instruments. One is to describe his performance in terms of the specific behavior he can demonstrate (e.g., He can type 40 words per minute without error). The other is to describe his performance in terms of the relative position he holds in some known group (e.g., He can type better than 90 per cent of his classmates). The first type of interpretation is called *criterion referenced;* the second is *norm referenced*. Both types of interpretation are useful. Criterion-referenced interpretations enable us to describe what an individual can do, without reference to the performance of others. For example, we can judge pupil performance by comparing it to some absolute standard that has been set (e.g., He can define at least 80 per cent of the terms in the unit). Norm-referenced interpretations enable us to determine how an individual’s performance compares to that of others. This might be a classroom group, or some local, state, or national group, depending on the use to be made of the results. Using national norms, for example, we might describe a pupil’s performance on a vocabulary test as exceeding that of 76 per cent of a national sample of sixth-graders. It should be noted that with norm-referenced interpretation we are *not* describing what percentage of the vocabulary items the pupil answered correctly, but simply what per cent of the pupils in the norm group he surpassed.

3.2. Bien d'autres distinctions ont été envisagées, dans lesquelles on n'entrera pas ici. Mais ce qui précède doit d'abord attirer l'attention sur ce fait que, en France et en Europe, l'essentiel des efflorescences notionnelles subsumées sous le mot d'évaluation sont venues des États-Unis, parfois sans qu'on prenne même le temps de les traduire.

3.2.1. Alors en effet que l'adjectif *formative*, par exemple, est courant en anglais (l'expression *the formative years* désigne ainsi les « années de formation », ou, plus classiquement, les « années d'apprentissage »), l'adjectif « formatif », qui existe en français, y est d'un emploi des plus rares : un étudiant angliciste se ferait sans doute chapitrer s'il rendait *the formative years* par *les années formatives* ! L'adjectif *sommatif*, lui, est, en français, une création *ex abrupto*. Dans le français des mathématiques, par exemple, on parle traditionnellement de formule *sommatoire* (et non « sommative ») pour désigner ce que les mathématiciens de langue anglaise appellent d'ailleurs *summation formula*.

………

c) On s'arrête maintenant sur une grande partie de la section 4.

4. La question des notes

4.1. …

4.1.1. La note a un long et lourd passé scolaire. Historiquement, elle est d'abord un instrument de discipline : la note sanctionne. Dans ses *Souvenirs d'enfance et de jeunesse*, Ernest Renan (1823-1892), qui fut élève du petit séminaire de Saint-Nicolas du Chardonnet créé et alors dirigé par Félix Dupanloup (1802-1878), écrit à ce propos : « Il n'y avait aucune punition dans la maison ; la lecture des notes et les réflexions du supérieur étaient la sanction qui tenait tout en haleine et en éveil. » Lui faisant écho, Dupanloup écrit sans ambiguïté, dans le volume III de son ouvrage *De l'éducation* (1850) :

Les notes (…) doivent être bien commentées. Ce commentaire peut (…) humilier, dompter, écraser ; ou bien, au contraire, consoler, relever, enflammer, et cela sans qu'il soit besoin de longues phrases ; un mot, et souvent quelquefois même un geste, un regard, c'est assez.

4.1.2. On comprend mieux ainsi que, traversant les siècles, le réflexe se soit conservé de recourir à la « mauvaise note », voire au *zéro*, pour fustiger un comportement inadéquat. Une telle pratique est aujourd'hui proscrite. La circulaire du 13 juillet 2000 déjà citée indique plus généralement, à cet égard :

Il convient également de distinguer soigneusement les punitions relatives au comportement des élèves de l'évaluation de leur travail personnel. Ainsi n'est-il pas permis de baisser la note d'un devoir en raison du comportement d'un élève ou d'une absence injustifiée. Les lignes et les zéros doivent également être proscrits.

Un tel interdit a suscité des commentaires « sauvages ». À cet égard, les auteurs d'un ouvrage intitulé *Le droit de la vie scolaire* écrivent [14. Yann Buttner, André Maurin, Blaise Thouveny, *Le droit de la vie scolaire*, Dalloz, Paris, 2002, p. 181.] :

En vérité, cette réaction démontre une nouvelle fois une profonde méconnaissance du droit. Le juriste, s'il s'en tient au seul exemple du zéro, ne peut que se révéler perplexe. Cette note n'est interdite tout autant qu'elle viendrait sanctionner un comportement répréhensible ou une absence injustifiée. Elle demeure légale si elle apprécie le niveau scolaire de l'élève. La circulaire, vécue comme restreignant le pouvoir de sanction, ne fait ici que rappeler l'un des quatre cas du recours d'ouverture pour excès de pouvoir : le détournement de pouvoir. Bien avant l'été 2000, l'élève qui s'adressait au juge administratif pour demander l'annulation d'une note nulle pour inconduite notoire avait de sérieuses chances de voir son recours aboutir. En effet, le pouvoir (l'attribution du zéro) utilisé dans un but (la sanction) autre que celui pour lequel il est conféré (la pédagogie) est depuis cent vingt cinq ans [CE, 26 novembre 1875, *Pariset*, GAJA n° 4] sanctionné par nos juridictions. Dans cette optique il est probable que seront considérés comme prohibés les zéros pour fraude, pour absence calculées (refus délibéré de participer à un contrôle par exemple). Le travail non rendu sans excuse valable [L'élève excusé ne peut se voir attribué un zéro pour ses absences ou pour n'avoir pas remis un devoir (TA Melun, 4 septembre 2001, *Lebras c/recteur de l'Académie de Créteil*, req. 013518/5)] autorise, en revanche, son emploi [TA Montpellier, 8 juin 2000, req. 981837]. Ces méfaits s'analysent plus en un comportement disciplinairement répréhensible que comme l'aboutissement d'une tâche devant faire l'objet d'une notation. Le juge administratif s'est d'ailleurs indirectement prononcé sur la question en annulant la décision d'une commission d'appel qui s'opposait au passage d'un élève en classe de 1re S en se fondant notamment sur des notes « zéros » venues sanctionner des retards [TA Paris, 14 septembre 2000, *M. Niang*, req. 0010322/7. Dans le même sens, cf. CE, 18 décembre 1968, *Brunne*, Rec. CE, p. 658].

4.1.3. Un autre trait que l'histoire permet de mettre en perspective est l'usage ancien d'utiliser, pour noter, le demi-point, voire le quart de point : c'est que, longtemps, les notes sont là, dans le cadre d'une « pédagogie de l'émulation », pour *classer* les élèves. Commentant les *Instructions de 1890* (dont les rédacteurs s'efforcent de combattre l'obsession du classement individuel), les auteurs du rapport *Les acquis des élèves…*, déjà mentionné, écrivent :

En somme, ce système de notation a une triple fonction :

• Il vise à récompenser ou à punir les élèves pour le travail fourni et pour leur comportement scolaire (il est d'usage d'attribuer une note « de conduite » ou « de morale »).

• Il classe et compare les élèves entre eux, afin de susciter l'émulation.

• Il renseigne les autorités scolaires et les parents sur les mérites ou démérites de chaque élève et permet ainsi des sanctions publiques comme les prix, les tableaux d'honneur, les félicitations ou les blâmes, comme aussi le passage en classe supérieure (récompense) ou le redoublement (punition).

Dans ce système, l'enseignant exerce le pouvoir discrétionnaire, sinon arbitraire, d'un juge qui distingue les « bons » et les « mauvais » élèves.

4.2. Dans la première moitié du XXe siècle, toutefois, un changement va s'amorcer : il est lié aux travaux que le psychologue Henri Piéron (1881-1964) proposera d'englober sous le terme de *docimologie* (du grec *dokimé*, épreuve).

4.2.1. Les premiers résultats obtenus en 1936 dans le cadre de l'enquête Carnegie sur les examens et concours confirmaient clairement ce que d'aucuns supputaient depuis longtemps. Sur un lot de 100 copies de mathématiques du baccalauréat, confiées à 5 correcteurs, et pour lesquelles on disposait donc de 6 notes (en incluant celle obtenue au baccalauréat), les enquêteurs ont calculé les écarts deux à deux, soit 15 écarts pour une copie et 1500 écarts pour le lot de 100 copies. La même procédure a été suivie pour six autres disciplines : les résultats sont consignés dans le tableau suivant [15. Henri Piéron, *Examens et docimologie*, PUF, Paris, 1963, p. 20.].

	Écart moyen	Écart le plus fréquent	Écart maximum
Composition française	3,29	6 et 7	13
Version latine	2,97	5	12
Anglais	2,24	4	9
Mathématiques	2,05	4	12
Philosophie	3,36	5 et 7	12
Physique	1,88	4	8

Piéron ajoutait :

En aucun cas n'a été trouvée une note identique dans un couple de correcteurs, et, en envisageant une coupure au niveau de la note critique de 10, il s'est trouvé que, dans les couples de correcteurs, la note, atteinte ou dépassée avec l'un, restait inférieure avec l'autre dans une proportion de copies atteignant 70 % pour la composition française, 50 % pour la version latine, 47 % pour l'anglais, 36 % pour les mathématiques, 81 % pour la philosophie et 50 % pour la physique.

4.2.2. Les travaux réalisés alors reposaient sur l'idée de la « vraie note » d'un travail scolaire, dont les notes effectivement attribuées s'éloigneraient plus ou moins. Dans cette perspective, Henri Laugier

(1888-1973) et Dagmar Weinberg (1897–1946), à qui l'on doit les résultats précédents, se posèrent un problème que Piéron expose dans les termes suivants :

Étant donné le fait de la fluctuation des notations relevant de ce facteur aléatoire qu'est la personnalité du correcteur, on est en droit de penser qu'en multipliant les correcteurs on compensera ces fluctuations. Laugier et D. Weinberg ont appelé valeur « vraie » la moyenne d'un nombre assez grand de notations indépendantes. Ils ont cherché à déterminer le nombre minimum d'examinateurs compétents auxquels il faudrait faire appel pour obtenir la notation méritant confiance.

Le nombre minimal répondant aux conditions spécifiées par Laugier et Weinberg est indiqué dans le tableau ci-après, pour l'ensemble des disciplines déjà examinées : fortement variable, il est élevé, même dans le cas des mathématiques.

Composition française	78
Version latine	19
Anglais	28
Mathématiques	13
Philosophie	127
Physique	16

4.3. De multiples travaux approfondiront ces premières observations.

4.3.1. Dès 1965, J.-J. Bonniol met en évidence des « effets d'ordre » dans la correction d'un paquet de copies : les copies figurant dans le premier tiers des copies corrigées sont mieux notées ; une copie venant après une copie faible est sur-notée, et inversement.

4.3.2. Lorsqu'il n'y a pas anonymat des auteurs des copies, on observe des effets du statut scolaire et social de l'élève : l'évaluation d'un travail antérieur de l'élève qu'a pu réaliser le correcteur influe sur l'évaluation de la copie de cet élève. Quand il en a connaissance, le correcteur est influencé de même par l'évaluation de travaux de l'élève qu'ont pu réaliser d'autres correcteurs.

4.3.3. Dans d'autres expériences, on a par exemple confié la correction d'un lot de copies – en fait des copies de bac choisies aléatoirement – à des correcteurs à qui elles étaient présentées, pour certaines comme provenant d'un lycée « bourgeois », pour d'autres d'un lycée de la banlieue ouvrière : la note moyenne des premières copies s'est révélée supérieure à la moyenne des secondes. De tels travaux ont de même mis en évidence l'effet de l'origine sociale, du sexe, de l'apparence physique, du contexte de scolarisation, etc. [16. La circulaire est parue dans le *BO* n° 2 du 9 janvier 1969.]

4.4. Les pratiques de notation, longtemps figées en dépit des travaux évoqués, vont, dans la période qui suit Mai-68, faire l'objet d'une circulaire du 6 janvier 1969, qui tente de les modifier en profondeur [17. La circulaire est parue dans le *BO* n° 2 du 9 janvier 1969.].

4.4.1. La circulaire rappelle notamment l'origine de l'usage contemporain de noter sur 20 et les critiques élevées contre cet usage par les travaux de docimologie :

C'est un texte ancien, l'arrêté du 5 juillet 1890, qui a prescrit que « dans les compositions chaque copie aura sa note chiffrée de 0 à 20 ». Il en résultait un « classement linéaire », les différences entre élèves se chiffrant par points ou même par demi-points et quarts de point. Or, les études docimologiques dont l'origine est antérieure à 1930 et qui se sont multipliées dans les vingt dernières années ne laissent aucun doute sur le caractère illusoire d'un tel raffinement dans la précision de la note et du classement obtenus.

4.4.2. La circulaire rappelle ainsi les premiers efforts pour se déprendre du point de vue ancien :

Nos méthodes d'appréciation du travail scolaire sont depuis longtemps en évolution. D'anciennes instructions ont eu pour objet d'exercer une influence régulatrice en ramenant à des proportions raisonnables le rôle des compositions dans la vie scolaire. C'est ainsi qu'une circulaire du 31 août 1928 notait que : « Certes l'émulation est un facteur essentiel de travail et de progrès, mais à condition que ne se développe pas chez les enfants un esprit d'âpreté et de lutte qui risque de les inciter à des procédés douteux et où il faut voir l'une des raisons de la fraude aux examens. Il importe de maintenir à ces exercices le caractère d'une saine compétition sportive ; il faut n'y voir au surplus qu'un simple épisode de la vie scolaire et non le but unique des efforts d'un trimestre. Faute de quoi le travail perdrait sa régularité et son calme. À des surmenages passagers succéderaient fatalement des périodes de relâchement et d'indolence. »

4.4.3. Dès 1890, la critique des classements et de la compétition pour les « places » est formulée très officiellement. Les « compositions » vont donc être remplacées par ce qu'on nomme aujourd'hui des « contrôles ». La circulaire indique à cet égard :

En substituant à la « composition » l'exercice de contrôle – dépouillé de cérémonial mais mieux compatible avec la régularité et le calme du travail – et en corrigeant les procédés usuels de notation, on sera tout naturellement conduit à éliminer ces « places » proclamées, qui provoquent chez tant d'élèves tantôt une anxiété aussi nuisible à leur équilibre général qu'à leur développement intellectuel, tantôt une indifférence plus ou moins résignée ou rétive, tantôt la dérision, parfois des vanités ridicules ou un esprit de rivalité quelque peu agressive ou mesquine, et qui sont aussi à l'origine de bien des conflits familiaux, accablants pour l'enfance, irritants pour l'adolescence.

4.4.4. Pour les rédacteurs de la circulaire, « les trois notions essentielles de notre système d'appréciation des résultats scolaires, notions de composition, de note, de classement, doivent faire l'objet d'une triple révision, de trois réformes indissolublement liées, celles des procédés de notation servant d'instrument aux deux autres. » Ces réformes s'appuient sur des principes tout modernes – les contrôles y participent visiblement d'une évaluation formative –, que le texte explicite en ces termes :

Les travaux scolaires les plus formateurs sont ceux où la préoccupation de la note s'efface : maître et élèves avancent ensemble dans la découverte d'un texte, d'un raisonnement, d'une expérience scientifique, d'une activité sportive, d'une donnée de géographie humaine, etc., et ce n'est qu'à regret que le fil est interrompu pour permettre les contrôles cependant nécessaires. Une pédagogie véritablement active réussit d'ailleurs, sans difficultés, à inclure le contrôle dans le champ même de l'élaboration des connaissances. Le contrôle permet en effet au maître d'orienter de manière plus efficace les directions de son action. Sans doute l'élève a-t-il besoin de voir son travail apprécié, ses efforts motivés et sa progression jalonnée. Sans doute les parents comme les autorités scolaires ont-ils besoin d'informations précises. Il faut cependant éluder l'obsession de la note, presque aussi pernicieuse que l'obsession de la « place », comme l'ont observé depuis longtemps bien des maîtres expérimentés.

4.4.5. C'est en ce point que la circulaire dévoile son objet central :

À cet effet, il est bon d'abord de prendre conscience de la relativité de la note, et par suite d'écarter les procédés dont la précision apparente est trompeuse. La notation chiffrée de 0 à 20 peut être abandonnée sans regret. Une échelle convenue d'appréciation, libérée d'une minutie excessive, sera moins prétentieuse. En indiquant la zone dans laquelle l'élève se situe, on cerne déjà la réalité d'assez près, on évite de multiplier systématiquement des différences qui ne seraient pas confirmées par d'autres correcteurs, ni par le même correcteur à une autre époque. Des appréciations globales telles que « très satisfaisant », « satisfaisant », « moyen », « insuffisant », « très insuffisant » auxquelles on peut faire correspondre, si on le juge bon, les symboles A, B, C, D, E, ou 1, 2, 3, 4, 5, constituent donc un système non pas plus rudimentaire que le système traditionnel, mais plus rationnel et mieux adapté aux données. Il sera bien entendu utile à l'élève que cette appréciation globale s'accompagne d'annotations plus détaillées, concernant par exemple, l'orthographe, l'ordre, le vocabulaire, la syntaxe, la précision, l'habileté, les facultés de raisonnement, l'invention, le sens artistique, etc.

4.4.6. La circulaire, signée du ministre de l'Éducation nationale de l'époque, Edgar Faure (1908-1988), se fait alors plus injonctive :

Dès maintenant, il est recommandé aux chefs d'établissement et aux enseignants, professeurs et instituteurs :
1. de substituer à la notion de composition traditionnelle celle d'exercices de contrôle divers, faits en classe, en un temps limité et présentant les caractères ci-dessus décrits ;
2. de substituer à l'échelle de notation traditionnelle de 0 à 20 une échelle simplifiée d'appréciation globale du type ci-dessus défini, ou d'un type analogue ;
3. d'exclure en général les classements par rang, établis et annoncés par le maître.

Deux de ces trois points passeront dans les mœurs scolaires ; le troisième, la notation en lettres, ou, plus exactement, l'usage d'une échelle de notation réduite, ne parviendra pas à se substituer au système traditionnel de notation sur 20.

2.2. Éduquer à la citoyenneté

a) Une nouvelle notice sera mise en ligne sous peu. Intitulée ***Éducation mathématique & citoyenneté***, elle a la structure suivante.

1. L'École et les citoyens
2. Mathématiques et citoyenneté : ce que disent les textes officiels
3. De l'instruction à l'éducation
4. Des mathématiques pour le citoyen
5. Un certain rapport aux mathématiques
6. Un certain rapport à l'étude des mathématiques
7. Élémenter les savoirs

b) On en examine ci-après certains extraits, en commençant par la section 1.

1. L'École et les citoyens

1.1. L'origine de la notion de ***citoyen*** se trouve dans l'expérience grecque de la ***démocratie***. La Cité grecque rassemble des « semblables » (*homoioi*) qui sont, abstraitement, des « égaux » (*isoi*). Dans un ouvrage fondamental, *Les origines de la pensée grecque* [1. PUF, 1962, p. 36.], l'helléniste Jean-Pierre Vernant apporte à ce propos le commentaire suivant :

> En dépit de tout ce qui les oppose dans le concret de la vie sociale, les citoyens se conçoivent, sur le plan politique, comme des unités interchangeables à l'intérieur d'un système dont la loi est l'équilibre, la norme l'égalité. Cette image du monde humain trouvera au VI^e siècle son expression rigoureuse dans un concept, celui d'*isonomia* : égale participation de tous les citoyens à l'exercice du pouvoir.

1.2. Le passage de l'individu concret au citoyen va de pair avec une révolution cruciale dans l'organisation politique, sans laquelle l'idée de citoyen ne serait pas ce qu'elle est : le citoyen grec obéit, non pas à un homme, mais aux ***lois*** qu'il a concouru à établir. C'est ce qu'explique Dominique Schnapper dans le passage suivant de son livre *Qu'est-ce que la citoyenneté ?* [2. Gallimard, 2000, p. 13.] :

> Les Grecs n'ont pas seulement inventé l'idée de citoyen qui ne se confond pas avec l'individu concret ou, en d'autres termes, l'idée d'un domaine politique distinct de la société formée par les liens des hommes concrets, ils ont inventé le principe de l'État de droit. La *polis* était, pour les Grecs, fondamentalement différente des empires des Barbares, parce que les citoyens n'obéissaient pas à un homme, si puissant fût-il, mais aux lois. Condamné à mort, Socrate refusa de s'enfuir pour manifester son respect des lois de la Cité, même quand elles étaient appliquées injustement.

1.3. Le citoyen a des droits, qui sont aussi des devoirs : on appelle ***civisme***, précisément, « l'exercice du respect à l'égard de la République et de ses lois » [3. On trouvera sur le site Internet de l'IUFM d'Aix-Marseille une notice éclairante sur la notion du civisme (http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/ecjs/productionsaix/civisme.htm).]. Dans *Du contrat social* (1762), Jean-Jacques Rousseau vitupère ainsi sévèrement certaines formes de désengagement des citoyens à l'endroit des affaires publiques :

> Sitôt que le service public cesse d'être la principale affaire des Citoyens, et qu'ils aiment mieux servir de leur bourse que de leur personne, l'État est déjà près de sa ruine. Faut-il marcher au combat ? ils payent des troupes et restent chez eux ; faut-il aller au Conseil ? ils nomment des députés et restent chez eux. À force de paresse et d'argent ils ont enfin des soldats pour asservir la patrie et des représentants pour la vendre.

1.4. Les ***droits du citoyen*** vont au-delà des ***droits de l'homme*** : selon une formule du constitutionnaliste Jean Rivero, « les droits de l'homme sont des libertés, les droits du citoyen sont des pouvoirs » [4. *Libertés publiques*, PUF, 1995, t. 2, p. 54.]. Le problème des ***conditions de possibilité de l'exercice effectif*** de ces pouvoirs est posé par la Révolution française et reçoit une solution de principe à travers la création de ***l'école de la République***– l'École. Ce que D. Schnapper explicite ainsi [5. *Op.*

cit., p. 154. La Déclaration des droits de l'homme et du citoyen évoquée ici est celle du 26 août 1789, dont l'article 3 énonce : « Le principe de toute souveraineté réside essentiellement dans la nation. Nul corps, nul individu ne peut exercer d'autorité qui n'en émane expressément. »] :

… l'éducation est au cœur du projet démocratique. Les citoyens doivent disposer des moyens nécessaires pour exercer *concrètement* leurs droits. C'est ce qui fonde l'idéologie et le rôle de l'École dans la société des citoyens : elle doit donner à tous les capacités nécessaires pour participer réellement à la vie publique.

L'École, qu'elle soit directement organisée par l'État ou contrôlée par lui, est sans doute l'institution de la citoyenneté par excellence. Dans la démocratie grecque de l'Antiquité, l'absence d'école publique limitait la participation politique réelle aux citoyens riches : l'idée que chaque citoyen doit pouvoir exercer concrètement ses droits est liée à la démocratie moderne. C'est à partir de la Révolution que les maîtres d'école, en France, cessèrent d'être appelés des « régents », pour devenir des « instituteurs », parce qu'ils étaient désormais chargés d'instituer la « nation », au sens de l'article 3 de la Déclaration des droits de l'homme et du citoyen, source de la légitimité politique. Plus directement que dans d'autres pays, l'École est, en France, l'école du citoyen.

1.5. Pour user d'une formulation employée par Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet (1743-1794), dans son *Éloge de M. Franklin* (1789), il s'agit donc d'« éclairer les hommes pour en faire des citoyens ». L'« institution » du citoyen, de la République et de son École s'opère d'un même mouvement, réglé par les principes « fondateurs de l'esprit libre et éclairé, soucieux du vrai » [6. Charles Coutel, *Condorcet. Instituer le citoyen*, Michalon, 1999, p. 16.], qui doivent guider le développement de l'***« art social »*** que Condorcet appelle de ses vœux [7. « Nous avons regardé l'art social, écrit Condorcet, comme une véritable science fondée […] sur des faits, sur des expériences, sur des raisonnements et sur des calculs […] susceptibles d'un développement infini. » Dans ce qui suit, nous empruntons l'essentiel à l'ouvrage déjà cité de Charles Coutel.].

1.5.1. Le principe de ***perfectibilité*** [8. Le terme est alors nouveau : il apparaît dans le *Discours sur l'origine de l'inégalité* de J.-J. Rousseau, publié en 1755.] conduit à « rompre avec tout providentialisme ou toute prédestination » et doit se traduire, au prix de ***risques calculés***, en ***perfectionnements concrets.*** Dans le premier de ses cinq *Mémoires sur l'instruction publique* (1791), Condorcet note ainsi :

… le but de l'éducation ne peut plus être de consacrer les opinions établies, mais, au contraire, de les soumettre à l'examen libre des générations successives, toujours de plus en plus éclairées.

1.5.2. Le principe de ***collégialité*** énonce que les hommes doivent rechercher la vérité ***ensemble***, en évitant les deux écueils solidaires de l'***égalitarisme*** (entendu comme la négation de la diversité des individus concrets) et de l'***élitisme*** (qui nie autrement l'égale dignité des hommes), au profit d'une dynamique de perfectionnement, fruit de l'effort collégial d'un ensemble de citoyens.

1.5.3. Le principe de ***rationalité*** guide l'effort d'intelligibilité du monde naturel et social dans la « guerre de la raison contre les préjugés ». Contre l'opportunisme et le dogmatisme de ceux qui assignent le premier rôle soit à la vertu, soit à l'enthousiasme, Condorcet martèle : « il faut tout examiner, tout discuter, tout enseigner même ». Seule une rationalité elle-même perfectible peut, loin de tout « esprit de système », mais dans un « esprit systématique », présider au devenir « des peuples vraiment libres ».

1.5.4. Le principe de ***laïcité*** [9. Le grec *laos*, à l'origine du mot « laïcité », signifie « peuple », « gens », « citoyens ».] vise à substituer à quelque « esprit de secte » que ce soit le seul « esprit public ». Cette exigence conduit à l'affirmation de l'indépendance de l'École par rapport à toute sujétion partisane. Dans son *Rapport et projet de décret sur l'organisation générale de l'instruction publique* (présenté à l'Assemblée nationale les 20 et 21 avril 1792), Condorcet conclut :

L'indépendance de l'instruction publique fait en quelque sorte une partie des droits de l'espèce humaine.

Et il note encore :

Après avoir affranchi l'instruction de toute espèce d'autorité, gardons-nous de l'assujettir à l'opinion commune : elle doit la dénoncer, la corriger, la former et non la conduire et lui obéir.

« L’École de la République, souligne Charles Coutel [10. *Op. cit.*, pp. 58-59.], est une École du jugement : il s’agit de confronter les faits et les situations à des lois universelles, de situer les objets dans la nature, les énoncés dans les théories et les événements dans les processus historiques. »

1.5.5. Le principe d’***humanité*** est le dernier des cinq principes retenus. Charles Coutel le commente en ces termes [11. *Ibid.*, pp. 28-29.] :

L’amour de l’humanité est l’horizon éthique de la citoyenneté condorcétienne. Cet amour ouvre les grands principes précédents vers l’universalité, dont le sentiment de fraternité serait l’aspect affectif. […] Cette amplification humaniste a deux conséquences pour l’institution du citoyen : tout d’abord, dans l’Instruction publique, chaque enfant ne sera pas considéré d’abord comme « futur citoyen » et *a fortiori* comme « petit soldat » mais comme un « petit d’homme », candidat à l’humanité. Ensuite, les droits de l’homme et l’exercice des droits politiques auront l’humanité comme horizon et non la seule patrie (l’identification complète entre la nationalité et la citoyenneté est étrangère à Condorcet).

Le principe d’humanité ordonne une dialectique du même et de l’autre qui, en rompant avec toutes les formes de narcissisme naïf ou cynique, institue la République. L’estime de soi, par exemple, devient alors ***amour de l’humanité en soi-même***.

1.6. La construction de la citoyenneté est un processus toujours inachevé. Pour ne prendre ici qu’un exemple, le droit de vote, prévu dans son principe par la constitution du 24 juin 1793, mais non appliqué, fut établi pour les hommes (y compris les domestiques…) par la proclamation, le 2 mars 1848, du suffrage « universel » (masculin) [12. « Le gouvernement provisoire (de la IIe république) arrête en principe et à l’unanimité que le suffrage sera universel et direct sans la moindre condition de cens. » Notons toutefois que le droit de vote ne sera jamais accordé pleinement aux « indigènes » des colonies de la France : sur cette question complexe et douloureuse, voir Dominique Colas, *Citoyenneté et nationalité* (Gallimard, 2004).]. Mais l’extension de ce principe aux femmes, adoptée quatre fois par la Chambre des députés entre 1919 et 1936 (par 488 voix contre une en 1936) et chaque fois rejetée par le Sénat, devra attendre l’ordonnance du 21 avril 1944 prise à Alger par le Comité français de Libération nationale [13. Cette ordonnance prévoyait, dans son article 1er, la convocation d’une Assemblée nationale constituante « élue par tous les Français et Françaises majeurs », tandis qu’un autre article précisait que les femmes, comme les hommes, étaient électrices et éligibles.]. En 1936, trois femmes deviennent membres du nouveau gouvernement issu des élections législatives (qui avaient donné la victoire au Front Populaire) : elles n’ont pourtant pas le droit de vote ! « Trois hirondelles ne font pas le printemps » [14. Il s’agissait de la radicale Cécile Brunschvicg, présidente de l’Union française pour le suffrage des femmes, nommée sous-secrétaire d’État à l’Éducation nationale, de la socialiste Suzanne Lacore, nommée sous-secrétaire d’État à la protection de l’enfance, enfin de la lauréate du prix Nobel de chimie 1935, Irène Joliot-Curie, nommée sous-secrétaire d’État à la Recherche scientifique.], commentera la militante féministe Louise Weiss (1893-1983). Les femmes ne voteront pour la première fois qu’aux élections municipales du 29 avril 1945.

c) On se penche maintenant sur la première partie de la section 4, en relation notamment avec la question que voici.

Dans le programme de 4e, il est indiqué, dans le thème « Proportionnalité et pourcentage », d’illustrer la notion d’indice, en relation avec d’autres disciplines et des questions d’actualité. J’ai cherché dans plusieurs manuels des illustrations possibles ou même une explication de cette notion, mais je n’ai pas trouvé. Comment traiter cette notion ? (MD, CR, 4e & demi-5e, 22)

Voici donc le développement annoncé.

4. Des mathématiques pour le citoyen

4.1. L’attention à la formation du citoyen dans la classe de mathématiques suppose l’attention à trois niveaux de la vie de la classe : celui des ***contenus mathématiques*** étudiés, celui du ***rapport aux mathématiques*** étudiées et utilisées, celui du ***rapport à l’étude*** des mathématiques. La première exigence impose notamment d’être attentif, non pas seulement à « l’infrastructure » mathématique, mais aussi aux sujets d’étude « superstructurels », « de contact » avec le reste du monde qui figurent dans les programmes parce qu’ils sont presque indispensables pour que les mathématiques construites dans la classe donnent aux élèves une prise effective sur les situations du monde dans lesquelles ils seront amenés à intervenir comme citoyens.

4.2. On illustrera la notion de « sujets d'étude "de contact" » par un premier exemple, celui des notions solidaires de ***taux*** (de croissance), d'***indice***, de ***coefficient multiplicateur***, etc. Le programme de 3e comporte ainsi le passage suivant :

La définition d'une fonction linéaire de coefficient *a* s'appuie sur l'étude de situations de proportionnalité rencontrées dans les classes précédentes. On pourra recourir à des tableaux de proportionnalité et on mettra en évidence que le processus de correspondance est « je multiplie par *a* ».

Pour des pourcentages d'augmentation ou de diminution, une mise en évidence similaire peut être faite ; par exemple, augmenter de 5 % c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5 % c'est multiplier par 0,95.

On voit ici exemplairement deux éléments juxtaposés qui ont, dans la culture mathématique actuelle du collège, deux statuts différents : le premier relève de l'infrastructure mathématique que tout professeur se regarde comme tenu de mettre en place ; le second apparaît aujourd'hui comme un élément un peu périphérique, d'interfaçage avec le reste du monde – en particulier avec les enseignements d'autres disciplines –, dont le sort dans le travail mathématique de la classe est en conséquence plus incertain.

4.3. On peut rapprocher ce qui précède d'une situation curriculaire qui se présente en 4e, classe où, dans le secteur d'études des *Fonctions numériques*, le programme comporte un thème d'études intitulé *Calculs faisant intervenir des pourcentages*. Ce thème fait l'objet du commentaire suivant :

En liaison avec d'autres disciplines (géographie), la notion d'indice pourra être présentée comme un cas particulier du coefficient de proportionnalité, donnant lieu à illustrations et calculs mais en aucun cas à des développements théoriques.

S'agissant des compétences exigibles à propos du thème d'études examiné, le programme explicite ceci :

Mettre en œuvre la proportionnalité dans des situations simples utilisant à la fois des pourcentages et des quantités ou des effectifs.

À ce propos, le commentaire suivant est apporté :

Des situations issues de la vie courante ou des autres disciplines demandent de mettre en œuvre à la fois un coefficient de proportionnalité, sous forme de pourcentage ou d'indice, et des quantités ou des effectifs.

La référence aux indices est donc insistante ! De quoi s'agit-il ? On en présente rapidement le principe.

1. Soit une quantité Q (un prix par exemple) supposée variable dans le temps : on note Q_0 sa valeur au temps t_0 et Q_1 sa valeur au temps t_1. Supposons que $Q_1 > Q_0$; de l'instant t_0 à l'instant t_1 la quantité Q subit une augmentation mesurée par le taux de croissance $\dfrac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$. Si par exemple $Q_0 = 275$ et $Q_1 = 340$ (en « oubliant » les unités, le rapport à calculer étant sans dimension), on a $\dfrac{Q_1 - Q_0}{Q_0} = \dfrac{340 - 275}{275} = \dfrac{65}{275}$.

L'usage social dominant consiste à écrire ce rapport avec un ***dénominateur égal à cent***, c'est-à-dire sous la forme d'un ***pourcentage*** (ce qui permet de comparer aisément deux taux quelconques) :

$$\frac{Q_1 - Q_0}{Q_0} = \frac{65}{275} = \frac{\frac{6500}{275}}{100} = \frac{6500}{275}\ \% \approx 23{,}6\ \%.$$

(L'écriture x % désigne simplement la fraction $x/100 = \dfrac{x}{100}$.)

2. En multipliant les quantités considérées par le coefficient de proportionnalité $a = \dfrac{100}{275}$ on passe de $Q_0 = 275$ et $Q_1 = 340$ à $aQ_0 = \dfrac{100}{275} \times 275$ et $aQ_1 = \dfrac{100}{275} \times 340$, c'est-à-dire à $aQ_0 = 100$ et $aQ_1 = \dfrac{100}{275} \times (275 + 65) = 100 + \dfrac{6500}{275} = 123{,}6$. Le nombre aQ_1 est noté I_{t_1/t_0} et est appelé « indice de Q à la date t_1 sur la

base 100 à la date t_0 ». On a d'une manière générale : $I_{t_1/t_0} = 100 \times \frac{Q_1}{Q_0}$. Si par exemple un objet vaut 120 € en décembre 2002 et voit son prix grimper à 150 € en décembre 2003, on a $I_{2003/2002} = 100 \times \frac{150}{120} = 125$. Le prix de l'objet a donc augmenté de 25 %. On dit que « l'indice du prix de l'objet, base 100 en décembre 2002, passe à 125 en décembre 2003 ».

3. Les indices possèdent des propriétés qui en font l'intérêt (mais dont, toutefois, l'étude est exclue en 4[e]). Notons ainsi qu'on a

$$I_{t_0/t_1} = 100 \times \frac{Q_0}{Q_1} = \frac{10\ 000}{100 \times \frac{Q_1}{Q_0}} = \frac{10\ 000}{I_{t_1/t_0}}$$

et encore que $I_{t_2/t_0} = \frac{I_{t_2/t_1} \times I_{t_1/t_0}}{100}$. En dépit du facteur « correctif » (10 000 dans un cas, 1/100 dans l'autre), ces formules sont d'un usage aisé, puisque ce facteur peut être intégré au calcul ***après coup***, par un choix de la position de la virgule qui ramène le résultat brut du calcul à un ordre de grandeur idoine. Si par exemple $I_{t_1/t_0} = 127$ et $I_{t_2/t_1} = 109$, on calcule $127 \times 109 = 13843$ et il vient « donc » $I_{t_2/t_0} = 138{,}43$, en sorte que le taux de croissance de Q entre les dates t_0 et t_2 est de 38,43 %. Semblablement, si $I_{t_1/t_0} = 105$ et $I_{t_2/t_1} = 89$, on calcule $105 \times 89 = 9345$ et il vient donc $I_{t_2/t_0} = 93{,}45 = 100 - 6{,}55$, en sorte que, entre les dates t_0 et t_2, Q a diminué de 6,55 % ; etc.

4.4. La question de la variation et des taux de croissance n'est pas abandonnée à l'issue du collège. En 2[de], ainsi, le document d'accompagnement du programme enjoint de manière un rien sibylline ceci :

On retrouvera le résultat relatif à la comparaison de a, a^2 et a^3 (a étant un réel positif) lors de travaux sur les pourcentages et les coefficients multiplicateurs.

Dans la perspective qui précède, on doit voir là un prolongement naturel d'une question étudiée en principe en 4[e] et en 3[e].

Lorsque, au cours d'une période, une certaine quantité valant Q_0 en début de période augmente de 100 r %, par exemple de 20 % = 100 × 0,2 % (ici, $r = 0{,}2$), elle atteint en fin de période la valeur Q_1 donnée par $Q_1 = Q_0 + 100\, r\,\% \times Q_0 = Q_0 + 100\, r\,\% \times Q_0 = (1 + r)Q_0$. Le ***coefficient multiplicateur*** est ici $a = 1 + r > 1$: on a $Q_1 = (1 + r)Q_0 = aQ_0$. Si deux augmentations de 100 r % s'enchaînent au fil de deux périodes successives, la valeur de la variable considérée passe successivement de Q_0 à $Q_1 = (1 + r)Q_0$ puis à $Q_2 = (1 + r)Q_1 = aQ_1 = a(aQ_0) = a^2Q_0$. On « retrouve » ainsi, derrière le phénomène d'augmentation répétée, le fait mathématique que $a^2 > a$, etc. S'il s'était agi d'une ***diminution*** de 100 r %, on aurait eu : $Q_1 = Q_0 - 100\, r\,\% \times Q_0 = Q_0 - 100\, r\,\% \times Q_0 = (1 - r)Q_0$. Le coefficient multiplicateur est ici égal $a = 1 - r < 1$ (avec $r \leq 1$, et donc $a \geq 0$). Dans le cas où $0 < a < 1$, on retrouve, semblablement, que, dans ce cas, $a^2 < a$.

Il n'est pas équivalent, pour ce citoyen en devenir qu'est l'élève, de recevoir une formation mathématique scolaire où le thème d'études précédent aurait – en conformité avec les programmes – une présence effective tout au long des années d'étude et une formation d'où il resterait obstinément absent. Bien entendu, il s'agira pour le professeur de concevoir et de réaliser des ***travaux d'étude et de recherche*** – dans le cadre par exemple d'un ***parcours d'étude et de recherche*** [21. En l'espèce, ce PER pourrait s'intituler par exemple « Changements et variations : entre mesures et calculs ».] – qui fassent apparaître les notions indiquées comme autant d'***outils techniques et technologiques*** au service de la connaissance et de l'action en matière de changements quantifiables.

……………………………………………………………………………………………………

d) On achève ce parcours avec la section 6 de la notice.

6. Un certain rapport à l'étude des mathématiques

6.1. Dans son second *Mémoire sur l'instruction publique*, dans une section intitulée *Principes sur le choix des théories qui doivent être enseignées*, Condorcet écrit :

Il est une partie de la mécanique qu'il serait nécessaire de joindre à cette instruction ; c'est celle qui apprendrait à résoudre ce problème : *l'effet que l'on veut obtenir étant donné, trouver une machine qui le produise*.

La formule peut être généralisée :

On pourrait aller même jusqu'à étendre cette méthode à des métiers très simples ; par exemple, après avoir fait observer en quoi consiste une toile, on chercherait la machine avec laquelle on peut la produire. Cette manière analytique de considérer les machines en rendrait l'étude plus piquante et surtout plus utile. On connaîtrait les motifs de la construction de celles qu'on emploie journellement ; on apprendrait à trouver les moyens ou de les corriger ou d'en varier l'usage…

La portée du précepte que propose Condorcet est plus grande encore : légèrement modifié, le schéma évoqué – *l'effet que l'on veut obtenir étant donné, trouver comment le produire* – n'est qu'une autre manière d'énoncer la « tâche des tâches » : étant donné un ***type de tâches***, trouver une ***technique*** qui permette d'accomplir les tâches de ce type. La dynamique de l'instruction éducatrice est ici pilotée par la question du ***Comment ?*** (comment faire ceci, comment a-t-on pu faire cela, etc.). Bien entendu, la technique cherchée ne va pas sans sa ***technologie***, qui en concentre et en exprime les principes. Ou, pour le dire autrement, la question du *Comment ?* ne va pas sans la question du ***Pourquoi ?*** (pourquoi cela marche-t-il, pourquoi fait-on ainsi, etc.), qui tout à la fois s'y articule et la domine [25. Le créateur du mot *technologie* (en allemand), Johann Beckmann (1739-1811), écrivait en 1777 : « On peut appeler histoire des arts les récits des inventions, de leurs progrès et de la fortune d'un art ou d'un métier, mais la technologie qui explique complètement, méthodiquement et distinctement tous les travaux, leurs conséquences et leurs raisons est bien davantage. »].

6.2. La dialectique de la technique et de la technologie appelle un réglage adéquat, qui requiert la recherche d'un optimum : mieux vaut par exemple une technique moins « commode », plus éloignée de la technique routinière des « spécialistes », mais plus intelligible (et donc de remémoration plus aisée) pour ceux entre les mains desquels elle est appelée à fonctionner. C'est ce que Condorcet, encore, souligne – à propos de l'art de l'arpenteur – dans ce passage du second *Mémoire* :

Des notions de géométrie, on s'élèvera aux éléments de l'arpentage, qu'on développera suffisamment pour mettre en état d'arpenter un terrain, non par la méthode la plus commode, mais par une méthode générale dont on puisse difficilement oublier les principes ; en sorte que le défaut d'usage n'empêche pas de pouvoir l'employer lorsqu'on en aura besoin.

On retrouve ici, en passant, le souci d'un « équipement » mathématique du citoyen qui permette à celui-ci de se mesurer avec succès aux tâches que chacun peut être conduit à accomplir [26. On notera la manière dont Condorcet situe les « éléments d'arpentage » : pour y arriver en partant de la géométrie, on ***s'élève***, on ne (con)descend pas.]. Ce principe, augmenté des deux préceptes rappelés plus haut – la formation scolaire se nourrit des questions les plus vives en forme de *Comment ?* et de *Pourquoi ?* et tente d'y répondre de manière appropriée, optimale (et, pour cela, provisoire souvent) –, dessine une problématique du rapport à l'étude scolaire des mathématiques qui est au cœur de l'éducation du citoyen.

6.3. On illustrera ce rapport à l'étude par un exemple déjà exploité : comment faire disparaître le radical figurant au dénominateur d'une expression du type $\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, avec $d \neq 0$?

1. Une question ***cruciale*** est ici : comment fabriquer un rapport égal à un rapport donné ? Une réponse qui fut classique au collège autrefois repose sur le résultat technologique suivant : ***si*** $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$ ***alors*** $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}}$ ***et, plus généralement,*** $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\lambda a+\mu c}{\lambda b+\mu d}}$ (sous réserve que tous ces quotients soient définis). On a par exemple :

$$\frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3\sqrt{2}+3}{1} = \frac{3+(3\sqrt{2}+3)}{(\sqrt{2}-1)+1} = \frac{3\sqrt{2}+6}{\sqrt{2}}.$$

2. La réponse apportée fait surgir une seconde question cruciale : pour utiliser la technologie indiquée, il faut disposer d'une seconde fraction égale à la première. Comment l'obtenir ? La réponse est ici

facile : il suffit de ***multiplier haut et bas par le radical***, comme dans l'exemple suivant : $\frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$. La chose faite, on met en œuvre la technique prévue. On a ainsi :

$$\frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{3+3\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)+(2-\sqrt{2})} = \frac{3+3\sqrt{2}}{1} = 3+3\sqrt{2}.$$

3. Il reste bien entendu à s'assurer que la mise en œuvre de cette technique ne rencontrera pas d'obstacle. Si le dénominateur $c + d\sqrt{e}$ est multiplié par $\sqrt{e}$, le nouveau numérateur est $de + c\sqrt{e}$; on a alors : $c(c + d\sqrt{e}) - d(de + c\sqrt{e}) = c^2 - d^2e$. On obtient ainsi un rationnel, non nul parce que $\sqrt{e}$ est irrationnel : la technique peut fonctionner.

4. La technique ainsi assurée pourra ensuite ***évoluer***, devenir peut-être moins « naturelle », plus proche de la technique des spécialistes. Ramassée en quelques égalités successives, cette technique première livre en effet le mécanisme sur lequel elle repose :

$$\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}(a+b\sqrt{e})}{\sqrt{e}(c+d\sqrt{e})} = \frac{c(a+b\sqrt{e})-d\sqrt{e}(a+b\sqrt{e})}{c(c+d\sqrt{e})-d\sqrt{e}(c+d\sqrt{e})} = \frac{(c-d\sqrt{e})(a+b\sqrt{e})}{(c-d\sqrt{e})(c+d\sqrt{e})} = \frac{(ac-bde)+(bc-ad)\sqrt{e}}{c^2-d^2e} = \ldots$$

On voit ainsi émerger une seconde technique qu'il n'aurait guère été éducatif d'imposer *ex abrupto* : au lieu de commencer par multiplier haut et bas par $\sqrt{2}$, on peut multiplier ***directement*** par l'expression $c - d\sqrt{e}$.

6.4. L'éducation scolaire des futurs citoyens doit promouvoir un rapport à l'étude qui leur permette de parvenir, au sein de collectifs appropriés, à identifier les ***questions*** qui se posent à eux et à œuvrer pour leur apporter réponse en mobilisant – voire en contribuant, directement ou indirectement, à créer – les connaissances et savoirs pertinents. Cette activité fabricatrice de réponses engendre des ***chaînes de questions*** qui, en nombre de cas, étendent ouvertement ou subrepticement certaines de leurs ramifications jusque dans l'univers mathématique, ainsi bien sûr que dans les autres champs de connaissance.

6.5. À tout instant dans ce processus, quelle que soit la question en cours d'étude, on est conduit à interroger le monde autour de soi en le saisissant principalement (mais non bien sûr exclusivement) à travers certains des ***« médias »*** qui le font connaître [27. On entend ici par ***média*** tout système de mise en représentation du monde à l'adresse d'un certain public. Le cours du professeur de mathématiques, le prêche d'un clerc, le journal d'un présentateur de télévision relèvent en ce sens du système des médias au sens large.]. Une telle interpellation de la culture soulève en permanence un double défi : celui de l'observation, de l'analyse, de l'évaluation, de l'exploitation des éléments de réponse recherchés, mais aussi des éléments ***non sollicités*** que les médias interrogés leur associent de façon plus ou moins contingente. Une éducation citoyenne doit alors permettre ***l'abord critique*** tant des éléments recherchés que des éléments qui leur sont associés en mettant en avant l'exigence d'une lecture ***« excriptrice »*** des médias, c'est-à-dire d'une lecture qui tente d'extraire les éléments ***inscrits*** dans le discours par lequel le média interrogé – du magazine grand public au manuel scolaire, du documentaire haut de gamme à l'émission de divertissement populaire, par exemple – répond en quelque sorte par avance à nos questions. Cette exigence appelle une ***dialectique des médias et des milieux*** [28. Un ***milieu*** est un système qu'on peut regarder comme dénué d'intention « didactique » dans la réponse qu'il peut apporter, de manière explicite ou implicite (il faut alors interpréter son comportement de « réponse »), à telle question déterminée : il se comporte *à cet égard* comme un fragment de « nature ». Par contraste, pour nombre de questions que l'on entend leur poser, les médias sont en général mus par une intention (par exemple « d'informer ») à l'endroit du questionneur. Bien entendu, un média peut fort bien, à propos de telle question, être regardé comme un milieu, et être utilisé comme tel.], qui est au cœur de toute formation citoyenne.

6.6. On donne ici une illustration très partielle de cette dialectique en ébauchant l'analyse ***mathématique*** d'un fragment de texte de haute vulgarisation. Dans un ouvrage intitulé *Sommes-nous seuls dans l'univers ?* (Fayard, 2000), on trouve l'échange suivant entre un astronome, désigné ci-après par les initiales AVM, et un interlocuteur qui l'interroge (*op. cit.*, pp. 109-110) :

AVM. – … les spéculations ne manquent pas sur ce que pourrait être une forme de vie à l'échelle atomique. En voici un exemple. Cette idée peut sembler délirante, mais rien n'interdit de s'amuser.

Nous savons que le noyau d'un atome est un assemblage de neutrons et de protons soudés par la force nucléaire. Or ces noyaux peuvent grossir jusqu'à un certain point, mais, au-delà, ils deviennent instables et s'autodétruisent presque instantanément. C'est le trop célèbre phénomène de fission nucléaire. La conclusion s'impose d'elle-même : en un temps si court, jamais une structure assez complexe pour devenir vivante ne pourra se former. Mais voilà où le bât blesse : cette instabilité est toute relative. Le noyau n'est, en effet, instable que par rapport à notre échelle de temps. Mais le temps, vous le savez, est une chose magique. Pour faire un geste, il nous faut environ une seconde ; c'est pourquoi la seconde est une échelle de temps humaine. Mais, si nous avions la taille des noyaux atomiques, l'équivalent d'une seconde serait de l'ordre de 10^{-21} seconde (un dixième de dix milliardièmes de dix milliardièmes de seconde), ce qui est pour nous une durée infinitésimale, difficile même à concevoir.

– Donc, une seconde, pour un noyau atomique, c'est une éternité !

AVM – Absolument. Si j'avais la taille d'un noyau atomique, des durées de l'ordre de 10^{-15} seconde (un dixième de dix millionièmes de dix millionièmes de seconde) fonderaient la stabilité de mon univers et laisseraient peut-être le « temps » à des échafaudages nucléaires très complexes de se manifester. Pourquoi des formes de vie n'apparaîtraient-elles pas à cette échelle de grandeur, mais aussi à cette échelle de temps ?

– Cela fouette la pensée !

AVM – Vous voyez ? C'est passionnant, ce genre de spéculation, cela oblige à s'ouvrir l'esprit, à penser autrement. On a donc essayé d'imaginer une éclosion éphémère de la vie à l'échelle nucléaire. Après tout, à notre échelle, la vie est apparue sur Terre il y a quatre milliards d'années, et elle a pris tout ce temps pour évoluer jusqu'à notre civilisation élaborée. À l'échelle de temps de 10^{-21} seconde, combien de temps faudrait-il pour qu'une civilisation passe de l'état embryonnaire de la vie microbienne jusqu'à une civilisation élaborée ? Quatre milliards d'années, à cette échelle, cela fait moins d'un millième de seconde ! Imaginez les espèces qui apparaissent et disparaissent en une fraction de seconde, des dynasties qui se succèdent en un clin d'œil…

Plusieurs assertions à contenu mathématique (au moins en partie) doivent être interrogées. Ainsi de celle selon laquelle « 10^{-21} seconde, c'est un dixième de dix milliardièmes de dix milliardièmes de seconde ». Un dixième de dix milliardièmes de dix milliardièmes, cela s'écrit en effet $\frac{1}{10}\frac{1}{10\times10^9}\frac{1}{10\times10^9}$, soit encore $\frac{1}{10}\frac{1}{10^{10}}\frac{1}{10^{10}}$, ou $\frac{1}{10^{21}}$, et donc 10^{-21} : l'assertion est vérifiée. De même vérifie-t-on que « 10^{-15} seconde, c'est un dixième de dix millionièmes de dix millionièmes de seconde » : ce dernier nombre s'écrit $\frac{1}{10}\frac{1}{10\times10^6}\frac{1}{10\times10^6}$ et cette expression se ramène à $\frac{1}{10}\frac{1}{10^7}\frac{1}{10^7} = \frac{1}{10^{15}} = 10^{-15}$. D'une autre structure est l'affirmation selon laquelle « à l'échelle de temps de 10^{-21} seconde, quatre milliards d'années, cela fait moins d'un millième de seconde ». On a ici :

quatre milliards d'années $\times\ 10^{-21} = 4\times10^9\times(365\times24\times3600\text{ s})\times10^{-21}$
$= 4\times10^9\times(365\times86400)\times10^{-21}\text{ s} = 4\times10^9\times31536000\times10^{-21}\text{ s} = 4\times10^{12}\times31536\times10^{-21}\text{ s}$
$= 126144\times10^{12}\times10^{-21}\text{ s} = 0{,}126144\times10^{18}\times10^{-21}\text{ s} = 0{,}126144\times10^{-3}\text{ s} < 0{,}13\text{ ms}$.

On notera en passant la stylisation numérique du résultat, typique des médias de « vulgarisation » : quatre milliards d'années, cela correspond à une durée presque 8 fois inférieure à un millième de seconde (un huitième d'un millième de seconde, c'est exactement 0,125 ms). Sans doute aurait-il été plus juste de parler d'une durée de « moins de deux dix millièmes de seconde » (puisque 0,13 ms < 0,2 ms = 2×10^{-4} s) ; mais cela aurait compliqué un peu plus la description d'un phénomène que, en fin de compte, de telles approximations numériques ne dénaturent nullement.

6.7. Bien entendu, une lecture excriptrice du texte proposé poserait bien d'autres questions, dont seule l'étude effective révèlerait quelles connaissances, mathématiques ***et autres***, leur explicitation peut requérir. Ainsi en va-t-il de l'assertion selon laquelle « si nous avions la taille des noyaux atomiques, l'équivalent d'une seconde serait de l'ordre de 10^{-21} seconde », ou de l'affirmation que, « pour faire un geste, il nous faut environ une seconde » ; ou du fait que des noyaux atomiques « peuvent grossir jusqu'à un certain point », mais que, « au-delà, ils deviennent instables et s'autodétruisent presque instantanément » ; etc. On voit ici plus clairement ce que le recours au calcul dans la mise à l'épreuve des assertions « purement numériques » du paragraphe précédent illustrait tout en le masquant : alors que le calcul sur les décimaux et les puissances de dix constituait en ce cas le milieu approprié à mobiliser, des milieux pertinents restent à identifier et à « arraisonner » dans le cas des assertions mentionnées ici. La capacité de mobilisation voire de création de milieux appropriés – la capacité de ***mésogenèse*** – est ainsi au cœur de toute émancipation intellectuelle.

3. Validation & titularisation

3.1. Épreuves de validation : les enseignements

a) Nombre de questions ont fleuri ces dernières semaines à propos des épreuves à venir qui permettront la *validation* des élèves professeurs de l'IUFM, école interne de l'Université de Provence. L'une d'entre elles les résume ; la voici.

Peut-on avoir des informations sur les soutenances qui se dérouleront avant les vacances de Pâques ? (FLA, OS, 5e, 20)

Signalons ici que le calendrier précis des passations sera consultable dès aujourd'hui, en GFP.

b) On commence par les questions afférentes à l'épreuve relative aux *enseignements* reçus, que l'on a réunies ci-après.

1. En quoi consiste la présentation du corpus B ? (WB, MJ, 4e, 21)

2. Peut-on revenir sur les oraux du jury d'enseignement ? Qu'attend-on du stagiaire ? Peut-il utiliser des outils de TICE (vidéoprojecteur, ordinateur, etc.) ? (SF, CR, 5e, 21)

3. Y a-t-il une présentation de notre corpus B recommandée ? Ou est-ce laissé à notre propre appréciation ? Vaut-il mieux faire une présentation générale ou plutôt cibler un point plus précis ? (MBP, OS, 2de, 21)

4. Que doit-on préparer pour l'oral du jury d'enseignement ? Une analyse détaillée avec structure et contenue, OM, OD, gestion de séance ? Doit-on aussi faire l'évaluation ? (KE, MJ, 4e, 21)

5. Lors de la présentation de nos corpus A et B, je me demande si la totalité de notre analyse doit porter sur la séquence présentée ou sur la séance observée. En effet, en ce qui concerne les paragraphes III et IV de l'analyse, il me semble qu'ils portent particulièrement sur une séance dont on dispose de l'observation et qu'il est difficile de parler des différentes fonctions didactiques qui doivent être assurées dans une séance lorsque l'on ne dispose pas des observations des différentes séances qui composent la séquence. Finalement, pendant notre présentation, doit-on se limiter à la séance observée lorsque l'on aborde les paragraphes III et IV, si toutefois ces paragraphes doivent être présentés ? (OL1, OS, 5e, 22)

6. Pour les professeurs du privé, comment le mémoire interdisciplinaire, réalisé à l'ICFP, entre-t-il en compte dans l'évaluation de la formation à l'IUFM ? (CS1, CR, 1re STL, 21)

6 *bis*. Comment se passent le jury d'évaluation des enseignements pour nous ? Faut-il apporter le mémoire interdisciplinaire pour le présenter en plus du corpus A et du corpus B ? (CS1, CR, 1re STL, 21)

7. Lors de la soutenance de nos corpus A et B, le jury a-t-il le temps de lire les deux supports après la présentation et l'entretien ? (FLA, OS, 5e, 22)

c) Revenons d'abord à ce qu'indique, en matière d'évaluation des enseignements, le document présentant la formation et sa validation diffusé le 30 août 2006.

ÉVALUATION DES MODULES D'ENSEIGNEMENT

1. La validation des enseignements est prononcée par un jury spécifique, qui siège sous la forme de commissions d'examen de trois membres au moins, dont l'un assume la fonction de ***modérateur***. Une commission d'examen ne peut interroger un élève professeur ayant pour maître de stage, ou pour tuteur, ou pour visiteur un membre de cette commission.

2. L'examen auquel la commission d'examen procède a pour support, outre la version écrite des présentations réalisées au cours de l'année dans le cadre du Séminaire du mardi matin, un dossier comportant les ***corpus A et B*** (à quoi peut s'adjoindre un projet interdisciplinaire élaboré dans le cadre des ateliers de FGC). Lorsqu'il se présente devant la commission d'examen, chaque élève professeur met à sa disposition un exemplaire du support de l'entretien (corpus A, corpus B, éventuellement projet interdisciplinaire).

3. Chaque élève professeur présente, ***pendant 10 minutes environ***, le support de l'entretien. Cette présentation est suivie d'un échange avec la commission d'examen ***de 10 minutes environ*** au cours duquel la maîtrise par l'élève professeur de la matière des enseignements obligatoires est appréciée à propos de questions extraites de la liste des questions d'entretien arrêtée par le tuteur de son GFP.

4. Sur cette base, et en tenant compte des rédactions des exposés faits par l'élève professeur dans le cadre du Séminaire du mardi matin, la commission d'examen propose au jury d'évaluation des enseignements l'une des appréciations suivantes : ***non satisfaisant*** ; ***passable*** ; ***assez bien*** ; ***bien*** ; ***très bien***.

5. Une ***commission de contrôle*** de trois membres, désignée par la Commission de validation, s'assure en continu du fonctionnement harmonieux des commissions d'examen, et formule éventuellement des observations à l'adresse du jury d'évaluation des enseignements. Se référant alors aux conclusions de la commission d'examen ainsi qu'aux observations éventuelles de la commission de contrôle, le jury d'évaluation des enseignements se prononce définitivement sur chacun des candidats.

d) Il convient d'insister sur l'*objectif* de l'entretien, à savoir l'appréciation de la maîtrise par le candidat des connaissances transmises dans la formation 2006-2007, ces connaissances étant « cadrées » par la liste des questions d'entretien (sur laquelle on va revenir). Le support de l'entretien est *au service* de la réalisation de cet objectif : sa présentation doit donc être concise, tout en faisant parcourir l'ensemble des rubriques usuelles, y compris celles relatives à l'organisation mathématique, à l'organisation didactique et à la gestion du travail *sur l'ensemble de la séquence* retenue par le candidat dans son corpus B. Il appartient au candidat de faire un *choix* de présentation, qui lui permette de mettre en avant ce qui, *de son point de vue*, apparaît le mériter le plus – *par exemple* le fait que, en telle séance de la séquence, l'organisation de l'étude intégrait la conception et la réalisation d'une expérimentation conduite par les élèves réunis en binômes avec telles ou telles ressources de milieu (ordinateurs, Internet, calculatrice, épures, théories déductives, etc.). Cela noté, les membres de la commission d'examen ne sont nullement tenus de faire porter leurs questions *uniquement* sur les points ainsi mis en relief. Mais ils devront dans tous les cas 1) demeurer dans le cadre fixé par la liste susmentionnée ; 2) se référer au support d'entretien, dont ils n'auront pu prendre connaissance par avance et qu'ils ne pourront donc que parcourir de façon volontairement non systématique. Ce qu'on attend finalement du candidat c'est que, et dans sa présentation du support d'entretien et dans ses réponses aux questions qui lui seront proposées ensuite, il montre de façon raisonnablement convaincante sa connaissance des contenus de la formation. On aura noté que le support d'entretien peut contenir le « mémoire interdisciplinaire » éventuellement réalisé par ailleurs par le candidat : des questions pourront en ce cas porter sur cette composante du matériel présenté.

e) La liste de questions d'entretien actuellement prévue est reproduite ci-après. Elle sera mise en ligne d'ici vingt-quatre heures dans une forme définitive, qui sera alors communiquée aux membres du jury d'évaluation des enseignements.

① ***Structure et contenu de la séquence observée***

❶ Que sont les systèmes didactiques auxiliaires (SDA) et les dispositifs didactiques internes au système didactique principal (SDP) mobilisés lors de la réalisation de la séquence ? Comment la séquence exploite-t-elle l'espace didactique offert par le SDP et ses SDA ?

❷ Quelle est la place du thème mathématique parmi les secteurs et domaines d'études en lesquels se structure le programme de mathématiques de la classe ? Que sont les principaux sujets d'étude participant de ce thème ? Comment ce thème est-il situé dans la programmation annuelle adoptée ?

② ***L'organisation mathématique***

❶ Que sont les types de tâches travaillés dans la séquence ? Y sont-ils clairement dégagés et bien identifiés ?

❷ Quelles sont les raisons d'être des types de tâches travaillés ? Sont-elles explicitées ? Comment ?

❸ Quelle pertinence ont les types de tâches travaillés en tant qu'outils d'études pour l'année en cours ? Pour les années à venir ? Pour d'autres disciplines ?

❹ Que sont les techniques associées aux types de tâches travaillés ? Sont-elles faciles à utiliser ? Quelle est leur portée ? Sont-elles fiables ? Qu'en est-il de leur intelligibilité ? Quel est leur avenir ? Quelles évolutions devront-elles subir pour perdurer ?

❺ Comment les techniques travaillées sont-elles justifiées ? Y a-t-il des énoncés technologiques ou théoriques qui soient considérés comme « évidents » ou « bien connus » ? Les formes de justification utilisées sont-elles proches des formes canoniques en mathématiques ? Ont-elles valeur d'explication pour les élèves ? Les résultats technologiques rendus disponibles sont-ils effectivement exploités ?

③ ***L'organisation didactique***

❶ Comment se réalisent dans les temps et les lieux alloués, et selon quelles modalités (place du manuel, travail en classe et hors classe, etc.), les différents moments de l'étude – première rencontre avec les types de problèmes associés au thème, travail exploratoire visant à l'émergence d'une technique, travail d'élaboration technologique et théorique, travail de la technique et, plus largement, de l'organisation mathématique, institutionnalisation, évaluation ? Comment ces moments didactiques sont-ils articulés ? Jusqu'à quel point leurs modalités de réalisation apparaissent-elles installées dans la culture de la classe ?

❷ Qu'en est-il de la chronogenèse ? Quelle avancée de l'étude la séquence a-t-elle permis ?

– Comment cette avancée de l'étude se manifeste-t-elle dans l'organisation mathématique (par la création de nouveaux types de tâches, de nouvelles techniques, de nouveaux éléments technologiques, par une réorganisation partielle du déjà construit, etc.) ?
– S'est-elle faite au détriment de certains des moments de l'étude ? Lesquels ?
– Comment la mémoire didactique de la classe est-elle assurée ?

❸ Qu'en est-il de la topogénèse ?

– Quel est le *topos* de l'élève dans l'organisation de l'étude ? Les élèves l'occupent-ils franchement, ou seulement d'une manière indécise ou aléatoire ?
– Quel est le *topos* du professeur dans la séquence ? Lui permet-il d'assurer adéquatement ses différents rôles (directeur d'étude, aide à l'étude, enseignant, etc.) ?
– Comment le *topos* du professeur s'articule-t-il avec le *topos* de l'élève ?

❹ Qu'en est-il de la mésogénèse ?

– De quelles ressources didactiques et notamment de quels moyens déductifs et de quels moyens expérimentaux (calculatrices, logiciels, etc.) les élèves disposent-ils pour accomplir le travail d'étude et de recherche qui leur est demandé ?
– Ces ressources leur permettent-elles de résoudre en quasi-autonomie didactique les problèmes qu'ils ont à affronter ?

④ ***La gestion de la séquence et de la séance***

❶ La gestion du temps didactique permet-elle d'impulser une dynamique de l'étude adéquate ? La gestion de l'espace didactique conduit-elle à une exploitation satisfaisante des divers systèmes didactiques mobilisables et des dispositifs didactiques qu'ils proposent, notamment en ce qui concerne la mémoire didactique de la classe et de chacun des élèves ?

❷ La gestion par le professeur de son propre *topos* et du *topos* de l'élève, et en particulier des ressources que celui-ci peut mobiliser, lui permet-elle une prise de décision effective et une action efficace devant les difficultés rencontrées au cours de la séquence ?

⑤ ***Les « passages imposés »***

❶ Quel « jeu » la séquence montre-t-elle entre travail individuel ou en équipe et travail de la classe en tant que collectif d'étude et de recherche ?

❷ Quelles formes d'aide ou de différenciation réalistes propose la séquence (ou pourrait-on proposer à partir de cette séquence) pour gérer la diversité des élèves ?

❸ Quel est le dispositif d'évaluation utilisé ? Quels sont les critères d'évaluation ? Quels sont leurs rôles ?

❹ Quelle serait la contribution possible de la séquence à l'éducation à la citoyenneté ?

3.2. Épreuves de validation : les mémoires

a) Voici d'abord les questions posées à propos de *l'élaboration* du TER.

1. Doit-on proposer dans le TER une séance qui reprenne l'organisation de la séance observée (c'est-à-dire : correction d'exercices, activité, synthèse) ou une séance que l'on enseignerait face à une classe ? Dans ce dernier cas, doit-on élaborer une séance ou une séquence ? (FL, MJ, 2de, 20)

2. Est-ce que dans le développement du TER, une *partie* peut être un développement de l'évaluation (et donc rester, d'une certaine manière, une évaluation) ? (OB, OS, 5^{e}, 21)

3. Pour la création de la séance du mémoire, qui commence par une AER, peut-on utiliser des logiciels différents de ceux utilisés habituellement (Cabri, Géoplan…) et en particulier MathGraph32, qui est très intéressant pour notre sujet ? (SG, OS, 2de, 21)

4. Dans notre TER, peut-on utiliser de nombreuses citations issues du Séminaire, des notices, etc. ? (FLA, OS, 5^{e}, 21)

4 *bis*. Lorsque nous faisons appel à différents manuels ou sources pour nos pistes de recherche, devons-nous reformuler et citer les auteurs ou garder telles quelles les citations en indiquant l'auteur ? (AEO, OS, 4^{e}, 21)

4 *ter*. Dans le sujet de développement de notre TER, peut-on faire des citations des documents dont on dispose ou faut-il s'approprier les idées citées et les reformuler avec « nos propres mots » ? (OL1, OS, 5^{e}, 21)

5. Dans les mémoires qu'on peut consulter à la bibliothèque, on retrouve souvent dans les développements la définition générale d'une AER. Est-ce nécessaire si, dans la séance que nous proposons, il y a une AER ? (WB, MJ, 4^{e}, 22)

b) À propos de l'objectif du TER, le document déjà cité plus haut précise ceci.

La ***seconde partie*** du mémoire, d'une vingtaine de pages au plus, présente d'abord une courte ***évaluation*** de la séance ainsi observée et analysée, suivie d'un travail de ***développement*** relatif à ***l'une*** des insuffisances ou à ***l'un*** des problèmes mis en évidence par l'analyse et l'évaluation de la séance observée. Le choix de ce ***sujet de développement*** est soumis à l'approbation du tuteur responsable du GFP. Si ce sujet peut relever d'une question professionnelle large, son traitement doit montrer clairement comment la réponse apportée pourrait se concrétiser dans le cadre de la séance observée.

1. La réponse à la première des questions ci-dessus découle de cette prescription : il s'agit de proposer une réponse alternative à la réponse observée lors du SPA à une certaine question d'enseignement que l'analyse de la séance observée aura portée à la lumière. Cela n'implique

pas de reprendre *toute* la séance : dans une séance qui, par exemple, commençait par une correction d'exercice, on peut, dans le scénario alternatif à concevoir, ignorer cette première partie dès lors que l'imperfection que l'on prétend éliminer par un travail approprié affecte par exemple l'activité proposée à la classe par le professeur observé une fois la correction d'exercice terminée. Dans ce cas comme dans les autres, il ne s'agira pas d'élaborer de façon complète une *séquence* dans laquelle s'enchâsserait la séance reconstruite à partir de la séance observée, même s'il apparaît utile, comme c'est souvent le cas, de donner des précisions sur ce que le fragment de séance rénovée suppose, *en amont* de lui comme *en aval* (par exemple si une partie du contenu mathématique qui était inclus dans la séance observée est désormais renvoyé aux séances suivantes, séances que, pour autant, on ne cherchera pas à décrire sinon de manière très sommaire).

2. La relation entre évaluation et développement peut être plus complexe que la présentation « standard » du TER ne semble l'indiquer ; mais tout n'est cependant pas possible.

• Ce qui peut se passer d'abord, c'est que le travail de développement d'une *séance rénovée* appelle, à un moment donné, souvent de façon non anticipée, une *reprise* de l'évaluation (voire, plus en amont encore, une reprise de *l'analyse* elle-même) de la *séance observée*. Mais le fruit d'un tel événement – qui s'inscrit dans la chronique toujours un peu tourmentée du travail d'étude et de recherche – doit venir s'intégrer dans la structure (linéaire) du mémoire : si, à un certain moment du développement, on doit approfondir l'évaluation, on retouchera *alors* la rédaction de la partie du mémoire consacrée à l'évaluation (qui aura été rédigée antérieurement), sans pour cela que la partie consacrée au développement inclue une « partie » d'évaluation de la séance observée.

• L'évaluation doit par ailleurs être présente dans la partie du mémoire restituant le travail de développement. Mais son objet ne sera plus alors la séance observée : ce sera le scénario de séance rénovée nouvellement élaboré et mis au point, dont l'évaluation se fera du point de vue du projet adopté par l'équipe de TER, et dûment explicité, de proposer un scénario de séance d'où soit absente l'imperfection affectant la séance observée, choisie à l'issue de l'évaluation de cette séance observée.

3. La mise en jeu, dans le scénario de séance rénovée, de tel ou tel logiciel est toujours possible, à condition que cet emploi apparaisse opportun et réaliste : dans la présentation du TER, on évoquera donc (rapidement, comme tout) les fonctionnalités de l'outil logiciel choisi qui se trouvent exploitées dans le scénario conçu et présenté.

4. Il faut se garder de décharger sa responsabilité par une citation opportuniste – à quelque auteur que ce soit. Dans tous les cas, en effet, les candidats devront se montrer capables, si l'entretien vient sur ce sujet, de justifier raisonnablement le point de vue ou l'outillage adopté, qu'il soit emprunté ou procède des capacités d'invention propre aux auteurs du mémoire. Dans cette perspective, tout emprunt est permis, sans façon. Mais tout emprunt « sensible » devra être référé clairement à sa source. On écrira par exemple ceci.

> L'idée mise en œuvre dans ce qui suit est inspirée de développements que l'on trouvera dans les archives du Séminaire des PCL2 pour l'année 2004-2005, p. 26-28.

Ou encore ceci.

Dans ce suit, on exploite une proposition d'activité que l'on trouvera dans l'ouvrage intitulé *Apprentissages mathématiques en 5^e* (INRP, Paris, 1993), p. 111-117.

Mais on n'oubliera pas, rappelons-le, que le choix fait, quel qu'il soit, *engage pleinement la responsabilité* de celles et ceux qui le font, sans qu'ils puissent s'autoriser des auteurs mis ainsi – à leur insu peut-être, mais *légitimement* – à contribution. Mais attention aussi à la reformulation « avec nos propres mots », qui peut pervertir ce qui est ainsi « reformulé » !

5. Il n'est jamais bon de céder au démon du recopiage (hormis dans des notes de travail personnelles). Par ailleurs, on doit tenir un certain nombre de termes pour « bien connus ». Mais il faudra tout de même se préparer à expliciter, à la demande éventuelle de la commission d'examen, telle ou telle notion employée. À cet égard, le fait d'avoir reproduit mot pour mot une définition ou un fragment d'analyse ne saurait suffire à manifester de façon convaincante la maîtrise qu'aurait le candidat interrogé de cette notion ou de cette analyse.

c) On passe maintenant aux questions touchant à la *soutenance* du TER.

1. Comment se passe l'oral de présentation du TER ? On passe individuellement. Mais chaque membre du trinôme ne présente-t-il pas la même partie du TER ? Y a-t-il une partie où le trinôme est réuni ? (MBP, OS, 2de, 20)

2. Comment procéder au « découpage » du TER pour la soutenance orale ? (SM1, MJ, 4^{e}, 20)

3. Lors de la soutenance du mémoire, est-ce que la répartition des parties à exposer est faite par le trinôme ? (SM2, MJ, 4^{e}, 21)

4. Concernant la soutenance du TER, chaque personne du trinôme soutient sur le même TER, mais il est conseillé de ne pas faire trois fois la même soutenance. Comment faire ? (AB, OS, 3^{e}, 22)

5. Comment faire pour « découper » notre présentation orale du TER de telle sorte que les trois parties soient équitables ? (MBP, OS, 2de, 22)

6. J'ai lu dans « Formation et validation des PCL2 de mathématiques » que, durant l'échange avec le jury d'évaluation du mémoire professionnel, on appréciera la maîtrise par l'élève professeur de l'usage des TICE dans l'enseignement de sa discipline. J'aurais voulu avoir quelques précisions : est-ce l'usage relatif à la séance proposée ou à la présentation du mémoire ? (VD, OS, 4^{e}, 21)

d) Comme à propos des enseignements, on reproduit d'abord les indications données, à propos de la soutenance des TER, dans le document de présentation de la formation et de sa validation.

ÉVALUATION DU MEMOIRE PROFESSIONNEL

1. La validation du mémoire professionnel est prononcée par un jury spécifique, siégeant en commissions d'examen de trois membres au moins, dont l'un assume la fonction de modérateur. Une commission d'examen ne peut examiner les élèves professeurs dont l'un de ses membres est le maître de stage, le tuteur, le visiteur ou le directeur de mémoire. Ce dernier peut faire connaître par écrit les informations qu'il juge utile de porter à la connaissance de la commission d'examen.

2. L'examen auquel la commission procède a pour support et en partie pour objet le ***mémoire de TER*** dont l'élève professeur est l'auteur ou l'un des auteurs. La commission dispose à l'avance de deux exemplaires de ce mémoire, dont deux membres de la commission qui ne l'ont pas dirigé ont pris connaissance préalablement.

3. Chaque élève professeur présente, ***pendant 10 minutes environ***, le mémoire de TER. Cette présentation est suivie d'un échange avec la commission ***de 10 minutes environ*** au cours duquel elle apprécie notamment la maîtrise par l'élève professeur de l'usage des TICE dans l'enseignement de sa discipline.

4. Sur cette base, et après en avoir débattu, la commission d'examen propose au jury d'évaluation des mémoires professionnels l'une des appréciations suivantes : ***non satisfaisant*** ; ***passable*** ; ***assez bien*** ; ***bien*** ; ***très bien***.

1. On aura noté que ces indications ne répondent pas à la question de la « distribution des rôles » entre les membres de l'équipe de TER. Il n'appartient pas à la commission d'examen de décider de ce que chacun d'eux *présente*. Trois points doivent ici être précisés.

• En principe, c'est chaque membre de l'équipe qui décide de ce que contiendra sa présentation.

• Dans la réalité, il ne serait certainement pas judicieux de répéter, avec quelques variantes mineures, un même propos : en même temps que cela peut lasser la commission d'examen, en effet, les questions adressées par la commission aux candidats pourront être chaque fois un peu plus affûtées… Le choix du contenu de la présentation de chacun doit donc faire l'objet d'un travail spécifique de l'équipe de TER afin notamment de ne pas désavantager tel ou tel membre de l'équipe, dont chacun assumera cependant la responsabilité pleine et entière du choix de son propos.

• En revanche, quel que soit le contenu de la présentation réalisée par un candidat, celui-ci est regardé comme comptable *de l'ensemble du contenu du mémoire* – et pas seulement de ces aspects dont il aura fait l'objet de sa présentation orale. Les questions à lui adressées par la commission pourront donc sortir des limites de son propos pour aborder un aspect *quelconque* du travail soumis à examen.

2. L'appréciation relative à l'usage des TICE, évoquée dans les indications reproduites ci-dessus, a trait à la maîtrise par le candidat de l'emploi des TICE « dans l'enseignement de sa discipline », non dans la présentation de cet usage devant la commission d'examen. Toutefois, il n'est sans doute pas inutile de montrer devant la commission une maîtrise appropriée de certains outils simples de présentation. Mais on se gardera de trop d'ambition en la matière, qui pourrait aller de pair avec une diminution parfois invalidante de la fiabilité du dispositif de présentation prévu !

3.3. La titularisation

a) Les questions ci-après ont été récemment soulevées.

1. Comment va se dérouler la fin de l'année après les vacances de printemps ? Aurons-nous encore des journées de formation ? Est-on inspectée ? (FV, OS, 5e, 22)

2. Quand serons-nous informé de notre validation ? De notre titularisation ? Peut-on être validé mais pas titularisé ? (FV, OS, 5e, 22)

3. Comment se passe la visite des inspecteurs « officiels » ? La visite peut-elle avoir lieu en juin ? (JN, CR, 4e & demi-4e, 22)

4. Si un stagiaire n'est pas validé cette année par l'IUFM, sera-t-il soumis l'année suivante aux deux années de formation ? (JN, CR, 4e & demi-4e, 22)

1. On a dit plus haut qu'une ultime journée était prévue le 22 mai, comportant le matin la dernière séance de ce Séminaire, l'après-midi la séance de clôture de la formation. Et on a mentionné le bulletin *Excursus* ainsi que la *Petite bibliographie*.

2. L’information *officieuse* concernant la *validation* par l’IUFM sera faite à l’issue de la commission de validation : le calendrier prévisionnel précise que ce sera le samedi 5 mai, à 17 h.

3. S’agissant de l’EQP, l’examen de qualification professionnelle qui conditionne la *titularisation*, le jury académique se réunira en principe le lundi 14 mai. Celles et ceux pour lesquels une visite sera décidée en seront informés très rapidement – dans les jours suivants.

4. Cette visite, qui n’est pas une inspection, et qui aura lieu normalement très vite après le 14 mai, sera réalisée par un membre du jury académique, qui peut être, certes, un IG ou un IA-IPR, mais qui peut être aussi bien un professeur chargé de mission.

5. Il est possible d’être validé (par l’IUFM) mais non titularisé (par l’employeur). Il est aussi possible de ne pas être validé (par l’IUFM) mais d’être titularisé (par l’employeur). Mais de telles situations sont rares. Si un stagiaire n’est pas titularisé, il recommence en principe l’année de formation, c’est-à-dire « l’année de PCL2 », et ne fera la formation promise aux « T1 » que le moment venu.

3.4. C2i2e

a) Plusieurs questions se rapportent au C2i2e.

> 1. Est-il envisageable de mettre sur Espar les travaux sur le TER ou le corpus B (notamment pour la numérisation des documents) pour essayer de valider certains items du C2i2e ? (CL, OS, 4^{e}, 21)
>
> 2. Quelle est la date limite de validation du C2i2e ? (FL, MJ, 2de, 21)
>
> 2 *bis*. Y a-t-il une date limite pour la validation du C2i2e ? (SR, CR, 4^{e}, 22)
>
> 2 *ter*. Jusqu’à quand avons-nous pour la validation du C2i2e (pour mettre les documents sur Espar) ? (FV, OS, 5^{e}, 20)
>
> 3. Pour les professeurs stagiaires du privé, certains items vont être validés par Formiris ; comment cela se passe-t-il ? (FV, OS, 5^{e}, 20)

1. Les documents insérés dans le portfolio en vue de la validation du C2i2e peuvent être *extraits* de l’ensemble des réalisations du candidat, dans le cadre de son activité de *professeur stagiaire* comme de son activité d’*élève professeur*.

2. La date limite pour insérer des pièces dans son portfolio a été fixée au *mardi 29 mai*.

3. Les modalités de validation du C2i2e seront précisées lors de la séance du 22 mai.

b) Dans la perspective ainsi tracée, le premier numéro d’*Excursus* contiendra une mise à jour du document *Repères & balises*.

Faute de temps, les développements qui suivent n’ont pu être examinés lors de la séance ; ils sont maintenus toutefois dans leur forme écrite préparatoire, à l’attention de chacun.

4. Forum express

4.1. Un enseignement diversifié ?

a) Deux questions ont été posées par le même participant : on les rapproche ici pour une raison de contenu, non d'origine.

> 1. Dans le cadre de la formation à la sécurité routière, je dois pendant une heure avec ma classe parler et travailler sur les distances d'arrêt et les distances de sécurité. Je voudrais savoir s'il m'est possible d'intégrer cette heure dans mon chapitre sur la proportionnalité. (TB, CR, 4e, 20)
>
> 2. J'ai un élève de ma classe qui se destine à faire un apprentissage en carrosserie et ce dès l'année prochaine. Est-il possible pour cet élève de lui proposer un travail plus axé sur ce qu'il devra faire durant son année d'apprentissage ? (TB, CR, 4e, 22)

b) En même temps qu'il a une pertinence en lui-même pour la formation du futur citoyen, le thème de la sécurité routière participe, dans la classe de mathématiques, des moyens de diversification de l'enseignement prodigué. À quoi est-il raisonnable de le rattacher dans le programme de 4e ?

• La présentation du thème de convergence 6, intitulé *Sécurité*, comporte ce passage, qui souligne que, avec la question de la sécurité routière, on quitte l'empire de la proportionnalité.

> **Les mathématiques**, au travers d'un regard statistique, peuvent conduire les élèves à distinguer l'aléa, défini par sa fréquence et son intensité, du risque qui associe aléa et importance des enjeux humains. Par ailleurs l'information relative à la sécurité routière peut s'appuyer sur les connaissances mathématiques pour mettre en évidence les liens entre vitesse et distance d'arrêt, en tant qu'exemple de non-proportionnalité, entre vitesse et risques de mortalité.

• Que peut-on en conclure ? Il semble certes indispensable d'intégrer dans le chapitre sur la proportionnalité des exemples de *non-proportionnalité*. Le programme de 4e qui entrera en vigueur à la rentrée 2007 le prévoit d'ailleurs explicitement, du moins à propos du thème des représentations graphiques, puisqu'on y lit ceci.

> Les élèves travaillent sur des exemples de situations de proportionnalité et de non-proportionnalité.

• Toutefois, s'agissant de la sécurité routière, on peut songer à en inclure les problèmes mathématiques dans le cadre d'un PER intitulé par exemple « Risques & sécurité », qui fournirait à divers secteurs et domaines d'étude du programme *de mathématiques* tout à la fois des situations problématiques motivant leur étude et des domaines d'intervention permettant une mise au travail du fruit de cette étude. On n'entrera pas plus avant, ici, dans les contenus possibles (et pertinents) d'un tel PER.

c) Il n'y a pas de raison qu'un travail mathématique ayant quelque rapport avec la carrosserie ne soit proposé qu'à *un* élève : s'il vaut pour lui, il vaut pour toute la classe. D'une façon générale, il convient d'intégrer au travail de la classe des contenus et supports d'activité *mathématique* dont l'origine se trouve dans divers secteurs d'activité sociale ou professionnelle (dont la carrosserie…) susceptibles d'intéresser plus particulièrement, chaque fois, un ou plusieurs élèves de la classe. C'est là une heureuse façon de diversifier adéquatement l'enseignement proposé.

4.2. Transformations ?

a) On s'arrête maintenant sur les questions que voici.

1. Peut-on parler de transformation aux élèves ? Même si le mot est utilisé dans les accompagnements, ce n'est pas le cas dans les programmes. (SM2, MJ, 4e, 22)

2. Le programme de 4e indique, au sujet de la translation, qu'elle « doit nécessairement être regardée comme une transformation, parce qu'en répétant une même translation on ne revient pas à son point de départ ». Les symétries axiales et centrales sont-elles alors des transformations ? Que retenir comme définition pour les transformations ? (PP, MJ, 2de, 22)

3. Lorsque deux triangles sont semblables, leurs côtés sont proportionnels. Peut-on admettre que cette proportionnalité est valable pour les hauteurs ou faut-il le démontrer ? (VAC, MJ, 2de, 22)

b) L'usage du mot de transformation au collège est assez subtil.

1. Le mot « transformation » est utilisé dans les programmes du collège en tant que nom *non comptable*, comme dans ce titre du programme de 6e.

Dans le plan, transformation de figures par symétrie orthogonale par rapport à une droite (symétrie axiale).

« Transformation » en tant que nom *comptable* apparaît par ailleurs dans les *accompagnements* des programmes, comme dans ce passage relatif au cycle central.

Dans les configurations et transformations planes, le souci a été d'introduire une progressivité à la fois dans les contenus présentés et dans les démarches mises en place.

De manière générale, « une transformation », « les transformations » (cas comptable) appartiennent au « métalangage » utilisé à l'adresse des professeurs et des autres responsables de l'enseignement des mathématiques. Ainsi lit-on dans le texte *Les mathématiques au collège* (qui sert d'introduction aux futurs anciens programmes du collège) la formulation suivante de l'un des grands objectifs de l'enseignement des mathématiques au collège.

utiliser quelques transformations géométriques simples, telles symétries ou translations, permettant au delà des comparaisons de figures géométriques d'envisager l'espace géométrique tout entier…

Mais le mot ne fait pas clairement partie, en effet, du « langage objet » à utiliser en classe, même si l'on peut l'employer en entendant par là, simplement, une certaine manière de « transformer » une figure en une autre.

2. Dans cette perspective, il faut se garder d'interpréter erronément le passage mentionné dans la question 2 ci-dessus.

Par certains côtés, tels que les conservations d'alignements, les distances et les angles, la translation est proche des symétries, donc s'intègre bien à un univers avec lequel les élèves sont familiarisés. Mais elle doit nécessairement être regardée comme une transformation, parce qu'en répétant une même translation on ne revient pas à son point de départ.

Contrairement à ce qui est indiqué dans la question examinée, ce passage n'est pas extrait du *programme* mais bien de l'*accompagnement* du programme du cycle central. L'affirmation mise en cause utilise le mot « transformation » non pas au sens mathématique du terme, mais, se situant par rapport aux élèves, au sens « usuel » de transformation, *c'est-à-dire de « changement »*. S'il est clair qu'une symétrie centrale *change* certaines choses d'une figure (à moins que celle-ci ne soit symétrique par rapport à l'axe de la symétrie), la translation pourrait apparaître, par contraste, comme une « transformation » qui ne « change » rien. Ce que fait alors observer le texte cité ici est qu'elle change nécessairement la *position* de la figure (lorsque celle-ci est bornée). Attention donc à ne pas se méprendre sur ce balancement entre sens usuel et sens mathématique !

4.3. Nombres et calculs

a) On considère ici les deux questions suivantes.

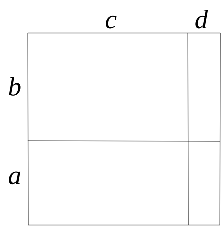
> 1. Dans le chapitre sur le calcul littéral, la double distributivité sera vue à partir de l'aire des quatre rectangles. Est-il utile, pour que les élèves retiennent la formule de la double distributivité, de se ramener sans cesse à cette configuration ? (SH, CR, 4e, 22)
>
> 2. En 2de, on demande aux élèves de savoir à quel ensemble ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) un nombre appartient. Il se pose le problème de montrer que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ appartient ou non à $\mathbb{D}$, c'est-à-dire peut se mettre sous la forme $\frac{c}{10^n}$. Pour cela, je ne vois comme technique (décrite sommairement) que 1) décomposer a et b en facteurs premiers, 2) réduire la fraction $\frac{a}{b}$, 3) regarder le dénominateur de la fraction réduite : si des fractions premiers différents de 2 et 5 apparaissent, alors la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas le représentant d'un décimal. Une autre technique pourrait consister à regarder le développement décimal à la calculatrice et voir si ce développement est périodique ou non. Problème : on se heurte aux problèmes d'affichage de la calculatrice. Y a-t-il une autre technique envisageable ? (AC, OS, 2de, 22)

b) Arrêtons-nous d'abord sur la première question.

1. La meilleure façon de mémoriser mais aussi de *démontrer* la double distributivité consiste à la tirer de… la distributivité simple :

$$(a + b)(c + d) = k(c + d) = kc + kd = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd.$$

2. Le recours, qui fait florès parmi les professeurs depuis quelques années, à un modèle aréolaire, à la manière antique, est à interroger.



• En réalité, ce « modèle » devrait être regardé ainsi : *si* la théorie naïve des aires est non contradictoire, *alors*, en vertu de l'additivité des aires et de la formule donnant l'aire d'un rectangle, on doit avoir l'égalité suivante : $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$. Or, comme le montre le petit travail algébrique conduit plus haut, on a bien l'égalité en question ! La théorie naïve des aires ne sera donc pas disqualifiée pour cette fois.

• Bien entendu, l'usage actuel au collège fonctionne « à l'envers » : tenant pour valide la théorie naïve des aires en question, on en *déduit* que, pour des nombres a, b, c, d strictement *positifs*, on a l'égalité exprimant la double distributivité. Cette manière de faire est certes légitime, mais elle est controuvée, même si elle répond, chez nombre de professeurs, à une croyance de psychologie spontanée (qui relève en fait de l'histoire culturelle) selon laquelle cela aiderait les élèves à « mieux comprendre », etc.

• Cela dit, la meilleure façon de s'approprier l'identité de double distributivité est de « mémoriser » (il s'agit d'une mémoire « des mains ») l'écriture suivante :

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd.$$

On écrira par exemple :

$$(2x + 3)(6 + x) = (2x + 3) \times 6 + (2x + 3) \times x = 12x + 18 + 2x^2 + 3x = 18 + 15x + 2x^2.$$

• On aura noté, en passant, que ce qu'on obtient n'est *a priori* valable que lorsque les nombres a, b, c, d sont *positifs*. Le problème de son utilisation lorsque l'un au moins de ces nombres est négatifs reste ouvert. Du point de vue des mathématiques « savantes », le problème est trivial autant que le résultat suivant, qui permet de le régler.

> Soit K un corps et soit $T_1, T_2, \ldots, T_n$ des parties *infinies* de K. Soit f un polynôme à n variables sur K. Si f est nul sur $T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n$, alors $f = 0$.

Cela noté, le problème reste ouvert dans une classe de 4e où l'on se serait contenté de la « démonstration par les aires ».

c) Par définition, un nombre décimal positif est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{c}{10^n}$ avec $c, n \in \mathbb{N}$. Étant donné alors une fraction d'entiers positifs $\frac{a}{b}$, déterminer si sa valeur est décimale revient à chercher s'il existe un entier $c, n \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait

$$\frac{c}{10^n} = \frac{a}{b}.$$

1. On peut rechercher s'il existe n tel que $\frac{a}{b} \times 10^n$ soit entier. Soit N le premier entier tel que $2^N \geq b$. Alors, s'il existe un entier n satisfaisant la condition indiquée, cela se produit pour un entier $n \leq N$. On recherche donc n parmi les entiers de 0 à N. Par exemple, pour

$$\frac{273}{364}$$

il suffit de chercher pour $n \leq 9$ (puisque $2^9 = 512$). En fait, comme $\frac{273}{364} = 0{,}75$, on peut conclure. Prenons maintenant $\frac{231}{364}$; on a cette fois :

$$\frac{231}{364} =_{\text{c}} 0{,}6346153846153846153846153846153846$$

Comme, ici, on a encore $N = 9$, on peut aussi conclure : $\frac{231}{364}$ n'est pas décimal. Considérons maintenant

$$\frac{8090493753537}{14421875} =_{\text{c}} 560987{,}649216.$$

Ici, on a $N = 24$; si le résultat de la calculatrice est exact (et non pas seulement approché), l'affaire est donc faite ! Pour vérifier, on peut calculer plus de décimales éventuelles : l'utilisation de calculatrices plus puissantes (en ligne et gratuites…) montre en fait que le quotient donné est *exact*. On peut ainsi conclure.

2. On peut aussi dégager le facteur b' non divisible par 2 et par 5 tel que $b = 2^{\alpha}5^{\beta}b'$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. On a par exemple : 364 ÷ 2 = 182 ; 182 ÷ 2 = 91. Si 91 divise 231, alors la valeur de $\frac{231}{364}$ est décimale ; sinon, non. Or $\frac{231}{91}$ = 2,538… En revanche on a : $\frac{234}{91}$ = 3. De même, il vient : 14421875 ÷ 5 = 2884375 ; 2884375 ÷ 5 = 576875 ; 576875 ÷ 5 = 115375 ; 115375 ÷ 5 = 23075 ; 23075 ÷ 5 = 4615 ; 4615 ÷ 5 = 923. Le nombre b' = 923 divise-t-il le numérateur ? On a : 8090493753537 ÷ 923 = 8765432019. La fraction examinée a donc pour valeur un nombre décimal. D'une façon générale, l'utilisation d'un tableur permet d'accélérer nombre de calculs envisagés ici.

3. Bien entendu, il est possible aussi d'utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD des deux nombres ; ou, plus modestement, de procéder d'abord sur la fraction à des simplifications « évidentes ». Etc.

4.4. Archives du Séminaire, archives du métier

a) Considérons d'abord les deux questions suivantes.

1. Dans quelle mesure peut-on traiter en 4[e] les puissances de 10 comme un exemple de puissances d'un nombre relatif quelconque ? (JL, CR, 4[e], 22)

2. Comment motiver l'étude des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$? Quelles sont les raisons d'être de l'enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique ? (ML, MJ, 2[de], 22)

Dans ces deux cas, on trouvera des indications importantes dans les *Archives du Séminaire*.

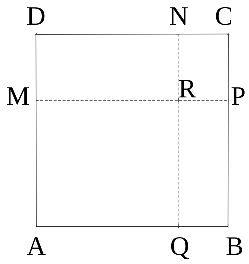
b) La question suivante relève-t-elle ou non du même cas de figure ?

Pour notre mémoire, nous aurions aimé parler des raisons d'être de la division des fractions mais nous n'avons pas trouvé d'information à ce sujet dans les archives du Séminaire. Où pourrions-nous trouver des éléments de réponse ? (PV, MJ, 2[de], 22)

Le travail fait cette année devrait permettre de dégager *par exemple* la réponse que voici.

Si la mesure d'une grandeur X attachée à un système S est, par rapport à une certaine unité u, égale à $\frac{a}{b}$ tandis que la mesure d'une autre grandeur Y attachée au même système est, par rapport à une unité v, égale à $\frac{c}{d}$, la grandeur quotient $Z = X/Y$ attachée à ce système sera mesurée par le nombre z tel que $\frac{c}{d} \times z = \frac{a}{b}$.

1. Considérons l'illustration suivante. Dans un champ carré ABCD de côté de mesure unité, on isole une parcelle AMRQ en prenant AM = $\frac{2}{3}$ et on cherche à placer le point N de façon que l'on ait : Aire AMRQ = $\frac{1}{2}$. Que doit valoir DN pour qu'il en soit ainsi ?



On doit avoir ici : $\frac{2}{3} \times$ DN = $\frac{1}{2}$.

2. La résolution de l'équation générique $\frac{c}{d} \times z = \frac{a}{b}$ a été étudiée cette année même : en multipliant les deux membres de l'égalité par *bd*, on obtient $bc \times z = ad$, en sorte qu'on a : $z = \frac{ad}{bc}$. Dans le cas du champ, il vient ainsi : DN = $\frac{3}{4}$.

3. Bien entendu, on observera ensuite que l'on a : $z = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$. Etc.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2006-2007

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 24 : mardi 22 mai 2007

Programme. 0. Questions de la semaine // 1. À propos du C2i2e encore // 2. Enseigner les mathématiques : entre hier et demain // 3. Grands problèmes de notre temps

0. Questions de la semaine

Journée 24 (22 mai 2007)
Tuteur : [MJ, CR, OS]

Mathilde Peyron
Classe : 4e (et soutien en 5e)

Les cours avec mes élèves s'arrêtent officiellement le 7 juin. Mais les conseils de classe finissant le 30 mai, les élèves m'ont dit qu'ils ne venaient plus après. Faut-il donc essayer de finir le programme avant, ou leur laisser prendre leurs responsabilités ?

1. À propos du C2i2e encore

1.1. Calendrier : mise à jour

a) Les ultimes séances de préparation au C2i2e seront en principe réalisées *dans la semaine du 4 au 9 juin* : chacun sera prévenu en temps utile de la date, de l'horaire, du lieu de ces séances en ce qui le ou la concerne.

b) La date limite pour insérer des pièces dans son portfolio, fixée jusqu'ici au mardi 29 mai, est reportée au *dimanche 10 juin*.

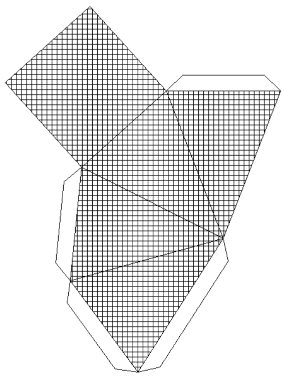
c) La validation des portfolios prendra fin le mercredi 20 juin ; les attestations pourront être obtenues à partir du *jeudi 21 juin*. En cas de non-validation du C2i2e, une attestation sera fournie qui détaillera les compétences validées. Cette attestation devrait être prise en compte, quelle que soit l'académie d'affectation, pour l'obtention du C2i2e lors de l'année de T1. (La réponse apportée conjecturalement, dans le numéro 1 d'*Excursus*, à une question de YB n'est donc pas confirmée.)

1.2. Repères & balises : quelles compétences ?

a) Pour presque chacune des tâches réalisées ou évoquées dans ce Séminaire et mettant en jeu des TIC d'une façon ou d'une autre, on a tenté d'identifier un ou plusieurs items du référentiel des compétences dont relèverait cette tâche. On effectue ici ce travail sur le contenu du numéro 2 du bulletin *Excursus*.

b) Le premier emploi des TIC visible figure dans le passage suivant.

1) Utilisant la figure dynamique Géoplan contenue dans le fichier pyramide.g2w, le professeur imprime *en vraie grandeur* (voir, là-dessus, le document *C2i2e – Repères & balises*) un petit nombre de patrons (6 par exemple), chacun en un nombre d'exemplaires déterminé comme on va le voir par l'effectif de la classe, et chacun faisant l'objet d'une sauvegarde à part (fichiers pyramide-*n*.g2w, où $n = 1, 2, \ldots, 6\ldots$).

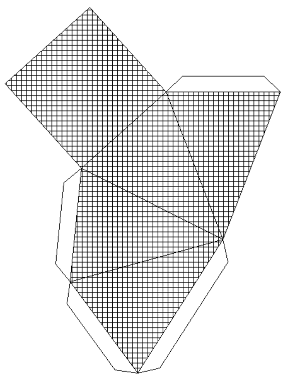


Ce type d'usage des TIC – fabrication d'un matériel didactique « traditionnel » à l'aide d'un logiciel – ne relève pas, en réalité, du C2i2e mais du C2i *niveau 1*. Le référentiel de ce certificat fait en effet apparaître un domaine de compétences B4, « Réaliser des documents destinés à être imprimés », décliné en 6 compétences dont la dernière, la compétence B.4.6, est libellée ainsi (v. http://c2i.education.fr/C2i1/documents/f_referentiel.htm).

6. Créer des schémas (formes géométriques avec texte, traits, flèches et connecteurs, disposition en profondeur, groupes d'objets, export sous forme d'image).

En revanche, si l'on modifie légèrement – comme ci-dessous – le scénario envisagé dans l'extrait du numéro 2 d'*Excursus* reproduit plus haut, on entre dans le cadre du C2i2e.

1) Le professeur fournit à chaque binôme d'élèves le fichier pyramide.g2w contenant la figure dynamique dont un exemple est reproduit ci-après. Sous la direction du professeur, les élèves donnent aux paramètres définissant cette figure des valeurs déterminées qui leur ont été communiquées par le professeur (de façon qu'un même jeu de valeurs soit utilisé par au moins deux binômes de la classe), font une sauvegarde de la figure ainsi obtenue, puis impriment cette figure *en vraie grandeur* (voir, là-dessus, le document *C2i2e – Repères & balises*).



Le travail du professeur que l'on vient d'évoquer relève à l'évidence du domaine de compétences B.2, « Conception et préparation de contenus d'enseignement et de situations d'apprentissage ». Il peut notamment être rattaché à la compétence B.2.3, ce qui conduit à introduire la balise suivante (en bleu).

B.2.3. « Intégrer des outils et des ressources dans une séquence d'enseignement, en opérant des choix entre les supports et médias utilisables et leurs modalités d'utilisation »

a) *Repères*

b) *Balises*

• …

• Cette compétence peut s'exprimer à travers la conception et l'organisation de la fabrication par les élèves, à l'aide d'une figure dynamique idoine, de patrons de solides utilisé ensuite dans une activité mathématique déterminée.

• …

c) Un second usage des TIC est préconisé dans le passage que voici.

2) Chaque élève reçoit l'un de ces patrons et procède *sur ce patron* aux mesurages à la règle graduée permettant de calculer l'aire latérale $\mathcal{L}$ des deux manières déjà vues. Cela permettra notamment de vérifier que les deux formules obtenues, $\mathcal{L} = 2\,b\ell$ et $\mathcal{L} = 2b\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$, donnent des résultats proches. (La seconde formule, on le notera, propose un problème d'organisation du calcul non trivial à ce niveau.)

3) Cela fait, le professeur conduit la confrontation des résultats numériques obtenus, sur le même patron, par les différents élèves concernés.

4) Le professeur organise ensuite une séance de travail sur les figures (« statiques ») contenues dans les fichiers pyramide-*n*.g2w où les élèves, regroupés en binômes ayant travaillé sur le même patron pourront créer u = aire du triangle ABS (par : **Créer ► Numérique ► Calcul géométrique ► Aire d'un Triangle**) puis créer et faire afficher L = 4∗u. (Le fichier pyramide.g2w comporte déjà ces créations : le professeur les supprimera donc des fichiers pyramide-*n*.g2w mis à la disposition des binômes d'élèves.)

5) La conformité des résultats issus des mesurages avec les valeurs de $\mathcal{L}$ affichées par le logiciel Géoplan sera alors examinée : dans tel cas, on trouve par mesurage sur le patron $a \approx 7{,}9$, $b \approx 2{,}4$, et donc $\mathcal{L} \approx 37{,}5$, tandis que Géoplan affiche 37,7 ; etc.

• On peut voir en ce cas la mise en œuvre de *deux* des compétences du domaine B.2 recensées par le référentiel officiel. Tout d'abord, la tâche accomplie par le professeur relève de la compétence B.2.2, « Concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de classe ». Mais elle renvoie aussi à la compétence B.2.1, « Identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE ». Ceci conduit à introduire les deux balises suivantes.

B.2.1. « Identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE »

a) *Repères*

b) *Balises*

• …

• Cette compétence peut s'exprimer par l'identification de l'usage possible, par les élèves, d'un logiciel (par exemple de géométrie) pour vérifier une conjecture ou une information (à propos par exemple de l'aire d'une région du plan).

• …

B.2.2. « Concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de la classe »

a) *Repères*

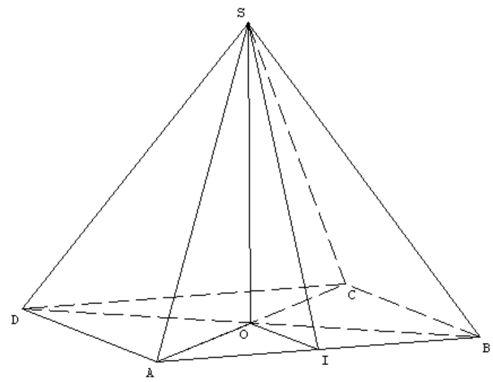
b) *Balises*

• Cette compétence peut s'exprimer par la conception d'une activité dans laquelle les élèves ont à utiliser un logiciel (par exemple de géométrie) pour vérifier une conjecture ou une information (à propos par exemple de l'aire d'une région du plan).

• …

• Un troisième emploi, très voisin du précédent, est encore mentionné.

6) Cela noté, ce qui est appelé la hauteur h est la longueur du segment [SO].



Comment alors déterminer la hauteur d'une pyramide donnée par un patron du type utilisé plus haut ? On peut fabriquer cette pyramide et mesurer – approximativement – sa hauteur par un procédé physique approprié. On peut aussi tenter de la *calculer* à partir des mesures qui définissent entièrement la pyramide, à savoir les paramètres b et a ou b et ℓ. Sur la figure ci-contre, on aperçoit que l'on a ainsi (d'après le théorème de Pythagore) : $h^2 = \mathrm{SO}^2 = \mathrm{SA}^2 - \mathrm{AO}^2$; comme $\mathrm{AO} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}$ et que $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = 2b^2$, on a $\mathrm{AO}^2 = \frac{b^2}{2}$ (ce qu'on retrouve en considérant le triangle AIO par exemple). Il vient donc : $h^2 = \mathrm{SA}^2 - \mathrm{AO}^2 = a^2 - \frac{b^2}{2}$ et, de là, $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}$. On a ainsi :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} B\,h = \frac{b^2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}.$$

7) On peut utiliser la figure dynamique contenue dans le fichier pyramide.g3w pour faire afficher d'une part la valeur de l'expression $V = \frac{AB^2}{3}\sqrt{SA^2 - \frac{AB^2}{2}}$, d'autre part, en « créant » le solide s = SABCD, puis en créant (par : **Créer ► Numérique ► Calcul géométrique ► Volume d'un solide**) la valeur de son volume V' : on constatera ainsi l'accord entre les deux valeurs du volume présumé.

Cette tâche relève encore des deux compétences B.2.1 et B.2.2 : il suffit pour en tirer une balise de modifier légèrement les deux balises introduites précédemment.

B.2.1. « Identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE »

a) *Repères*

b) *Balises*

• …

• Cette compétence peut s'exprimer par l'identification de l'usage possible, par les élèves, d'un logiciel (par exemple de géométrie) pour vérifier une conjecture ou une information (à propos par exemple de l'aire d'une région du plan ou du volume d'une région de l'espace).

• …

B.2.2. « Concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de la classe »

a) *Repères*

b) *Balises*

• Cette compétence peut s'exprimer par la conception d'une activité dans laquelle les élèves ont à utiliser un logiciel (par exemple de géométrie) pour vérifier une conjecture ou une information (à propos par exemple de l'aire d'une région du plan ou du volume d'une région de l'espace).

• …

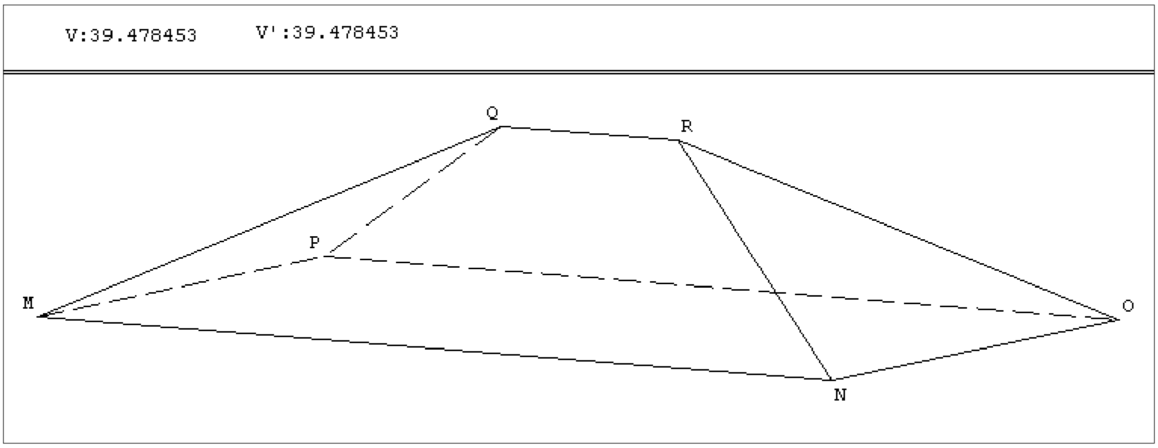
• Les deux balises précédentes sont encore activées dans le passage suivant (ainsi que dans un autre de même facture, que l'on ne reproduit pas ici).

1) On aura vu, dans la page reproduite ci-dessus, la formule relative à un tas (de pierres, de sable, etc.) se terminant par une arête supérieure (l'arête faîtière). Cette formule est-elle valide ? On notera d'abord que celle figurant dans l'ouvrage résulte d'un *lapsus calami* aisément rectifiable, notamment à l'aide de l'exemple numérique proposé ; elle devrait être celle-ci

$$V = \frac{(2A + a) \times B \times h}{6}$$

où A et B sont respectivement la longueur et la largeur du rectangle de base, *a* la longueur de l'arête supérieure, *h* la hauteur, c'est-à-dire la longueur de [QH].

2) Comment *vérifier* cette formule ? Une manière de le faire est de confronter les résultats qu'elle donne à ceux que donne le logiciel Géospace. En l'espèce, on obtiendra par exemple ceci (où V est le volume calculé par le logiciel, V' celui donné par la formule à tester).



d) Plus loin dans le numéro 2 d'*Excursus* se trouve à nouveau travaillée la question des *changements d'unités*.

f) Lorsque les changements d'unités sont « classiques », on peut vérifier à l'aide d'un convertisseur en ligne (*par exemple* celui que l'on trouvera à l'adresse http://1000conversions.com/.) La recherche et l'examen d'un convertisseur (en anglais : *Unit Converter*) peut constituer un PER intéressant.

• Ce passage renvoie doublement à la compétence B.2.2, ce qui conduit à introduire les deux balises suivantes.

B.2.2. « Concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de la classe »

a) *Repères*

b) *Balises*

• Cette compétence peut s'exprimer par la conception d'une activité dans laquelle les élèves effectuent des conversions de mesures, d'une part au moyen du « calcul avec unités » (en s'aidant d'une calculatrice pour les calculs numériques), d'autre part au moyen d'un convertisseur en ligne ou téléchargeable et gratuit.

• Cette compétence peut s'exprimer dans le travail de conception d'un scénario didactique pour une classe de collège qui ait pour objectif la recherche et l'identification de convertisseurs d'unités en ligne ou téléchargeables et gratuits.

• …

• On peut voir aussi dans la première préconisation du passage examiné ici un cas relevant du domaine B.3, « Mise en œuvre pédagogique », et plus particulièrement la compétence B.3.2 ; cela conduit à introduire la balise suivante.

B.3.2. « Gérer l'alternance, au cours d'une séance, entre les activités utilisant les TICE et celles qui n'y ont pas recours »

a) *Repères*

b) *Balises*

• Cette compétence peut s'exprimer dans la conduite en classe d'une activité combinant la réalisation « à la main » d'un certain type de calcul (par exemple de changement d'unités au moyen du « calcul avec unités ») et la vérification des résultats obtenus par le recours à un logiciel spécifique (par exemple un convertisseur d'unités en ligne ou téléchargeable et gratuit).

• …

1.2. Repères & balises : quels travaux ?

a) On procède maintenant au travail de balisage « à l'envers », en partant des compétences pour envisager ensemble des exemples d'utilisation des TIC qui pourrait se traduire par l'introduction d'une balise et en se limitant à certaines des compétences les moins balisées jusqu'ici, en l'espèce les trois premières compétences du domaine B.3, *« Mise en œuvre pédagogique »*.

b) Les participants groupés en binôme indiquent par écrit des exemples (précis) d'utilisation de TIC relevant des compétences rappelées ci-après.

1. Conduire des situations d'apprentissage en tirant parti du potentiel des TIC : – travail collectif, individualisé, en petits groupes ; – recherche documentaire.	*
2. Gérer l'alternance, au cours d'une séance, entre les activités utilisant les TICE et celles qui n'y ont pas recours.	*
3. Prendre en compte la diversité des élèves, la difficulté scolaire en utilisant les TICE pour gérer des temps et des modalités de travail différenciés, en présentiel et/ou à distance.	*

2. Enseigner les mathématiques : entre hier et demain

2.1. Un avenir incertain

a) La place des mathématiques dans l'enseignement secondaire a été si anciennement conquise qu'on est parfois porté à y voir un droit inaliénable de la gent mathématicienne. Fruit de longues luttes entamées dès la seconde moitié du XVI^{e} siècle, dont les victoires s'accumulent à la fin du XVII^{e} siècle avec la création de chaires de mathématiques dans un nombre croissant de « collèges », l'enseignement secondaire des mathématiques achève peut-être sous nos yeux un cycle de vie de longue durée.

b) Dans cette perspective, il n'est pas déraisonnable de regarder la diminution des horaires de mathématiques depuis deux décennies comme un effet plus qu'une cause, écho institutionnel d'une dégradation épistémologique et culturelle corrélative de l'avènement progressif d'un rapport scolaire aux savoirs mathématiques tout à la fois formaliste et nonchalant, ludique et vaguement esthétisant. L'enseignement actuel ressemble ainsi, trop souvent, à une visite guidée de monuments mathématiques autrefois vivants mais dont les raisons d'être, les fonctions vitales ont cessé d'être comprises et reconnues.

c) Ce processus de *monumentalisation* est allé de pair, dans la deuxième moitié du XX^{e} siècle, avec un mouvement de *« purification » épistémologique* qui a fait disparaître à peu près tout moyen de rendre sensible le rôle de la connaissance mathématique dans la production et la compréhension raisonnée des sociétés et de la vie des hommes. Le problème posé par cette évolution historique n'est sans doute pas de ceux que l'on pourra résoudre à vil prix. Il suppose un profond *aggiornamento*, fondé sur une *nouvelle épistémologie scolaire*. Par delà la crise actuelle, quel avenir pourrons-nous donner à l'enseignement des mathématiques, de la maternelle à l'université ?

2.2. La lente dérive du continent mathématique

a) Depuis plusieurs années, en France et ailleurs, on observe avec inquiétude une baisse sensible de l'attrait des études scientifiques. Entre 1995 et 2001, le nombre d'étudiants inscrits dans les DEUG scientifiques (sciences et structure de la matière, sciences de la nature et de la vie) est passé de 52 478 à 32 946, soit une diminution de plus de 37 % : la perte de substance est spectaculaire. Ce tableau est bien sûr incomplet et, à certains égards, trompeur. Sur la même période, le nombre d'élèves entrant dans les classes de mathématiques supérieures reste stable, passant de 14 037 en 1992 à 14 850 en 2001 (avec un « pic » de 16492 en 1995). Plus spectaculairement, on assiste de 1985 à 2000 au *doublement* du nombre d'ingénieurs diplômés. (Pour un tableau plus complet, voir la note de synthèse due à Pierre Arnoux : http://educmath.inrp.fr/Educmath/etudes/pierre-arnoux/.)

b) La complexité des évolutions constatées s'inscrit à l'intérieur d'un mouvement d'ampleur « géologique » qui éloigne des sciences de la nature et des mathématiques le centre de gravité de la formation des nouvelles générations. Dans une étude intitulée *Que faire des universités ?* (Bayard Éditions, Paris, 2002), le philosophe Alain Renaut souligne à cet égard la surcharge durable des effectifs dans les disciplines de tradition « littéraire ».

> Plus d'un tiers des étudiants des cursus de lettres et sciences humaines (500 000), contre un peu moins de 350 000 en droit et sciences économiques, un peu plus de 200 000 en sciences et 140 000 dans les secteurs de santé : répartition là encore très inégale, où la proportion des inscrits en lettres et en sciences humaines, même si elle diminue quelque peu depuis un sommet atteint en 1994-1995 (38 %), est étonnamment forte dans des filières sans beaucoup de débouchés professionnels directs.

Le même auteur précise encore ceci.

> … les filières les plus peuplées sont devenues celles où l'ouverture sur des professions liées au contenu des études est par définition la moins évidente. Ainsi y a-t-il actuellement plus de 13 000 étudiants en philosophie inscrits dans nos universités, dont plus de 2 000 entament leur quatrième année…

Si l'on examine cette situation du point de vue des débouchés qu'offre le professorat de l'enseignement secondaire, la conclusion n'est guère douteuse : il y a à la fois pléthore de postulants potentiels en philosophie (par exemple) et appauvrissement du « vivier » de candidats en mathématiques.

c) L'évolution actuelle avait été prévue dès 1970 par l'historien Antoine Prost (« De quelques problèmes universitaires en France et aux États-Unis », *Esprit*, février 1970), dont les analyses peuvent aider à comprendre le phénomène que l'on observe depuis une décennie au moins : cet auteur se demandait en effet si « un enseignement supérieur de masse peut ne pas être massivement *littéraire* ». De fait, c'est aux formations « littéraires » (au sens large) que l'explosion démographique des universités a le plus largement « bénéficié », en accroissant leur public dans des proportions sans commune mesure avec celles qu'ont pu enregistrer les autres formations. Comment, dès lors, ne pas se demander, avec A. Prost, « si la croissance des enseignements supérieurs littéraires n'est pas, précisément, le signe d'une mutation irréversible dans la fonction même de l'enseignement supérieur » ? Le motif de cette évolution se trouverait dans un changement profond de la *signification sociale et culturelle des études supérieures* : « L'enseignement supérieur deviendrait un complément de culture générale sans finalité professionnelle explicite, une sorte d'équivalent de ce qu'étaient les lycées de 1920. » La progressive dérive du continent mathématique (et, plus largement, « scientifique ») à l'intérieur du système éducatif est l'un des problèmes cruciaux auxquels responsables et acteurs de l'enseignement des mathématiques doivent s'affronter aujourd'hui.

2.3. Les dangers d'une réaction obsidionale

a) Devant ce problème, la « famille mathématique », naguère encore si prospère et sûre d'elle-même, se trouble. Pour faire face à l'effondrement annoncé du monde ancien, d'aucuns sont tentés de construire une *« arche de Noé » mathématique* (ou mathématico-scientifique), au prix d'une rupture franche de l'École de la République en une pluralité de filières hétérogènes, et au risque de faire de l'École l'image spéculaire d'un monde social lui-même fragmenté. Ce climat de nostalgie, qui touche, semble-t-il, tous les niveaux d'activité et de responsabilité, n'ouvre guère de voie d'avenir. Surtout, il fait apparemment sans regret ni remords le sacrifice de la *diffusion des connaissances mathématiques hors du cénacle de la famille mathématique*, dans la foule bigarrée et innombrable des non-mathématiciens qui ont, qu'ils en aient conscience ou non, des *besoins mathématiques*. Du même coup, il renonce à *penser* et à affronter le problème posé par la dérive du continent mathématique pour se contenter d'en compenser localement – et momentanément – les effets jugés délétères pour la survie de la « famille mathématique » *stricto sensu*.

b) S'il est vrai que ce mouvement de repli est une réaction passionnelle au mouvement d'excentration des mathématiques au sein du système éducatif français, on peut le regarder aussi comme *l'une des causes* les plus effectives d'une telle dérive. On notera d'abord, de ce point de vue, la corrélation entre deux ordres de faits : en bien des cas, la réaction à la dérive centrifuge du continent mathématique va de pair avec une propension – au moins idéologique – à l'*autarcie épistémologique*, voire à l'*autisme disciplinaire*. Pour quelques-uns même, le repliement recherché comme salvateur pourrait prendre pour devise : les mathématiques, rien que les mathématiques et, par conséquent, *pas toutes* les mathématiques ! Le mot d'ordre de pureté épistémologique conduit en effet à exclure une bonne part des mathématiques *naissantes* et même déjà des mathématiques *récentes* dès lors qu'elles ont le démérite d'apparaître comme le fruit de l'union du mathématique et du non-mathématique. En cela les « mainteneurs » d'une tradition qui se meurt feignent d'ignorer le fait historique essentiel du développement des mathématiques *à partir de leurs périphéries*, au contact des problèmes soulevés en d'autres champs de l'activité humaine.

c) À titre d'illustration d'une telle posture obsidionale, on citera ici un plaidoyer *contre* l'introduction des probabilités en classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques dû à un ancien président de l'Union des professeurs de Spéciales. Professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand à Paris, son plaidoyer est présenté comme une réaction à une réunion de travail tenue à l'ENS de la rue d'Ulm le 8 juin 2000 sur le thème *Quelles mathématiques enseigner en classes préparatoires aux grandes écoles ?* L'auteur écrit abruptement : « Personnellement, la simple perspective d'un problème de probas à l'ENS Ulm me ferait changer de carrière. » Pourquoi cela ? Voici.

Depuis que le débat a été lancé, je me suis plongé dans divers ouvrages de probabilités. Disons que l'on peut les classer en deux catégories : les ouvrages de modélisation, les ouvrages de théorie. Les premiers (correspondant en gros au programme de probas en prépas commerciales), s'ils sont intéressants du point de vue des activités de modélisation, n'apportent strictement rien du point de vue des objectifs d'apprentissage de la démonstration et de la rigueur dont je parlais ci-dessus ; ils consistent à reconnaître sur un problème donné un cadre probabiliste déjà rencontré (probabilités indépendantes, probabilités conditionnelles, lois de Bernoulli, normale, hypergéométrique, de Poisson, uniforme, gaussienne) et à appliquer les formules correspondantes, avec éventuellement à la fin une réflexion sur la pertinence de la modélisation. Quant aux ouvrages de théorie ils dépassent de loin en abstraction et en pré-requis les possibilités de nos élèves (théorie de la mesure, espaces de Hilbert, chaînes de Markov, martingales, mouvement brownien, calcul différentiel stochastique, etc.). Ni les uns, ni les autres ne correspondent à nos besoins (sauf les premiers pour certains TIPE).

Les TIPE que mentionne l'auteur sont les *travaux d'initiative personnelle encadrés*, introduits en CPGE à la rentrée 1995 et qui ont inspiré les TPE (travaux personnels encadrés) mis en place au lycée à la rentrée 2000. On aura noté l'usage stigmatisant du terme *modélisation* : l'activité de modélisation est ici présentée comme *didactiquement peu pertinente* car elle viendrait *toujours trop tôt* dans les cursus de formation, et *mathématiquement ambiguë*, voire *malsaine*, car on y manipulerait par force des mathématiques peu solides. Or, en règle générale, les germes de mathématiques nouvelles apparaissent d'abord cristallisées en des *modèles* de phénomènes souvent extramathématiques, d'où ils émergent pour s'étoffer et se déployer en autant de nouvelles *théories mathématiques* inédites, que leurs servants tenteront alors de faire accréditer comme appartenant authentiquement au continent mathématique. C'est à la reconnaissance de ces processus historiques fondamentaux de création de mathématiques que s'opposent donc, parfois avec la dernière énergie, les gardiens autoproclamés du sanctuaire mathématico-mathématique qui, rejouant l'antique scénario des pressions barbares sur les marches romaines, refusent ces mathématiques tard venues – mathématiques de la frontière qui ne demandent pourtant qu'à trouver place aux marges de la cité mathématique.

2.4. Hier encore : les mathématiques mixtes

a) L'attitude de refus parfois exacerbé à l'endroit des mathématiques « métisses » est, dans la longue durée historique, un fait relativement récent. Pour mieux le voir, il faut revenir aux premières décennies du XVII^e siècle, où s'inaugure un climat d'ouverture épistémologique qui durera deux bons siècles. Vers 1600 en effet un changement essentiel intervient par lequel les élites intellectuelles, renonçant prudemment à toute prétention en matière de « surnature », dont les Églises conservent le monopole brutal, se vouent à l'étude du monde d'ici-bas. De ce basculement un historien fait en peu de mots la peinture suivante (Jean Rohou, *Le XVII^e siècle, une révolution de la condition humaine*, Éditions du Seuil, Paris, 2002, p. 201).

C'est au début du XVII^e siècle que l'on construit de nouveaux cadres de pensée, dans une nouvelle perspective : le droit, la politique et surtout la science et la philosophie se libèrent de la théologie, des autorités traditionnelles et plus généralement d'une rationalité de soumission pour élaborer des méthodes destinées à satisfaire les intérêts temporels des hommes. Désormais, il s'agit moins de s'intégrer à l'ordre des choses que d'en maîtriser le fonctionnement à son profit, et les principes comptent moins que les effets, vérifiés par l'expérience.

Le renoncement porte aussi sur les affaires de la Cité, dont l'État garde l'absolu monopole. Ainsi nombre d'intellectuels se font-ils « philosophes naturels », en donnant pour unique objet à leur soif de connaissance et d'action la seule *nature*. À propos de cette révolution scientifique et culturelle, dont les hérauts ou les artisans les plus illustres sont en Angleterre Francis Bacon (1561-1626) et, en Italie, Galilée (1564-1642), l'historien déjà cité note ceci encore (*op. cit.*, p. 202).

> Autant ou plus que la Renaissance, la première moitié du XVII^e siècle européen est marquée par un effort exceptionnel des hommes pour s'approprier leurs conditionnements. Peut-être n'y avait-il pas eu, depuis l'Antiquité, de savant, de philosophe, d'homme politique ou de juriste aussi importants, aussi novateurs que Galilée, Descartes, Richelieu ou Grotius. Les principaux penseurs ne sont plus des héritiers – théologiens, philosophes contemplatifs, sages, érudits, lettrés –, propagateurs ou restaurateurs de l'ordre originel, comme ce fut le cas de Thomas d'Aquin à Calvin et d'Érasme à Montaigne. Ce ne sont pas encore des politiques, comme le seront Hobbes, Spinoza, Locke, Voltaire et Rousseau : il n'est pas encore possible de prétendre changer l'ordre social – surtout dans la France absolutiste. Mais on peut déjà chercher à maîtriser la nature. Ce sont donc des savants – Bacon, Galilée, Descartes, Gassendi –, ardemment engagés dans une activité dont leurs prédécesseurs réprouvaient la prétention et dédaignaient les applications. C'est avec eux qu'apparaît la science moderne.

b) C'est dans ce contexte d'effervescence intellectuelle que, par un essai fameux, publié en 1618, intitulé *Il Saggiatore* (« L'Essayeur »), Galilée installe les mathématiques au cœur de la connaissance du monde naturel, traçant ainsi le programme de travail des siècles à venir.

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere si prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne unamente parola ; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.
>
> [La philosophie est écrite dans ce grand livre qui continuellement est ouvert devant nos yeux – je veux dire l'univers –, mais qui ne se peut comprendre si l'on n'apprend pas d'abord la langue et les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langue mathématique, et les caractères sont des triangles, des cercles et d'autres figures géométriques, sans l'aide desquels il est impossible d'en comprendre un seul mot ; sans lesquels on ne fait que s'agiter en vain en un obscur labyrinthe.]

Pour Bacon, ses contemporains et ses successeurs, le continent mathématique est essentiellement ouvert à des aventures scientifiques *à la rencontre du mathématique et du non-mathématique*, ce que résume alors une expression clé, celle de *mathématiques mixtes*. Ces « sciences mathématiques mixtes » s'établissent, sur le continent mathématique, à la périphérie des mathématiques « pures » (ce n'est qu'au XIX^e siècle que l'expression « mathématiques mixtes » sera remplacée par l'expression, aujourd'hui courante, de mathématiques *appliquées*). Dans *The Advancement of Learning* (1605), Bacon les présente ainsi (la traduction française ci-après est due à Michèle Le Dœuff : Francis Bacon, *Du progrès et de la promotion des savoirs*, Gallimard, Paris, 1991, p. 130-131).

> The mathematics are either pure or mixed. To the pure mathematics are those sciences belonging which handle quantity determinate, merely severed from any axioms of natural philosophy ; and these are two, geometry and arithmetic ; the one handling quantity continued, and the other dissevered. Mixed hath for subject some axioms or parts of natural philosophy, and considereth quantity determined, as it is auxiliary and incident unto them. For many parts of nature can neither by invented with sufficient subtilty, nor demonstrated with sufficient perspicuity, nor accomodated unto use with sufficient dexterity, without the aid and intervening of the mathematics ; of which sort are perspective, music, astronomy, cosmography, architecture, enginery, and divers others.
>
> [Les mathématiques sont soit pures soit mixtes {c'est-à-dire mêlées de matière}. Appartiennent aux mathématiques pures les sciences qui traitent de la quantité définie, absolument séparée de tout axiome de philosophie naturelle ; il y en a deux, la géométrie et l'arithmétique. La première traite de la quantité continue, la seconde de la quantité discrète. Les mathématiques mixtes ont pour objet quelques axiomes

ou parties de la philosophie naturelle, et elles s'occupent de la quantité déterminée en tant que celle-ci leur est annexe et secondaire. Car nombreuses sont les parties de la nature qui ne peuvent être découvertes de manière suffisamment sagace, ni mises en évidence de manière suffisamment fine, ni adaptées à l'utilité d'une manière suffisamment adroite, sans l'aide et l'intervention des mathématiques. De cette espèce sont l'optique, la musique, l'astronomie, la géographie, l'architecture, la science des machines, et quelques autres.]

Et Bacon d'ajouter encore ceci.

And as for the Mixed Mathematics, I may only make this prediction, that there cannot fail to be more kinds of them, as nature grows further disclosed. Thus much of Natural Science, or the part of nature speculative.

[Quant aux mathématiques mixtes, je me permettrai simplement cette prédiction : de plus nombreuses espèces de ces mathématiques ne peuvent manquer d'apparaître à mesure que la nature sera davantage découverte. En voilà assez de la science naturelle, ou de sa partie spéculative.]

d) Un siècle et demi après Bacon, la notion de mathématiques mixtes figure encore en bonne place dans l'article « Mathématique ou mathématiques » rédigé par d'Alembert pour l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* (1751-1772) qu'il dirige avec Diderot.

Les Mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle *Mathématiques pures*, considère les propriétés de la grandeur d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second, par l'étendue : dans le premier cas, les Mathématiques pures s'appellent Arithmétique, dans le second, Géométrie [...] La seconde classe s'appelle *Mathématiques mixtes* ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire, de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers [...]. Du nombre des Mathématiques mixtes, sont la Méchanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, &c.

La notion de mathématique mixte sera formalisée par d'Alembert dans l'article « Application » de l'*Encyclopédie*, où il s'appuie sur l'exemple de la « catoptrique » (l'optique des miroirs), qui, à l'instar des autres sciences mathématiques mixtes, se déploie de façon entièrement mathématique une fois reconnues un petit nombre de vérités expérimentales.

Une seule observation ou expérience donne souvent toute une science. Supposez, comme on le sait par l'expérience, que les rayons de lumière se réfléchissent en faisant l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion, vous aurez toute la Catoptrique [...]. Cette expérience une fois admise, la Catoptrique devient une science purement géométrique, puisqu'elle se réduit à comparer des angles et des lignes [...]. Il en est de même d'une infinité d'autres.

L'empire des mathématiques mixtes peut être augmenté presque indéfiniment, en un mouvement qui entraîne avec lui les mathématiques pures. Les besoins mathématiques engendrés par le souci de penser mathématiquement le réel (naturel, social ou... mathématique), de l'engendrer et d'agir sur lui constitue ainsi le premier moteur du processus historique de création et de développement des mathématiques.

2.5. Vers le confinement mathématique

a) L'idée même que le mathématique naît du non-mathématique est demeurée longtemps présente et active dans la culture mathématique commune. C'est ainsi que, dans une étude intitulée *La mesure des grandeurs* (1935), Henri Lebesgue (1875-1941) rappelle en ces termes l'origine empirique de l'arithmétique, qui n'en appartient pas moins au noyau des mathématiques « pures » (Henri Lebesgue, *La mesure des grandeurs*, Albert Blanchard, Paris, 1975, p. 5-6).

> L'arithmétique [...] n'utilise qu'un très petit nombre d'expériences, dont chacune a été répétée un nombre prodigieux de fois par chaque homme, depuis qu'il y a des hommes. Aussi nous savons, sans hésitation, dans quels cas elle ne s'applique pas. Dans ces derniers cas, l'idée d'appliquer l'arithmétique ne nous effleure pas un instant ; nous ne pensons à appliquer l'arithmétique que lorsqu'elle s'applique, si bien que nous oublions qu'il y a des cas où elle ne s'applique pas : deux et deux font quatre, affirmons-nous. « Dans un verre je verse deux liquides, dans un autre deux liquides. Je verse le tout dans un vase, contiendra-t-il quatre liquides ? – C'est de la mauvaise foi, dites-vous, ce n'est pas une question d'arithmétique.
>
> – Dans une cage je mets deux animaux, puis encore deux animaux ; combien la cage contient-elle d'animaux ? – Votre mauvaise foi, dites-vous, est plus éclatante encore ; cela dépend de l'espèce de ces animaux, l'un d'entre eux pourrait dévorer les autres ; il faut aussi savoir si le décompte doit avoir lieu immédiatement ou dans un an, alors que les animaux pourraient être morts ou avoir eu des petits. En somme, vous parlez de collections desquelles on ne sait si elles sont immuables, si chaque objet y garde son individualité, s'il n'y a pas des objets qui apparaissent ou qui disparaissent.
>
> – Qu'est-ce à dire, sinon que certaines conditions doivent être remplies pour que l'arithmétique s'applique ? Quant à la règle, pour reconnaître si elle s'applique, que vous venez de me donner, elle est certes excellente pratiquement, expérimentalement, mais elle n'a aucune valeur logique. Elle est l'aveu que l'arithmétique s'applique quand elle s'applique. Et c'est pourquoi on ne peut pas démontrer que deux et deux font quatre, ce qui est pourtant la vérité par excellence, car jamais nous ne nous trompons en l'utilisant.

Lebesgue n'ignore certes pas que l'arithmétique s'est constituée en une organisation mathématique autonome, axiomatique et formelle. Mais même lorsqu'on en arrive à ce niveau d'élaboration mathématique, la base expérimentale reste active, non plus alors dans l'organisation mathématique elle-même, mais dans l'*organisation didactique* nécessaire pour la constituer (*op. cit.*, p. 6).

> Dans les exposés purement logiques, où l'arithmétique s'occupe de symboles vidés de toute signification, c'est grâce seulement à un axiome que deux et deux font quatre. Je n'ai pas à parler ici de ce genre d'exposés, mais je puis bien dire que, si leur importance mathématique est considérable, s'ils nous ont beaucoup appris, ils me paraîtraient voués à un insuccès absolu si on voulait les considérer comme élucidant la notion de nombre sans faire appel à l'expérience. Dans ces jeux logiques, il faut, en effet, manier des collections de symboles, réalisés ou pensés peu importe, et c'est alors qu'interviennent toutes nos connaissances, acquises grâce à l'expérience, relatives aux collections, c'est-à-dire aux nombres.

b) De Bacon à Lebesgue, de l'évidence au rappel insistant, que s'est-il donc passé ? Le continent mathématique parcouru en tous sens et avec tant d'enthousiasme depuis la deuxième moitié du XVI^e siècle va se réduire peu à peu après 1800, parce que, en même temps que les mathématiques « pures » connaissent un formidable développement, les mathématiques mixtes s'en détachent une à une en prenant leur autonomie épistémologique et leur indépendance institutionnelle. L'adjectif « mixte » va ainsi être progressivement remplacé par « appliqué », nuance significative. C'est ainsi que, si la huitième édition (1853-1860) de l'*Encyclopædia Britannica* subdivise toujours les mathématiques en pures et mixtes, la neuvième édition (1875-1889) distingue les mathématiques pures des mathématiques *appliquées*. En 1908 encore, l'*Oxford English Dictionary* mentionne, certes, l'expression *« mixed science »*, mais c'est pour en dire qu'elle est devenue obsolète, *« except for mixed mathematics »*. En France et ailleurs, l'expression de mathématiques mixtes semble avoir entamé plus tôt encore son déclin : dès 1810, Joseph-Diez Gergonne (1771-1859) crée ses *Annales de mathématiques pures et appliquées*. En Allemagne, August Leopold Crelle (1780-1855) lance en 1826 le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, « journal de mathématiques pures et appliquées » vite surnommé, devant l'inflation théoriciste qui s'y donne libre cours, *Journal für die reine unangewandte Mathematik*, « journal de mathématique pures inappliquées ».

c) Avec les mots, ce sont les choses elles-mêmes qui changent. Dans un *Dictionnaire des mathématiques appliquées* paru en 1874, l'auteur, H. Sonnet, « docteur ès sciences, inspecteur de l'académie de Paris, professeur d'analyse et de mécanique à l'École centrale des arts et manufactures, ancien répétiteur de mécanique industrielle à la même école », offre à ses lecteurs un vaste panorama des mathématiques mixtes, puisqu'il y expose l'application des mathématiques « à l'architecture, à l'arithmétique commerciale, à l'arpentage, à l'artillerie, aux assurances, à la balistique, à la banque, à la charpente, aux chemins de fer, à la cinématique, à la construction navale, à la cosmographie, à la coupe des pierres, au dessin linéaire, aux établissements de prévoyance, à la fortification, à la géodésie, à la géographie, à la géométrie descriptive, à l'horlogerie, à l'hydraulique, à l'hydrostatique, aux machines, à la mécanique générale, à la mécanique des gaz, à la navigation, aux ombres, à la perspective, à la population, aux probabilités, aux questions de bourse, à la topographie, aux travaux publics, aux voies de communication, etc., etc. » Déjà, pourtant, tout un ensemble de domaines scientifiques ont pris leur indépendance et quitté le sous-continent des mathématiques mixtes. Dans sa préface, l'auteur précise ceci.

> On désigne sous le nom de *Mathématiques appliquées* un ensemble de connaissances qu'il est plus facile d'énumérer que de réunir sous une définition précise. Cette définition n'embrasse pas, en effet, toutes les applications des mathématiques ; car l'Astronomie, par exemple, ainsi que la Physique appliquée, constituent des sciences à part, quoiqu'elles empruntent l'une et l'autre le secours de la Géométrie et de l'Analyse.

On saisit là le phénomène qui, sur deux siècles environ, va progressivement vider les mathématiques mixtes de leurs contenus : des domaines qui relevaient des mathématiques *lato sensu* finissent par s'émanciper, et prennent leur autonomie scientifique. Ainsi en va-t-il par exemple de l'*astronomie*, par contraste avec la *cosmographie*, qui, elle, demeure l'affaire du « mathématicien appliqué ». Trois degrés donc : mathématique mixte, application des mathématiques, science autonome. Tout au long du XIX^{e} siècle, de nouveaux domaines scientifiques prennent ainsi leur indépendance. Les « mélanges » physico-mathématiques chers à d'Alembert semblent devenus instables, et leurs composants se séparent, selon un mouvement d'ensemble dont un historien des mathématiques mixtes prend acte en ces termes (Gary I. Brown, « The Evolution of the Term "Mixed Mathematics" », *Journal of the History of Ideas*, vol. 52, n^{o} 1, janvier-mars 1991, p. 81-102).

> More and more "pure" mathematical theories of physics were developed to be "applied" to more and more physically obtained data. By 1875 theories were no longer "mixed" with experience, they were "applied" to experience.

d) Que se passe-t-il, simultanément, dans l'enseignement primaire et secondaire ? Une évolution semblable s'y observe, quoique en décalage dans le temps. Les mathématiques mixtes, en effet, y demeurent longtemps fortement présentes : ainsi, il y a cinquante ans encore, la *statique* figurait-elle toujours au programme de mathématiques des classes terminales, avec, notamment, le thème des *machines simples* (levier, treuil, cabestan, bascule du commerce, poulies, palan, moufle, etc.), qui ne disparaîtra des programmes de mathématiques qu'au début des années 1960. La tradition d'ouverture épistémologique est bien illustrée par le programme de mathématiques du 10 juillet 1925 pour les « classes de mathématiques » (c'est-à-dire pour les classes terminales scientifiques). Ce programme se divise en huit domaines : les quatre premiers (arithmétique, algèbre, trigonométrie, géométrie) relèvent pour l'essentiel des mathématiques pures, tout en contenant certains thèmes appliqués traditionnels, relevant en particulier des mathématiques *financières* (intérêts composés, annuités, etc.) ; mais les quatre autres domaines seraient vraisemblablement regardés aujourd'hui par nombre de professeurs de mathématiques comme étrangers à leur compétence « naturelle » : *géométrie descriptive et géométrie cotée*, *cinématique*, *statique*, *cosmographie*.

e) Sur la carte des mathématiques enseignées, à vrai dire, certaines des régions précédentes étaient d'ores et déjà en difficulté. Les auteurs anonymes d'un ouvrage de préparation au baccalauréat publié au début des années 1940 notent par exemple :

> Le programme relatif à la Géométrie Descriptive et à la Géométrie Cotée du Cours de Mathématiques Élémentaires est très restreint et prête peu aux problèmes. En fait, depuis 10 ans, le nombre de problèmes donnés sur ce sujet aux Examens est à peu près nul. Il faut cependant en prévoir de possibles…

Mais d'autres régions du continent mathématique résisteront plus longuement au processus d'épuration. Ainsi la cinématique survécut-elle jusqu'au milieu des années 1980. Quant à la cosmographie, rebaptisée astronomie, elle demeurera longtemps présente dans les classes terminales littéraires, pour n'en disparaître qu'avec les programmes de 1994.

f) Une remontée dans un passé plus lointain confirmerait cette longue présence, à côté des domaines traditionnels de mathématiques pures, de domaines tout aussi traditionnels relevant des mathématiques mixtes. Un exemple entre tous est celui de la *topographie*, présente dans les programmes de mathématiques tout au long du XIX^{e} siècle et au-delà, sous des noms variables – *arpentage* ou *levé de plans* surtout. La grande réforme de 1902, qui mit en place l'enseignement secondaire « moderne », n'abolit pas cette tradition. Les programmes de 1905, qui, pour ce qui est des mathématiques, retouchèrent les programmes de 1902 sans doute trop vite rédigés, soulignaient l'importance de l'étude *in situ* de la topographie en même temps que sa fonction de motivation de l'étude de la géométrie.

> Dans le même ordre d'idées, il est recommandé d'exercer les élèves à l'exécution de levés de plan, ce que l'on pourra faire sans sortir de l'établissement. Il est facile de tracer une droite joignant deux points situés dans des salles différentes, de mesurer la distance de ces points, etc. ; on insistera d'ailleurs sur l'intervention, dans ces applications, des théorèmes qui ont pu sembler être d'ordre purement spéculatif.

Pourtant la topographie disparaîtra des programmes de mathématiques dans les premières décennies du XX^{e} siècle (elle ne figure plus, on l'a vu en passant, dans le programme de 1925 pour les classes terminales scientifiques), après un compagnonnage de plus d'un siècle : de savoir républicain pour tous, elle est devenue aujourd'hui un savoir professionnel spécialisé, chichement diffusé, qui ne s'enseigne plus guère que dans les classes de lycée professionnel préparant au BT ou au BEP de topographie, dans les formations de génie civil en IUT et IUP, etc. Victime d'une fureur purificatrice que la « réforme des mathématiques modernes » contribua à accélérer (même si nombre des artisans de cette réforme, formés dans un autre état historique du système scolaire, n'en imaginaient pas toute la puissance liquidatrice), la tradition est aujourd'hui éteinte d'ouvrir la classe de mathématiques à des savoirs métis, que nous avons trop rapidement désappris à regarder comme mathématiques.

2.6. À la croisée des chemins

a) La rétraction progressive du corpus mathématique enseigné sur le pré carré des mathématiques pures va de pair avec un phénomène plus fondamental, plus subtil, mais non moins ravageur : l'*immotivation* croissante des mathématiques enseignées. Désireux de modéliser simplement le travail mathématique en général, le mathématicien Georges Bouligand (1889-1979) a autrefois souligné la tension essentielle entre d'une part l'activité de *résolution de problèmes* et d'autre part l'activité d'élaboration d'une *synthèse* qui mette en forme l'organisation mathématique issue de la résolution des problèmes étudiés (voir Georges Bouligand, « Regards sur la formation mathématique », *Les grands courants de la pensée mathématique,* Albert Blanchard, Paris, 1962, p. 532-542). Ainsi écrivait-il (*loc. cit.*, p. 534).

> L'évolution globale des mathématiques [apparaît] comme la résultante à chaque époque de deux formes d'activité […] orientées, la première vers les problèmes (P), la seconde vers la synthèse (S).

Bouligand inscrit sa formule du « dualisme problèmes-synthèse » dans un schéma historique que l'on peut décrire rapidement en utilisant le vocabulaire propre à l'auteur cité. Une *activité mathématique* autonome émerge sur la base d'une activité originellement située à mi-chemin entre expérimentalisme et déductivisme, lorsque apparaissent des lacunes à première vue infranchissables mais que le mathématicien va pourtant s'efforcer de combler. Dès lors, physique et mathématique se séparent, « en dépit de leurs objets communs ». La mathématique s'arrête sur des difficultés que la physique ignore (ou croit pouvoir ignorer), s'en empare, mène la chasse aux faux concepts qu'elle s'efforce de remplacer par une conceptualisation propre. Ainsi établit-elle un premier *répertoire* où se rangent côte à côte *notions, méthodes, résultats* – répertoire qui, cependant, n'est pas encore « la synthèse ». Cette dernière résulte de l'organisation du répertoire et porte autant sur les *concepts* et les *axiomes* (l'axiomatique est l'étape ultime de la synthèse) que sur les *groupements de problèmes*. La synthèse, cependant, *est toujours à reprendre* : sous l'impulsion de nouveaux problèmes, qui se présentent d'abord isolés, un matériel opératoire emprunté à la synthèse disponible est mobilisé afin de construire la solution des problèmes nouvellement étudiés ; mais les impulsions ainsi apportées par la résolution de ces problèmes relancent alors la synthèse, en une dialectique dont Bouligand propose une analyse fine des conditions de possibilité et des mécanismes concrets.

b) La *tension dialectique* entre problèmes et synthèse existe surtout pour le *créateur,* à une extrémité, et pour l'*utilisateur,* à l'autre extrémité. Pour ce passeur qu'est l'enseignant, du moins dans une certaine tradition scolaire, cette tension n'est pas de mise et a tôt fait de se dissoudre par la *disparition des problèmes*, au bénéfice – si l'on peut dire – de la seule synthèse, qui devient « le cours ». Les problèmes, qui sont le nerf de la guerre de la science-en-train-de-se-faire, et qui font la valeur d'usage de la science faite, ne sont plus alors, au mieux, que des *« applications »* d'une « synthèse » toute faite que nombre d'enseignants se sont trop longtemps contentés d'exposer soigneusement, méthodiquement, scrupuleusement, au lieu d'en montrer les *raisons d'être* en partant des *problèmes générateurs*. Lorsque les choses ainsi s'inversent, l'enseignement se voue quasiment tout entier à la mise en place de ce qui n'est plus la synthèse d'un outillage conceptuel et technique spécifique et des réponses qu'il permet d'apporter à certains problèmes, mais une *« théorie » contemplative qu'on n'en finit pas d'installer dans sa gloire*. Les synthèses, qui étaient des *réponses* mises en forme aux *questions* qui faisaient problème, bientôt *ne répondent plus à rien* et, désormais, ne renvoient plus qu'à elles-mêmes. *On a les réponses, mais on a perdu les questions !* Tout notre enseignement secondaire – et notre enseignement supérieur, en grande partie – est aujourd'hui atteint profondément par ce mal.

3. Grands problèmes de notre temps

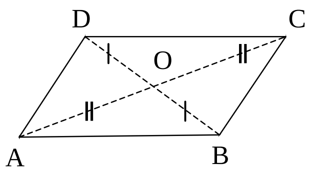
3.1. Raisons d'être et organisations didactiques

a) Le problème clé de notre temps est celui des *raisons d'être* des contenus mathématiques à enseigner et des situations didactiques – situations d'étude et de recherche –, engendrées par des AER ou des PER permettant aux élèves de vivre ces raisons d'être en première personne. Si l'on veut rénover l'enseignement de mathématiques pour en faire un enseignement *sensé*, ce problème doit être posé *de la Maternelle à l'Université*. Notons à cet égard que, au niveau universitaire, existe depuis 2001, sur le site géré par la SMF (la Société mathématique de France) et la SMAI (la Société de mathématiques appliquées et industrielles), un « domaine emath.fr » (http://www.emath.fr/) permettant notamment d'accéder au portail pédagogique Matexo (http://matexo.smai.emath.fr/), d'où l'on accède alors au Serveur « EXEMAALT » qui, comme son nom l'indique, propose des Exercices de mathématiques alternatifs), où l'on peut lire ceci (http://matexo.smai.emath.fr/exemaalt/entree.html).

> Nous développons la thèse suivante : les exercices de maths actuellement proposés aux étudiants en DEUG accordent une place disproportionnée à l'aspect technique. On aboutit ainsi à un apprentissage de techniques sophistiquées qui, faute de recul, sont inutilisables. Il nous semble souhaitable, et possible, de proposer aussi aux étudiants des activités dont ils perçoivent mieux le sens, et qui exploreraient plus largement les diverses facettes du travail du mathématicien. Mais ceci demande un renouvellement important du stock d'exercices disponibles, ce qu'aucun enseignant ne peut espérer faire seul : c'est pourquoi nous proposons une mise en commun la plus large possible des efforts dans cette direction, sous la forme d'une base de données structurée d'exercices « alternatifs ».

Les divers développements qui explicitent la problématique didactique de l'équipe en charge de ce serveur, qui s'inspire d'ailleurs des travaux des didacticiens, rejoint le point de vue travaillé tout au long de ce Séminaire, et que l'on parcourra rapidement, encore une fois, maintenant.

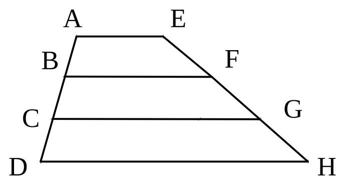
b) Revenons à un exemple qui avait servi de point de départ à notre travail (voir la séance 1 de ce Séminaire) : le parallélogramme. On sait que son étude systématique se fait en 5^e, classe où les élèves en étudient notamment les propriétés « caractéristiques » : dans un



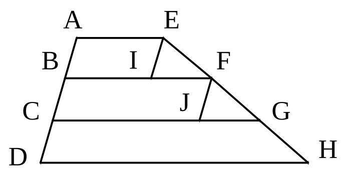
parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles et de même longueur et, réciproquement, un quadrilatère convexe dans lequel deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur est un parallélogramme ; dans le parallélogramme ABCD les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu O et, réciproquement, un quadrilatère dans lequel les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme ; etc. Mais *pourquoi* étudier cela ? Quelles *raisons* avons-nous de le faire ? Question cruciale dans une culture mathématique vivante, non réduite à des rites dont on n'entend plus le sens ! Les manuels d'autrefois posaient la question et y apportaient une réponse simple, fondamentale, sobrement mathématique (et non bêtement esthétisante : « Le parallélogramme, c'est une jolie figure, il est formateur d'en étudier les propriétés, etc. »). Ainsi l'auteur d'un *Traité de géométrie élémentaire* publié en 1885 note-t-il dans le chapitre intitulé *Des parallèles et des parallélogrammes*, sous le titre *Utilité des théorèmes concernant les parallélogrammes*, que ces théorèmes servent essentiellement à démontrer que deux segments sont de même longueur, ou que deux angles sont égaux, ou que deux droites sont parallèles. Plus explicitement, un manuel de collège des années 1950 fait, à l'intention de ses lecteurs, l'évocation suivante :

> Au cours d'un problème nous arrivons, par exemple, à prouver que le quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu. Immédiatement nous tirons de ce fait les conséquences suivantes : 1) ABCD est un parallélogramme ; 2) Par suite : AD et BC sont égaux et parallèles, AB et DC sont égaux et parallèles, $\widehat{A} = \widehat{C}$; $\widehat{B} = \widehat{D}$.

Complétons la leçon du manuel par un exemple plus développé. Sur la figure ci-dessous à gauche, les droites (AE), (BF), (CG), (DH) sont parallèles et les segments [AB], [BC], [CD] ont même longueur ; on veut démontrer que les segments [EF], [FG] et [GH] aussi ont même longueur.



La chose peut se faire ainsi. On considère (ci-dessous) les points I et J, avec (EI) et (FJ) parallèles à (AB).



Les quadrilatères AEIB et BFJC sont des parallélogrammes (d'après la définition usuelle du parallélogramme). Il en résulte que l'on a d'une part EI = AB, d'autre part FJ = BC, en sorte que, puisque AB = BC, on a EI = FJ. Les segments [EI] et [JF] ayant même longueur et même direction, le quadrilatère convexe EIJF est un parallélogramme (d'après une propriété caractéristique du parallélogramme rappelée plus haut). Il en résulte que EF = IJ et que (IJ) est parallèle à (FG) : le quadrilatère FIJG est donc, lui aussi, un parallélogramme. Par suite, on a IJ = FG, et donc EF = IJ = FG, CQFD.

c) Si l'on veut échapper à un enseignement *« insensé »* des mathématiques, il convient ainsi de retrouver, pour chaque objet mathématique à enseigner – notion, notation, technique, résultat, etc. –, son *utilité*, ses *raisons d'être*, ses *motivations*, identifiées à ses *fonctionnalités*. Pourquoi, ainsi, étudie-t-on avec tant d'insistance, en géométrie plane, le *triangle* ? Pourquoi, de même, s'obstine-t-on à vouloir *« chasser les radicaux »* des dénominateurs des fractions numériques ? Dans le premier cas, on s'approchera de la réponse si l'on est déjà capable de rapprocher la question soulevée de celle-ci : pourquoi, en géométrie *dans l'espace*, met-on tant d'énergie à étudier le *tétraèdre* ? Dans le deuxième cas, on sera sur la voie de la vérité en soulevant d'autres questions de même forme : pourquoi simplifier une fraction, développer une écriture algébrique, décomposer un vecteur dans une base, etc. ? Tout ainsi doit retrouver son sens, sa place, sa pertinence – celle que fonde le bon usage de la connaissance.

d) Il ne suffit pas pourtant de *déclarer* les raisons d'être d'une entité mathématique : encore faut-il organiser la *rencontre vécue* avec elle dans une *situation* où son utilité – pour résoudre d'une certaine façon des problèmes d'un certain type – s'impose de façon éclatante. Dans la formation du citoyen, il s'agit là d'une exigence fondatrice, qui conditionne le développement de la capacité, si essentielle dans tous les aspects de la vie sociale, à affronter un problème sans pour autant avoir reçu sur le sujet un enseignement en bonne et due forme ! Par contraste, le mode d'enseignement qui s'est induré dans la formation scolaire crée usuellement chez qui lui est soumis une référence exclusive, non critique, au schéma « cours *puis* exercices », lequel laisse sans réaction – et donc sans réponse – face à une question *inédite*, par exemple parce que l'automatisme intellectuel engendré par ce schéma porte à croire que la réponse à une telle question ne peut être qu'affaire d'opinion, de goût, etc., et donc non susceptible d'un abord « scientifique » – puisque, sinon, « la chose se saurait ». Tel semble bien être, aujourd'hui, un manque essentiel *tant du côté des élèves que des professeurs*.

e) Contre la domination de la structure binaire Cours-Exercices, à l'authenticité épistémologique rien moins que certaine (elle décrit de manière figée une mise en forme elle-même contestable du *produit* du travail mathématique, et non l'organisation du travail de *production* lui-même), il convient alors de faire vivre une organisation didactique qui, pour reprendre la terminologie de Bouligand, assume le dualisme problèmes-synthèse en organisant la *rencontre en situation* avec la matière des savoirs à étudier, dans le cadre d'*activités d'étude et de recherche* (AER) incluant des *inventaires* régulièrement actualisés, préparatoires à une *synthèse* qui assure la mise en forme des produits de l'activité, pour aboutir à une organisation de savoir que l'on soumettra à un *« travail »* réglé autorisant tant la mise au point et l'évaluation de l'organisation émergente que l'amélioration et l'évaluation de la maîtrise que l'on en a. S'impose ainsi une structure *ternaire* de l'étude (AER-Synthèse-Exercices et problèmes) qui dessine à gros traits l'organisation didactique de base d'un enseignement rénové de la *production* des mathématiques – et non des seuls *produits* mathématiques.

f) La prégnance du schéma Cours-Exercices est pourtant telle encore qu'elle engendre une pesante inintelligence du schéma ternaire évoqué à nouveau ici. Sous l'emprise d'une interprétation « psychologique » du rôle des « activités » (les élèves, êtres tout de faiblesse, en auraient besoin pour comprendre et apprendre), qui occulte leurs véritables raisons d'être, de nature épistémologico-didactique (c'est comme cela qu'un savoir se construit, et cela *pour quiconque*), on a notamment substitué aux AER (qui, en saine épistémologie, devraient être le *cœur* du travail mathématique) des « activités préparatoires » qui dégénèrent parfois en un simple « échauffement » et dont le nom même laisse entendre que l'essentiel est ailleurs – dans le « cours » *du professeur* qui se substitue alors à la synthèse *faite par la classe sous la direction du professeur*, synthèse désormais dépourvue d'objet faute d'AER produisant les éléments de connaissance mathématique à « synthétiser ».

g) Parce que les activités « préparatoires », d'allure souvent ludique, sont aussi, souvent, peu significatives au plan mathématique, règne véritablement un abord *culturel-mimétique* des œuvres mathématiques : le savoir à étudier est présentée formellement comme une réalité *culturelle* (les mathématiciens s'intéressent aux triangles, aux tétraèdres, chassent les radicaux des dénominateurs, réduisent les fractions, etc.), à l'instar d'un monument dont les usages véritables ont été oubliés ; puis certains emplois formels en sont travaillés de manière tout aussi immotivée : c'est le moment *mimétique* de la formation (on se met à réduire des fractions, à développer des expressions algébriques, etc.). Ce mimétisme bloque l'abord *en* *situation*, qu'il s'agit de faire prévaloir : à la place de mathématiques *racontées* par le professeur (et *récitées* ensuite par l'élève), il faut travailler à faire advenir des mathématiques *vécues* et *pensées ensemble*.

3.2. Retrouver le monde – et les gens

a) « Redonner sens » aux mathématiques et aux sciences, au fait de les enseigner (d'un côté) et de les apprendre (de l'autre), telle est l'une des formulations les plus usuelles du problème d'ensemble auquel l'état de la société et des mathématiques nous confronte aujourd'hui. Le principe essentiel de la solution est d'articuler fortement l'activité de la classe de mathématiques au travail de construction de réponses R à des questions Q et d'élaboration d'œuvres mathématiques O permettant cette construction de réponses. Mais d'où viennent alors les questions Q ? Question essentielle, qui a été notamment soulevée par le mathématicien américain William P. Thurston, lauréat de la médaille Fields en 1982, dans un article qui fit grand bruit, intitulé "On Proof and Progress in Mathematics" (*Bulletin of the American Mathematical Society*, 30 [1994], 2, 161-177 : http://www.ams.org/bull/pre-1996-data/199430-2/thurston.pdf).

> If what we are doing is constructing better ways of thinking, then psychological and social dimensions are essential to a good model for mathematical progress. These dimensions are absent from the popular model. In caricature, the popular model holds that
>
> **D.** mathematicians start from a few basic mathematical structures and a collection of axioms "given" about these structures, that
>
> **T.** there are various important questions to be answered about these structures that can be stated as formal mathematical propositions, and
> **P.** the task of the mathematician is to seek a deductive pathway from the axioms to the propositions or to their denials.
>
> We might call this the definition-theorem-proof (DTP) model of mathematics. A clear difficulty with the DTP model is that it doesn't explain the source of the questions.

En bien des cas, une question de mathématiques Q trouve son origine au sein d'une « situation du monde » dans laquelle certaines personnes doivent accomplir une certaine tâche ✓ – *non mathématique* mais, en quelque façon, *mathématiquement problématique* – engendrée par une activité sociale que l'on se borne trop souvent *à évoquer* et qui, en conséquence, se trouvera bientôt expulsée de la scène mathématique ou n'y figurera plus qu'à titre de lointain décorum. Ainsi, alors même que les mathématiques et les sciences nourrissent leur développement des problèmes que soulève la vie sociale dans sa diversité, celle-ci n'y apparaît-elle au mieux, dans l'état actuel des choses, que comme un horizon dénué de signification à l'endroit des gestes propres aux disciplines de connaissance qui y trouvent pourtant leur premier moteur. Les mathématiques, on l'a suggéré, se retirent alors du monde ; et le monde, en conséquence, s'éloigne des mathématiques. Que faire ?

b) La résolution des difficultés associées au confinement culturel actuel des mathématiques peut passer par la reconnaissance du principe socio-épistémologique suivant : contrairement à un point de vue commun, toute science – « de la Nature » ou « de l'Homme et de la Société » – peut être regardée comme ayant pour objet d'étude un certain système, à la fois spécifique et évolutif, *de conditions et de contraintes de la vie et du développement des sociétés humaines et des individus qui les composent*. Toute science, ainsi, entretient une relation déterminée avec la *vie sociale*, et son étude ne saurait sans la dénaturer ou la nier la couper de cet ancrage vital. Donnons ici deux exemples très simples de contraintes de nature mathématique sur la vie « des hommes et des sociétés ». Un groupe de travail d'une institution internationale comporte sept personnes ; faute d'avoir pu se mettre d'accord sur une langue de travail commune, chacune d'elle s'exprimera dans sa langue, des interprètes assurant une traduction simultanée pour les autres membres du groupe. Si l'on suppose les sept langues toutes différentes, si l'on suppose aussi que chaque interprète ne traduit que dans un sens (du portugais vers le grec mais pas du grec vers le portugais, par exemple), le nombre d'interprètes nécessaires sera égal au nombre de *couples* de langues : les sept personnes seront donc entourées de… quarante-deux interprètes – conclusion qui fait apparaître judicieuse la recherche d'un compromis quant aux langues de travail du groupe ! Second exemple, qui porte sur une question de probabilité : si, dans un ensemble humain qui réalise exactement la parité entre les sexes (la proportion d'hommes y est égale à la proportion de femmes), on veut constituer une instance composée de quatre personnes, et si l'on est attaché au principe de parité (deux hommes et deux femmes), il faudra l'assumer expressément : car, à s'en remettre au hasard, on aurait en ce cas 5 chances sur 8, soit 62,5 % de chances, de devoir accepter une répartition non paritaire…

c) À titre d'illustration de l'enracinement de la production scientifique dans le monde social, voici la présentation que donne, de la naissance du "calculus" – le calcul différentiel et intégral ou calcul infinitésimal – l'historien des mathématiques Morris Kline dans un ouvrage qui fait autorité (*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972, p. 342-343). On y verra que les grands problèmes générateurs de cette œuvre mathématique à l'immense portée qu'est "calculus" sont des problèmes pour une part essentielle extramathématiques.

There were four major types of problems. The first was: Given the formula for the distance a body covers as a function of the time, to find the velocity and acceleration at any instant; and, conversely, given the formula describing the acceleration of a body as a function of the time, to find the velocity and the distance traveled. This problem arose directly in the study of motion and the difficulty it posed was that the velocities and the acceleration of concern to the seventeenth century varied from instant to instant…

The second type of problem was to find the tangent to a curve. Interest in this problem stemmed from more than one source; it was a problem of pure geometry, and it was of great importance for scientific applications. Optics, as we know, was one of the major scientific pursuits of the seventeenth century; the design of lenses was of direct interest to Fermat, Descartes, Huygens, and Newton. To study the passage of light through a lens, one must know the angle at which the ray strikes the lens in order to apply the law of refraction. The significant angle is that between the ray and the normal to the curve (Fig. 17.1), the normal being the perpendicular to the tangent.

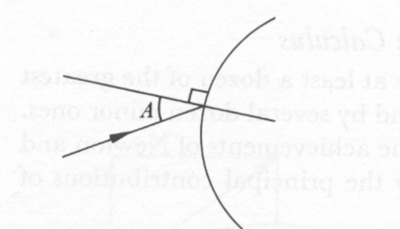


Figure 17.1

Hence the problem was to find either the normal or the tangent…

The third problem was that of finding the maximum or minimum value of a function. When a cannonball is shot from a cannon, the distance it will travel horizontally-the range-depends on the angle at which the cannon is inclined to the ground. One "practical" problem was to find the angle that would maximize the range. Early in the seventeenth century, Galileo determined that (in a vacuum) the maximum range is obtained for an angle of fire of 45°; he also obtained the maximum heights reached by projectiles fired at various angles to the ground. The study of the motion of the planets also involved maxima and minima problems, such as finding the greatest and least distances of a planet from the sun.

The fourth problem was finding the lengths of curves, for example, the distance covered by a planet in a given period of time; the areas bounded by curves; volumes bounded by surfaces; centers of gravity of bodies; and the gravitational attraction that an *extended* body, a planet for example, exerts on another body. The Greeks had used the method of exhaustion to find some areas and volumes. Despite the fact that they used it for relatively simple areas and volumes, they had to apply much ingenuity, because the method lacked generality. Nor did they often come up with numerical answers. Interest in finding lengths, areas, volumes, and centers of gravity was revived when the work of Archimedes became known in Europe. The method of exhaustion was first modified gradually, and then radically by the invention of the calculus.

On voit que ces grands problèmes générateurs du calcul infinitésimal sont, du moins *à l'époque*, motivés par des projets socialement reconnus de connaissance et d'action. Plus largement, les professeurs de mathématiques (et la profession tout entière, en y incluant les formateurs de professeurs, les chercheurs, les responsables de touts ordres) se trouvent ici confrontés à un problème fondamental : les raisons d'être de l'étude de tel ou tel problème en un temps ancien conservent-elles leur force et leur sens aujourd'hui dans un enseignement de base *pour tous*, qui ne vise pas seulement à former les membres de telle ou telle profession ? En bien des cas, ainsi qu'on l'a suggéré plus haut, un tel réexamen des œuvres mathématiques enseignées ne permet pas – ou du moins pas immédiatement – de confirmer la pertinence de leur présence dans le curriculum scolaire.

d) À titre d'illustration, on s'arrêtera un instant sur un exemple aujourd'hui à peu près oublié (sa disparition remonte à la réforme des mathématiques modernes, autour de 1968) : le cas de ce qu'on nommait autrefois les *règles de société*, lesquelles sont liées essentiellement au problème dit des *partages proportionnels*, qu'on peut formuler en ces termes : étant donné un nombre (positif) N et des nombres (positifs) $a_1, \dots, a_p$, partager N proportionnellement à $a_1, \dots, a_p$ consiste à trouver des nombres $N_1, \dots, N_p$ tels $N_1 + \dots + N_p = N$ de façon que l'on ait en outre

$$\frac{N_1}{a_1} = \dots = \frac{N_p}{a_p}.$$

• Dans son édition de 1958, l'*Encyclopédie autodidactique Quillet* présente les applications de ce résultat général dans les termes suivants.

214. *Applications des partages proportionnels*

1° *Répartition de l'impôt mobilier et de l'impôt foncier*. – La cote personnelle mobilière est calculée proportionnellement à la valeur locative du logement.
L'impôt foncier est réparti entre les contribuables, proportionnellement au revenu de leurs propriétés.

2° *Représentation proportionnelle*. – Les sièges sont attribués aux candidats proportionnellement au nombre de voix obtenues.

3° *Répartititon de l'actif d'une faillite*. – Si un failli doit à ses créanciers les sommes *a, b, c, d*…. on partagera l'actif de la faillite entre ces créanciers proportionnellement aux nombres *a, b, c, d*….

4° *Répartition des bénéfices entre associés*. – On détermine la part de chacun proportionnellement aux capitaux engagés. Les règles qui donnent la solution de ces problèmes sont appelées *règles de société,* etc.

• Les problèmes dits ici « règles de société » étaient depuis des siècles un classique de l'arithmétique « primaire ». Dans son *Compendion de l'abaco* qui date de 1492, le Niçois

Francés Pellos leur consacre ainsi tout son chapitre 12, qu'il annonce par ces mots (en occitan) : *D'essy s'ensech lo* XII *capitol qui s'apella la regula de companhia*. L'auteur traite 26 exemples de « règles de compagnie ». Voici le premier d'entre eux.

> Son tres merchans que fan una companhia. Lo prumier pausa 4 fl. Lo segont pausa 6 fl et la ters 8 fl., et son gasanh es 8 fl. Ademandi cant tocha a cascun per sa rata part. Fay ensins : ajustas totas las sommas ensemble, coma 4, 6, 8, que monta 18, et dichas ensins : si 18 valon 8, cant valon 4 ? Et troberas fl. 1 he set novens, et tant senha de gasanh per lo prumier merchant. Apres dichas : si 18 valon 8, quant valon 6 ? Et troberas fl. 2 he dos ters. Apres dichas : si 18 gasanhan 8, cant ven per 8 ? Et troberas que ven fl. 3 sinc novens.

On notera en passant le caractère *oral* du travail arithmétique traditionnel : « Dis ainsi… »

• Jusque dans la première partie du XX^e^ siècle, les manuels d'arithmétique primaire sont remplis d'exercices du même type, qu'illustre le spécimen suivant.

> Trois hommes créent une société. Le premier y met 1200 F, le deuxième 1500 F, le troisième 1350 F. Ils gagnent ainsi la somme de 2025 F. Combien chacun aura-t-il sur le gain ?

Ces exercices décrivent un monde où des particuliers, des maçons, des marchands, etc., n'arrêtent pas de « faire société » (ou « compagnie »). Ils y mettent des sommes modestes, et l'objet de la société est éphémère, tout comme, en conséquence, la compagnie elle-même. On ne voit guère en quoi ces situations évoquées dans les manuels anciens pourraient répondre aujourd'hui à des situations du monde authentiques, et qui fassent problème pour assez de gens. S'agirait-il d'une pure invention scolaire ? Très souvent, la réponse a une telle question comporte cet élément : *il fut un temps* où l'évocation de telles situations du monde était franchement réaliste, même si les manuels donnent aujourd'hui (ou donnaient hier) de ces situations du monde une version altérée. Voici par exemple ce qu'écrit un historien spécialiste du monde économique médiéval, Yves Renouard, dans un ouvrage intitulé *Les hommes d'affaires italiens du Moyen Âge* (1re édition 1948, 2e édition revue et augmentée 1968, réimpression 1998), dans le chapitre II, « Les hommes d'affaires des villes maritimes », de la deuxième partie de cet ouvrage, *La période des croisades, XIIe-XIIIe siècles* (*op. cit.* p. 62-63).

> Les voyages sur mer abondent en périls : tout navire court danger de faire naufrage, de tomber aux mains des pirates, chrétiens ou musulmans, d'être saisi à titre de représailles ou d'être simplement malmené par un gros temps qui avarie ou contraint de jeter à la mer la cargaison. Aussi les emprunteurs décidés à entreprendre un tel voyage n'acceptent-ils de rembourser les prêteurs que si le navire arrive à bon port, *salva eunte navi* : cette formule qui définit les prêts maritimes souligne combien chacun d'eux est lié à une transaction ou à un voyage déterminés ; elle permet de rejeter le risque sur ceux-là seuls qui peuvent le supporter. Bien peu d'hommes d'affaires oseraient d'ailleurs risquer dans une seule expédition, sur un seul bateau, en les prêtant à un seul marchand, tous les capitaux ou toutes les marchandises qu'ils possèdent. Le fractionnement et l'association sont donc la règle nécessaire des affaires. L'association permet à un même personnage, s'il s'unit à trois autres, par exemple, pour constituer trois sociétés dont le capital de chacune n'excède pas le total de son avoir propre, de diviser en trois le risque qu'il court et par conséquent de le diminuer dans la proportion des deux tiers. Ce fractionnement des risques ne joue pas seulement de façon simultanée comme dans l'exemple précédent ; il joue aussi de façon successive. Étant donné l'incertitude des entreprises maritimes, aucun homme d'affaires ne peut se lier pour une durée quelconque avec un autre : la première cargaison peut, en effet, disparaître au lendemain de la conclusion du contrat. Aussi les associations ne se constituent-elles que pour la durée d'un voyage déterminé d'aller et retour : elles ne comprennent que très peu de participants, deux le plus souvent ; elles se dissolvent au retour dans la mère patrie de l'homme d'affaires qui s'est chargé de l'expédition. Les participants peuvent s'associer à nouveau dans les mêmes conditions, mais c'est une nouvelle société qu'ils constituent. Toute société ne dure donc

qu'une saison, durée définie par les conditions générales de la navigation qui s'interrompt en Méditerranée de novembre à mars comme au temps des Romains.

Le type de problèmes proposé par la tradition correspondait ainsi à des situations qui furent autrefois au cœur de l'activité économique, ainsi que le livre de Francés Pellos en fait foi trois siècles plus tard.

• L'étude de ce type de problèmes se justifiait-elle encore sous la IIIe République encore ? Observons seulement que les auteurs de manuels les plus sérieux opèrent une mise à jour pour assurer un meilleur réalisme des situations du monde que les énoncés proposés évoquent. C'est ce suggère par exemple ce passage du *Cours abrégé d'arithmétique* de Carlo Bourlet, cité ici dans sa 14e édition (1922, p. 373-374).

857. – **Règle de société**. – On nomme *règle de société* une question de partage de bénéfices entre plusieurs associés.

Dans le partage des bénéfices entre plusieurs associés, on convient d'ordinaire que chaque associé reçoit une part proportionnelle au capital engagé par lui dans l'affaire. C'est ce qu'on appelle faire la répartition au *prorata* des *mises* ou *apports sociaux.*

Une règle de société n'est donc autre chose qu'un partage proportionnel.

Dans les grandes entreprises commerciales le capital de la société est partagé en un grand nombre de parts égales appelées *actions.* Le bénéfice global de chaque année est partagé en autant de parts qu'il y a d'actions ; chacune de ces parts de bénéfice se nomme le *dividende* de l'action.

Une action, comme un titre de rente, est une valeur commerciale qui peut se vendre ou s'acheter ; elle a, par suite, un *cours* qui varie suivant les succès de l'entreprise.

Bien qu'il envisage des situations qu'il souhaite manifestement proches des pratiques effectives du temps, Bourlet doit tout de même tenir compte des contraintes institutionnelles qu'impose la tradition curriculaire à laquelle les utilisateurs de son ouvrage ne peuvent échapper. Cela le conduit notamment à écrire ceci (*op. cit.*, p. 374-375).

860. – On propose souvent comme exercices des problèmes où les mises des associés restent dans la société des temps différents. Un tel cas ne se présente jamais dans la pratique, car lorsqu'un associé retire ses fonds et en apporte de nouveaux, on liquide la société et on en forme une nouvelle.

Cependant, malgré son inutilité pratique, puisqu'on pose des questions de ce genre dans certains examens, nous traiterons un problème de ce type.

On admet ici que le bénéfice de chaque associé est à la fois directement proportionnel à sa mise et au temps de cette mise.

Quelques décennies plus tard, pourtant, les auteurs de l'*Encyclopédie Quillet* déjà citée n'en proposeront pas moins pour *unique* exercice sur les règles de société le problème suivant.

Quatre associés ont placé dans une entreprise : le premier 120 000 francs pendant 15 mois, le second 180 000 francs pendant 9 mois, le troisième 75 000 francs pendant 19 mois et le quatrième 100 000 francs pendant 20 mois. Le bénéfice s'est élevé à 200 000 francs. On demande la part de bénéfice de chaque associé.

Le sujet des règles de société, qui relevait du thème des partages proportionnels, lequel se situait dans le secteur de la proportionnalité, était devenu largement immotivable : sa disparition était dès lors prévisible.

e) Tout « composant » du curriculum mathématique secondaire risque, dans le long terme, de subir le sort des « règles de société », qui y ont vécu tant de siècles avant de disparaître. On ne gagne rien à laisser les situations pourrir : il y a un nettoyage curriculaire – et pas seulement un « toilettage » des programmes – à conduire, dont la profession doit se soucier plus que tout. L'enseignement des mathématiques est aujourd'hui menacé, de façon externe par l'évolution de la société, de façon interne par sa difficulté à se mettre à jour dans ses contenus d'abord, même si un tel aggiornamento ne peut être séparé d'une mise à jour de l'organisation de l'étude elle-même. Dans cette perspective à laquelle on n'échappe pas, on abordera ici, succinctement, un ultime exemple, celui du *volume de solides*, qui constitue jusqu'à ce jour une question importante des programmes du collège, rangée désormais dans le domaine intitulé « Grandeurs et mesures ». Qu'est-ce qui peut donc motiver « l'homme non spécialisé » d'aujourd'hui à s'intéresser au volume d'une région donnée de l'espace ? Telle est la question à laquelle il faut – ou il faudrait – pouvoir répondre. Mais commençons par cette autre question : « Qu'est-ce qui pouvait motiver "l'homme non spécialisé" *d'hier ou d'avant-hier* à s'intéresser au volume d'une région donnée de l'espace ? » Cette fois, la réponse est plus facile.

• Au XIX^e siècle encore (et sans doute au-delà), la capacité toute pratique d'évaluer *d'un coup d'œil* une grandeur donnée a été un objectif des *leçons de choses* de l'enseignement primaire. Dans une conférence pédagogique prononcée le 31 août 1878, Ferdinand Buisson, cheville ouvrière de la réforme à laquelle le nom de Jules Ferry reste attaché, soulignait dans les termes suivants la valeur distinctive de cette capacité, regardée par lui comme emblématique de la formation « primaire » (cité *in* Maury L., *Les origines de l'école laïque en France*, PUF, Paris, 1996, p. 32).

> On formera de même leur œil à la mesure et à l'évaluation approximative des longueurs, des distances, des superficies, des poids, des volumes. Il y a des élèves de nos lycées, très forts en mathématiques, qui ne seraient pas capables d'estimer la contenance d'un champ, le poids d'un sac de blé, ou le volume d'un tas de pommes de terre. Je voudrais que pas un élève ne sortît de l'école primaire sans avoir l'œil et le toucher sinon infaillibles, du moins très exercés à ces mesurages intuitifs...

• Cet univers commun, où chacun vit au milieu de choses dont il est utile, sinon de *calculer* la longueur, ou l'aire, ou le volume, du moins de l'*estimer*, ne concerne plus, apparemment, la généralité des gens aujourd'hui. Il en fut autrement pendant des siècles, et sans doute des millénaires. À titre d'unique illustration de ce fait, on reproduit ci-après, un peu longuement, une description des pratiques de mesurage courantes avant la Révolution française et l'instauration du système métrique (Ken Alder, *Mesurer le monde. 1792-1799 : l'incroyable histoire de l'invention du mètre*, Flammarion, Paris, 2005, p. 151-153).

> Sous l'Ancien Régime, en revanche, la mesure était inséparable de l'objet mesuré et des usages de la communauté locale. Ce n'étaient pas de lointains bureaucrates qui faisaient respecter la juste mesure, c'étaient les gens du pays eux-mêmes, qui devaient répondre de leur honnêteté devant leurs voisins. Loin d'être irrationnel ou contre nature, ce salmigondis de mesures différentes avait réellement un sens pour les paysans, les artisans, les négociants et les consommateurs qui les pratiquaient au quotidien.
> Pour commencer, chaque mesure effectuée sous l'Ancien Régime se référait à un étalon physique *particulier*, qui se trouvait à la disposition des gens du pays et qui était garanti par les autorités locales. À l'échelon communal, par exemple, les matériaux utilisés dans le bâtiment pouvaient être mesurés d'après une brasse en métal scellée dans le mur de la halle du marché. À l'échelon local, le pesage du pain se faisait à partir d'une livre de référence conservée au siège de la corporation des boulangers. Dans les districts, on utilisait pour le grain une mesure de capacité qui était la copie d'un boisseau gardé en lieu sûr dans le château seigneurial. Pour le vin, les mesures de capacité locales étaient dérivées d'une barrique modèle entreposée dans les caves du monastère dont le vignoble était la

propriété. Il revenait aux autorités locales – échevins, maîtres de corporations, seigneurs et pères abbés – de garantir la conformité des mesures à leur étalon et de veiller à l'équité des échanges commerciaux sur les marchés. En retour, ils étaient en droit de percevoir une petite commission, pour le service rendu.

Non seulement ces étalons-modèles différaient d'une communauté rurale à l'autre, mais la méthode employée dépendait elle aussi des coutumes locales. Dans certains districts, on mesurait le grain à comble, en remplissant le boisseau jusqu'à la formation d'un cône ; dans d'autres, on pratiquait la mesure à ras, en égalisant la surface ; dans d'autres encore, on tapait sur le boisseau pour en tasser le contenu. La pratique courante locale dictait même la hauteur à partir de laquelle il fallait verser le grain dans le récipient, puisque le contenu pouvait se tasser de lui-même pendant l'opération. Un petit coup de coude pouvait modifier la quantité de grain dans le boisseau : la différence était grande alors pour ceux qui payaient leurs impôts en nature comme pour ceux qui achetaient et vendaient les denrées alimentaires en vrac, c'est-à-dire la grande majorité de la population. De la même façon, l'unité utilisée par les drapiers, *l'aune*, faisait généralement la largeur des métiers à tisser de la région. Ainsi obtenait-on une *aune* carrée d'étoffe en pliant rapidement celle-ci en triangle. Le marchand pouvait aussi mesurer son étoffe en plaçant un bout sous son nez et en tendant l'autre avec le bras, puis en ajoutant la valeur d'un pouce, « pour faire bonne mesure ». Sous l'Ancien Régime, la notion de quantité était donc liée aux rites et aux usages locaux.

Les étalons étaient susceptibles d'être discutés, négociés et modifiés avec, bien sûr, l'assentiment de la communauté locale. En effet, dans beaucoup d'endroits, la mesure de capacité que les gens du pays désignaient sous le nom de « boisseau » avait en réalité évolué au fil des ans et au gré des conflits entre seigneurs et métayers à propos de sa « vraie » valeur (qui devait déterminer un niveau d'imposition convenable et un juste prix pour les denrées de base). En tant que telles, les mesures locales rendaient compte de l'état d'équilibre des forces en présence au sein de la communauté. Si les gens de l'extérieur ne pouvaient comprendre en quoi ces mesures étaient justes, les acheteurs et les marchands du coin, eux, savaient ce qu'il en était, et c'est peut-être là que résidait l'un des principaux avantages de la diversité à l'échelon local. Elle permettait en effet de tenir les étrangers à l'écart. La spécificité des mesures protégeait les marchands des bourgs contre les négociants des grandes villes, au moins en obligeant ces derniers à payer des droits avant de pouvoir se présenter sur le marché local. Les corporations d'artisans prenaient en charge leurs propres mesures, de façon à définir les caractéristiques de leurs produits, à repérer les commerçants malhonnêtes et à les écarter des affaires à coups de procès ruineux. Ce qui était vrai autrefois pour les armuriers et les chapeliers l'est aujourd'hui pour l'informatique. Avoir la maîtrise des étalons revient à maîtriser les règles de la vie économique, et sous l'Ancien Régime les étalons étaient tous définis localement. Néanmoins, sous cette diversité locale se cachait le sens profond que revêtait à l'époque l'acte de mesurer.

• Existe-t-il aujourd'hui une ou des raisons de s'intéresser, « en honnête homme », c'est-à-dire en citoyen, aux aires et volumes ? Quelles situations du monde assez fréquentes, ou même rares mais cruciales, supposent qu'on estime (éventuellement par le calcul) une aire ou un volume, ou du moins qu'on « prenne en compte » l'aire ou le volume ? Selon que la société et la profession pourront se mettre d'accord ou non sur une réponse partagée, le devenir curriculaire de la question des aires et des volumes sera assuré ou au contraire compromis.

Fin