IUFM d’Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance de rentrée : mercredi 31 août 2005

1. Un document intitulé *Fabriquer la classe*, extrait d’un livre récemment paru, est distribué et commenté rapidement : à reprendre lors de la séance 1.

2. Deux sujets d’exposés sont communiqués :

Exposé 1. Lorsqu’un élève a un comportement répréhensible, quelles punitions peut-on (doit-on) lui infliger ?

Exposé 2. À quoi sert le cahier de textes de classe ? Est-il obligatoire ? Que faut-il y consigner ?

Pour l’exposé 1 : CD. Pour l’exposé 2 : FE.

3. La notice *Première rentrée des classes* est distribuée.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 1 : mardi 6 septembre 2005

0. Le programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. Questions et réponses // 2. Forum des questions : exposés du jour // 3. Observation & analyse // 4. Forum des questions : exposés à venir // 5. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques : *Le temps de l'étude*.

1. Questions et réponses

1.1. De $R^{\lozenge}$ vers $R^{\heartsuit}$: le piège du provisoire qui dure ; le danger du figement professionnel.

1.2. Recherche de matériaux dans les archives du Séminaire

a) Une question prise pour exemple

> 1. Doit-on se présenter comme stagiaire ? Aux élèves ? Aux parents ? Sinon comment justifier la présence fréquente de notre PCP dans la classe ? (NA, JT, 4^{e}, 0)
> 2. Est-il nécessaire de dire aux élèves que l'on est un professeur stagiaire ? (GB, MJ, 3^{e}, 0)
> 3. Doit-on dire aux élèves que l'on est stagiaire ? (DC, OS, 2de, 0)
> 4. Devons-nous nous présenter aux élèves et aux parents comme stagiaire ? (RD, OS, 4^{e}, 0)

b) Les matériaux trouvés dans les Séminaires 2000-2005 sont reproduits ci-après.

> **Séminaire 2000-2001**
>
> Il est inévitable que les élèves « découvrent » quelque jour le statut, ***qu'ils identifient mal***, de « professeur stagiaire » qui est celui de leur professeur de mathématiques. ***Autant donc préciser d'emblée que l'on est « professeur stagiaire »*** (et non pas « stagiaire », tout court) ; que « stage » signifie ***séjour***, et qu'en conséquence on ne fait que ***séjourner dans cet établissement***, avant de devenir titulaire d'un poste dans un autre établissement. Le fait ***qu'on ne fasse que passer*** est la ***seule différence pertinente*** vis-à-vis de l'établissement et de la communauté éducative. Le fait par exemple d'être un professeur débutant ***n'a rien à voir avec le statut de « professeur stagiaire », mais avec celui d'« élève professeur », et ne concerne pas l'établissement, mais l'IUFM et ses formateurs (y compris le maître de stage)***.

> **Séminaire 2001-2002**
>
> 2. … Lorsqu'il est dans l'établissement où il effectue son stage en responsabilité, l'élève professeur apparaît à la communauté éducative dont il devient ainsi membre comme un ***professeur à l'égal des autres***. Le qualificatif de « stagiaire » s'éclaire si l'on se rappelle qu'un ***stage*** n'est rien d'autre qu'un ***séjour*** : un professeur « stagiaire » ne se distingue des autres professeurs, aux yeux de tout autre membre de la communauté éducative (qu'il soit professeur, élève, parent, etc.), et à l'exception de son maître de stage (voir plus loin), que par ce fait qu'il séjourne dans l'établissement, qu'il ne fait qu'y

passer une année, de par son statut même : la différence est mince, et joue aussi pour d'autres professeurs. Il résulte de là qu'un professeur stagiaire est un professeur, tout court !

3. La vraie difficulté tient – éventuellement – au fait que le professeur « stagiaire » est un professeur dont ***la formation initiale n'est pas encore achevée*** et qui, pour cette raison, est en formation dans un IUFM (le stage en responsabilité constituant l'un des volets de sa formation). Il s'agit là d'un élément d'information dont la diffusion au sein de la communauté éducative n'apparaît pas en principe ***pertinente***, et qui, pour cette raison, n'a pas à être évoquée – même si, bien entendu, ***elle n'a rien d'un funeste secret***.

4. La notation précédente ne règle évidemment pas le problème, beaucoup plus général, qui tient en ce que ***tout*** professionnel digne de ce nom apparaît à la fois comme un ***praticien*** (quelle que soit sa profession) et comme un professionnel ***toujours potentiellement en formation*** : si le professeur « stagiaire » est un professeur dont la formation ***initiale*** n'est pas encore achevée, tout professeur est un professeur dont la ***formation***, tout court, est appelée à ***se poursuivre***, que ce soit dans un IUFM ou ailleurs. Dans tous les cas, les élèves de l'établissement ont affaire à un professionnel de l'enseignement dont les autorités compétentes ont jugé que sa formation était ***d'ores et déjà suffisante*** pour qu'il soit autorisé à ***pratiquer***.

5. Le point de vue précédent peut être évoqué avec les élèves dans le cadre de ***l'éducation à l'orientation***, afin de déconstruire avec eux le schéma reçu selon lequel l'obligation d'apprendre s'arrête quand s'arrête « l'école » – à 16, 18, 24 ans, ou plus, selon le cas –, en vue de la construction concomitante d'un schéma plus complexe liant ***formation et profession tout au long de la vie active***. En particulier, on pourra pousser en avant l'idée selon laquelle, entre le praticien qui achève sa formation initiale et celui qui en a terminé depuis parfois longtemps, il existe peut-être des différences de ***degré***, qui n'ont d'ailleurs pas toutes le même signe algébrique, mais non une différence de ***nature***, qui interdirait au premier de pratiquer, et permettrait au second de se dispenser de tout effort de formation !

c) Que conclure ?

1.4. Recherches de matériaux dans l'*Encyclopédie*

a) On se réfère à la notice *Première rentrée des classes* distribuée lors de la séance de rentrée.

b) On examine les éléments de réponse qui y apparaissent aux blocs de questions ci-après.

Comment doit-on organiser le cours ? (AI, JT, 2de, 0)

1. Faut-il faire *systématiquement* des activités préparatoires pour le cours suivant ? (CC, JT, 2de, 0)
2. Est-ce que tout nouveau sujet abordé doit l'être par des activités ? (JG, OS, 2de, 0)

Les élèves auront deux cahiers pour les mathématiques. Comment les gérer avec trois domaines (géométrie, calcul, statistique) et une organisation ternaire (activité, synthèse, exercices) ? (AS, JT, 5^{e}, 0)

Pouvons-nous commencer par une semaine de révisions avant d'entamer le programme ? (RD, OS, 4e, 0)

1. Comment devrait se passer le premier contact avec une classe le jour de la rentrée ? Ordre du jour ? (JB, OS, 4^{e}, 0)
2. Comment doit-on préparer à l'avance la première heure de cours, le premier contact avec les élèves ? Comment doit se dérouler cette séance ? (EB, CR, 4^{e}, 0)
3. Que doit comporter la première heure de cours, lors de la première prise de contact avec les élèves ? (NFG, MJ, 2de, 0)

4. Comment préparer la prise de contact avec la classe ? Quelles sont les exigences à avoir vis-à-vis des élèves ? (AG, JT, 5^{e}, 0)

5. Comment organiser le premier cours avec sa classe ? (DP, OS, ?, 0)

1. Que dois-je préparer pour mon jour de rentrée ? Fiche de renseignement ? Test de niveaux ? Programme de l'année ? Discipline ? Contrôles ? (MB, CR, 4^{e} + 4^{e}, 0)

2. Est-il conseillé de faire remplir aux élèves une petite fiche de renseignement lors des premières heures de cours ? (SP, MJ, 2de, 0)

3. Que pouvons-nous demander aux élèves dans la fiche de renseignement ? (GB, MJ, 3^{e}, 0)

1. Doit-on tutoyer ou vouvoyer un élève ? (NFG, MJ, 2de, 0)

2. Est-il préférable de tutoyer ou de vouvoyer les élèves ? Le tutoiement peut-il paraître comme irrespectueux pour les élèves ? Ne peuvent-ils pas nous le reprocher ? *A contrario*, le vouvoiement peut ne pas apparaître naturel pour les professeurs stagiaires. Le risque n'est-il pas de les tutoyer, à un moment donné, involontairement ? (AI, JT, 2de, 0)

1. Est-ce qu'il faut commencer le cours dès la première heure ? (GD, JT, 2de, 0)

2. Peut-on commencer le « cours », après quelques présentations, lors de la première heure où on rencontre les élèves ? (FE, MJ, 5^{e}, 0)

3. Doit-on commencer le cours dès la première séance ? (MH, CR, 2de, 0)

2. Forum des questions : exposés du jour

2.1. On entend un premier exposé, dû à CD, sur la question suivante :

Exposé 1. Lorsqu'un élève a un comportement répréhensible, quelles punitions peut-on (doit-on) lui infliger ?

a) Les matériaux recensés dans les archives du Séminaire pour préparer l'énoncé précédent permettent-ils d'apporter réponse aux questions suivantes ?

1. Les professeurs de 4^{e} du collège ont mis en place le principe suivant : 1) chaque travail non fait entraîne un zéro ; 2) À la fin du trimestre, un seul zéro n'implique rien ; deux zéros impliquent un zéro dans la moyenne ; 3) trois zéros ou plus impliquent que tous les zéros mis comptent dans la moyenne. Ce système est-il valable (surtout pour des élèves de 4^{e}) ? (RR, OS, 4^{e}, 0)

2. Quel système peut-on mettre en place pour sanctionner le travail à la maison non fait ? (RR, OS, 4^{e}, 0)

3. Que faire si un élève oublie son matériel ? En particulier, faut-il le punir ou pas ? (FEB, CR, 4^{e}, 0)

b) Remarques et commentaires

2.2. On entend ensuite l'exposé de FE sur la question que voici :

Exposé 2. À quoi sert le cahier de textes de classe ? Est-il obligatoire ? Que faut-il y consigner ?

Remarques et commentaires.

3. Observation & analyse

3.1. Une question pour démarrer :

***Q*₁**. Que faire, en 4e, à propos des médianes d'un triangle ?

3.2. Une observation en classe de 4e : ***À propos des médianes d'un triangle***.

a) Le compte rendu d'observation imprimé est distribué aux participants. (On le trouvera en ligne par ailleurs.)

b) Les dix premiers paragraphes du compte rendu font l'objet d'un commentaire linéaire. (Un document intitulé *À propos des médianes d'un triangle. Notes pour l'analyse, l'évaluation et le développement* sera progressivement construit et présenté dans le cadre du Séminaire.)

4. Forum des questions : exposés à venir

4.1. Rôle du manuel de la classe

a) Cet exposé examinera quel sort est fait, dans les archives du Séminaire, à la question suivante.

Exposé 3. Le manuel de la classe doit-il être au cœur du travail de la classe ? Dans tous les cas, quels usages doit-on en faire ?

b) Cet exposé se référera notamment à la question ci-après.

Est-il fondamental de s'appuyer principalement sur le manuel scolaire de l'établissement pour le choix des exercices à donner aux élèves ? Peut-on dire aux élèves de ne pas apporter le manuel scolaire en classe et de s'en servir uniquement à la maison pour les devoirs donnés d'une séance sur l'autre ? (SPM, CR, 5e, 0)

4.2. Modules

a) L'exposé présentera les matériaux figurant dans les archives du Séminaire qui sont relatifs à la question suivante.

Exposé 4. Qu'appelle-t-on « modules » en seconde ? À quoi doit-on utiliser ces temps de travail avec les élèves ?

b) Cet exposé se référera notamment à la question suivante :

Que doit-on faire de précis en « module » (demi-groupe) ? (DR, OS, 2de, 0)

4.3. Devoirs en classe, devoirs à la maison

a) L'exposé présentera les matériaux des archives du Séminaire relatifs à la question suivante.

Exposé 5. Y a-t-il des instructions officielles concernant la fréquence des DS et des DM, leur longueur, leur contenu, leur place dans l'évaluation des élèves ?

b) Cet exposé se référera notamment au bloc de questions de la semaine suivants.

1. Fréquence des contrôles ? (GB, MJ, 3^e, 0)

2. Quelle fréquence pour les DM ? Les textes préconisent un devoir par quinzaine au collège. N'est-ce pas trop ? Quelle longueur ? Quel système de notation ? (LLL, JT, 4^e, 0)

3. À quelle fréquence peut-on donner des DM et DS en 6^e ? (CR, CR, 3^e, 0)

4. Au sujet des DM et des DS notés, combien doit-on en prévoir pour un trimestre ? Quelle fréquence ? Faut-il donner un programme prévisionnel de ceux-ci aux élèves ? (NP, CR, 3^e, 0)

4.4. Groupes homogènes ou pas ?

a) L'exposé présentera les matériaux des archives du Séminaire relatifs à la question suivante.

Exposé 6. Lorsqu'on est amené à constituer des groupes d'élèves, qu'est-ce qui peut justifier de faire des groupes plutôt homogènes ou, à l'inverse, des groupes plutôt hétérogènes ?

b) Cet exposé se référera notamment à la question suivante.

[Un petit devoir récapitulatif en début d'année] permettrait-il de faire des demi-groupes homogènes et cela est-il préférable à des demi-groupes « mélangés » ? (CG, OS, 2^{de}, 0)

4.5. Qui ?

Exposé 3 : *GB*.

Exposé 4 : *MB*.

Exposé 5 : *JB*.

Exposé 6 : *NA*.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 2 : mardi 13 septembre 2005

0. Le programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. Questions & réponses // 2. Forum des questions : poursuites & anticipations // 3. Observation & analyse // 4. Forum des questions : exposés du jour // 5. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques // 6. Forum des questions : exposés à venir.

1. Questions & réponses

1.1. Rechercher une information

a) L'utilisation des ***archives du Séminaire*** ainsi que des ***Documents 2nd degré*** mis en ligne apporte souvent des matériaux de réponse. Ces matériaux peuvent être récupérés et exploités en dehors même des exposés, en fonction des besoins.

b) Considérons ici la question suivante :

> Comment fait-on à l'ordinateur les symboles des ensembles de nombres ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) ? (GD, JT, 2de, 1)

L'une des difficultés de la recherche se trouve dans le choix judicieux de mots clés. C'est le cas ici.

c) Ici, le document intitulé ***Typographie 2*** donne l'élément de réponse suivant :

> Les ensembles de nombres sont normalement écrits en gras dans un texte imprimé : **N**, **Z**, **Q**, **R**, **C**, les caractères « éclaircis » $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ étant en principe réservé à l'écriture au tableau. De toutes façons, il faut rappeler les conventions en début de texte chaque fois qu'il peut y avoir ambiguïté.

d) Cela dit, la réponse peut bien sûr être obtenue auprès de ceux qui… se servent des notations en question : en l'espèce, les symboles cherchés appartiennent à la police de caractères ***Bookshelf Symbol 5***.

1.2. Élargir sa recherche vers une vraie culture professionnelle

La difficulté de la recherche qui précède tient largement à l'ignorance, dans la culture scolaire et universitaire, des questions de ***typographie*** : on y reviendra à l'occasion d'un exposé proposé plus loin.

2. Forum des questions : poursuites & anticipations

2.1. Sanctions & punitions : une enquête

a) La question ci-après, posée lors de la séance 1, sera abordée d'abord à travers une petite enquête auprès des participants au Séminaire :

> Au sujet des « sanctions », que doit-on sanctionner ? Comment les sanctionner ? Doit-on être sévère ? (AS, JT, 5e, 1)

b) Chaque participant reçoit une feuille portant 30 échelles à quatre échelons, chaque échelle étant relative à une phrase énonçant une pratique qu'il convient de situer sur l'échelle :

Rendre ses devoirs à la maison écrits au crayon à papier			
Non, jamais négociable ☐	Non, rarement négociable ☒	Oui, négociable ☐	Oui, toujours possible ☐

2.2. Sanctions & punitions : règlements intérieurs

Chaque participant (ou chaque équipe en stage dans un même établissement) remet une copie du règlement intérieur de l'établissement où il effectue son stage en responsabilité, en y portant à la main (lorsque la chose n'y est pas déjà apparente) l'identité de l'établissement : **Collège Machin ou Lycée Truc (Ville, Département).**

2.3. Sanctions & punitions : retour aux textes

a) On trouvera la circulaire du 11 juillet 2000 intitulée *Organisation des procédures disciplinaires dans les collèges, les lycées et les établissements régionaux d'enseignement adapté* sur le site de l'IUFM (rubrique des *Documents 2nd degré*) sous le titre ***Punitions scolaires & sanctions disciplinaires*** : on y trouvera nombre d'éléments présentés dans l'exposé 1 par CD. (On pourra également se rendre à l'adresse Internet suivante : http://www.education.gouv.fr/bo/2000/special8/default.htm.)

b) On se reportera au texte indiqué chaque fois qu'une question surgira quant aux principes relatifs aux sanctions et punitions. Considérons ainsi la question de la semaine suivante :

> Peut-on sanctionner un élève en lui enlevant des points à sa moyenne ? (MG, MJ, 2de, 1)

On trouve dans le texte susmentionné le passage suivant, qui conduit en principe à y répondre par la négative :

> Il convient également de distinguer soigneusement les punitions relatives au comportement des élèves de l'évaluation de leur travail personnel. Ainsi n'est-il pas permis de baisser la note d'un devoir en raison du comportement d'un élève ou d'une absence injustifiée. Les lignes et les zéros doivent également être proscrits.

c) La circulaire du 11 juillet 2000 a été « retouchée » par une circulaire du 19 octobre 2004, qu'on trouvera également parmi les *Documents 2nd degré* sous le titre *Discipline - Circulaire Fillon* (voir aussi http://www.education.gouv.fr/bo/2004/39/MENE0402340C.htm). Ce texte comporte notamment la section suivante.

II – Moyens d’action à la disposition des enseignants en matière disciplinaire

La circulaire n° 2000-105 du 11 juillet 2000 a précisé les grands principes juridiques qui s’appliquent aux punitions scolaires et aux sanctions disciplinaires à l’intérieur de l’établissement scolaire soumis, comme toute organisation, aux règles du droit.

Toutefois, le caractère spécifique de l’acte pédagogique et des missions des enseignants implique que l’autorité de ceux-ci soit respectée partout où elle s’exerce. Aussi est-il entendu que, lorsque son autorité est remise en cause par des actes fautifs, inadaptés, contrevenant aux règles fixées pour atteindre les objectifs assignés aux apprentissages scolaires, l’enseignant peut décider des punitions qu’il prendra pour assurer la poursuite de sa mission. Il en informe le chef d’établissement. La punition sera d’autant mieux suivie d’effets que les parents auront été avisés et convaincus des motifs de celle-ci.

S’il est utile de souligner le principe d’individualisation de la punition ou de la sanction, il faut rappeler qu’une punition peut être infligée pour sanctionner le comportement d’un groupe d’élèves identifiés qui, par exemple, perturbe le fonctionnement de la classe. Par ailleurs, dans le cadre de l’autonomie pédagogique du professeur, quand les circonstances l’exigent, celui-ci peut donner un travail supplémentaire à l’ensemble des élèves. Ce travail doit contribuer à trouver ou retrouver des conditions sereines d’enseignement en même temps qu’il satisfait aux exigences d’apprentissage.

Les faits d’indiscipline, de transgressions ou de manquements aux règles de vie collective qui atteignent un niveau de gravité plus important et perturbent le fonctionnement en tout ou partie de l’établissement doivent être portés immédiatement à la connaissance du chef d’établissement afin qu’il engage les poursuites disciplinaires prévues par la réglementation. Il est précisé que lorsque le chef d’établissement, saisi par écrit d’une demande de saisine du conseil de discipline émanant d’un membre de la communauté éducative, décide de ne pas engager de procédure disciplinaire, il lui notifie sa décision motivée.

d) Remarques et commentaires.

3. Observation & analyse

3.1. La question au principe du travail amorcé est la suivante.

***Q*₁**. Que faire, en 4e, à propos des médianes d’un triangle ?

a) Le travail accompli a consisté en une lecture commenté d’une partie d’un compte rendu d’observation (*À propos des médianes d’un triangle*) d’une séance dans une classe de 4e.

b) On examine d’abord le début – reproduit ci-après – d’un document intitulé *À propos des médianes d’un triangle. Notes pour l’analyse, l’évaluation et le développement* qui sera progressivement construit et présenté dans le Séminaire.

Paragraphe 1

14 h 04. Les élèves entrent, s’installent, se tiennent debout puis, sur injonction de P, s’assoient. P demande s’il y a des absents. D’autres élèves arrivent. (La sonnerie du collège est en panne, ce qui ne facilite pas la ponctualité.) P demande le silence : « On peut commencer ? »

Gestion de la séance

GS11. On notera le rituel d’entrée, un peu perturbé par une défaillance de la sonnerie du collège. La mise au travail de la classe semble ne pas poser de problème majeur : en l’espèce, un simple « On peut commencer ? » de P suffit.

GS12. L'interrogation de P aux élèves à propos des absents implique le groupe dans le contrôle de ses membres : il y a là un contraste avec le simple *appel*, où chacun doit répondre pour soi-même et où, en première approximation, un absent se signale par une non-réponse. (Entre les deux formes de contrôle, on peut situer une troisième modalité, sans doute fréquente : l'appel, avec confirmation des absences par le groupe.)

Paragraphe 2

P s'enquiert si des élèves ont encore leur DM à rendre : deux élèves se signalent. P précise que, comme quelques élèves étaient absents hier, on explique rapidement ce qu'on a fait. « On a travaillé sur les médianes. Qui rappelle ce qu'on a appris ? » Une élève précise la définition de la médiane puis on rappelle le concours des médianes au point G, centre de gravité. P rappelle le tracé de la médiane.

Structure et contenu de la séance

SC21. Le travail qui s'annonce prolonge celui réalisé la veille.

SC22. Le travail portait sur « les médianes » (d'un triangle). Une définition de la notion de médiane ayant été élaborée, la classe a rencontré (nous ne savons pas sous quelle forme) la propriété de concours des médianes en un point G appelé centre de gravité. Sur quoi va-t-il porter maintenant, nous ne le savons pas encore…

Organisation mathématique

OM21. L'organisation mathématique mise en place jusque-là comporte au moins un type de tâches T_{me}, consistant à « tracer une médiane », à quoi répond une technique τ_{me} (que nous ne connaissons pas).

OM22. L'organisation mathématique comporte également plusieurs éléments technologiques : la définition de la médiane, la propriété de concours des médianes. On ne sait rien sur le contenu de la définition ni sur la justification de la propriété.

OM23. Le nom de *centre de gravité* introduit traditionnellement pour désigner l'isobarycentre de trois points A, B, C non alignés a en général un statut de « syntagme figé » (comme il en va, par exemple, pour l'expression « bonne franquette (à la) » : qui saurait ce qu'est une « franquette », et ce que serait une « mauvaise franquette » ?…), donc sans que soit explicité en quoi la « gravité » a quelque chose à voir avec le point de concours des médianes. On peut penser qu'il en est de même ici.

Organisation didactique

OD21. Du point de vue de la *chronogenèse*, la séance est située implicitement dans la perspective de la séance de la veille : on s'attend donc à ce que le *temps didactique* avance.

OD22. Du point de vue de la *topogenèse*, on note qu'il revient aux élèves, sur instruction du professeur, d'effectuer le *travail de mémoire* – le « rappel » – demandé.

OD23. Le travail de mémoire participe d'une *technique d'étude collective*. Il est ici discrètement justifié – par le professeur – à l'aide d'un argument de circonstance : l'absence de certains élèves à la séance précédente. Cet élément de *technologie didactique* est distinct de celui qui affirmerait que, de façon moins contingente, davantage intrinsèque, le groupe a besoin de « se rappeler à lui-même », régulièrement, en des instants qu'il appartient au professeur de déterminer (et peut-être aux élèves de suggérer), le travail accompli en telle séance précédente.

OD24. Du point de vue de la *topogenèse* toujours, on note que le professeur se réserve le rappel de la *technique* τ_{me}. Le compte rendu ne permet pas de savoir s'il s'agit d'un rappel verbal ou si le geste est joint à la parole (avec usage d'instruments de tracé).

Gestion de la séance

GS21. Un *modus vivendi* semble avoir été trouvé, dans cette classe, quant à la remise des travaux des élèves. Mais on ne connaît pas la nature de l'arrangement mis en œuvre !

GS22. Le ton du compte rendu suggère une gestion du groupe relativement facile, avec une bonne participation des élèves et une présence ferme mais non envahissante du professeur.

GS23. On note que le choix par le professeur de s'attribuer le rappel de la technique τ_{me} peut être motivé par le fait de ne pas avoir à appeler un élève au tableau pour ce faire. Cet élément de technique didactique est distinct de celui qui consisterait à solliciter (depuis sa place) un élève, le professeur se bornant à effectuer au tableau les opérations indiquées par celui-ci.

Paragraphe 3

On reprend la feuille d'activité de la veille pour y envisager l'activité 7 (voir ci-après). Il est 14 h 08. P : « Vous regardez l'activité 7, qui s'appelle *Position du centre de gravité sur chacune des médianes*. » P fait la figure au tableau. Un élève lit l'énoncé du problème. P reprend, explicite, commente : il y a une seule solution, « on va tous obtenir le même point C ».

Structure et contenu de la séance

SC31. La séquence de travail qui commence est une *activité d'étude et de recherche* qui fait suite à des activités menées à bien (on peut le supposer) la veille.

SC32. Cette AER est engendrée par un problème que l'on peut formuler ainsi : « Créer une technique mathématique (qu'on peut noter $\tau_{C?}$) pour accomplir les tâches du type $T_{C?}$ suivant : “Dans un triangle ABC dont on a marqué le centre de gravité G, on a effacé le sommet C ; construire ce point à la règle et au compas connaissant A, B et G.” »

Organisation mathématique

OM31. L'organisation mathématique visée, $[T_{C?}/\tau_{C?}/\theta_{C?}/\Theta_{C?}]$ n'apparaît, dans ce passage du compte rendu, qu'à travers ce qui semble être un résultat technologique « imposé » par le professeur et comportant *deux* affirmations subtilement mêlées :

– une affirmation d'*existence* de G, qui se trouve justifiée par le problème même (d'après l'énoncé, il existe bien un point C tel que G soit le centre de gravité du triangle ABC) ;

– une affirmation d'*unicité* (« il y a une seule solution, “on va tous obtenir le même point C” ») qui, elle, ne va nullement de soi : si, par exemple, on avait effacé C *et* B, pour tout point B non aligné avec A et G on trouverait un point C convenable, et l'on ne pourrait pas, sans information supplémentaire, retrouver le triangle de départ.

Organisation didactique

OD31. Le titre porté sur la feuille de travail – *Position du centre de gravité sur chacune des médianes* – anticipe beaucoup ! Car, précisément, ce qu'il s'agit de découvrir collectivement, c'est que le centre de gravité occupe sur la médiane une *position particulière* (il la divise en un rapport constant) *et que cette propriété constitue la clé du problème étudié.*

OD32. La *dévolution* du problème aux élèves s'appuie sur une lecture de l'énoncé par l'un des élèves, augmentée de commentaires lapidaires du professeur qui limitent *a priori* le travail de la classe en écartant un point essentiel d'incertitude – peut-on effectivement retrouver le point effacé ?

OD33. Le problème proposé apparaît ici *isolé*. Pour le contraste, on peut imaginer une dynamique d'étude dans laquelle il prendrait place dans un PER engendré par la question « Étant donné une figure dont certains éléments ont été effacés, peut-on – et alors comment – reconstituer la figure (c'est-à-dire retrouver les éléments effacés) ? » Il s'agit là d'un PER productif dans tous les secteurs de la géométrie de 4^{e} : peut-on par exemple, connaissant un arc de cercle dont le centre a été effacé, reconstituer le cercle ? Dans ce cadre général, la question de la possibilité de déterminer C, et en particulier la question de l'*unicité* de C, se poserait, à la longue, de façon quasi inévitable – par exemple si la classe s'attaque au problème suivant : « D'un rectangle tracé dans le plan, il ne reste plus que l'un des coins et le milieu de l'un des côtés ; peut-on reconstituer ce rectangle et, si oui, comment ? »

OD34. Le problème proposé lors de la séance observée pourrait alors se comparer utilement, par exemple, au problème analogue concernant le type de tâches $T_{\llcorner}$ suivant : "Dans un triangle ABC dont on a marqué l'orthocentre H, on a effacé le sommet C ; construire ce point à la règle et au compas connaissant A, B et H." » Ici, la clé de la résolution ne tient nullement au fait que H occuperait une position particulière sur les hauteurs : la propriété géométrique cruciale est d'une nature très différente.

Gestion de la séance

GS31. Le compte rendu d'observation ainsi que les analyses qui précèdent suggèrent que le lancement de l'activité par le professeur est guidé et contrôlé de façon relativement « serrée », au point que la dévolution du problème aux élèves et sa réception par la classe en est gênée.

---

4. Forum des questions : exposés du jour

4.1. L'exposé 3 devait avoir pour sujet la question suivante.

Exposé 3. Le manuel de la classe doit-il être au cœur du travail de la classe ? Dans tous les cas, quels usages doit-on en faire ?

Les archives du Séminaire ne contenant pas d'indications systématiquement développées sur la question proposée, cet exposé, à l'origine confié à GB, a été abandonné. On reviendra ultérieurement sur la question soulevée, qui faisait notamment écho à une question de la semaine que l'on rappelle :

> Est-il fondamental de s'appuyer principalement sur le manuel scolaire de l'établissement pour le choix des exercices à donner aux élèves ? Peut-on dire aux élèves de ne pas apporter le manuel scolaire en classe et de s'en servir uniquement à la maison pour les devoirs donnés d'une séance sur l'autre ? (SPM, CR, 5^{e}, 0)

4.2. On entend donc d'abord un exposé de MB relatif à la question ci-après.

Exposé 4. Qu'appelle-t-on « modules » en seconde ? À quoi doit-on utiliser ces temps de travail avec les élèves ?

a) Cet exposé permet-il de répondre aux questions de la semaine ci-après ?

1. Que doit-on faire de précis en « module » (demi-groupe) ? (DR, OS, 2^{de}, 0)

2. Quel est le statut exact des séances de module, leur place par rapport aux heures de cours ? (GB, OS, 2^{de}, 1)

3. Doit-on, en module, faire des exercices relatifs à la leçon actuelle ou en choisir qui ne sont pas liés à celle-ci ? (SP, MJ, 2^{de}, 1)

b) Remarques et commentaires

4.3. Pour des raisons personnelles, JB ne peut présenter d'exposé sur la question dont l'examen lui avait été confié :

Exposé 5. Y a-t-il des instructions officielles concernant la fréquence des DS et des DM, leur longueur, leur contenu, leur place dans l'évaluation des élèves ?

On reviendra très bientôt sur ce thème essentiel.

4.4. On entend ensuite l'exposé de NA sur la question suivante.

Exposé 6. Lorsqu'on est amené à constituer des groupes d'élèves, qu'est-ce qui peut justifier de faire des groupes plutôt homogènes ou, à l'inverse, des groupes plutôt hétérogènes ?

a) Cet exposé permet notamment de répondre notamment à la question suivante.

[Un petit devoir récapitulatif en début d'année] permettrait-il de faire des demi-groupes homogènes et cela est-il préférable à des demi-groupes « mélangés » ? (CG, OS, 2^{de}, 0)

b) Remarques et commentaires.

6. Forum des questions : exposés à venir

6.1. Orthographe et typographie

a) Cet exposé examinera quel sort est fait, dans les archives du Séminaire, à la question suivante.

Exposé 7. Quelles sont les connaissances essentielles qu'un professeur de mathématiques doit s'efforcer de maîtriser en matière d'orthographe et de typographie ?

6.2. Travail non fait, que faire ?

a) L'exposé présentera les matériaux figurant dans les archives du Séminaire à propos de la question suivante.

Exposé 8. Comment réagir et agir de manière appropriée lorsqu'un élève n'a pas fait son travail, et en particulier ne rend pas un DM ?

b) Cet exposé se référera notamment aux questions suivantes.

1. En 2^{de}, comment réagir face à un élève qui ne fait pas, ou qui ne fait qu'à moitié son travail à la maison ? (JB, CR, 2^{de}, 0)

2. Comment vérifier le travail qu'on donne à la maison ? Que faire s'il n'est pas fait ? (DR, OS, 2^{de}, 1)

3. Quelle doit être la sanction lorsque le travail personnel n'a pas été fait ou mal fait ? Doit-on laisser une seconde chance ? (DV, JT, 2^{de}, 1)

6.3. Raison d'être & justification : le cas de l'irrationalité de $\sqrt{n}$ (où $n \in \mathbb{N}$)

a) L'exposé présentera les matériaux des archives du Séminaire relatifs à la question suivante.

Exposé 9. À quoi sert de savoir que $\sqrt{n}$ est irrationnel quand n n'est pas un carré parfait ? Et comment alors le démontrer ?

b) Cet exposé se référera notamment aux deux questions suivantes.

1. Ne connaissant pas le niveau des élèves, « $\sqrt{2}$ est irrationnel » peut-il être envisagé comme activité en classe pour introduire les nombres irrationnels ? Sinon, comment introduire les différents ensembles de nombres ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$…) sans faire un cours totalement magistral ? (AC, OS, 2^{de}, 1)

2. Comment peut-on expliquer au niveau de la seconde que $3\sqrt{2}$ est irrationnel (en rapport avec le chapitre des nombres) ? (EMTY, MJ, 2^{de}, 1)

6.4. Parcours d'étude et de recherche

a) L'exposé présentera les matériaux des archives du Séminaire relatifs à la question suivante.

Exposé 10. Quels PER peut-on envisager au collège ?

6.5. Qui ?

Exposé 7 : *LLL (JT)*

Exposé 8 : *GB (MJ).*

Exposé 9 : *JG (OS).*

Exposé 10 : *SP (CR).*

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 3 : mardi 20 septembre 2005

0. Le programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. Questions & réponses // 2. Forum des questions : poursuites & anticipations // 3. Observation & analyse // 4. Forum des questions : exposés du jour.

1. Questions & réponses

1.1. Le fichier des questions de la semaine

Emplacement & mot de passe.

1.2 Utiliser les *Documents 2^nd degré* : l'exemple des programmes

1.3. Recherche de matériaux dans des séances observées

a) On considère la question suivante :

> Est-il possible de remplacer le « cérémonial » de la mise debout ? Le remplacer par le silence à l'entrée de la classe ?… (DV, CR, 2^de, 0)

b) Observer une réponse : la vidéo d'un début de séance.

c) Analyse de la réponse : deux organisations très différentes. L'entrée libre avec attente debout près de sa place relève d'une règle qui, le cas échéant, peut être posée ***par le professeur***. (En fait, dans le cas de l'auteur de la question examinée, cette règle a été fixée au niveau de la classe – et pas seulement de la classe de mathématiques –, par le professeur principal). En revanche, l'attente près de la porte avant d'entrée de l'ensemble de la classe exige une règle posée à un plus haut niveau – en principe celui de l'établissement. (À plus forte raison en est-il ainsi lorsque la règle est que la file d'attente des élèves se forme en un endroit déterminé de la cour, où le professeur se rend pour conduire de là ses élèves jusqu'à la salle de classe assignée.)

2. Forum des questions : poursuites & anticipations

2.1. Logiciels ?

a) On s'arrête d'abord sur la question suivante.

> Où trouve-t-on les logiciels de géométrie dynamique (Geoplan, Geospace, Cabri), les traceurs de courbes (Graphmatica, GeoGebra) et Acrobat Reader ? (GD, JT, 2^de, 2)

b) Il suffit de taper les noms indiqués sur un moteur de recherche pour tomber sur des offres de téléchargement, gratuites ou non. Geoplan, Geospace et Cabri sont des logiciels commerciaux ; on peut les commander aux adresses suivantes :

– pour Géoplan et Géospace : http://crdp.ac-reims.fr/ressources/logiciels/default.htm ;
– pour Cabri : http://www.cabri.com/.

D'une façon générale, on peut aussi interroger le site *Telecharger.com* (à l'adresse http://www.01net.com/index.html). On y trouvera par exemple Adobe Reader à l'adresse http://www.01net.com/telecharger/windows/Internet/internet_utlitaire/fiches/14537.html.

c) La question de la recherche et du choix de logiciels sera approfondie à l'occasion de l'***atelier d'informatique***.

2.2. Un peu de droit

a) On examine maintenant la question que voici.

Quelle est la différence entre un décret, une circulaire, un BO ? (FE, MJ, 5^e^, 2)

b) Il règne, en matière de référence aux textes officiels, un grand laxisme. Le BO est – plus explicitement – le *Bulletin officiel de l'Éducation nationale*. Ce bulletin publié chaque semaine, sauf au mois d'août, contient en principe toutes les décisions prises par le ministère de l'Éducation nationale. On peut consulter les numéros du BO depuis le mois de juin sur le site du ministère (à l'adresse http://www.education.gouv.fr/bo/default.htm).

c) On a reproduit ci-après, à titre d'exemple, le sommaire du dernier numéro paru, à savoir le n° 33 du 15 septembre 2005.

ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, RECHERCHE ET TECHNOLOGIE
• page 1722 > **brevet de technicien supérieur** (RLR : 544-4b)
Définition et conditions de délivrance du BTS "maintenance industrielle" - ARRÊTÉ DU 19-7-2005 JO DU 5-8-2005 (NOR > MENS0501542A)

ENSEIGNEMENTS ÉLÉMENTAIRE ET SECONDAIRE
• page 1727 > **programmes** (RLR : 520-9b)
Programmes de langue et littérature arabes des sections internationales franco-arabes implantées en France conduisant à l'option internationale du baccalauréat - ARRÊTÉ DU 7-7-2005 JO DU 5-8-2005 (NOR > MENE0501413A)
• page 1736 > **baccalauréat** (RLR : 543-1b)
Création du baccalauréat professionnel spécialité artisanat et métiers d'art, options "verrerie scientifique et technique" et "métiers de l'enseigne et de la signalétique" - ARRÊTÉ DU 11-7-2005 JO DU 22-7-2005 (NOR > MENE0501490A)
• page 1740 > **baccalauréat** (RLR : 543-1b)
Création du baccalauréat professionnel spécialité "technicien constructeur bois" - ARRÊTÉ DU 11-7-2005 JO DU 22-7-2005 (NORM > ENE0501451A)
• page 1744 > **baccalauréat** (RLR : 543-1b)
Création du baccalauréat professionnel spécialité "travaux publics" - ARRÊTÉ DU 11-7-2005 JO DU 2-8-2005 (NOR > MENE0501452A)
• page 1748 > **baccalauréat** (RLR : 543-1b)
Création du baccalauréat professionnel spécialité "technicien du bâtiment : études et économie" - ARRÊTÉ DU 11-7-2005 JO DU 2-8-2005 (NOR > MENE0501453A)
• page 1753 > **activités éducatives** (RLR : 554-9)

Semaine nationale de la presse et des médias - CIRCULAIRE N°2005-126 DU 17-8-2005 (NOR > MENL0501736C)
• page 1756 > **activités éducatives** (RLR : 554-9)
Frankreich-Preis/Prix Allemagne - année 2005-2006 - AVIS DU 10-8-2005 (NOR > MENC0501755V)

PERSONNELS
• page 1759 > **inspections générales** (RLR : 630-1 ; 630-2)
Lettre de mission pour l'année scolaire et universitaire 2005-2006 - LETTRE DU 8-9-2005 (NOR > MENB0501998Y)
• page 1762 > **examen professionnel** (RLR : 716-0a)
Examen professionnel de sélection pour l'accès au grade d'ingénieur de recherche hors classe - année 2005 - ARRÊTÉ DU 23-8-2005 JO DU 1-9-2005 (NOR > MENA0501829A)
• page 1762 > **formation continue** (RLR : 601-3)
Actions de formation continue destinée aux enseignants en fonction dans les établissements d'enseignement français à l'étranger - session 2006 - NOTE DE SERVICE N°2005-133 DU 1-9-2005 (NOR > MENE0501865N)
• page 1766 > **commissions administratives paritaires** (RLR : 631-1)
Élections à la CAPN des inspecteurs d'académie-inspecteurs pédagogiques régionaux - ARRÊTÉ DU 1-9-2005 (NOR > MEND0501872A)
• page 1766 > **commissions administratives paritaires** (RLR : 631-1)
Organisation des élections à la CAPN des inspecteurs d'académie-inspecteurs pédagogiques régionaux - NOTE DE SERVICE N°2005-134 DU 1-9-2005 (NOR > MEND0501870N)
• page 1773 > **comité central d'hygiène et de sécurité** (RLR : 610-8)
CCHS ministériel compétent pour l'enseignement supérieur et la recherche - RÉUNION DU 13-5-2005 (NOR > MENA0501756X)

MOUVEMENT DU PERSONNEL
• page 1775 > **nomination**
Adjoint au doyen de l'IGEN - ARRÊTÉ DU 6-9-2005 (NOR > MENI0501900A)
• page 1775 > **cessation de fonctions**
IA-DSDEN - DÉCRET DU 27-7-2005 JO DU 30-7-2005 (NOR > MEND0501309D)
• page 1775 > **cessations de fonctions**
IA-DSDEN et inspecteur d'académie adjoint - DÉCRET DU 27-7-2005 JO DU 30-7-2005 (NOR > MEND0501349D)
• page 1776 > **admission à la retraite**
IGAENR - ARRÊTÉ DU 6-7-2005 JO DU 4-8-2005 (NOR > MENI0501565A)
• page 1776 > **cessation de fonctions**
Directeur de l'École nationale supérieure d'ingénieurs du Mans - ARRÊTÉ DU 19-8-2005 JO DU 31-8-2005 (NOR > MENS0501807A)
• page 1776 > **nomination**
CSAIO de l'académie de Rouen - ARRÊTÉ DU 6-9-2005 (NOR > MEND0501874A)
• page 1776 > **nomination**
Chargé des fonctions de DAET-DAFCO de l'académie de la Guyane - ARRÊTÉ DU 24-8-2005 (NOR > MEND0501861A)
• page 1777 > **nomination**
CAPN des CASU et des intendants universitaires - ARRÊTÉ DU 22-8-2005 (NOR > MEND0501741A)

INFORMATIONS GÉNÉRALES
• page 1778 > **vacance de fonctions**
Directeur de l'École nationale supérieure d'électronique et de radioélectricité de Grenoble - AVIS DU 29-7-2005 JO DU 29-7-2005 (NOR > MENS0501525V)
• page 1778 > **vacance d'emploi**
Secrétaire général de l'université de Corse - AVIS DU 1-9-2005 (NOR > MEND0501859V)
• page 1779 > **vacance de fonctions**
Directeur du CIES de Lyon - AVIS DU 6-9-2005 (NOR > MENS0501914V)

• page 1780 > **vacances d'emplois**
Emplois vacants à l'École pratique des hautes études - AVIS DU 1-8-2005 (NOR > MENP0501725V)
• page 1780 > **vacance de poste**
CASU, chef de la division des personnels de l'enseignement scolaire du rectorat de l'académie de Limoges - AVIS DU 10-8-2005 (NOR > MEND0501739V)
• page 1781 > **vacance de poste**
Directeur du CRDP de l'académie d'Orléans-Tours - AVIS DU 6-9-2005 (NOR > MEND0501898V)
• page 1781 > **vacance de poste**
Agent comptable de l'IUFM des Pays de la Loire - AVIS DU 1-9-2005 (NOR > MENA0501845V)
• page 1782 > **vacance de poste**
Agent comptable de l'IUFM de l'académie de Grenoble - AVIS DU 1-9-2005 (NOR > MENA0501846V)

d) Prenons pour exemple la ***lettre de mission aux inspections générales*** (IGEN et IGAEN) pour l'année 2006-2006.

• Ce texte, signé par Gilles de Robien, « ministre de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche », et par François Goulard, « ministre délégué à l'enseignement supérieur et à la recherche », assigne notamment pour tâches aux deux corps d'inspection visés (IGEN et IGAEN), dans le cadre du « suivi permanent des enseignements, de la politique éducative, des services et des établissements », celui de la mise en œuvre de la politique éducative concernant

– l'aide et le soutien aux élèves et l'expérimentation des programmes personnalisés de réussite éducative,

– le remplacement des professeurs absents,

– la mise en place des assistants pédagogiques.

• Pour ce qui est de « l'évaluation de l'enseignement en académie », ces inspections auront cette année à conduire l'évaluation des académies d'Aix-Marseille, de Bordeaux, de Lille, de Strasbourg et de Corse. Au chapitre des « Missions et études thématiques », IGEN et IGAEN auront à se pencher notamment sur

– la place et le rôle des parents dans l'école,

– la place et le rôle des inspecteurs d'académie et des services départementaux dans l'administration, le pilotage et l'animation de l'éducation nationale,

– le bilan des mesures prises pour revaloriser la série littéraire au lycée,

– la situation des GRETA,

– la contribution de l'éducation prioritaire à l'égalité des chances des élèves.

e) On remarque que les arrêtés et les décrets paraissent d'abord au ***Journal officiel*** (JO). Le plus haut niveau normatif est (ici) celui du ***décret***, signé par le Président de la République (et non par le ministre seulement), comme le montre le texte annonçant la cessation de fonction d'un IA-DSDEN (« Par décret du Président de la République en date du 27 juillet 2005, il est mis fin aux fonctions d'inspecteur d'académie-directeur des services départementaux de l'éducation nationale du Maine-et-Loire de M. Georges Ascione, appelé à d'autres fonctions, à compter du 15 juin 2005… »). L'arrêté est signé par le ministre ou, par délégation, par un haut fonctionnaire du ministère. Les circulaires, notes de service, etc., sont internes au ministère et ont d'abord une fonction d'information des agents et des usagers. Sur toutes ces questions on se reportera au site Internet de ***Légifrance***, « le service public de la diffusion du droit » (http://www.legifrance.gouv.fr/) ; et, pour ce qui est plus précisément de la question posée, au tout récent ***Guide de légistique*** que l'on trouvera à l'adresse Internet http://www.legifrance.gouv.fr/html/Guide_legistique/guide_leg.pdf), et que l'on retrouvera dans sa version pdf sur le site de l'IUFM, rubrique ***Documents 2nd degré***. On y parcourra notamment la section intitulée ***Hiérarchie des normes***, où l'on rencontre notamment le passage suivant relatif aux ***arrêtés*** (fiche 1.3.6) :

> Les décisions des ministres, qu'elles soient individuelles ou réglementaires, prennent la forme d'arrêtés, qu'ils signent eux-mêmes ou qui sont signés par des fonctionnaires ou agents ayant reçu délégation à cet effet (*voir fiche 3.9.3, délégations de signature*).
>
> **1.** En ce qui concerne les décisions individuelles, il appartient aux ministres, dans la mesure où un texte leur délègue cette compétence, de procéder aux nominations dans les services placés sous leur autorité, à l'exception des nominations aux emplois de direction pourvues par décret en conseil des ministres (directeurs généraux et directeurs d'administration centrale ou fonctions équivalentes). Les nominations aux emplois de directeur adjoint, chef de service et sous-directeur sont soumises à une procédure particulière. Les ministres peuvent être également rendus compétents par un texte particulier pour procéder à des désignations ou nominations au sein d'organismes placés auprès d'eux ou sous leur tutelle ou sous leur contrôle.
>
> **2.** Les ministres ne sont compétents pour prendre des mesures réglementaires qu'en vertu de textes, le plus souvent des décrets, leur ayant donné cette compétence explicitement et pour un objet clairement délimité. En effet, les ministres ne disposent pas, de manière générale, du pouvoir réglementaire dont le titulaire de droit commun est le Premier ministre.
>
> La jurisprudence a reconnu aux ministres comme à tout chef de service le pouvoir de réglementer l'organisation et le fonctionnement des services placés sous leur autorité (CE Sect., 7 février 1936 Jamart). Sur ce fondement, les ministres peuvent créer des organismes à caractère consultatif – voir *fiche 5.2.2*). Mais ce pouvoir ne peut s'exercer que de manière résiduelle, sous la réserve qu'aucun texte n'ait donné compétence à une autre autorité pour la matière considérée.

f) On notera que la question de la ***compétence*** de qui prétend prendre un arrêté relatif à un objet donné est essentielle – le ministre ne peut pas faire ce qu'il veut, et le professeur moins encore ! La chose est au moins aussi claire dans ce passage de la fiche 1.3.7 relative aux ***circulaires***, ***directives*** et ***instructions*** :

> Sous des appellations diverses – circulaires, directives, notes de service, instructions, etc. – les administrations communiquent avec leurs agents et les usagers pour exposer les principes d'une politique, fixer les règles de fonctionnement des services et commenter ou orienter l'application des lois et règlements.
>
> Si le terme « circulaire » est le plus souvent employé, la dénomination de ces documents qui suivent un régime juridique principalement déterminé par leur contenu n'a par elle-même aucune incidence juridique : une « circulaire » n'a ni plus ni moins de valeur qu'une « note de service ». […]
>
> Il doit être fait un usage mesuré des circulaires dont la multiplication comme l'incertitude résultant de leur superposition compliquent l'action administrative plus qu'elles n'en améliorent l'efficacité. Les circulaires doivent respecter des règles de forme et de fond destinées à en garantir l'utilité et la régularité.
>
> **1.** Une circulaire n'est jamais une condition nécessaire à l'entrée en vigueur d'une loi ou d'un décret. L'administration n'est d'ailleurs jamais tenue de prendre une circulaire (CE, 8 décembre 2000 Syndicat Sud PTT : irrecevabilité du recours dirigé contre le refus de prendre une circulaire). Il convient donc de se garder d'utiliser toute formule posant explicitement ou implicitement une telle condition. Plus généralement, une circulaire n'est en principe destinée qu'à exposer l'état du droit résultant de la loi ou du règlement qui justifie son intervention en vue d'assurer sur l'ensemble du territoire une application aussi uniforme que possible du droit positif : dans cette mesure elle ne saurait évidemment ajouter à cet état du droit soit en édictant de nouvelles normes, soit en en donnant une interprétation erronée. Par voie de conséquence, il faut éviter de confondre la circulaire avec le texte – loi ou décret – qu'elle présente en laissant entendre que telle décision sera prise en application de celle-ci et non de celui-là.

Une circulaire peut être déférée au juge administratif, y compris lorsqu'elle se borne à interpréter la législation ou la réglementation, dès lors que les dispositions qu'elle comporte présentent un caractère impératif (CE Sect., 18 décembre 2002, Mme Duvignères), ce qui est le plus fréquemment le cas. Le juge censure alors – c'est le motif le plus fréquent de censure – celles de ces dispositions que le ministre n'était pas compétent pour prendre. On rappellera en effet que les ministres ne disposent pas du pouvoir réglementaire, qui appartient au Premier ministre et, par exception au Président de la République (voir articles 13 et 21 de la Constitution). Ils ne peuvent prendre de texte à caractère réglementaire qu'en application d'habilitations législatives ou réglementaires expresses dans des domaines déterminés ou, en application de la jurisprudence *Jamart* (CE Section 7 février 1936), dont le champ d'application est aujourd'hui très restreint, pour l'organisation de leurs services.

Mais les circulaires peuvent être annulées pour d'autres motifs que celui de l'incompétence de leur auteur, notamment lorsqu'elles reprennent des dispositions qui sont elles mêmes contraires à des normes juridiques supérieures (par exemple, circulaire réitérant les dispositions d'un décret illégal (voir décision Duvignères précitée).

Une circulaire peut néanmoins comporter des directives, c'est-à-dire des orientations au vu desquelles les décisions individuelles seront prises par les autorités qui en sont les destinataires en application de la loi ou du règlement (CE, Sect. 11 décembre 1970 Crédit foncier de France ; 20 décembre 2000, Conseil des industries françaises de défense). Ces directives, qui ne se justifient que lorsque le texte dont il sera fait application laisse une marge d'appréciation telle à ces autorités que leur pouvoir de décision peut être orienté dans un sens déterminé, doivent alors être rédigées de manière à faire apparaître que l'auteur de la décision pourra y déroger pour des motifs tenant soit à la situation individuelle de l'usager ou du demandeur, soit à l'intérêt général.

2. Une circulaire constitue tout à la fois un outil de travail pour les services destinataires et un document d'information pour les usagers. Il est rappelé en effet qu'en vertu de l'article 1er du décret n° 79-834 du 22 septembre 1979 pris pour l'application de l'article 9 de la loi n° 78-753 du 17 juillet 1978 portant diverses mesures d'amélioration des relations entre l'administration et le public, les circulaires, directives et instructions comportant une interprétation du droit positif ou une description de procédures administratives doivent être publiées dans un bulletin officiel ayant une périodicité au moins trimestrielle. Ce mode de publication n'exclut pas, à titre exceptionnel, une publication au Journal officiel lorsque l'importance de la circulaire, appréciée par le secrétaire général du Gouvernement, le justifie.

La rédaction et la présentation des circulaires doivent faire l'objet d'une attention particulière pour tenir compte de ces différentes contraintes.

Il est donc souhaitable que :

– les services destinataires soient associés selon des formes appropriées à leur élaboration ;

– l'ensemble des références permettant d'insérer la circulaire dans son environnement juridique soit précisément indiqué : texte(s) dont il est fait application et circulaires antérieures ou connexes traitant du sujet ;

– la ou les circulaires auxquelles celle -ci vient se substituer soient expressément abrogée(s) ; au demeurant, le juge administratif regarde comme caduques les instructions émises dans un domaine où les textes ont fait l'objet de modifications et où de nouvelles instructions ont été prises (CE, 6 mars 2002 Union des métiers et des industries de l'hôtellerie et autres) ; dans le même ordre d'idées, il est généralement préférable de ne pas modifier les circulaires mais de les réécrire entièrement.

3. Dans le cas où le ministre – les ministres en cas de circulaire interministérielle – ne signe pas personnellement une circulaire, seul un directeur ou, si ses attributions le justifient, un sous-directeur d'administration centrale peut la signer, à condition qu'ils disposent d'une délégation de signature à cet effet dans le domaine considéré. Le directeur du cabinet du ministre ne peut signer que dans les conditions prévues par le décret du 23 janvier 1947.

Certaines circulaires préparées par les ministères dont l'importance le justifie ou qui traitent d'un sujet à caractère interministériel peuvent être signées par le Premier ministre. Il convient alors de faire apparaître de façon claire et brève les orientations qui justifient la signature du chef du Gouvernement et, le cas échéant, de renvoyer dans des annexes, les dispositions techniques de la circulaire. Elles sont soumises à sa signature et diffusées par les soins du secrétariat général du Gouvernement.

g) Pour une vue d’ensemble, on se reportera, toujours sur le site de Légifrance, à la rubrique ***À propos du droit*** (http://www.legifrance.gouv.fr/html/aproposdroit/aproposdroit.htm).

2.3. Sanctions & punitions : une enquête

a) Dans le tableau ci-après figurent les résultats du dépouillement des 52 questionnaires remplis que l’on a recueillis au cours de la séance 2 du Séminaire, à propos des quatre premiers comportements dont l’évaluation sur une échelle en quatre valeurs (ci-après) était demandée.

Non, Jamais négociable	**Non, rarement négociable**	**Oui, Négociable**	**Oui, toujours possible**

b) Le dépouillement donne ceci.

Non, jamais négociable	**Non, rarement négociable**	**Oui, négociable**	**Oui, toujours possible**
1. *Garder sa casquette en classe*			
//////////////////////////////// ///////////////	/////		
2. *Garder son blouson en classe*			
///	///////////////////////	////////////////////	//////
3. *Rentrer en classe tout en discutant*			
/////////	//////////////////////	///////////////	/////
4. *Entrer en retard en cours*			
/////////////	//////////////////////////	////////////	

c) À l’aide du logiciel de traitement de texte utilisé, il est facile de passer de ces dénombrements aux ***effectifs*** correspondants, en cliquant sur Outils puis sur Statistiques, et en lisant l’effectif des « Caractères (espaces non compris) » ou des « Caractères (espaces compris) » – ces nombres sont égaux dans le cas qui nous occupe. On obtient ainsi le tableau des effectifs suivants.

Non, jamais négociable	**Non, rarement négociable**	**Oui, Négociable**	**Oui, toujours possible**
1. *Garder sa casquette en classe*			
47	**5**	**0**	**0**
2. *Garder son blouson en classe*			
3	**23**	**20**	**6**
3. *Rentrer en classe tout en discutant*			
9	**22**	**15**	**5**

4. *Entrer en retard en cours*			
13	**27**	**12**	**0**

N.B. Le comportement 3 n'a recueilli que 51 scores (et non 52), du fait peut-être d'un oubli du répondant.

d) Si l'on réunit les *non* d'un côté, les *oui* de l'autre, les tableaux précédents font apparaître une hiérarchie d'acceptabilité, puisqu'on a ceci :

	Non	**Oui**
Comportement 1	**52**	**0**
Comportement 2	**26**	**26**
Comportement 3	**31**	**20**
Comportement 4	**40**	**12**

Du moins acceptable (voire de l'inacceptable) au plus acceptable, les comportements envisagés se classent ainsi : *Garder sa casquette en classe* (0 %) < *Entrer en retard en cours* (23 %) < *Rentrer en classe tout en discutant* (39 %) < *Garder son blouson en classe* (50 %).

e) On peut calculer des indices de dispersion de chacune des quatre distributions d'effectifs.

• Le ***rapport de variation***, qui correspond à la probabilité qu'une valeur observée prise au hasard parmi les N n'appartienne pas à la classe modale, est donné par $\delta = 1 - \frac{n^*}{N}$ où $N = \sum n_i$ est l'***effectif total*** et $n^* = \max(n_i)$ est l'effectif de la ***classe modale*** : pour k modalités ($1 \leq i \leq k$), lorsque n^* varie de 1 (dispersion maximale) à N (dispersion minimale), δ décroît de $\frac{N-1}{N}$ à 0. Ici, ce rapport vaut successivement $\frac{5}{52} \approx 0{,}096$, $\frac{29}{52} \approx 0{,}56$, $\frac{29}{51} \approx 0{,}6$, $\frac{25}{52} \approx 0{,}48$ (l'indice de dispersion maximale étant peu différent de 0,98). On observe que l'accord du collectif enquêté ***est d'autant plus marqué qu'il a trait à des comportements davantage inacceptables***. En d'autres termes, l'accord *a priori* (avant tout travail du collectif) se fait plutôt sur l'interdit que sur le permis, ce que montraient déjà les pourcentages d'acceptation donnés ci-dessus. Cette situation laisse ouvert un vaste champ de prise de décision à chacun des membres du collectif dès lors qu'il souhaite pouvoir se référer à une règle : on est ici tout près de l'***anomie*** (voir ci-après).

• L'***indice de diversité***, qui correspond à la probabilité que deux valeurs observées prises au hasard parmi les N ne relèvent pas de la même modalité x_i, vaut $\delta = 1 - \sum \left(\frac{n_i}{N}\right)^2$. Il décroît jusqu'à 0 à partir d'un maximum $\leq \frac{k-1}{k}$. (On laissera le lecteur effectuer les calculs correspondants à propos des quatre caractères étudiés.)

2.4. La notion de *nomos* et les notions affines

a) Le mot grec ***nomos*** signifie « loi », au sens de la loi de la Cité. L'***anomie*** est, en principe, l'absence de loi. Pourtant, quand on observe une situation réputée anomique, on découvre souvent que ce n'est pas l'absence de loi qui y prévaut, mais que cette impression est liée au contraire au fait que chacun « a sa loi », c'est-à-dire « édicte » sa propre loi et prétend la voir appliquée. On dira en cas qu'il y a ***idionomie*** – le mot *idios* signifiant « particulier », « propre » (à quelqu'un). En nombre d'institutions, la tentation de l'idionomie est forte. À l'instar d'autres acteurs de la vie publique, un professeur peut être porté à vouloir « faire sa loi » et à chercher à l'imposer, c'est-à-dire à se laisser aller à son penchant idionome…

b) Le premier besoin qui préside à la constitution et à l'activité d'un ***groupe humain*** est pourtant qu'y soient créées des ***règles partagées***. Pour exister, tout groupe humain a d'abord besoin de ***nomos***, afin que les membres du groupe se vivent comme tels, parce qu'ils partagent ***une même loi***, parce qu'ils sont ***« synnomes »*** (et non pas autonomes), parce que la loi du groupe commande à la loi de chacun.

c) La première exigence que le professeur doit faire prévaloir dans la classe dont il a la responsabilité est ainsi une exigence de synnomie qui prenne en compte « la hiérarchie des normes » (au plan de la classe, de l'équipe pédagogique, de l'établissement, etc.). Cette exigence première n'exclut nullement la volonté d'***eunomie***, c'est-à-dire la volonté d'instaurer une « législation » la plus harmonieuse possible (le grec *eu* signifie « bien ») : l'eunomie est en fait, à bien des égards, la condition d'une véritable synnomie.

2.5. « Thèmes d'étude » et « activité »

a) On s'arrête maintenant sur la question suivante.

Quelle est la différence entre thème d'études et activité ? (AC, OS, 2de, 2 ; & MT, OS, 4^{e}, 2)

b) En guise de matériel pour répondre, on a rassemblé ci-après les occurrences, dans les deux notices diffusées jusqu'ici, du vocable ***thème*** (à l'exception des occurrences de la section 4 de la deuxième notice ou renvoyant aux « thèmes d'étude [libres] » ou aux « thèmes de convergence »).

Première rentrée des classes

[1] … le professeur engagera d'emblée la classe dans l'étude d'un ***thème mathématique neuf***, inscrit au programme de l'année qui commence, relevant cependant d'un domaine et d'un secteur mathématiques ***déjà quelque peu familiers*** (on doit proscrire ici le « totalement nouveau » autant que le « totalement ancien »), mais comportant des éléments mathématiques ***inédits et significatifs***. L'étude de ce thème, comme celle des thèmes qui lui succèderont, constituera alors le cadre où intégrer, le cas échéant, les ***rappels fonctionnellement utiles***, dont une partie non négligeable pourra au reste faire l'objet d'un travail hors classe des élèves, avec, bien entendu, mise en forme dans la synthèse relative au thème étudié.

[2] Le professeur s'attachera au contraire à faire chaque fois un ***inventaire très précis*** de ce qui est attendu par le programme (et non de ce qui est proposé par les manuels) ***pour s'y tenir résolument*** – types de problèmes relevant du thème étudié que les élèves devront savoir résoudre, techniques de résolution de ces problèmes, concepts, notations et résultats mathématiques constitutifs de ces techniques ou permettant de les justifier, etc.

[3] Le choix du premier thème mathématique à étudier ayant été expliqué (et un commentaire succinct consigné éventuellement dans la partie ***Vie et travail…***), la classe se mettra au travail aussitôt.

Le temps de l'étude

[1] D'une façon générale, les types de questions, que l'on peut regarder comme des ***sujets*** d'étude, sont regroupés plus ou moins clairement dans des organisations mathématiques ***locales***, les ***thèmes d'études***, qu'on peut à leur tour « amalgamer » pour former des organisations ***régionales***, les ***secteurs d'études***, dont la réunion constitue enfin une organisation ***globale*** ou ***domaine d'études***.

[2] Chaque secteur est constitué d'un certain nombre de ***thèmes*** : le secteur ***Configurations, constructions et transformations*** comporte ainsi, en 5^e^, le thème de la ***symétrie centrale***, ou encore celui du ***triangle***. À son tour, chaque thème se décline en ***sujets*** d'étude, c'est-à-dire, en pratique, en ***types de tâches mathématiques*** que l'élève doit étudier afin d'apprendre à les accomplir de manière satisfaisante, acquérant par là une nouvelle ***compétence*** mathématique. Pour le thème du triangle en 5^e^, les élèves doivent ainsi apprendre à « construire un triangle connaissant la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents », ou encore « connaissant les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés ».

[3] … en 2^de^, le programme actuel est-il scindé en ***trois domaines***, intitulés respectivement ***Statistique***, ***Calcul et fonctions***, ***Géométrie***. Le domaine ***Calcul et fonctions*** se laisse analyser en ***trois secteurs*** : le secteur ***des nombres***, comportant ***deux*** thèmes d'études (« Nature et écriture des nombres » et « Ordre des nombres. Valeur absolue d'un nombre ») ; le secteur ***des fonctions***, comportant ***quatre*** thèmes d'études (« Fonctions », « Étude qualitative de fonctions », « Premières fonctions de référence » et « Fonctions linéaires et fonctions affines ») ; le secteur (qu'on peut appeler) ***des modèles et de la modélisation algébriques***, comportant ***deux*** thèmes d'études (celui des modèles, intitulé « Fonctions et formules algébriques », et celui de la modélisation, intitulé « Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations »).

[4] L'observation montre que nombre de professeurs ont tendance à voir le programme comme ***un ensemble de thèmes***, en oubliant ***les niveaux supérieurs d'organisation*** (secteurs et domaines), au point quelquefois de sembler ignorer, par exemple, que le programme de 2^de^ se distribue en ***trois*** domaines, et non deux.

[5] La réduction du programme aux thèmes d'études est peut-être en partie impulsée par l'obligation ***de programmer l'étude dans le temps***, c'est-à-dire de créer un ***ordre*** qui ***enchaîne*** les éléments à étudier, chaque élément nouvellement abordé s'articulant avec les éléments précédemment étudiés.

[6] Cette première répartition, élaborée en conformité avec le texte du programme, peut avantageusement prendre appui sur les découpages – formulés généralement en termes de thèmes d'étude – proposés par les ***manuels***, ou, de manière parfois plus utilisable (parce que davantage « stylisée »), par les ouvrages de synthèse qui s'adressent ***aux élèves***. Ainsi, pour la classe de 3^e^, tel ouvrage relevant de cette dernière catégorie propose-t-il de fait au professeur intéressé le découpage suivant :

1. Nombres et calculs. 2. Développer – Factoriser. 3. Équations à une inconnue. 4. Inéquations à une inconnue. 5. Systèmes à deux inconnues. 6. Applications affines. 7. Équations de droites. 8. Géométrie analytique. 9. Géométrie plane. 10. Trigonométrie. 11. Géométrie dans l'espace. 12. Autour de Thalès. 13. Translation et vecteurs. 14. Statistiques.

Dans une deuxième étape, les mêmes outils (texte du programme, ouvrages divers) permettent alors une première analyse de chacun des thèmes retenus. C'est ainsi que le chapitre 13, *Translation et vecteurs*, de l'ouvrage mentionné est découpé de la manière suivante :

13. Translation et vecteurs : Relier translation et vecteur ; Relier vecteur et parallélogramme ; Ajouter des vecteurs ; Utiliser les coordonnées d'un vecteur.

Chacune des rubriques identifiées devra enfin, dans une troisième étape, faire l'objet d'une ultime analyse, en termes de ***types de problèmes*** (ou ***types de tâches***).

[7] Le travail de programmation suppose alors que l'on établisse un ***« budget temps »*** précisant le temps d'horloge alloué à l'étude de chacun des blocs thématiques identifiés. Faute d'expérience, on peut, pour cela, considérer en première approximation que le ***programme*** est fait d'une succession de thèmes θ_k ($1 \le k \le n$), que, dans le cas de la 2^de^ par exemple, on peut identifier, *grosso modo*, aux différents « blocs » qui composent le programme (on les désigne ici par les premiers mots de leur libellé) :

I. Statistique. 1. Résumé numérique… **2.** Définition de la distribution… **3.** Simulation et fluctuation d'échantillonnage…

II. Calcul et fonctions. 1. Nature et écriture des nombres… 2. Ordre des nombres… **3.** Fonctions… **4.** Étude qualitative de fonctions… **5.** Premières fonctions… **6.** Fonctions linéaires et fonctions affines… **7.** Fonctions et formules algébriques… **8.** Mise en équation…

III. Géométrie. 1. Géométrie dans l'espace **2.** Les configurations du plan... **3.** Triangles isométriques… **4.** Repérage dans le plan… **5.** Multiplication d'un vecteur par un réel… **6.** Équations de droites… **7.** Système d'équations linéaires...

c) On a de même rassemblé les occurrences d'« activité ».

Première rentrée des classes

[1] L'organisation didactique, dont dépend d'une manière essentielle la ***réussite des apprentissages***, est aujourd'hui centrée sur la notion d'***activité***. Encore cette notion doit-elle être précisée ! Trop souvent, en effet, ce mot semble ne désigner qu'une simple phase « préparatoire », voire un pur « échauffement » en début d'heure, sans lien fort avec ce qui suivra. Par contraste, l'activité que l'on qualifiera ici d'***activité d'étude et de recherche*** (AER), qui doit laisser une large place à l'action et à la réflexion ***des élèves***, est ***le cœur de la vie mathématique de la classe***. C'est là, en effet, que se construisent les mathématiques que le professeur doit enseigner et que les élèves doivent apprendre : toute AER proposée à la classe doit ainsi provoquer l'émergence de notions et outils mathématiques visés. Le matériau mathématique élaboré est alors mis en forme – ***par la classe***, ***sous la direction du professeur*** – dans une ***synthèse*** qui en précise les différents composants et les ***« institutionnalise »*** d'une manière presque définitive.

[2] Au-delà de la synthèse, en effet, la classe doit ensuite ***s'exercer à maîtriser*** les contenus mathématiques ayant subi cette première mise en forme, ***et doit les « faire travailler »*** : c'est là le rôle des ***exercices*** (le mot est pris ici en son sens strict) et des ***problèmes***, lesquels permettent ***de pousser plus loin***, d'une façon ou d'une autre, sur tel ou tel point, la construction mathématique entreprise dans l'AER ou la suite d'AER réalisées. À un tel « travail » de l'***organisation mathématique*** mise en place jusque là doit répondre alors une ***reprise*** de la synthèse, qui en retouche certains points et en complète d'autres.

[3] À l'ancienne opposition binaire Cours / Exercices s'est ainsi substituée une structuration ***ternaire***, Activités / Synthèses / Exercices & problèmes, qui doit elle-même trouver une traduction appropriée dans l'organisation des ***traces écrites***.

[4] Les programmes scindant le corpus mathématique à étudier en trois grands ***domaines*** (en gros : Calcul, Géométrie, Statistique), lorsque les élèves utilisent un classeur, celui-ci sera divisé d'abord en trois parties correspondant aux trois domaines, chaque partie étant subdivisée à son tour en les trois rubriques que forment respectivement les AER, les synthèses, les exercices et problèmes.

[5] dans le cas même où les élèves ne disposeraient que d'un unique cahier de mathématiques à la fois (ce qu'imposent certains établissements), on pourra par exemple consacrer les pages paires aux AER et les pages impaires (hormis la première !) aux synthèses, en consignant exercices et problèmes (quand ils ne font pas l'objet d'une « copie ») dans le cahier pris à rebours.

[6] Le recensement évoqué ne doit évidemment pas oublier ce dispositif traditionnel – et indépassable – qu'est l'***étude personnelle hors de la classe***, que ce soit hors de l'établissement (« à la maison ») ou dans l'établissement (permanence, études surveillées, études encadrées ou dirigées). Il est en effet nécessaire de donner aux élèves, ***à l'issue de chaque séance*** sauf exception, un certain travail personnel à accomplir, à condition de ***bien calibrer l'effort demandé***, tant au plan quantitatif qu'au plan qualitatif, afin de satisfaire au mieux les ***besoins didactiques*** du moment. Dans ce but on proposera des travaux qui ne soient pas seulement des « exercices d'entraînement » et qui s'intègrent de manière appropriée à la dynamique du travail de la classe : mise en forme de la solution d'un ou plusieurs exercices résolus en classe, travail numérique, graphique ou statistique préparatoire à une AER, bilan personnel d'une AER préparatoire à la synthèse collective relative à cette AER, etc. Certains de ces travaux feront l'objet d'une rédaction relevée, corrigée et éventuellement notée par le professeur, en évitant cependant, selon le principe « souvent et court plutôt que rarement et long », de recourir aux lourds « problèmes » autrefois traditionnels en matière de DM (devoir à la maison).

Le temps de l'étude

[1] Dans une organisation générale de l'étude d'un style maintenant classique, cette dynamique est supposée être régulièrement relancée par l'introduction, par le professeur, d'une AER nouvelle, souvent sans lien avec celles qui l'ont précédées non plus qu'avec celles qui suivront.

[2] Cette structure faiblement intégrée de la suite des AER impulsant l'étude pose problème : l'expérience montre en effet que cette ossature didactique est relativement fragile parce que

l'introduction *ex abrupto* d'une AER nouvelle se fait alors, en règle générale, sans ***motivation mathématique*** suffisante, et en particulier sans véritable raison autre que la volonté – du professeur, ou même de la classe, quand celle-ci a voix au chapitre en la matière – de lancer l'étude de tel ou tel bloc thématique. Par contraste, la dynamique à lancer et à nourrir gagne à avoir pour moteur, non une suite peu intégrée d'AER organisées chacune autour d'une question ***isolée***, dont le choix, extrinsèque, resterait entièrement à la charge du professeur (éventuellement en dialogue avec la classe), mais un petit nombre de suites d'AER intégrées au sein de ce qu'on nommera un PER, un ***parcours d'étude et de recherche*** engendré par une ***« grande » question***, c'est-à-dire par une question ayant un ***fort pouvoir générateur***, et qui va donc ***motiver***, au plan de la connaissance, l'étude de beaucoup de questions.

3. Observation & analyse

3.1. Rappelons la question au principe du travail que l'on a entamé.

***Q*₁**. Que faire, en 4^e, à propos des médianes d'un triangle ?

3.2. Que dit le programme ?

a) Un document est diffusé présentant le programme de géométrie de 4^e.

b) Domaine, secteur, thème, sujets (voir la notice *Le temps de l'étude*). Le ***domaine*** d'études est celui des ***Travaux géométriques***. Celui-ci comporte quatre ***secteurs*** d'études : 1. « Triangles » ; 2. « Triangle rectangle et cercle » ; 3. « Translation » ; 4. « Pyramide et cône de révolution ». La séance observée relève du secteur 1, lequel se scinde en trois ***thèmes*** d'études : 1. « Milieux et parallèles » ; 2. « Triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes » ; 3. « Droites remarquables d'un triangle ». Le thème d'études dont relève la séance observée est le thème 3 **–** ***droites remarquables d'un triangle.***

c) Les « compétences exigibles » relatives au thème en question sont formulées ainsi :

Construire les bissectrices, les hauteurs, les médianes, les médiatrices d'un triangle ; en connaître une définition et savoir qu'elles sont concourantes.

• On notera que l'unique type de tâches clairement explicité à propos des médianes consiste à « construire » une médiane, et peut donc être énoncé ainsi :

T_{me}. Étant donné trois points non alignés A, B, C, construire la médiane issue de A dans le triangle ABC.

• Les deux autres « compétences » énoncées relève de la technologie mathématique. Le premier élément technologique (définition de la médiane) est évidemment indispensable. Le second (les médianes sont concourantes) apparaît ici comme un outil technologique ***potentiel***, apte à justifier (voire à engendrer) une technique τ relative à un type de tâches T lui-même ***non précisé***…

d) Un commentaire précise ceci :

On pourra étudier la position du point de concours de la médiane sur chacune d'elles.

• Cela signifie que l'étude réalisée lors de la séance observée n'est nullement obligatoire. On devra s'en souvenir si le temps vient à manquer, et cela d'autant plus que, dès lors qu'on s'est engagé dans la voie en question, on ne peut reculer : le type de tâches $T_{C?}$ (« Dans un triangle ABC dont on a marqué le centre de gravité G, on a effacé le sommet C ; construire ce point à la règle et au compas connaissant A, B et G » : voir le résumé de la séance 2) devra compter ***à l'égal des autres***, et donc être « à savoir », et entrer dans le programme du prochain contrôle.

• Il ne serait donc pas déraisonnable d'écarter le résultat étudié ici, si classique soit-il. En revanche, la propriété de concours des médianes doit, elle, faire l'objet d'une étude répondant au schéma suivant : la classe s'attaque à une tâche problématique $t \in T$ dont l'accomplissement va supposer la connaissance de cette propriété, qui en sera la clé (ou l'une des clés, les autres clés étant toutefois d'ores et déjà connues). Pour le professeur – et pour ce professeur collectif qu'est le Séminaire –, il restera, dans ce but, à imaginer un type de tâches T convenable et à y sélectionner une tâche t appropriée (ce qui est un problème de ***développement***).

4. Forum des questions : exposés du jour

4.1. Orthographe et typographie

a) Cet exposé, dû à LLL, examine le sort fait, dans les archives du Séminaire, à la question suivante.

Exposé 7. Quelles sont les connaissances essentielles qu'un professeur de mathématiques doit s'efforcer de maîtriser en matière d'orthographe et de typographie ?

b) Le contenu de cet exposé permet-il de répondre à la question suivante ?

Comment gérer les fautes d'orthographe des élèves ? (JB, OS, 4^{e}, 2)

4.2. Travail non fait, que faire ?

a) L'exposé présenté par GB a trait à la question suivante.

Exposé 8. Comment réagir et agir de manière appropriée lorsqu'un élève n'a pas fait son travail, et en particulier ne rend pas un DM ?

b) Quelles réponses cet exposé permet-il d'apporter aux questions ci-après.

1. En 2de, comment réagir face à un élève qui ne fait pas, ou qui ne fait qu'à moitié son travail à la maison ? (JB, CR, 2de, 0)
2. Comment vérifier le travail qu'on donne à la maison ? Que faire s'il n'est pas fait ? (DR, OS, 2de, 1)
3. Quelle doit être la sanction lorsque le travail personnel n'a pas été fait ou mal fait ? Doit-on laisser une seconde chance ? (DV, JT, 2de, 1)

4.3. Fin de la séance

En raison de la présentation de la FGC en fin de séance, il est impossible d'entendre les deux autres exposés prévus, qui sont donc reprogrammés pour la séance 4.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 4 : mardi 27 septembre 2005

0. Le programme de la séance

➔ Matin : 0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions : poursuites & anticipations // 2. Forum des questions : exposés du jour.

➔ Après-midi (explicitation) : 3. Observation & analyse // 4. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques // 5. Au programme ! // 6. Des questions revisitées.

Matin

1. Forum des questions : poursuites & anticipations

1.1. À propos des programmes

a) On s'arrête un instant sur la question suivante.

> Y a-t-il un nouveau programme de 4^e ? Celui paru au BO n^o 5 du 25 août 2005 est-il en vigueur ? (WB, JT, 4^e, 3)

b) Une note de bas de page de la notice *Première rentrée des classes* indique ceci :

> … le ministère de l'Éducation nationale a rendu publics dès juillet 2005 les programmes de 5^e et 4^e qui entreront en vigueur, respectivement, à la rentrée 2006 et à la rentrée 2007

L'information demandée était donc contenu dans les documents examinés.

1.2. Sanctions & punitions : une enquête

a) Le dépouillement des questionnaires à propos des comportements 5 à 15 conduit à ceci.

Non, jamais négociable	**Non, rarement négociable**	**Oui, négociable**	**Oui, toujours possible**
5. *Parler à voix basse avec son voisin*			
1	**20**	**30**	**1**
6. *Se déplacer dans la salle*			
20	**27**	**5**	**0**
7. *Fumer dans la cour*			

43	**1**	**4**	**4**
8. ***Jeter ses mégots dans la cour***			
51	**1**	**0**	**0**
9. ***Sortir de classe pour aller aux toilettes***			
2	**23**	**26**	**1**
10. ***Sortir à l'interclasse pendant un cours de deux heures***			
4	**6**	**35**	**7**
11. ***Mâcher du chewing-gum en classe***			
48	**3**	**1**	**0**
12. ***Cracher par terre dans la cour***			
42	**9**	**1**	
13. ***Frapper un copain qui nous a « traités »***			
50	**2**	**0**	**0**
14. ***Faire du sport quand on a oublié ses affaires***			
13	**22**	**14**	**3**
15. ***Rendre un devoir après la date fixée***			
5	**31**	**16**	**0**

b) En ramenant ces résultats à deux modalités – *Oui* et *Non* – on obtient ceci.

Comportement	Non	Oui
Parler à voix basse avec son voisin	**21**	**31**
Se déplacer dans la salle	**47**	**5**
Fumer dans la cour	**44**	**8**
Jeter ses mégots dans la cour	**52**	**0**
Sortir de classe pour aller aux toilettes	**25**	**27**
Sortir à l'interclasse pendant un cours de deux heures	**10**	**42**
Mâcher du chewing-gum en classe	**51**	**1**
Cracher par terre dans la cour	**51**	**1**
Frapper un copain qui nous a « traités »	**52**	**0**
Faire du sport quand on a oublié ses affaires	**35**	**17**
Rendre un devoir après la date fixée	**36**	**16**

c) Dans le tableau ci-après, on a rangé les comportements à acceptabilité décroissante.

Comportement	Oui
Sortir à l'interclasse pendant un cours de deux heures	**81 %**

Parler à voix basse avec son voisin	**60 %**
Sortir de classe pour aller aux toilettes	**52 %**
Faire du sport quand on a oublié ses affaires	**33 %**
Rendre un devoir après la date fixée	**31 %**
Fumer dans la cour	**15 %**
Se déplacer dans la salle	**10 %**
Cracher par terre dans la cour	**2 %**
Mâcher du chewing-gum en classe	**2 %**
Frapper un copain qui nous a « traités »	**0 %**
Jeter ses mégots dans la cour	**0 %**

2. Forum des questions : exposés du jour

2.1. DM & DS

a) On commence par un exposé différé, présenté par JB :

Exposé 5. Y a-t-il des instructions officielles concernant la fréquence des DS et des DM, leur longueur, leur contenu, leur place dans l'évaluation des élèves ?

b) Cet exposé était très attendu si l'on se réfère au nombre des questions de la semaine qui pourraient lui être rattachées et que l'on examine maintenant. Un premier bloc concerne la fréquence et la « taille » des DM ou DS.

1. Fréquence des contrôles ? (GB, MJ, 3^{e}, 0)

2. Peut-on donner des contrôles « surprises » aux élèves afin de contrôler leurs connaissances ? (MEK, MJ, 5^{e}, 0)

3. Les DM peuvent-ils être recherchés à plusieurs ? (MG, MJ, 2de, 0)

4. Quelle fréquence pour les DM ? Les textes préconisent un devoir par quinzaine au collège. N'est-ce pas trop ? Quelle longueur ? Quel système de notation ? (LLL, JT, 4^{e}, 0)

5. À quel rythme, au niveau des devoirs, doit-on aller pour bien évaluer les élèves ? Les interrogations surprises sont-elles une bonne chose ? (BR, JT, 4^{e}, 0)

6. À quelle fréquence peut-on donner des DM et DS en 6^{e} ? (CR, CR, 3^{e}, 0)

7. Au sujet des DM et des DS notés, combien doit-on en prévoir pour un trimestre ? Quelle fréquence ? Faut-il donner un programme prévisionnel de ceux-ci aux élèves ? (NP, CR, 3^{e}, 0)

8. Quelle doit être la fréquence des DM en 3^{e} sachant qu'ils n'ont pas que les mathématiques à travailler ? (GB, MJ, 3^{e}, 1)

9. Doit-on se contenter de deux ou trois DS ou est-ce préférable de donner en plus quelques interrogations écrites surprises pour s'assurer de la régularité et de la compréhension du travail ? (FL, CR, 2de, 1)

10. Pouvons-nous nous servir d'un DM pour approfondir une notion ? (RD, OS, 4^{e}, 2)

11. Que vaut-il mieux faire : un DS avec trois exercices plus longs ou avec cinq exercices plus courts ? (MD, JT, 2^{de}, 2)

12. Les interrogations surprises sont-elles obligatoires ? (DR, OS, 2^{de}, 2)

13. Quels types d'exercices peut-on donner dans un DM (niveau de difficulté, etc.) ? (CR, CR, 3^{e}, 2)

14. Les DM doivent-ils être difficiles ? Faut-il en profiter pour donner des problèmes plus longs ? (MK, OS, 2^{de}, 3)

15. Vaut-il mieux donner plusieurs DM courts ou des DM plus longs et plus espacés dans le temps ? (CO, MJ, 2^{de}, 3)

16. Vaut-il mieux faire des contrôles de petite durée (15 min) régulièrement, ou plutôt des évaluations bilan à chaque fin de chapitre ? (BR, JT, 4^{e}, 3)

17. En ce qui concerne les vérifications de connaissance, quel doit être le rythme des petites interrogations et le temps imparti pour chacune d'entre elles ? (DV, JT, 2^{de}, 3)

c) Un deuxième bloc de questions a trait au problème de la ***notation*** des DM et DS.

1. Doit-on systématiquement relever le travail de toute la classe ou même d'une partie de la classe si on a donné un DM ? Si oui, est-on obligé de mettre une note ? (FL, T, 2^{de}, 0)

2. J'ai prévu de donner à mes élèves un DM par chapitre (de deux à deux semaines et demie). Comment ces DM peuvent-ils entrer dans l'évaluation des élèves sachant que souvent les parents, frères et sœurs et professeurs particuliers les aident, voire les font à leur place ? (NA, JT, 4^{e}, 1)

3. Comment évaluer un DM tout en donnant aux élèves le droit de travailler ensemble ? (JB, CR, 2^{de}, 1)

4. Pour les notations de devoirs (en classe ou à la maison), faut-il mettre des notes ou des lettres (A, B, C, etc.) ? (MEK, MJ, 5^{e}, 2)

5. Est-il important d'avoir beaucoup de notes ? À quel rythme doit-on donner des DM, des interrogations écrites inopinées et des contrôles de fin de chapitre ? Quels coefficients serait-il bien d'appliquer entre les devoirs rédigés à la maison et ceux réalisés au collège ? (SPM, CR, 5^{e}, 2)

6. Quelle taille doit avoir un DM ? À quelle fréquence doit-on les donner aux élèves ? Comment tenir compte des notes de ces DM ? (GC, MJ, 2^{de}, 3)

7. Si l'on note un DM, quel coefficient lui donner par rapport à une interrogation ou un DS ? (ED, MJ, 2^{de}, 3)

8. Comment noter un DM, étant donné que les notes peuvent aller de 20 (en trichant) à 0 (en ne comprenant rien ou en ne faisant rien du DM) ? (MD, JT, 2^{de}, 3)

9. Doit-on noter les exercices faits à la maison et ramassés à l'improviste si ceux-ci sont très mauvais ? Cela reviendrait à pénaliser ceux qui ont fait l'effort de faire leurs devoirs, mais on ne peut pas pénaliser ceux qui n'ont rien rendu. (AG, JT, 5^{e}, 3)

10. Quel coefficient pour les DM et quel coefficient pour les DS afin de rester le plus juste possible ? (FEB, CR, 4^{e}, 3)

11. Que faire face à un test de cours (ou autre) dont la moyenne est très voisine de zéro ? Le refaire ? Si oui, faire une moyenne, prendre la meilleure note ?… (MT, OS, 4^{e}, 3)

2.2. À propos de $\sqrt{n}$

a) L'exposé préparé par JG avait dû être différé lors de la séance précédente ; il présente les matériaux des archives du Séminaire relatifs à la question suivante.

Exposé 9. À quoi sert de savoir que $\sqrt{n}$ est irrationnel quand n n'est pas un carré parfait ? Et comment alors le démontrer ?

b) Le contenu de cet exposé permet-il de répondre aux deux questions ci-après ?

1. Ne connaissant pas le niveau des élèves, « $\sqrt{2}$ est irrationnel » peut-il être envisagé comme activité en classe pour introduire les nombres irrationnels ? Sinon, comment introduire les différents ensembles de nombres ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$…) sans faire un cours totalement magistral ? (AC, OS, 2de, 1)

2. Comment peut-on expliquer au niveau de la seconde que $3\sqrt{2}$ est irrationnel (en rapport avec le chapitre des nombres) ? (EMTY, MJ, 2de, 1)

2.3. Parcours d'étude et de recherche

a) Renvoyé lui aussi à cette séance, l'exposé proposé par SP présente les matériaux des archives du Séminaire relatifs à la question suivante.

Exposé 10. Quels PER peut-on envisager au collège ?

b) Remarques & commentaires

Après-midi

Séance d'explicitation

3. Observation & analyse

3.1. À propos de la question « Que faire, en 4e, à propos des médianes d'un triangle ? », on poursuit l'examen du compte rendu d'observation d'une séance en classe de 4e.

Paragraphe 4

Une élève répond à la question posée – construire le point C connaissant A, B et G – en donnant le début d'un procédé de construction. P fait rappeler par un élève que G est intérieur au triangle ABC. Un dialogue vivant s'instaure. On prend le milieu de [AB]. Peut-on construire les médianes ? Non ! P : « Je vous laisse un peu réfléchir… ».

Structure et contenu de la séance

SC41. L'épisode de l'activité d'étude et de recherche dépeint ici relève du *moment exploratoire* de l'étude : on examine collectivement, sous la direction de P, un certain problème.

SC42. Le problème étudié est relatif au type de tâches $T_{C?}$: il s'agit, en l'espèce, de créer une technique correspondante, $\tau_{C?}$.

SC43. Le débat conduit à examiner – sans conclure – le type de tâches qu'on peut noter $T_{me/\{A, B, G\}}$: « Construire les médianes d'un triangle dont on connaît deux sommets et le centre de gravité. » Le problème posé contient une ambiguïté : s'agit-il de construire simplement les *droites* médianes ou s'agit de construire les *segments* médians ?

Organisation mathématique

OM41. L'organisation mathématique visée, $[T_{C?}/\tau_{C?}/\theta_{C?}/\Theta_{C?}]$, n'est encore présente qu'à travers le type de tâches $T_{C?}$ et la recherche de $\tau_{C?}$.

OM42. Notons en outre la mention, à l'instigation de P, d'un élément technologique établi antérieurement : le point G est intérieur au triangle ABC. La pertinence de ce rappel ne semble nullement évidente : sans doute tient-elle, pour P, au fait que G est situé entre C' et C (où C' est le milieu de [AB]), ce qui peut être regardé comme un pas vers le résultat technologique clé – le fait que G se situe aux deux tiers de [CC'] à partir de C.

Organisation didactique

OD41. Par le biais d'un « dialogue » animé par P, l'organisation de la recherche juxtapose (et articule de façon non précisée) l'effort individuel et l'action collective, jusqu'à ce que P renvoie chacun à son travail personnel (en disant « Je vous laisse un peu réfléchir… »).

OD42. L'invitation à réfléchir est marquée d'incertitude : s'agit-il de réfléchir sur $T_{me/\{A,\ B,\ G\}}$ ou sur $T_{C?}$? Ou encore sur $T_{me/\{A,\ B,\ G\}}$ mais en vue d'avancer (ultérieurement) sur $T_{C?}$?

OD43. Quel que soit le sens donné par les élèves à l'invitation de P, à la fin de l'épisode le problème soulevé à propos de $T_{me/\{A,\ B,\ G\}}$ demeure ouvert.

OD44. Une autre organisation de l'étude consisterait à partir de la question cruciale « Comment déterminer un point du plan ? » Dans le cas étudié, une réponse vient à l'esprit qui aurait pu être explorée prioritairement : C peut être obtenu comme point d'intersection des droites portant les côtés [AC] et [BC]. On décrit cette possibilité ci-après à l'aide d'un compte rendu fictif.

Semaine *n* – Lundi

La classe étudie le problème suivant : on a effacé le point C d'un triangle ABC dont on avait marqué le centre de gravité G ; comment retrouver le point C à partir de ce qui reste, c'est-à-dire A, B et G ?

P : « Comment trouver le point C ? Kévin, tu as une idée ? » Kévin : « Si on sait tracer les deux côtés, on a C ! » P : « Qu'en pensez-vous ? Farida ? » Farida : « Oui, mais comment on trace les côtés ? On sait pas, ça !… » P : « Bon, alors ? Quelle question on peut se poser ? Si on veut tracer les côtés ? » Un élève lève le doigt. P : « Oui, Ricardo… » Ricardo : « Comment on fait pour déterminer une droite ? » P : « Oui, c'est ça. Comment peut-on déterminer une droite. Alors comment ? Qui peut répondre ? Qu'est-ce qu'on connaît ici ? » Nabil : « On connaît un point ? Ça suffit pas. » P : « Exact. Alors ? Qu'est-ce qu'il faudrait ? »

Une élève se signale : « Madame ! Madame ! » « Oui, Sarah… » Sarah : « Madame, si on connaissait la direction du côté ! Comme quand on a fait avec le point de concours des bissectrices ! » P : « Oui, qu'est-ce qui s'était passé ? Qui peut nous le rappeler ? Joris ? » Joris : « Ben, au lieu de G on avait le point… » P : « Comment on l'avait noté ce point ? » Des élèves : « I… » P : « Voilà, on l'avait appelé I. Et c'était ? » Des élèves : « Le centre du cercle inscrit dans le triangle. » P : « Bien, c'est ça. Alors, Joris ? » Joris : « Bon, le côté passant par A par exemple c'était le symétrique de (AB) par rapport à (AI), on doublait l'angle, quoi… » P : « Vous êtes d'accord ? » Des élèves en chœur : « Oui ! » P : « Bon, et ici ? Est-ce qu'on peut faire ça ? » Silence…

P relance : « Qu'est-ce qu'il faudrait pour qu'on puisse espérer que ça marche ?… Qui a une idée ? » Une élève semble hésiter à répondre ; P la sollicite : « Manon, tu as une idée ? » Manon : « Si par exemple l'angle était le double, ou le triple, si on avait quelque chose comme ça… » P : « Précise : quel angle ? » Manon : « L'angle $\widehat{GAC}$, si c'était par exemple deux fois $\widehat{BAG}$, ou la moitié, comme ça… » P : « Oui, par exemple si c'était la moitié, qu'est-ce qu'on ferait ? Jocelyn ? » Jocelyn : « On prend la moitié de $\widehat{BAG}$… » P : « Dis-le en termes de symétrie, s'il te plaît. » Jocelyn hésite un peu, puis se lance : « (AC) c'est le symétrique de la bissectrice de $\widehat{BAG}$. » P : « Par rapport à ? » Jocelyn : « À la droite (AG) ! » P : « Oui, enfin, *ce serait !* »

Une élève intervient : « Ça marche pas ! » P : « Oui, Sofia, ça marche pas ? Comment tu sais ? Qu'est-ce qui ne marche pas d'abord ? » « Si on fait ce qu'a dit Jocelyn. » P : « Comment tu as fait ? » Sofia : « J'ai fait la figure avec le quadrillage. Ça marche pas. La moitié, ça marche pas. Et le double non plus. » P : « Bon, qu'est-ce que nous allons faire pour prolonger ce que nous dit Sofia ? Lucas ? » Lucas : « On fait une étude avec le logiciel ! » P : « Oui, avec le logiciel Wallis, c'est ça. Alors comment on fait ça ? Alors Anaïs ? » Anaïs : « On fait la figure. » P : « Oui. » Anaïs : « Et après on demande d'afficher l'angle $\widehat{BAG}$ et l'angle $\widehat{GAC}$, et on compare. » P à la classe : « Vous êtes d'accord ? » Des élèves en chœur : « Oui. » P : « Bon, moi j'ai une question. “On compare”, ça veut dire quoi ? Vous faites quoi ? » Silence… P : « Alors ? » Jocelyn : « On regarde si l'un est le double de l'autre, ou le triple, je sais pas… » P : « Mais pour ça, qu'est-ce qu'on peut faire ? » Un élève demande la parole. P : « Camille ? » Camille : « On demande à Wallis d'afficher le rapport des angles, comme ça on sait directement si c'est un ou un demi, ou deux… » P : « Est-ce qu'on sait faire ça ? » Les élèves en chœur : « Oui ! » P : « Bon, alors vous noter ça dans votre cahier de textes pour jeudi. Allez… »
Les élèves s'affairent. P circule, échange quelques mots avec un élève. Une élève l'appelle. P se rend auprès d'elle, l'écoute. P : « Écoutez, un peu. Amélie demande comment on appelle les mesures des angles. Sarah ? » Sarah : « Moi j'ai mis *u* et *v*, comme on avait fait déjà. » P : « Oui, d'accord, on peut faire ça. Et puis pour le rapport de *u* et *v* donc ? » Sarah : « *r* ? » P : « Voilà, *r*, par exemple ! » Un élève se manifeste : « Madame on peut aussi faire afficher *v*/*u* ! Ça facilite. » P : « Oui, pourquoi pas. Et tu l'appelles comment ? » Florian : « Je l'appelle *s*. » P : « D'accord. Bon, alors on verra jeudi ce qu'on fait… On en reste là pour cette recherche aujourd'hui ! »

Semaine *n* – Jeudi

P : « Bon alors, maintenant on revient au problème de retrouver le sommet C d'un triangle dont on connaît les sommets A et B et le centre de gravité G. J'ai demandé à Farida de nous rappeler ce qu'on avait fait et ce qu'il y avait à faire. Farida, à toi ! » Farida va au tableau et trace rapidement à main levée une figure où apparaisse les points A, B, C et G ainsi que les médianes ; puis elle s'adresse à la classe : « On avait posé la question “Comment faire pour déterminer les droites (AC) et (BC) ?” On a étudié la réponse “On cherche à déterminer la direction de (AC) et de (BC)”, un peu comme on avait fait à propos du même problème avec le centre du cercle inscrit I à la place du centre de gravité G. Mais là on n'a pas trouvé une relation simple… Il fallait faire une étude expérimentale avec Wallis pour voir si par exemple [elle se tourne vers le tableau] l'angle $\widehat{GAC}$ serait la moitié ou le tiers ou autre chose de l'angle $\widehat{GAC}$. Voilà… » P : « Merci Farida, très bien… Bon, vous avez donc étudié ça avec Wallis. Alors votre réponse ? »

Un élève : « Ça marche pas ! » P : « Vous êtes d'accord ? Que ça marche pas ? » Des élèves en chœur : « Oui. » P : « Qui aurait trouvé quelque chose ? » Silence… P regarde la classe : « Bon, alors on va abandonner cette voie – provisoirement ! On revient donc à la question rappelée par Farida : “Comment faire pour déterminer les droites (AC) et (BC) ?” On avait répondu en termes de direction de la droite. Quelle autre réponse est possible ? Pour déterminer une droite ? Kévin ? » Kévin : « Il suffit d'avoir un autre point. » P : « Oui, d'accord. Quel autre point ? Brice ? » Brice : « C. » Rires dans la classe. P : « Brice, pourquoi ils rient ? » Brice : « Parce que c'est ça qu'on cherche ! » P : « Bien. Alors, à quel autre point on pourrait penser ? » Brice : « Le point qui est sur la médiane (AG). » P : « D'accord. Et c'est quoi ce point ? » Ricardo : « Le milieu ! » La classe approuve. P : « Bien, le milieu A', c'est ça. Problème : comment déterminer A' ? » Camille : « On peut faire comme avec les angles : on regarde si par exemple GA' est égal à GA, ou si c'est le double, etc. » P : « Vous êtes d'accord ? » Silence. P : « On peut essayer ça ? » La classe semble approuver. P : « Bon, alors vous savez ce qu'il vous reste à faire ! Cette fois *u* c'est la mesure GA, *v* c'est GA'. C'est clair ? » Les élèves : « Oui. » P : « Alors vous notez ça dans votre cahier de textes. Vous pensez aussi à faire une narration écrite de la recherche qu'on a arrêtée, en vue de la synthèse à venir. » Un élève : « C'est pour quand, Madame ? » P : « Pour lundi prochain. Vous notez ; après, on va faire des exercices de calcul littéral. Je vous donne le premier, vous le recopiez là où vous savez… » Elle écrit :

Exercice 11. Montrer que, si x est un entier pair, alors le nombre $y = 3x–(4x–2)$ est aussi un entier pair. Que peut-on dire de y lorsque x est impair ?

P : « Allez ! Dépêchons-nous… »

Gestion de la séance

GS41. Le type de conduite de l'activité d'étude et de recherche qui prévaut dans l'épisode examiné et que l'on a qualifié de « serré » est affecté par un défaut important : il tend à pousser les élèves à prendre pour « milieu » – c'est-à-dire pour fragment de nature sur lequel éprouver leurs conjectures – une seule et unique instance, le professeur, alors que celui-ci est d'abord un « média » (sur ces notions, on se reportera à la notice *Éducation mathématique & citoyenneté*).

GS42. C'est ainsi sans doute que certains élèves répondent par la négative à la question sur la possibilité de construire les médianes : ils le font en effet moins parce qu'ils auraient étudié le problème mais du fait de l'interprétation spontanée qui est la leur de la question posée – de son énoncé et de son énonciation, qui leur semble inviter une réponse négative ! En revanche, devant la réaction de P à leur réponse (« Je vous laisse un peu réfléchir »), les mêmes se mettront aussi sûrement à penser que la construction est possible et, vraisemblablement, à leur portée.

GS43. Le même phénomène touche aussi, quoique de façon peut-être plus subtile, l'élève qui, nous dit le compte rendu, « répond à la question posée – construire le point C connaissant A, B et G – en donnant le début d'un procédé de construction ». Tout se passe ici comme si la question posée par le professeur devait avoir une réponse qui se trouve et s'énonce presque instantanément, selon un certain contrat didactique dominant, que le style de direction de l'étude vient ainsi conforter.

3.2. Les notions de « média » et de « milieu » sont introduites ici pour la première fois : elles seront au cœur de développements à venir.

4. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques

4.1. ***Le temps de l'étude*** : parcours questionnant.

4.2. On se réfère notamment aux questions suivantes.

1. Comment établir la progression ? (RD, OS, 4^e, 0)
2. Comment choisir dans quel ordre faire les cours quand il n'y a pas de progression commune dans l'établissement ? (CM, OS, 4^e, 1)
3. Certains des élèves de la classe de 5^e que j'ai en responsabilité sont en difficulté scolaire. Ils sont un peu lents. J'ai peur d'étaler la leçon. Doit-on se fixer un temps maximal (par exemple deux à trois semaines) pour traiter un chapitre ? J'ai du mal à établir ma progression sur l'année à cause des lacunes de mes élèves. Comment puis-je faire ? (AS, JT, 5^e, 3)

Jusqu'à quelle date peut-on compter (pour faire le programme en entier) pour organiser l'année ? (JG, OS, 2^{de}, 0)

1. Doit-on alterner un chapitre numérique avec un chapitre de géométrie ? (DB, JT, 4^e, 0)
2. Est-il mieux d'alterner calcul et géométrie ou d'aborder un chapitre de chaque en même temps ? (RD, OS, 4^e, 0)
3. Quels peuvent être les avantages et les inconvénients de progresser sur deux chapitres à la fois (en géométrie et en algèbre) ? (GF, MJ, 2^{de}, 0)
4. Si alterner calcul numérique et géométrie au cours de l'année semble essentiel, à quel point faut-il scinder un chapitre donné du programme ? Par exemple, s'agissant du calcul avec des nombres relatifs, faut-il traiter à la suite la multiplication et la division ? Faut-il au contraire intercaler un travail géométrique entre ces deux notions pourtant très liées ? (WB, JT, 4^e, 2)
5. Est-ce judicieux de tâcher de mener deux chapitres en même temps (calcul, géométrie…) à chaque instant de notre progression ? Pour quelles raisons ? (JB, OS, 4^e, 3)

1. Pas de révisions ! Certes, mais comment faire lorsqu'il existe une progression commune mise en place par l'équipe des professeurs de mathématiques, et que celle-ci en contient ? (WB, JT, 4^{e}, 1)

2. Dans la progression commune, il est prévu un chapitre de révisions de géométrie plane. Je sais qu'il ne faut pas le faire, mais je ne veux pas désavantager mes élèves lors des devoirs. (DC, OS, 2de, 3)

1. Dans quels ouvrages peut-on trouver des activités préparatoires s'adressant à une classe de seconde ? (ED, MJ, 2de, 0)

2. Les activités du livre ne sont pas bien faites. Comment fait-on une activité ?… (SP, CR, 4^{e}, 1)

Doit-on donner dès la rentrée la progression aux élèves ? (DB, JT, 4^{e}, 0)

1. Peut-on mettre en place une évaluation d'entrée pour tester le niveau des élèves ? (GB, MJ, 3^{e}, 0)

2. J'aimerais faire un contrôle en tout début d'année portant sur certaines (ou sur les) connaissances supposées acquises des classes antérieures. Mes interrogations portent sur les outils de notation et sur la gestion du temps pour un tel contrôle. De plus, comment expliquer mes intentions ?… (GB, GS, 2de, 0)

3. Un bilan de connaissances mathématiques est-il nécessaire en début d'année pour évaluer les difficultés des élèves ? (NFG, MJ, 2de, 0)

4. L'année doit-elle débuter par une interrogation bilan de la classe précédente pour « calibrer » le cours que l'on va donner ? (MD, JT, 2de, 0)

5. Un petit devoir récapitulatif (sous forme de QCM, par exemple) s'impose-t-il en début d'année pour voir l'ampleur d'éventuels rappels à effectuer ? (CG, OS, 2de, 0)

5. Au programme !

5.1. Une notice à étudier : ***Éducation mathématique & citoyenneté***.

5.2. Une question à travailler : ***les corrections***.

a) Plusieurs questions de la semaine ont été formulées sur ce sujet.

1. Comment corriger un DS ? En classe ? En donnant un polycopié ? (MK, OS, 2de, 1)

2. Quelle place donner aux contrôles ? Sont-ils à coller dans le cahier ? À ranger dans une pochette ? Combien de temps passer à la correction ? Peut-on ramasser et noter certaines corrections d'élèves ? (LLL, JT, 4^{e}, 2)

3. Comment corriger efficacement un devoir afin que la classe en tire le meilleur profit ? (CC, JT, 2de, 2)

4. Doit-on corriger tout travail à la maison demandé aux élèves ? (NA, JT, 4^{e}, 3)

5. L'ensemble des exercices donnés (y compris les DS et DM) doit-il être corrigé au tableau – par l'élève ou par l'enseignant ? – ou ces corrigés peuvent-ils faire l'objet d'un polycopié ? (AC, OS, 2de, 3)

6. Vaut-il mieux corriger les DS en classe ou distribuer le corrigé ? (MD, MJ, 4^{e}, 3)

7. Pour la correction d'un DM, j'ai envoyé successivement plusieurs élèves au tableau. La correction a duré une heure c'est-à-dire la totalité du cours. Est-ce à éviter ? Est-il alors préférable de distribuer un corrigé ? (FL, CR, 2de, 3)

8. En combien de temps doit-on corriger en classe des DS ? Doit-on toujours corriger les DM, les interrogations en classe ou donner aux élèves un corrigé ? (DP, OS, 5^{e}, 3)

9. Comment rendre une correction de DM ou de contrôle profitables pour les élèves : correction en classe ou distribution d'un corrigé type ? (SP, MJ, 2de, 3)

10. Doit-on corriger tous les exercices au tableau (devoirs, DS, DM, etc.) ou peut-on donner une feuille de corrigé détaillé ? (MT, OS, 4^e, 3)

b) On retient donc le sujet suivant :

Exposé 11. Peut-on donner au rituel des corrections une organisation qui lui confère une réelle viabilité dans la vie de la classe et une utilité effective au service des apprentissages ?

Cet exposé sera préparé et présenté par *NFG*.

6. Des questions examinées

On repasse les questions apparaissant dans le résumé des séances 1 à 3.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 5 : mardi 11 octobre 2005

0. Le programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions : poursuites & anticipations // 2. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques // 3. Forum des questions : exposé du jour & à venir.

1. Forum des questions : poursuites & anticipations

1.1. Questions de notation & de typographie

a) On s'arrête d'abord sur les questions suivantes.

> 1. Certains élèves écrivent « · » pour « × » (par exemple $1,5 \cdot 10^{11}$ au lieu de $1,5 \times 10^{11}$). Est-ce correct ou dois-je corriger ? (DC, OS, 2^{de}, 4)
>
> 2. Je n'ai pas trouvé sur l'ordinateur les polices qu'il faut utiliser pour écrire sous Word le signe de la multiplication × et le signe de l'inconnue *x*. On m'a parlé de la police Ducahier pour les *x* mais je n'arrive pas à la trouver gratuitement sur Internet. Comment faire ? De même, comment insérer des figures géométriques dans un fichier Word ? (CM, OS, 4^e, 4)

b) S'agissant de l'utilisation du symbole de multiplication « · », il convient *d'abord* de rechercher une réponse à ces questions dans les *textes officiels* et donc, en pratique, dans le fichier ***Programmes du collège*** qu'on trouve sur le site de l'IUFM. Le passage relatif à la ***notation scientifique*** n'en fait pas mention, puisqu'on n'y trouve que la notation suivante :

> Modifier l'écriture d'un nombre comme 25 698,236 sous la forme $2,5698236 \times 10^4$ ou $25\,698\,236 \times 10^{-2}$ ou $25,698236 \times 10^3$ est une activité que doivent pratiquer les élèves.

c) On peut aussi rechercher le symbole « · », qu'on trouve dans le programme de 4^e.

> Les situations où interviennent des vitesses moyennes constituent des exemples riches où le traitement mathématique s'avère particulièrement pertinent, comme l'étude de la vitesse moyenne d'un trajet sur un parcours de 60 km, où l'aller se parcourt à $20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et le retour à $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

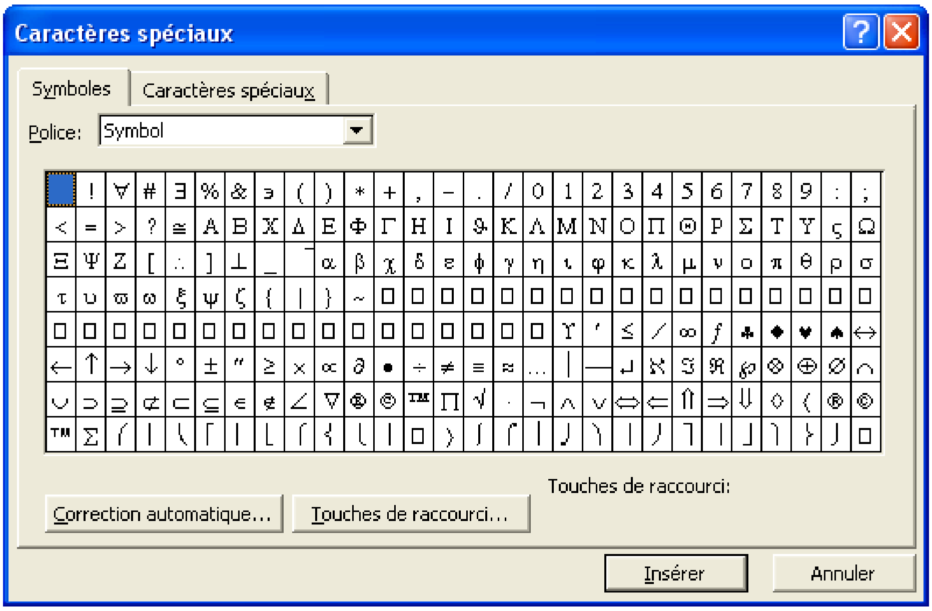
d) Il n'est donc pas incohérent d'user du point multiplicatif en d'autres contextes, et en particulier pour la notation scientifique des nombres, en écrivant ***aussi bien*** : $25,698236 \times 10^3 = 25,698236 \cdot 10^3$, etc. On lisait d'ailleurs, dans l'ancien programme de 2^{de} :

> Lorsque $|\, a' - a \,| \le k \cdot 10^{-p}$, où $1 \le k < 10$, on dit que *a*' est une approximation (ou valeur approchée de *a* à la précision $k \cdot 10^{-p}$. Approximations décimales de *a* par défaut, par excès, à 10^{-p} près (ces nombres sont de la forme $m \cdot 10^{-p}$, où *m* est entier).

e) Où trouver les signes de multiplication ? Le fichier ***Typographie 2***, déjà mentionné lors de la séance 2, apporte une réponse.

Une attention toute particulière sur 2 points :
- pour désigner une limite par la lettre *1*, il vaut mieux utiliser une cursive ℓ, qui figure par exemple dans la police MT-Extra ;
- pour le signe de multiplication, il ne faut pas employer la lettre x ou X, mais le signe spécial × qui figure par exemple dans la police Symbol.

Le signe spécial « · » figure ***dans la même police***, comme on le voit ci-dessous.

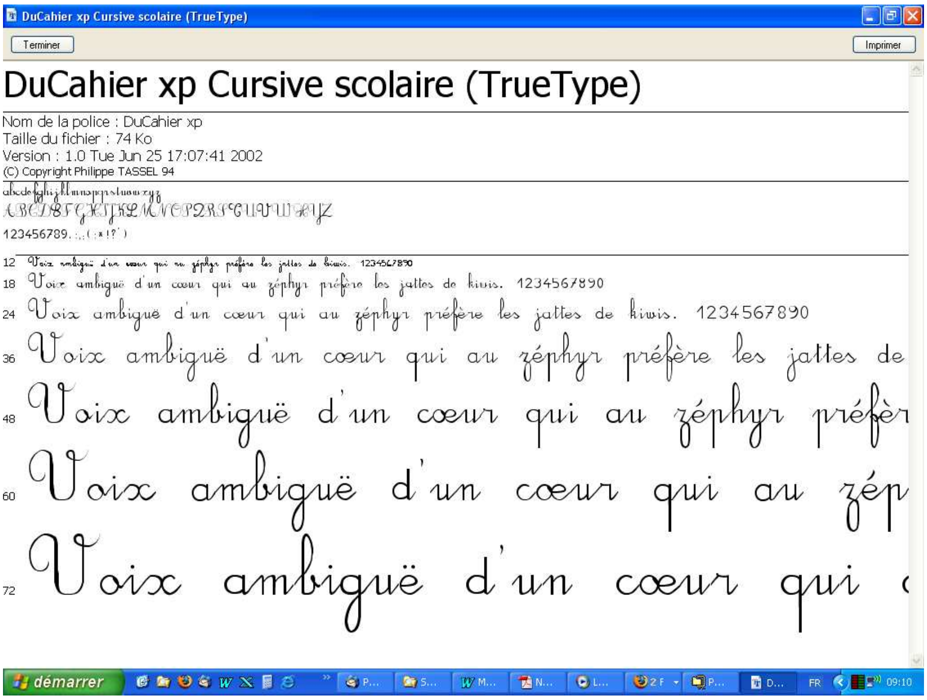


f) S’agissant de l’écriture de l’inconnue *x*, le même texte (*Typographie 2*) indique ceci.

Dans l’alphabet latin, les minuscules qui correspondent à des variables, des inconnues, des indices, etc., sont écrites en *italique*. Néanmoins, sont écrits en romain les identificateurs de fonctions et constantes prédéfinies :
- les noms des fonctions usuelles sin, cos, ln, log, exp, etc. ;
- les constantes e (= exp 1), i (base des imaginaires purs), le symbole d (pour écrire un « élément différentiel » d*t* ou d*x*).

e) La police mentionnée dans la seconde question ci-dessus se trouve très facilement sur Internet, comme le montre le fragment de page d’accueil ci-après.

On a une idée du résultat de l’emploi de cette police avec cette page de présentation.



La police Ducahier (ou Du Cahier) a été créée par un instituteur, Philippe Tassel, pour imiter l’écriture manuscrite des élèves de l’école primaire. Au collège, elle ne saurait être utilisée que pour simuler (si la chose s’impose) une écriture d’élève éventuelle. ***En revanche, elle est à exclure absolument pour écrire des formules mathématiques au traitement de texte !*** L’unique façon d’écrire une variable *x* est celle indiquée plus haut : *x*, c’est la lettre x mise ***en italique***.

f) Chacun doit être attentif, dans sa réception de ce qu’offre, parfois non sans prosélytisme, ses environnements (professionnels ou autres) ***hors formation***, à ne pas accepter sans une critique appropriée les informations, astuces, (trop) bonnes idées, etc., que l’on peut se voir proposé : « mutualiser » est absurde quand on mutualise des erreurs ! En l’espèce, en lieu et place d’un « truc » graphique inadéquat, il convient tout simplement ***d’apprendre*** – et de diffuser – ***les connaissances typographiques correctes***. À titre d’exemple, voici la réécriture d’une suite d’égalités comportant un grand nombre de fautes typographiques :

Écriture originale : 8-4*(-7)=8-(-28)=8+28=36

Écriture correcte : 8 – 4 × (–7) = 8 – (–28) = 8 + 28 = 36

On notera en particulier l’absence fautive d’***espaces*** dans l’écriture erronée.

1.2. Questions de formation

a) On examine maintenant les questions ci-après.

1. Pourra-t-on bénéficier d’Espar pour la filière *Mathématiques* ? (WB, JT, 4e, 4)

2. Est-ce que nous pouvons faire partie du CA de notre établissement en tant que stagiaire ? Si ce n’est pas possible, pouvons-nous être suppléant ou au moins y assister ? (LN, JT, 4e, 4)

3. Dans le lycée, on me propose de faire un stage de perfectionnement sur Geoplan-Geospace avec les autres professeurs de mathématiques du lycée. Est-ce que, cette année, j'ai le droit de m'inscrire ? (GD, JT, 2^de^, 4)

b) La plate-forme *Espar* est un ENT disponible sur le site de l'IUFM, à l'adresse suivante : http://www.aix-mrs.iufm.fr/espar/. Le premier usage d'*Espar* concerne le C2i2e, sur lequel nous reviendrons ; une plate-forme d'aide intitulée *SOS Tice* est d'ores et déjà disponible. Cela noté, à l'instar des autres filières, la filière *Mathématiques* « bénéficiera » d'un *Espar*. Celui-ci sera bientôt fonctionnel : nous reviendrons alors sur son fonctionnement. Mais notons tout de suite que cet *Espar* est un outil au service de la formation donnée à l'IUFM : il est donc placé ***sous la responsabilité de ses formateurs***, lesquels ne sauraient assumer d'en faire un lieu d'échange de productions qu'ils n'auraient pas contrôlées, de quelque instance ou personne qu'émanent ces productions (on pensera ici au cas évoqué plus haut, à propos de l'écriture de l'inconnue x). Ce ***principe de responsabilité formative*** est général : il vaut évidemment pour un professeur vis-à-vis de ses élèves, au collège et au lycée.

c) Il faut regarder cette année comme centrée presque exclusivement sur la formation donnée à l'IUFM. Bien entendu, il n'est interdit à aucun citoyen de prendre des responsabilités : cette année comme chaque année, ainsi, des élèves PE et PCL de l'IUFM seront élus au CA de l'IUFM. Mais la formation donnée par l'IUFM est ***absolument prioritaire***. On se gardera en conséquence de prendre des engagements qu'on ne pourra pas tenir ou que l'on honorerait ***au détriment*** du travail de formation à l'IUFM. S'agissant du CA de l'établissement de stage, il est certainement judicieux de renoncer à s'y faire élire cette année et, au contraire, de tirer profit de sa situation de professeur ***stagiaire***, c'est-à-dire de professeur ***de passage dans l'établissement***, pour solliciter de pouvoir ***observer*** des séances du CA, en y prenant part, donc, non pas comme ***acteur***, mais comme ***spectateur (professionnellement) engagé***.

d) Ce qui précède donne la réponse à la 3^e^ question : chacun peut, certes, faire ce qu'il pense bon pour sa formation ***sur son temps libre personnel***, dans la mesure toutefois où les initiatives qu'il prend ne viennent pas ***diminuer l'engagement formatif qui lui est demandé à l'IUFM***.

1.3. Questions d'organisation didactique

a) La question ci-après concerne la notion même d'AER.

Supposons que l'on soit dans une phase de travail individuel et que l'on se rende compte que les élèves (ou une partie des élèves) n'ont pas tous les outils en main (mauvaise mésogenèse). Comment les aider sans « couper » leur travail et leur faire croire que c'est le professeur qui va faire le travail ? (GF, MJ, 2^de^, 4)

b) Deux points sont essentiels à noter.

1) la mésogenèse – la mise à disposition des outils adéquats du travail mathématique – est l'affaire, non pas de l'élève, non pas du professeur (elle ne tombe complètement dans le *topos* d'aucun des deux), mais bien ***de la classe travaillant sous la direction du professeur***, c'est-à-dire ***sous son contrôle*** et ***sous sa responsabilité*** ;

2) le travail de la classe pour se rendre disponibles les outils pertinents ***fait partie intégrante*** du travail d'étude et de recherche de la classe, comme on le voit dans le passage suivant d'un compte rendu fictif examiné lors de la séance 4.

P : « Bon, qu'est-ce que nous allons faire pour prolonger ce que nous dit Sofia ? Lucas ? » Lucas : « On fait une étude avec le logiciel ! » P : « Oui, avec le logiciel Wallis, c'est ça. Alors comment on fait ça ? Alors Anaïs ? » Anaïs : « On fait la figure. » P : « Oui. » Anaïs : « Et après on demande d'afficher l'angle $\widehat{BAG}$ et l'angle $\widehat{GAC}$, et on compare. » P à la classe : « Vous êtes d'accord ? » Des élèves en chœur : « Oui. » P : « Bon, moi j'ai une question. "On compare", ça veut dire quoi ? Vous faites quoi ? » Silence… P : « Alors ? » Jocelyn : « On regarde si l'un est le double de l'autre, ou le triple, je sais pas… » P : « Mais pour ça, qu'est-ce qu'on peut faire ? » Un élève demande la parole. P : « Camille ? » Camille : « On demande à Wallis d'afficher le rapport des angles, comme ça on sait directement si c'est un ou un demi, ou deux… » P : « Est-ce qu'on sait faire ça ? » Les élèves en chœur : « Oui ! » P : « Bon, alors vous noter ça dans votre cahier de textes pour jeudi. Allez… »

Bien entendu, la mise en place des outils *généraux* de l'activité d'étude et de recherche (tel l'emploi du logiciel fictif Wallis) doit se faire progressivement : dans le passage précédent, ainsi, on doit supposer que l'outil cité a été mis en place et se trouve désormais correctement maîtrisé par « la classe » pour au moins certains types de travaux dans lesquels elle peut être amenée à s'engager, ce qui est le cas pour l'étude demandée par P ici.

c) Les deux questions suivantes, que l'on ne traitera pas en profondeur (nous reviendrons notamment sur la question – centrale – des démonstrations) fournissent l'occasion de rectifier un malentendu éventuel.

1. Peut-on « sauter » une AER et ainsi admettre un théorème (en géométrie par exemple) ? (MT, OS, 4e, 4)

2. Dans ma classe, j'aborde le chapitre sur le théorème des milieux. Je compte admettre le 3e théorème des milieux et démontrer les deux premiers. Devons-nous démontrer toutes les propriétés ? La démonstration doit-elle figurer dans la leçon ? (RD, OS, 4e, 4)

d) Deux points sont à noter, là encore.

1) Dans les manuels, ce qui est appelé « activités » est souvent consacré à ébaucher – en règle générale sans jamais l'achever – une ***démonstration*** du résultat qui sera ensuite mis en forme dans la partie ***cours*** du même manuel. S'il est vrai que le travail démonstratif suppose étude et recherche, et donc prend place parmi les contenus de la suite des AER réalisées, ce n'est pas ***exclusivement*** ni ***prioritairement*** à cela que l'on doit s'occuper : le ***cœur*** du travail réalisé doit avoir pour objet d'étudier un problème qui fera apparaître la notion visée (par exemple la notion d'intervalle dans $\mathbb{R}$) et/ou le résultat à établir (par exemple la réciproque du théorème de Pythagore) comme des ***besoins*** créés par la volonté de résoudre le problème considéré.

2) S'il n'est pas demandé par les textes officiels de « démontrer toutes les propriétés », en revanche la ***synthèse*** doit mettre en forme les démonstrations menées à bien et, dans le cas où une démonstration complète n'est pas disponible, les ***éléments de preuve*** – y compris expérimentale – que la classe aura réunis.

e) On s'arrête sur une question qui prolonge l'exposé 8 présenté lors de la séance 4.

À propos de l'exposé « Comment réagir et agir de manière appropriée lorsqu'un élève n'a pas fait son travail, et en particulier ne rend pas un DM ? », la proposition a été faite, pour contrôler que chacun a bien fait son DM, de faire un devoir en classe sur feuille qui porte sur le DM (sur une partie du DM), le DM étant noté 10 ou 15 et le devoir en classe sur feuille sur le reste des points. Mais si un élève a buté sur un exercice et que ce même exercice est donné sur feuille en classe, il est doublement pénalisé… Comment gérer ce fait ? (FE, MJ, 5e, 4)

La micro-épreuve de contrôle n'a pas de raison particulière d'être réalisée le jour même de la remise des DM par les élèves. ***Un délai de quelques jours*** peut permettre à chacun de se préparer au micro-contrôle du DM, ***y compris*** en séance de soutien (ou en AI). Notons que, s'agissant de la notation, le partage 20 = 15 + 5 peut être 20 = 12 + 8, voire 20 = 10 + 10, etc.

f) La question que voici a une parenté avec celle qui précède.

> À la suite de séances d'exercices sur le développement et les identités remarquables, j'ai fait une petite interrogation de dix minutes. Il y avait une question de cours et des calculs similaires aux exercices. J'avais eu l'impression que, dans l'ensemble, ils avaient compris le « système » des identités remarquable ; mais en corrigeant ces petits « tests », je m'aperçois de plusieurs lacunes sur le calcul et que le cours n'est pas forcément su. Comment réagir ? (CR, CR, 3^{e}, 4)

g) Le dispositif du micro-contrôle peut avoir divers usages didactiques, notamment celui de contrôler, non la bonne maîtrise du contenu du dernier DM, mais celle du ***contenu en cours d'étude***. La ***régularité*** de ces micro-contrôles dénués de pièges aide à la régulation du travail personnel des élèves. Leur ***absence*** a des effets contraires, que révèlera cruellement un micro-contrôle prenant dès lors l'allure d'une interrogation « surprise ». Des micro-contrôles réguliers (un par semaine au moins, ou parfois davantage) permettent de prévenir de telles mauvaises surprises et aident les élèves les plus fragiles à affronter les apprentissages qui leur sont proposés.

1.4. Questions d'organisation mathématique

a) On examine la question suivante.

> Le raisonnement par l'absurde est-il au programme de 2de ? (DR, OS, 2de, 2)

b) En réalité, le raisonnement « par l'absurde » est travaillé ***dès le collège***. C'est ainsi que, dans un bilan intitulé ***Au terme du collège***, le document d'accompagnement du programme de 3^{e} souligne :

> [Les élèves] ont rencontré et ont eu l'occasion d'élaborer, au cours de démonstrations, différents types de raisonnement : raisonnement déductif, raisonnement par disjonction des cas lors de l'examen de l'effet de la multiplication sur l'ordre, infirmation par mise en évidence d'un contre-exemple, approche du raisonnement par l'absurde lorsqu'il s'agit de reconnaître si une configuration est une configuration de Thalès ou si un triangle est rectangle.

c) Semblablement, décrivant un peu plus haut l'apport propre de la 3^{e}, le même document précise :

> On continue à entraîner les élèves à élaborer et à rédiger des démonstrations dans l'esprit déjà indiqué dans le document d'accompagnement du cycle central. En 3^{e} cependant, des raisonnements prenant clairement appui sur le principe de non-contradiction sont plus souvent rencontrés et signalés.

À plus forte raison le raisonnement par l'absurde est-il un outil logique du travail mathématique en classe de seconde !

1.5. Sanctions & punitions : une enquête *(suite)*

a) Le dépouillement des questionnaires à propos des comportements 16 à 30 conduit à ceci.

Non, jamais négociable	Non, rarement négociable	Oui, négociable	Oui, toujours possible
16. ***Demander à déplacer la date d'un contrôle prévu pour aujourd'hui***			
27	25	0	0
17. ***Demander à déplacer la date d'un contrôle prévu pour lundi prochain***			
2	16	30	4
18. ***Être dispensé de contrôle pour cause de migraine***			
27	17	7	0
19. ***Taire l'identité d'un auteur de vol***			
27	11	11	3
20. ***Taire l'identité d'un auteur de racket***			
34	12	5	1
21. ***Faire autre chose en cours***			
46	6	0	0
22. ***Utiliser un téléphone portable en cours***			
50	2	0	0
23. ***Émettre un jugement sur le travail d'un camarade***			
16	16	17	3
24. ***Émettre un jugement sur le contenu du cours***			
5	10	26	11
25. ***Travailler sans surveillance dans une salle d'étude***			
22	10	17	3
26. ***Travailler en musique dans une salle non surveillée***			
31	15	5	1
27. ***Refuser de faire le travail à la maison demandé***			
46	5	1	0
28. ***Demander une information au professeur pendant un DS***			
2	18	25	5
29. ***Refuser de passer au tableau pour corriger un exercice***			
22	26	3	1
30. ***Faire autre chose quand on a fini un DS et qu'il reste du temps***			
19	11	18	4

b) En ramenant ces résultats à deux modalités – *Oui* et *Non* – on obtient ceci.

Comportement	Non	Oui

Demander à déplacer la date d'un contrôle prévu pour aujourd'hui	**52**	**0**
Demander à déplacer la date d'un contrôle prévu pour lundi prochain	**18**	**34**
Être dispensé de contrôle pour cause de migraine	**44**	**7**
Taire l'identité d'un auteur de vol	**38**	**14**
Taire l'identité d'un auteur de racket	**46**	**6**
Faire autre chose en cours	**52**	**0**
Utiliser un téléphone portable en cours	**52**	**0**
Émettre un jugement sur le travail d'un camarade	**32**	**20**
Émettre un jugement sur le contenu du cours	**15**	**37**
Travailler sans surveillance dans une salle d'étude	**32**	**20**
Travailler en musique dans une salle non surveillée	**46**	**6**
Refuser de faire le travail à la maison demandé	**51**	**1**
Demander une information au professeur pendant un DS	**20**	**30**
Refuser de passer au tableau pour corriger un exercice	**48**	**4**
Faire autre chose quand on a fini un DS et qu'il reste du temps	**30**	**22**

c) Dans le tableau ci-après, on a rangé les comportements à acceptabilité décroissante.

Comportement	**Non**	**Oui**
Émettre un jugement sur le contenu du cours	**15**	**37**
Demander à déplacer la date d'un contrôle prévu pour lundi prochain	**18**	**34**
Demander une information au professeur pendant un DS	**20**	**30**
Faire autre chose quand on a fini un DS et qu'il reste du temps	**30**	**22**
Émettre un jugement sur le travail d'un camarade	**32** = 16 + 16	**20**
Travailler sans surveillance dans une salle d'étude	**32** = 22 + 10	**20**
Taire l'identité d'un auteur de vol	**38**	**14**
Être dispensé de contrôle pour cause de migraine	**44**	**7**
Travailler en musique dans une salle non surveillée	**46** = 31 + 15	**6**
Taire l'identité d'un auteur de racket	**46** = 34 + 11	**6**
Refuser de passer au tableau pour corriger un exercice	**48**	**4**
Refuser de faire le travail à la maison demandé	**51**	**1**
Demander à déplacer la date d'un contrôle prévu pour aujourd'hui	**52** = 27 + 25	**0**
Faire autre chose en cours	**52** = 46 + 6	**0**
Utiliser un téléphone portable en cours	**52** = 50 + 2	**0**

d) Le même tableau est exprimé avec des pourcentages.

Comportement	Oui
Émettre un jugement sur le contenu du cours	**71 %**
Demander à déplacer la date d'un contrôle prévu pour lundi prochain	**65 %**
Demander une information au professeur pendant un DS	**60 %**
Faire autre chose quand on a fini un DS et qu'il reste du temps	**42 %**
Émettre un jugement sur le travail d'un camarade	**38 %**
Travailler sans surveillance dans une salle d'étude	**38 %**
Taire l'identité d'un auteur de vol	**27 %**
Être dispensé de contrôle pour cause de migraine	**14 %**
Travailler en musique dans une salle non surveillée	**12 %**
Taire l'identité d'un auteur de racket	**12 %**
Refuser de passer au tableau pour corriger un exercice	**8 %**
Refuser de faire le travail à la maison demandé	**2 %**
Demander à déplacer la date d'un contrôle prévu pour aujourd'hui	**0 %**
Faire autre chose en cours	**0 %**
Utiliser un téléphone portable en cours	**0 %**

2. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques

2.1. Présentation et parcours de surface de la notice ***Éducation mathématique & citoyenneté***.

2.2. On examine linéairement la première section, *L'École et la citoyenneté*.

3. Forum des questions : exposé du jour & exposés à venir

3.1. Corrections et corrigés

a) On entend un exposé de *NFG* sur le sujet suivant :

Exposé 11. Peut-on donner au rituel des corrections une organisation qui lui confère une réelle viabilité dans la vie de la classe et une utilité effective au service des apprentissages ?

On écoute cet exposé en ayant en tête les questions suivantes.

1. Comment corriger un contrôle en classe ? Peut-on (ou doit-on ?) faire passer des élèves au tableau pour cette correction ? Quel support peut accompagner cette correction ? (Corrigé papier ?) (NA, JT, 4^{e}, 4)

2. Vis-à-vis de la correction des copies, doit-on annoter et corriger les erreurs ou laisser l'élève faire la comparaison entre sa copie et le corrigé donné ? Un élève est-il vraiment capable de cibler correctement ses erreurs et de voir ses lacunes ? (AC, OS, 2de, 4)

3. Lors de la recherche d'exercices, au moment de la correction, comment rassembler l'intérêt du groupe-classe ? (Il me semble que, pour les élèves qui ont compris l'exercice, la motivation est faible.) (FEB, CR, 4^{e}, 4)

4. Comment gérer la correction d'un DM ou d'un DS en classe ? Une correction photocopiée étant distribuée, une correction en classe des points importants et les plus « ratés » suffit-elle, au risque de laisser de côté certains élèves ? (CO, MJ, 2^de^, 4)

b) Remarques et commentaires

3.2. Contraposée ou contraposition ?

a) Un exposé portera sur le sujet suivant, très « classique ».

Exposé 12. Faut-il exiger des élèves, lorsqu'ils doivent démontrer qu'un triangle dont on connaît les mesures des côtés n'est pas rectangle, qu'ils précisent qu'ils utilisent alors la contraposée du théorème de Pythagore, et non le théorème de Pythagore lui-même ?

b) On reliera cette question à celle de DR, plus haut.

c) Cet exposé sera proposé et présenté par *MD*.

3.3. Un « cahier de laboratoire » ?

a) Le problème des traces écrites sera revisité à propos de la question que voici.

Exposé 13. Les « cahiers d'AER » doivent-ils témoigner de tous les essais faits lors d'une recherche, y compris les essais inaboutis ? Sinon, quel partage envisager entre brouillon et cahier d'AER ?

b) L'exposé se réfèrera notamment à la question ci-après.

Lorsqu'on fait des AER, les élèves doivent-ils travailler sur un brouillon ou doit-il rester des traces de leur recherche sur leur cahier ? (CM, MJ, 5^e^, 4)

c) Cet exposé sera proposé et présenté par *SPM*.

3.4. Diffusion radiale ou percolation ?

a) Le sujet retenu est le suivant :

Exposé 14. Comment trouver un bon équilibre qualitatif et quantitatif, dans le travail de la classe, entre les interventions du professeur et la communication entre élèves, notamment pour parer à la diffusion de techniques erronées ou de technologies inappropriées lorsque les élèves travaillent entre eux ?

b) On s'efforcera d'apporter des éléments de réponse à la question suivante.

Comment doit-on réagir face à des élèves qui s'expliquent des notions entre eux, et qui, à la suite de ces explications, les comprennent, sans être rigoureux ? Dois-je les reprendre à chaque fois ? (EMTY, MJ, 2^de^, 4)

c) Cet exposé sera proposé et présenté par *MK*.

3.5. Équations & inéquations

a) Un exposé prendra en charge l'interrogation suivante :

Exposé 15. Quels sont les principaux problèmes auxquels on doit être attentif au moment de concevoir et de programmer l'étude du thème des équations et inéquations en seconde ?

b) Cet exposé se référera notamment aux questions ci-après.

1. La lecture du programme de seconde laisse supposer la création d'un chapitre sur les équations et inéquations. Il apparaît pourtant que les diverses méthodes de résolution apparaissent au cours de divers chapitres. Est-il judicieux de traiter le chapitre de façon « ouverte » sur l'ensemble de l'année ? (GB, OS, 2de, 4)

2. Pour traiter des équations et des inéquations, je dois lutter contre le « théorème élève » : « Je passe de l'autre côté. » Il fait perdre aux élèves le sens de ce qu'ils font. Mais je ne sais pas comment faire pour les convaincre. (DC, OS, 2de, 4)

c) Cet exposé sera proposé et présenté par *MD.*

3.6. Ordre et intervalles sur $\mathbb{R}$

a) Un exposé prendra en charge l'interrogation suivante :

Exposé 16. Quelles sont les raisons d'être de l'ordre sur $\mathbb{R}$ et de la notion d'intervalle et comment les faire rencontrer aux élèves ?

b) L'exposé se référera notamment aux questions que voici.

1. Quelle type d'activité peut-on proposer pour introduire la notion d'ordre dans $\mathbb{R}$? En faut-il une pour chaque théorème ? (MK, OS, 2de, 4)

2. Pour introduire la notion d'intervalle, doit-on le faire à partir des inéquations ou définir dans un premier temps les intervalles, puis passer à la résolution d'inéquations ? (DV, JT, 2de, 4)

c) Cet exposé sera proposé et présenté par *DC.*

3.7. Maîtrise et emplois pertinents des outils informatiques

a) Un exposé présentera les matériaux disponibles dans les archives du Séminaire concourant à apporter des éléments de réponse à la question suivante.

Exposé 17. Comment former les élèves à un emploi judicieux des outils informatiques dans le travail mathématique ?

b) On se référera notamment à la question de GF ci-dessus ainsi qu'aux questions ci-après.

1. Quelle place tient l'informatique en 4^{e} ? (SP, CR, 4^{e}, 0)

2. Au collège, doit-on obligatoirement utiliser un logiciel de géométrie dynamique du type Geoplan ou Cabri-Géomètre pour illustrer une leçon ? Est-ce dans les compétences de l'élève ? Personnellement je ne me sens pas encore prête à assumer une séance de ce type. (AS, JT, 5^{e}, 2)

3. Est-il possible de gérer et d’amener une classe entière en salle d’informatique pour une AER lorsque l’établissement dispose de 15 postes informatiques ? Ce travail doit-il se présenter fréquemment ? (RR, OS, 4^{e}, 3)

4. Comment préparer une séance informatique en classe de 3^{e} (gestion du temps…) ? (CR, CR, 3^{e}, 3)

5. L’utilisation de la calculatrice sur le thème des fonctions doit-il faire l’objet d’un « cours » écrit ? (JB, CR, 2^{de}, 4)

6. Quels peuvent être les avantages et les inconvénients dus à l’utilisation de l’outil informatique dans le cadre d’une AER ? (AG, JT, 5^{e}, 4)

7. Doit-on faire un cours sur l’utilisation de la calculatrice ou doit-on laisser les élèves se référer à la notice d’utilisation de leur calculatrice ? (MG, MJ, 2^{de}, 4)

c) Cet exposé sera proposé et présenté par *WB*.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 6 : mardi 18 octobre 2005

0. Le programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions : poursuites & anticipations // 2. Observation & analyse // 3. Forum des questions : exposés du jour // 4. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques

1. Forum des questions : poursuites & anticipations

1.1. Sanctions & punitions : une enquête *(fin)*

a) Le tableau ci-après présente les résultats du dépouillement des questionnaires un à un, numérotés de 1 à 52. Sur les 52 questionnaires recueillis, les questionnaires numérotés 2, 31 et 44 ont cependant été laissés de côté, certaines des réponses demandées étant absentes ou ambiguës.

	Non, jamais négociable	**Non, rarement négociable**	**Oui, négociable**	**Oui, toujours possible**
1	**13**	**6**	**9**	**2**
2	**0**	**0**	**0**	**0**
3	**19**	**7**	**3**	**1**
4	**21**	**5**	**3**	**1**
5	**12**	**6**	**11**	**1**
6	**14**	**10**	**6**	**0**
7	**12**	**11**	**7**	**0**
8	**12**	**11**	**6**	**1**
9	**11**	**10**	**6**	**3**
10	**16**	**9**	**5**	**0**
11	**21**	**2**	**6**	**1**
12	**19**	**7**	**3**	**1**
13	**13**	**8**	**7**	**2**
14	**11**	**12**	**7**	**0**
15	**12**	**7**	**11**	**0**
16	**14**	**7**	**7**	**2**
17	**13**	**5**	**10**	**2**

18	**9**	**12**	**9**	**0**
19	**12**	**9**	**8**	**1**
20	**13**	**8**	**9**	**0**
21	**11**	**8**	**8**	**3**
22	**14**	**11**	**5**	**0**
23	**14**	**12**	**4**	**0**
24	**15**	**7**	**4**	**4**
25	**12**	**12**	**6**	**0**
26	**17**	**10**	**1**	**2**
27	**12**	**8**	**10**	**0**
28	**12**	**8**	**10**	**0**
29	**8**	**9**	**10**	**3**
30	**17**	**4**	**7**	**2**
31	**0**	**0**	**0**	**0**
32	**16**	**3**	**8**	**3**
33	**19**	**4**	**5**	**2**
34	**14**	**9**	**7**	**0**
35	**16**	**10**	**4**	**0**
36	**18**	**4**	**5**	**3**
37	**11**	**10**	**6**	**3**
38	**7**	**8**	**14**	**1**
39	**10**	**11**	**8**	**1**
40	**16**	**9**	**5**	**0**
41	**12**	**8**	**8**	**2**
42	**14**	**12**	**4**	**0**
43	**18**	**6**	**4**	**2**
44	**0**	**0**	**0**	**0**
45	**15**	**9**	**6**	**0**
46	**12**	**13**	**5**	**0**
47	**11**	**9**	**6**	**4**
48	**14**	**9**	**6**	**1**
49	**14**	**6**	**10**	**0**
50	**19**	**3**	**6**	**2**
51	**14**	**6**	**8**	**2**
52	**19**	**5**	**3**	**3**

b) Au-delà de l’examen des « profils » des réponses d’un enquêté donné, on peut vouloir étudier le degré de permissivité dont font montre les enquêtés. On peut, pour cela, ne retenir que le nombre de « Non, jamais négociable » choisis. Pour cela, on sélectionne la colonne 2 du tableau ci-dessus, on la colle dans le fichier utilisé (ou dans un autre), puis on la trie par valeurs croissantes (en cliquant sur **Tableau** puis sur **A/Z↓Trier…**). Plus complètement, on peut aussi appliquer à l'ensemble du tableau un tri croissant selon la 2e colonne, puis la 3e, puis la 4e ; on obtient alors ceci.

	Non, jamais négociable	**Non, rarement négociable**	**Oui, négociable**	**Oui, toujours possible**
2	**0**	**0**	**0**	**0**
31	**0**	**0**	**0**	**0**
44	**0**	**0**	**0**	**0**
38	**7**	**8**	**14**	**1**
29	**8**	**9**	**10**	**3**
18	**9**	**12**	**9**	**0**
39	**10**	**11**	**8**	**1**
21	**11**	**8**	**8**	**3**
47	**11**	**9**	**6**	**4**
9	**11**	**10**	**6**	**3**
37	**11**	**10**	**6**	**3**
14	**11**	**12**	**7**	**0**
5	**12**	**6**	**11**	**1**
15	**12**	**7**	**11**	**0**
41	**12**	**8**	**8**	**2**
27	**12**	**8**	**10**	**0**
28	**12**	**8**	**10**	**0**
19	**12**	**9**	**8**	**1**
8	**12**	**11**	**6**	**1**
7	**12**	**11**	**7**	**0**
25	**12**	**12**	**6**	**0**
46	**12**	**13**	**5**	**0**
17	**13**	**5**	**10**	**2**
1	**13**	**6**	**9**	**2**
13	**13**	**8**	**7**	**2**
20	**13**	**8**	**9**	**0**
51	**14**	**6**	**8**	**2**
49	**14**	**6**	**10**	**0**
16	**14**	**7**	**7**	**2**
48	**14**	**9**	**6**	**1**

34	14	9	7	0
6	14	10	6	0
22	14	11	5	0
23	14	12	4	0
42	14	12	4	0
24	15	7	4	4
45	15	9	6	0
32	16	3	8	3
10	16	9	5	0
40	16	9	5	0
35	16	10	4	0
30	17	4	7	2
26	17	10	1	2
36	18	4	5	3
43	18	6	4	2
50	19	3	6	2
33	19	4	5	2
52	19	5	3	3
3	19	7	3	1
12	19	7	3	1
11	21	2	6	1
4	21	5	3	1

c) On peut aussi vouloir examiner à part la 2^{e} colonne. Après l'avoir copiée, collée, sélectionnée (Alt+Ctrl+L), on peut (en cliquant sur **Tableau** puis sur **Convertir tableau en texte…**) la transformer en texte, que l'on organise alors en diagramme en bâtons ainsi :

07

08

09

10

11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11

12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12

13 ; 13 ; 13 ; 13

14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14

15 ; 15

16 ; 16 ; 16 ; 16

17 ; 17

18 ; 18

19 ; 19 ; 19 ; 19 ; 19

21 ; 21

d) La forme de la distribution apparaît relativement compliquée sur ce diagramme ; on peut donc penser à regrouper les valeurs en classe (7, 8, 9 ; 10, 11, 12 ; … ; 19, 20, 21), ce qui donne ceci :

07 ; 08 ; 09

10 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12

13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 15 ; 15

16 ; 16 ; 16 ; 16 ; 17 ; 17 ; 18 ; 18

19 ; 19 ; 19 ; 19 ; 19 ; 21 ; 21

On aperçoit ici une forme asymétrique unimodale, qui monte abruptement vers la classe modale puis redescend plus doucement.

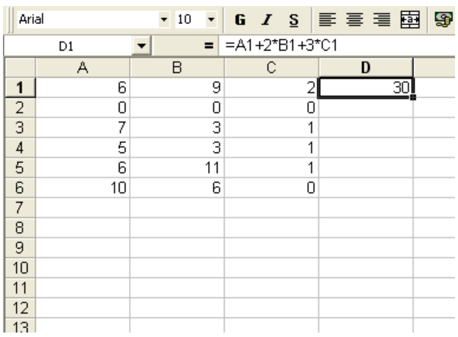
e) On peut aussi construire un indicateur de permissivité, p_n, qui serait d'autant plus grand que le questionnaire n serait plus permissif. À la distribution (N_n, N'_n, O'_n, O_n) des réponses contenues dans un questionnaire donné, on peut par exemple associer le nombre

$$p_n = N'_n + 2O'_n + 3O_n.$$

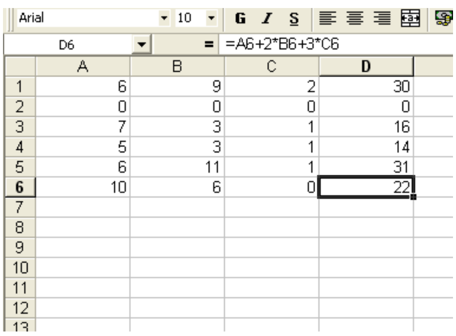
On aurait ainsi par exemple $p_3 = 7 + 2 \times 3 + 3 \times 1 = 16$, $p_6 = 10 + 2 \times 6 + 3 \times 0 = 22$, etc.

	Non, jamais négociable	**Non, rarement négociable**	**Oui, négociable**	**Oui, toujours possible**	**Indice *p***
1	**13**	**6**	**9**	**2**	**30**
2	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
3	**19**	**7**	**3**	**1**	**16**
4	**21**	**5**	**3**	**1**	**14**
5	**12**	**6**	**11**	**1**	**31**
6	**14**	**10**	**6**	**0**	**22**

f) Pour calculer les valeurs de p_n, on peut utiliser le tableur : il suffit de copier dans le fichier Word le sous-tableau formé des colonnes 3, 4, 5 (et des lignes 2 à 53) et de le coller dans une feuille de calcul ; on calcule alors la valeur de p correspondant à la première ligne, comme le montrent ces copies d'écran.



	A	B	C	D
1	6	9	2	30
2	0	0	0	
3	7	3	1	
4	5	3	1	
5	6	11	1	
6	10	6	0	



	A	B	C	D
1	6	9	2	30
2	0	0	0	0
3	7	3	1	16
4	5	3	1	14
5	6	11	1	31
6	10	6	0	22

En collant la colonne D de la feuille de calcul dans la colonne « Indice *p* » du tableau, on obtient alors ceci.

	Non, jamais négociable	Non, rarement négociable	Oui, négociable	Oui, toujours possible	Indice *p*
1	13	6	9	2	30
2	0	0	0	0	0
3	19	7	3	1	16
4	21	5	3	1	14
5	12	6	11	1	31
6	14	10	6	0	22
7	12	11	7	0	25
8	12	11	6	1	26
9	11	10	6	3	31
10	16	9	5	0	19
11	21	2	6	1	17
12	19	7	3	1	16
13	13	8	7	2	28
14	11	12	7	0	26
15	12	7	11	0	29
16	14	7	7	2	27
17	13	5	10	2	31
18	9	12	9	0	30
19	12	9	8	1	28
20	13	8	9	0	26
21	11	8	8	3	33
22	14	11	5	0	21
23	14	12	4	0	20
24	15	7	4	4	27
25	12	12	6	0	24
26	17	10	1	2	18
27	12	8	10	0	28
28	12	8	10	0	28
29	8	9	10	3	38
30	17	4	7	2	24
31	0	0	0	0	0
32	16	3	8	3	28

33	19	4	5	2	20
34	14	9	7	0	23
35	16	10	4	0	18
36	18	4	5	3	23
37	11	10	6	3	31
38	7	8	14	1	39
39	10	11	8	1	30
40	16	9	5	0	19
41	12	8	8	2	30
42	14	12	4	0	20
43	18	6	4	2	20
44	0	0	0	0	0
45	15	9	6	0	21
46	12	13	5	0	23
47	11	9	6	4	33
48	14	9	6	1	24
49	14	6	10	0	26
50	19	3	6	2	21
51	14	6	8	2	28
52	19	5	3	3	20

g) On peut classer les valeurs de *p* en usant d'une technique déjà mise en œuvre ; on arrive au tableau suivant.

	Non, jamais négociable	Non, rarement négociable	Oui, négociable	Oui, toujours possible	Indice *P*
2	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0
44	0	0	0	0	0
4	21	5	3	1	14
3	19	7	3	1	16
12	19	7	3	1	16
11	21	2	6	1	17
26	17	10	1	2	18
35	16	10	4	0	18
10	16	9	5	0	19
40	16	9	5	0	19
33	19	4	5	2	20

52	19	5	3	3	20
43	18	6	4	2	20
23	14	12	4	0	20
42	14	12	4	0	20
50	19	3	6	2	21
45	15	9	6	0	21
22	14	11	5	0	21
6	14	10	6	0	22
36	18	4	5	3	23
34	14	9	7	0	23
46	12	13	5	0	23
30	17	4	7	2	24
48	14	9	6	1	24
25	12	12	6	0	24
7	12	11	7	0	25
49	14	6	10	0	26
20	13	8	9	0	26
8	12	11	6	1	26
14	11	12	7	0	26
24	15	7	4	4	27
16	14	7	7	2	27
32	16	3	8	3	28
51	14	6	8	2	28
13	13	8	7	2	28
27	12	8	10	0	28
28	12	8	10	0	28
19	12	9	8	1	28
15	12	7	11	0	29
1	13	6	9	2	30
41	12	8	8	2	30
39	10	11	8	1	30
18	9	12	9	0	30
17	13	5	10	2	31
5	12	6	11	1	31
9	11	10	6	3	31
37	11	10	6	3	31
21	11	8	8	3	33

47	**11**	**9**	**6**	**4**	**33**
29	**8**	**9**	**10**	**3**	**38**
38	**7**	**8**	**14**	**1**	**39**

h) Un diagramme semblable à ceux déjà présentés a ici l'allure que voici : la distribution est asymétrique, mais dans l'autre sens – l'effectif diminue brusquement passé la classe modale.

14 ; 16 ; 16 ; 17 ; 18 ; 18 ; 19 ; 19

20 ; 20 ; 20 ; 20 ; 20 ; 21 ; 21 ; 21 ; 22 ; 23 ; 23 ; 23 ; 24 ; 24 ; 24 ; 25

26 ; 26 ; 26 ; 26 ; 27 ; 27 ; 28 ; 28 ; 28 ; 28 ; 28 ; 28 ; 29 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 31 ; 31 ; 31 ; 31

33 ; 33

38 ; 39

i) On peut comparer les classements « à permissivité décroissante » fournis par les deux critères adoptés : dans la deuxième colonne ci-après, on a retenu le classement à *p* décroissant, dans la troisième colonne le classement selon l'ordre lexicographique sur le quadruplet (N_n, N'_n, O'_n, O_n), enfin, dans la quatrième colonne, le classement selon l'indicateur N_n.

1	**38**	**38**	**38**
2	**29**	**29**	**29**
3	**47**	**18**	**18**
4	**21**	**39**	**39**
5	**37**	**21**	**9**
6	**9**	**47**	**14**
7	**5**	**9**	**21**
8	**17**	**37**	**37**
9	**18**	**14**	**47**
10	**39**	**5**	**5**
11	**41**	**15**	**7**
12	**1**	**41**	**8**
13	**15**	**27**	**15**
14	**19**	**28**	**19**
15	**28**	**19**	**25**
16	**27**	**8**	**27**
17	**13**	**7**	**28**
18	**51**	**25**	**41**
19	**32**	**46**	**46**
20	**16**	**17**	**1**
21	**24**	**1**	**13**
22	**14**	**13**	**17**

23	8	20	20
24	20	51	6
25	49	49	16
26	7	16	22
27	25	48	23
28	48	34	34
29	30	6	42
30	46	22	48
31	34	23	49
32	36	42	51
33	6	24	24
34	22	45	45
35	45	32	10
36	50	10	32
37	42	40	35
38	23	35	40
39	43	30	26
40	52	26	30
41	33	36	36
42	40	43	43
43	10	50	3
44	35	33	12
45	26	52	33
46	11	3	50
47	12	12	52
48	3	11	4
49	4	4	11

j) On voit que les coïncidences pures ne sont pas nombreuses ! En fait c'est généralement autrement que par un strict classement, toujours quelque peu arbitraire, que l'on est amené à procéder. Pour simplifier les choses, prenons pour critère de permissivité le nombre N_n. On a vu le diagramme suivant, que l'on rappelle.

07

08

09

10

11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11

12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12

13 ; 13 ; 13 ; 13

14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14

15 ; 15

16 ; 16 ; 16 ; 16

17 ; 17

18 ; 18

19 ; 19 ; 19 ; 19 ; 19

21 ; 21

La ***médiane*** est la valeur occupant le 25e rang, soit **14** ; tous les questionnaires pour lesquels $N_n > 14$ sont donc dans la moitié la moins permissive : il s'agit des questionnaires 3, 4, 10, 11, 12, 24, 26, 30, 32, 33, 35, 36, 40, 43, 45, 50, 52. Cela noté, un questionnaire pour lequel N_n = 17 (par exemple) doit-il être regardé comme « très répressif » (dans l'échantillon étudié) ? Si, bien entendu, on doit le compter parmi les 50 % et même parmi les 25 % les plus répressifs, en revanche il ne figure pas parmi, disons, les 15 % les plus répressifs. En un autre sens, on peut dire encore qu'il est tout de même plus répressif que 77 % des questionnaires, etc. Semblablement, on pourra dire que le questionnaire 19, pour lequel N_{19} = 12, ne figure pas parmi la moitié la plus répressive, ce que confirment les deux autres classements envisagés ci-dessus. Il en est à plus forte raison ainsi des questionnaires 38 et 29 (qui occupent respectivement la 1re et la 2e place dans chacun des trois classements), ou encore du questionnaire 37. Mais on ne pourra dire la même chose des questionnaires 35, 40 ou 52.

1.2. Forum « aléatoire »

a) On examine à la volée quelques questions formulées lors de la semaine 5 en les prenant dans l'ordre alphabétique, et en l'espèce à partir de la première question.

J'ai dans ma classe un élève dyslexique. Très motivé, il a cependant quelque difficulté à suivre le rythme. Sur les conseils de mon PCP, je dicte souvent la synthèse de cours (j'avais en effet tendance à tout écrire) ; mais cet élève a, dans ce cas-là, des problèmes et est vite perdu. Comment gérer ce problème ? Revenir à l'écriture de la synthèse au tableau ne pénaliserait-il pas les autres élèves ? (NA, JT, 4e, 5)

1) La désignation d'un élève comme étant « dyslexique » doit être prise avec précaution, même lorsqu'elle paraît certifiée par une autorité médicale ou paramédicale. Le mot a l'air propret et, donc, digne de confiance. Sans doute en irait-il autrement si un professeur disait : « J'ai dans ma classe un élève imbécile. Que dois-je faire ? » On doit donc chaque fois s'interroger nettement. Qui a posé le diagnostic ? Quand ? Dans quelles conditions ? Et surtout : Qu'est-ce que cela signifie dans ce que cet élève a à faire au sein de cette classe ? La situation doit être prise sans emballement. Un élève a des difficultés ? Le professeur a tout un groupe à gérer : il doit régler le pas du groupe a une allure que l'essentiel des élèves puisse suivre. Il apportera en outre une aide discrète, non stigmatisante, à tel ou tel qui a telle ou telle difficulté. Attention aux ruses du narcissisme ! Il y a un avantage immédiat à être déclaré « dyslexique » – on parle de moi, les professeurs ont tout à coup pour moi des attentions inédites. « Il est *dys-lex-ique* » chuchotent-ils entre eux. Je paie d'un certain retard scolaire des gratifications que la plupart des gens n'obtiendront jamais. Ce sont là, classiquement, les bénéfices secondaires de la « maladie ». Le professeur ne doit pas prêter la main à ce mécanisme. Les prétendus « dyslexiques » sont d'abord des élèves, membres du groupe classe, qu'il faut seulement aider – et point trop n'en faut – à trouver une place dans le groupe. Trop de sollicitude nuit.

2) Le professeur (de mathématiques) ne doit pas oublier en outre *qu'il n'est pas seul* – il y a d'abord *les autres professeurs* de la classe. Il est vrai que, dans la tradition française du métier de professeur, l'individualisme semble structurel : au lieu de s'appuyer sur la force que donne le groupe – ici, il s'agit du groupe des professeurs de la classe –, la tentation reste forte de se penser comme rédempteur de cette portion du genre humain qu'est « sa » classe. Si un élève a de graves problèmes relevant d'une intervention de type médical, il n'est pas raisonnable que le professeur de mathématiques s'octroie imaginairement un rôle salvateur essentiel. Comme ses collègues, il doit d'abord s'occuper de tout le troupeau, même s'il est vrai qu'il doit être attentif aux brebis qui auraient des difficultés à demeurer en son sein.

3) D'une manière plus générale, on doit se méfier de ce qu'on prend pour *la* solution à un « problème » éventuel, en se figeant alors dans une attitude binaire rigide : soit je fais ça (ce que j'ai imaginé), soit je ne peux rien faire ! Dans le cas évoqué, ainsi, le problème est posé à l'occasion de la réalisation des *synthèses* par la classe et de leur conduite par la professeure. N'y a-t-il pas d'autres façons de faire qui rendraient *sans pertinence* la disjonction évoquée dans la question – soit dicter la synthèse, soit l'écrire au tableau ? Notons, en l'espèce, que la synthèse n'a pas à être dictée (ou écrite *in extenso* par le professeur au tableau) ! Ses contenus doivent émerger par un travail spécifique de la classe, qui a son rythme propre, nécessairement tempéré (indépendamment des élèves) ; quant à sa mise en forme, elle doit s'effectuer assez lentement pour qu'un élève lent dans la mise par écrit d'un texte rédigé au tableau (par un élève, sous la conduite du professeur) puisse suivre. L'organisation de l'étude va ainsi exclure ou – au contraire – *inclure* plus ou moins d'élèves. Choisir une organisation notoirement « excluante » pour ensuite se désoler que des élèves se trouvent exclus n'est guère habile ! Par contraste on peut par exemple envisager de procéder ainsi : la synthèse est l'œuvre du collectif qu'est la classe : les matériaux à mettre en forme sont mis au tableau ; un ou deux binômes d'élèves est chargé de mettre en forme, hors classe, telle partie ; puis les rédactions obtenues seront visées par la classe et deviendront, munies de l'agrément du professeur, *la* synthèse, au reste toujours provisoire, pour l'ensemble des élèves.

4) Au-delà de la conception et de la mise en place d'une organisation didactique la moins excluante possible, le professeur peut et doit intervenir de façon spécifiée, discrète, en tout cas non exhibitionniste, auprès de tels ou tels élèves, sans sollicitude marquée, sans compassion inutile, au service du travail envisagé, pour en permettre le bon accomplissement. Le professeur n'a pas à se substituer aux intervenants de santé réputés adéquats. Il se gardera de la commisération extrême qui, parfois, tend à se substituer à une action sereine et bien conçue.

b) La deuxième question est celle-ci.

> Lors d'un contrôle important (un des deux DS du trimestre), quelle procédure doit-on mettre en place lorsque les élèves sont absents ? (MB, CR, 4^{e}, 5)

1) Bonne question – qui ne doit pas être prise dans une visée de contrôle et de répression ! L'idée essentielle à mettre en avant est que, comme il en va avec nombre d'examens, il doit exister une « seconde session ». Bien sûr, l'épreuve de remplacement ne sera pas la même que la première : ce sera une épreuve « équivalente » par rapport aux apprentissages réalisés, le professeur étant le garant de cette équivalence – la deuxième session ne doit donc être ni beaucoup plus facile, ni beaucoup plus difficile que la première.

2) On ne confondra pas ce qui précède avec une autre pratique assez répandue consistant, lors d'un DS, à distribuer *deux* énoncés différant par quelques détails numériques (par exemple), mais regardés comme relevant essentiellement de la *même* épreuve, et cela afin de dissuader les pratiques de « copiage ». Par ailleurs, on ne doit pas essayer de résoudre tous les problèmes *d'un seul et même coup*. Il se peut par exemple que quelques élèves – dont on peut penser qu'ils ont volontairement évité la première session – remettent, lors de la deuxième session, des travaux indigents. Le dispositif indiqué n'a pas pour ambition de ramener *tout* élève à ses études, mais simplement de constituer un dispositif *juste*, qui ne lèse pas ceux qui, pour des raisons dont ils ne sont nullement maîtres, n'auront pu prendre part à la première session.

3) La préparation d'un DS doit comporter l'explicitation d'un *programme* du DS. Dans l'épreuve de la session de remplacement, le choix des questions du programme du DS peut *légitimement* varier : dans la première session, il y aura eu, par exemple, plus d'algèbre que de géométrie ; dans la seconde session, il pourra y avoir surtout de la géométrie, et un peu d'algèbre. Tous les participants à ce séminaire ont obtenu le baccalauréat, sans pour autant l'avoir obtenu sur les mêmes épreuves – et pour cause !

4) Sans doute y a-t-il aujourd'hui, dans les établissements, une difficulté pour organiser et gérer les sessions de remplacement, dans la mesure où ce dispositif n'y est pas regardé comme d'évidente justice. Plusieurs dispositions peuvent être envisagées : l'élève vient dans son temps libre et réalise le DS dans une salle mise à disposition, sous le contrôle d'un surveillant – ce qui serait normal mais apparaît trop souvent comme un luxe irréaliste ! La formule peut être adaptée : si l'élève est seul, la « salle de DS » peut être un local du service de la vie scolaire, qui prend alors en charge la surveillance sans nécessairement mobiliser un surveillant uniquement pour cela. Mais s'il y a plus de deux élèves, une telle solution « bricolée » devra à un certain moment céder la place à une formule plus régulière. Bien entendu, on peut « bricoler » d'autres solutions « approchées » : un collègue, avec qui on a de bonnes relations, pourra accepter – à charge de revanche – de prendre l'élève dans sa classe lors d'un DS dans sa discipline, à une heure où l'élève n'a pas de cours, afin qu'il puisse réaliser le DS prévu – ce collègue pouvant être le professeur lui-même, dans le cadre d'une *autre* de ses classes. On se refusera en revanche à demander à un autre professeur de la classe – par exemple le professeur d'histoire-géographie – de permettre à l'élève d'effectuer le DS (de mathématiques) à l'occasion d'un cours (d'histoire-géographie) de ce professeur ! Sauf exception rarissime et dûment motivée, on doit encore se refuser à opérer selon le schéma précédent même lorsque « l'autre » professeur est… le professeur de mathématiques lui-même : dans la classe, chaque élève doit suivre l'activité de la classe, et non lui être soustrait parce qu'il n'aurait pu assister à la session normale de DS ! En revanche, si, en classe de seconde, les élèves concernés par la seconde session du DS ne sont que quelques-uns et ne sont pas appelés à participer à la prochaine séance d'AI, c'est là que pourrait avoir lieu la seconde session. Etc.

5) Les deux sessions envisagées ne sont pas à mettre sur le même plan du point de vue du fonctionnement de la classe. En particulier, l'élève n'a pas à choisir entre les deux sessions : la première est celle à laquelle on doit venir ; la seconde est une session de remplacement pour qui n'a pu venir à la première session – absence dont les motifs devront être examinés. Les effets pervers sont légion : il faut y être constamment attentif. Il est en principe exclu, par exemple, qu'un élève présent à la session normale retente sa chance à la seconde session – sauf motif très hautement improbable !

6) La dissymétrie entre les deux sessions ne doit pas, en revanche, affecter leur contenu. Pour cela, on gagnera à s'obliger à préparer les deux épreuves *en même temps*, et à choisir alors par tirage au sort celle des deux qui sera donnée lors de la session normale.

c) On en vient à la troisième question.

Est-il possible de donner un exercice facultatif dans un devoir ? Doit-il être difficile ? Comment le noter ? (Par exemple, l'exercice est juste, je rajoute deux points à la copie.) (GB, MJ, 3e, 5)

1) On retrouve ici une problématique déjà amplement évoquée : le professeur doit avoir pour souci premier d'emmener sa classe, sans perdre quiconque en chemin, vers des « performances » honorables, et non de favoriser des cheminements singuliers qui rendront plus difficile à la troupe des élèves de se retrouver pour avancer encore d'un même pas. En début d'année, proposer un exercice facultatif est en cela inutile et même nocif. Alors que, peut-être, le professeur avait réussi à ce que chaque élève se regarde comme membre d'un groupe à l'égal des autres élèves, sans pour cela ignorer l'existence de différences quantitatives entre les élèves –, tout à coup une différence *qualitative* scinde la classe. Alors en effet que, si l'exercice n'avait pas été facultatif, mais « obligatoire », il y aurait eu simplement ceux qui l'auraient abordé et ceux qui n'y seraient pas parvenus, désormais il y a aura ceux qui auront *décidé* que cet exercice « n'est pas pour eux » et ceux qui auront prétendu se mesurer à lui : la classe est ainsi clivée en deux dans la représentation même qu'en a chaque élève.

2) Cette exigence de rassemblement s'affaiblit par exemple, en classe de seconde, dans les derniers mois de l'année, lorsque les choix d'orientation sont faits ou quasiment faits. Dans ce cas, la classe doit désormais assumer de vivre ensemble alors même que des destins scolaires différents sont envisagés pour ses membres. Il devient possible, dès lors, de proposer un travail plus spécifique à ceux qui, par exemple, visent la 1re S – dans le but notamment de les éclairer sur la bonne articulation de leur effort personnel aux exigences de la voie choisie.

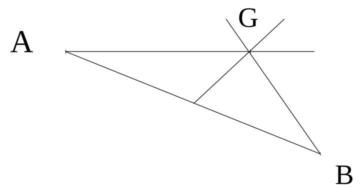
3) On ne confondra pas la difficulté soulevée dans la question examinée avec un grand problème de l'enseignement secondaire français actuel, que l'on peut formuler ainsi : lorsqu'un problème de mathématiques, fût-il appelé (en général à tort) « exercice », est proposé aux élèves, puis est « corrigé », ce problème est, désormais, *mort* – en ce sens qu'il ne réapparaîtra pas devant l'élève dans la suite. Les élèves l'ont derrière eux, ils peuvent l'oublier : ils n'ont aucune raison, en tant qu'élève (sinon en tant que personne privée) de s'y intéresser davantage ! La situation est différente dans la tradition des CPGE : là, un problème étudié et résolu en classe pourra resurgir en colle, et surtout lors d'un écrit ou d'un oral de concours – les problèmes « tués » en classe restent indéfiniment vivants hors de la classe, en sorte que le préparationnaire les a toujours « devant lui », qui l'attendent… Avoir devant soi ce que l'on a étudié est un facteur décisif d'apprentissage : il doit y avoir une vie des problèmes après leur petite mort, alors que l'enseignement usuel est mortifère. Conséquence : dans le DS numéro n, il y aura un peu du DS numéro $n - 1$, dont une petite partie sera reprise *ne varietur*, sans y changer quoi que ce soit. Bien entendu, cela n'empêchera pas les élèves qui font de leur non-travail une loi d'airain de ne pas travailler davantage entre les deux DS ! Encore une fois, il faut renoncer au remède miracle qui résoudrait tous les problèmes d'un seul et unique coup. Mais il y a un certain nombre d'élèves qui en tireront profit. Pour les autres, il faudra explorer d'autres voies – en pratiquant par exemple un enseignement *diversifié*, qui permette tendanciellement à chacun de négocier sa place dans le travail de la classe.

2. Observation & analyse

2.1. En vue de poursuivre l'analyse d'un compte rendu d'observation en classe de 4e (voir les résumés des séances 1, 2, 3, 4), chaque participant examine, éventuellement en binôme, le passage suivant de ce compte rendu.

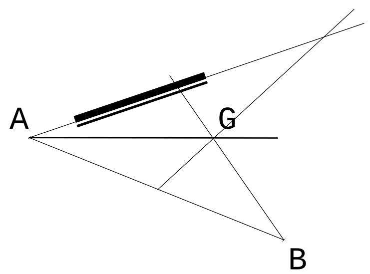
L'élève qui avait lu l'énoncé intervient spontanément : « On n'a pas toutes les données !… » Il est 14 h 12. Murmures de travail.

P : « Qui a une idée ? » Un élève, qu'elle envoie au tableau, dit qu'on peut construire les trois médianes – contrairement à ce qu'affirment certains, souligne P.



L'élève au tableau met en place le milieu de [AB]. P conteste sa manière de faire ; il recommence, cette fois correctement, mais il est gêné par le bas du tableau, trop proche de son dessin…

Il est 14 h 18. « Voilà ! Ça devrait être bon ! » P souligne qu'on a ainsi la 3e médiane, bien qu'on n'ait pas le point C. « Comment construire le point C ? » Plusieurs doigts se lèvent. C est sur la médiane, mais où ? L'idée s'exprime de faire glisser la règle pour obtenir approximativement la situation voulue…



P : « Il faudrait qu'on sache où se trouve le centre de gravité sur une médiane… » Une élève : « Au milieu ! » P fait observer qu'alors on aurait C facilement. On laisse de côté le problème, indique-t-elle, on y reviendra.

On passe à l'étude de la position du centre de gravité de G sur les médianes. P a fait la figure au tableau, sur le quadrillage peint. Les élèves sont invités à travailler sur la feuille distribuée, qui porte deux exemples. P leur montre comment placer le milieu à l'aide du quadrillage. Il est 14 h 24.

2.2. Chaque participant (ou chacun des binômes qui se sont formés) rédige une analyse de ce passage comportant, pour chacune des quatre rubriques suivantes, au moins une indication relevant de cette rubrique :

1. *Structure et contenu*
2. *Organisation mathématique*
3. *Organisation didactique*
4. *Gestion de la séance*

3. Forum des questions : exposés du jour

3.1. On écoute l'exposé présenté par *MD* sur la question *Contraposée ou contraposition ?*

Exposé 12. Faut-il exiger des élèves, lorsqu'ils doivent démontrer qu'un triangle dont on connaît les mesures des côtés n'est pas rectangle, qu'ils précisent qu'ils utilisent alors la contraposée du théorème de Pythagore, et non le théorème de Pythagore lui-même ?

3.2. Remarques et commentaires

4. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques

4.1. On poursuit l'examen de la notice ***Éducation mathématique & citoyenneté***.

4.2. La lecture et le commentaire portent en l'espèce, successivement, sur la section 2, ***Mathématiques et citoyenneté : ce que disent les textes officiels***, et sur la section 3, ***De l'instruction à l'éducation***, sous-section 3.1 & 3.2.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 7 : mardi 8 novembre 2005

0. Le programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. Problématique et fonctionnement de la formation // 2. L'Encyclopédie du professeur de mathématiques : *Le temps de l'étude* // 3. Forum des questions // 4. À propos du C2i2e.

1. Problématique et fonctionnement de la formation

1.1. Faisons le point !

a) On rappelle quelques éléments qui devraient désormais être des ***acquis***, à condition d'avoir travaillé ***normalement***, c'est-à-dire d'avoir travaillé.

b) Les ***notices*** d'abord. Actuellement, trois ont été distribuées et travaillées collectivement :

Première rentrée des classes

Le temps de l'étude

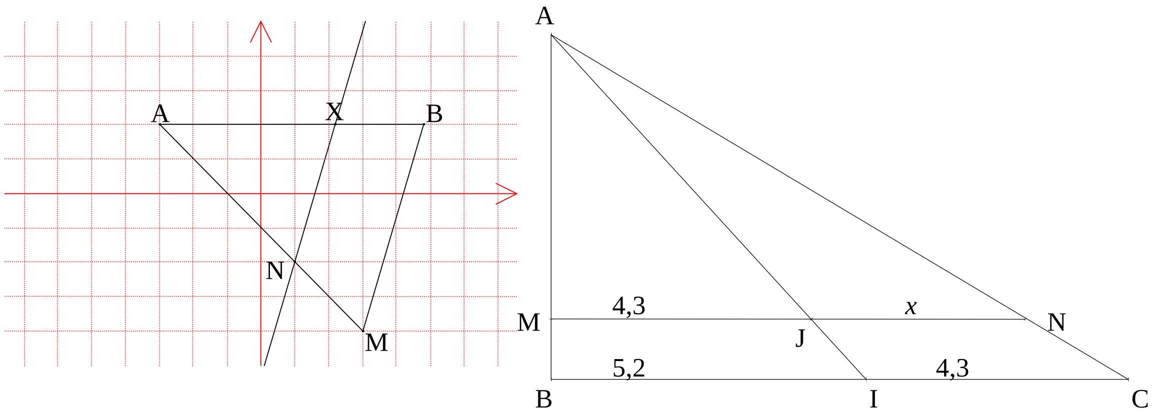
Éducation mathématique & citoyenneté

1) Le travail ***personnel*** sur ces notices, et leur exploitation didactique subséquente dans le cadre du travail en classe notamment, semble parfois éloigné de l'optimum.

2) Voici un exemple entre dix ou cent. Plusieurs des participants au Séminaire ayant en responsabilité une 4^{e} (ils sont une douzaine) y ont abordé ou envisagent d'y aborder le théorème « de Thalès ». Or, à propos de la notion de PER, la notice *Le temps de l'étude* fournit à cet égard des matériaux qu'on ne se saurait se justifier d'ignorer, *faute de mieux*, au moment de concevoir une AER génératrice de cet élément crucial de technologie mathématique – surtout si, induit en erreur par le manuel de la classe (ou par d'autres), on croit qu'une AER relative à ce théorème ne peut avoir pour objet *que* de le démontrer. Car on devrait savoir à ce stade de la formation que la démonstration vient *après* le fait 1^{o} de faire apparaître la propriété de Thalès comme la *clé* d'au moins un certain type de situations mathématiques, 2^{o} de s'assurer *expérimentalement* que cette propriété est *vraie* dans l'espace sensible plan. On reproduit le passage évoqué.

> En 4^{e}, notamment, on peut se proposer un parcours d'étude et de recherche portant sur la question de la construction d'un « calculateur graphique », c'est-à-dire visant à développer un ensemble d'***algorithmes géométriques*** permettant d'effectuer graphiquement les principaux types de calculs rencontrés à ce niveau. Sur la figure ci-dessous, à gauche, on a ainsi « construit », à titre

d’exemple, sur papier quadrillé, le nombre AX = $\frac{2}{3} \times 7{,}8$; tandis que, sur la figure de droite, on a construit, sur papier blanc, le nombre $x = \frac{4{,}3^2}{5{,}2}$.



c) À cela, il faut ajouter le travail sur les ***documents*** mis à la disposition des participants au Séminaire.

1) A-t-on ainsi suffisamment pris au sérieux le document présenté *dès le 31 août* sous le titre *Fabriquer la classe* ? Il est vrai que ce document se borne à indiquer *ce qui doit être atteint*, sans dire *comment* le faire. Mais s’est-on suffisamment efforcé d’atteindre le but désigné ? A-t-on *médité* ce dont ce court texte s’efforçait de témoigner ? On en rappelle quelques lignes.

> Dans ce contexte très formateur des lycées de zone sensible, j’ai rapidement appris que conduire une classe suppose la possibilité d’inventer une parole adaptée à tous, qui puisse être interprétée globalement de la même façon. Ces repères communs, si on les trouve, serviront de point d’ancrage aux échanges et au partage, élaborant ainsi le tissu social. Il nous faut travailler à créer cette *réalité temporaire*, au-delà de la diversité des déterminations individuelles. Construire et expliciter lentement les similitudes jusqu’à ce qu’elles apparaissent comme plus nombreuses que les distinctions. C’est la structure, le véritable *squelette provisoire* que toute classe – et probablement toute collectivité – exige pour exister.
> Le véritable pouvoir – le seul ? – du professeur, c’est celui de fabriquer la classe. Qu’on nous l’enlève et nous sommes réduits à néant.

2) De même, a-t-on étudié avec tout le sérieux qu’exige un apprentissage dont les acquis sont, en moyenne, sans doute encore fort modestes, les documents mis en ligne et sur lesquels l’attention a été attirée à l’occasion de telle ou telle séance du Séminaire, tels les contenus des fichiers ***Typographie 1*** et ***Typographie 2*** ? Les règles suivantes (qu’explicite le document *Typographie 2*) sont-elles, ainsi, désormais claires pour ***chacun*** ?

> Les nombres ***cardinaux*** sont en règle générale composés en chiffres arabes. Dans le cas des nombres décimaux, la virgule n’est ni suivie ni précédée d’un blanc. Ils s’écrivent par tranches de 3 chiffres à partir de la virgule séparées par une espace insécable non dilatable. On ne met pas de blanc (les chiffres sont donc collés) lorsque le nombre cardinal a une valeur de numérotage : le 6 octobre 1997, la page 1251.
>
> Pour les nombres ***ordinaux*** abrégés, on utilise des exposants :
> - 1^{er}, 1^{re} pour premier, première (et non $1^{\text{ère}}$) ;
> - 2^{e}, 3^{e} pour deuxième, troisième (et non $2^{\text{ème}}$, $3^{\text{ème}}$) ;
> - 1°, 2°, 3° pour *primo*, *secundo*, *tertio*.

En revanche les nombres ordinaux contenant une variable se notent sans exposant :
- n-ième, p-ième pour énième, péième (et non $n^{\text{ième}}$, $p^{\text{ième}}$).

On ne met jamais la marque de l'ordinal quand il s'agit du dénominateur d'une fraction :
- une carte au 1/25 000 (et non 1/25 000$^{\text{e}}$).

c) Jusqu'ici 11 exposés ont été présentés, dont on rappelle ci-après les sujets (et les auteurs).

Exposé 1. Lorsqu'un élève a un comportement répréhensible, quelles punitions peut-on (doit-on) lui infliger ? (Auteur : CD ; en ligne)

Exposé 2. À quoi sert le cahier de textes de classe ? Est-il obligatoire ? Que faut-il y consigner ? (Auteure : FE ; en ligne)

Exposé 3. Le manuel de la classe doit-il être au cœur du travail de la classe ? Dans tous les cas, quels usages doit-on en faire ?

Exposé 4. Qu'appelle-t-on « modules » en seconde ? À quoi doit-on utiliser ces temps de travail avec les élèves ? (Auteur : MB ; en ligne)

Exposé 5. Y a-t-il des instructions officielles concernant la fréquence des DS et des DM, leur longueur, leur contenu, leur place dans l'évaluation des élèves ? (Auteur : JB ; en ligne)

Exposé 6. Lorsqu'on est amené à constituer des groupes d'élèves, qu'est-ce qui peut justifier de faire des groupes plutôt homogènes ou, à l'inverse, des groupes plutôt hétérogènes ? (Auteure : NA ; en ligne)

Exposé 7. Quelles sont les connaissances essentielles qu'un professeur de mathématiques doit s'efforcer de maîtriser en matière d'orthographe et de typographie ? (Auteure : LLL ; en ligne)

Exposé 8. Comment réagir et agir de manière appropriée lorsqu'un élève n'a pas fait son travail, et en particulier ne rend pas un DM ? (Auteur : GB ; en ligne)

Exposé 9. À quoi sert de savoir que $\sqrt{n}$ est irrationnel quand n n'est pas un carré parfait ? Et comment alors le démontrer ? (Auteur : JG ; remis)

Exposé 10. Quels PER peut-on envisager au collège ? (Auteure : SP ; non remis)

Exposé 11. Peut-on donner au rituel des corrections une organisation qui lui confère une réelle viabilité dans la vie de la classe et une utilité effective au service des apprentissages ? (Auteure : NFG ; remis)

Exposé 12. Faut-il exiger des élèves, lorsqu'ils doivent démontrer qu'un triangle dont on connaît les mesures des côtés n'est pas rectangle, qu'ils précisent qu'ils utilisent alors la contraposée du théorème de Pythagore, et non le théorème de Pythagore lui-même ? (Auteur : MD ; non remis)

1) A-t-on examiné les textes disponibles en ligne à propos des différents ***exposés*** réalisés ? Surtout, a-t-on intégré dans sa culture professionnelle les informations et analyses qui y figurent ? En est-il ainsi par exemple avec le passage suivant du texte de l'exposé 2 ?

Contrairement à ce qu'on croit trop souvent aujourd'hui, remplir le cahier de textes n'est donc pas, un pensum administratif auquel il faudrait, bon gré, mal gré, se soumettre. C'est au contraire un ***dispositif didactique*** dont il faut apprendre à tirer le meilleur profit ***pour la formation des élèves.*** Dans cet objectif, voici quelques réponses pour mettre en scène ce qu'il vient d'être exposé.

1. Le professeur peut par exemple, à l'issue de chaque séance, écrire quelques notes rapides qui serviront de repères pour une rédaction plus substantielle élaborée ***avec la classe***. Lorsque la chose est

possible, la rédaction pourra se faire à l'ordinateur (piloté par le professeur), ***en classe*** (par exemple lors d'une séance de fin de semaine, surtout si elle est « mal située »), le contenu de l'écran étant vidéoprojeté pour que chacun puisse participer. La version ainsi élaborée, retouchée ensuite par le professeur si nécessaire, sera alors imprimée et collée dans le cahier de textes de classe. Le cas échéant, ceci permettra de mettre en ligne une version électronique du cahier de textes sur le site de l'établissement.

2. On peut aussi envisager, chaque semaine, qu'un binôme ou un trinôme d'élèves prépare ce travail et soumette sa proposition à la classe, etc.

3. On peut encore demander aux élèves un petit travail hors classe de bilan de l'activité de la semaine, etc.

2) Le développement précédent rend par exemple *impossible* de dire que, jusqu'ici, *rien* n'a été dit dans le Séminaire quant au bon usage des heures « mal situées » – en fin de semaine et en fin de journée, par exemple le vendredi de 16 h à 17 h, après une séance d'EPS. Le travail évoqué – d'autres suggestions sont possibles – ne fait pas avancer le temps didactique officiel : c'est là un point clé. Mais il constitue un *étayage des apprentissages* en cours, ce qui est évidemment *essentiel*.

d) Le principe des *exposés* est de faire connaître aux participants au Séminaire certains au moins des éléments de réponse à la question proposée tels qu'on peut les trouver dans les *archives du Séminaire*. Mais ce n'est pas là l'unique usage possible de ces archives ! C'est *à tout moment* de son travail de professeur que l'on doit aller *fouiller dans les archives*. Considérons par exemple la question suivante, que plus d'un des participants se pose ou se posera :

Quelle(s) différence(s) y a-t-il entre « propriété » et « théorème » ? (DP, OS, 5e, 6)

Les notes du séminaire de l'année 2002-2003 contiennent là-dessus tout un développement, que l'on reproduit ci-après partiellement : on verra qu'il répond complètement à la question.

Propriété, théorème ?

Quelle différence y a-t-il entre un théorème et une propriété ? Par exemple on parle du théorème de Pythagore et le programme de 4e parle de la propriété de Pythagore. Quel terme utiliser ? (…, OS, 4e + soutien en 6e, 13)

Matériaux pour une réponse

1. On retouchera d'abord la formulation adoptée dans cette question, afin d'éviter tout risque d'accréditer une éventuelle rumeur : s'il est vrai que les programmes du collège utilisent ***une fois*** l'expression « ***propriété*** de Pythagore », ils utilisent ***en général*** – exactement : 7 fois – l'expression « ***théorème*** de Pythagore ». On le vérifiera sur l'inventaire qui suit, où l'on a réuni ***toutes*** les occurrences du mot ***théorème*** dans le fichier Programmes du collège.doc (hormis celles figurant dans le tableau synoptique de fin).

…………..……………………………………………………………………………………….

2. Il est vrai, toutefois, que la tendance à parler de « propriété de Thalès » est un peu plus forte : on dénombre, dans le même fichier, 3 occurrences de « théorème de Thalès » pour… 4 occurrences de « propriété de Thalès ». Quoi qu'il en soit, il n'y a en fait ***aucun conflit*** entre le choix de « propriété » et celui de « théorème », mais une ***différence de signification*** qu'il est important d'entendre et de faire entendre. En vérité, le « jeu » langagier réunit ***trois*** termes, et non deux. Un objet mathématique possède certaines ***propriétés*** ; ces propriétés doivent être ***formulées*** ou ***énoncées*** : on obtient alors une ***formulation*** ou un ***énoncé*** de la propriété considérée. Un tel énoncé, exprimant une propriété qui aura été établie, éventuellement, de manière ***expérimentale***, pourra alors être ***démontré***, et deviendra ainsi

un ***théorème*** de plein droit de la théorie (géométrique, algébrique, etc.) disponible – à moins qu'il n'y soit ***admis*** à titre de théorème ***sans démonstration***…

3. On notera ici que le mot de ***formulation*** n'apparaît que deux fois dans les programmes de collège, comme il en va dans le passage suivant :

La comparaison avec une formulation en français – « le produit d'un nombre par la somme de deux nombres est égal à la somme des produits du premier par chacun des deux autres »... – pourra être l'occasion de montrer un intérêt (en économie et précision) de l'écriture symbolique.

C'est, par contraste, le mot ***énoncé*** qui est « plébiscité » par les mêmes textes dans le sens plus restreint évoqué ici – celui d'énoncé d'une propriété. On trouvera ces occurrences, ainsi que celles du mot « propriété », dans l'inventaire ci-après, qui illustre le jeu entre ***propriété***, ***énoncé***, et ***théorème*** (associé à ***démontrer, démonstration***).

…………………..………………………………………………………………………………….

4. La relation entre propriété, énoncé de la propriété et démonstration de la propriété (à travers son énoncé) était autrefois explicitée à l'intention des élèves – et des professeurs. Ainsi en va-t-il dans le passage suivant – qui précise l'usage du mot de théorème – d'un ouvrage de géométrie du niveau du collège, conforme aux programmes de 1947 :

Théorème. De la définition de la figure résulte un certain nombre de propriétés.
Ces propriétés s'énoncent en propositions appelées théorèmes, dont l'exactitude est établie par un raisonnement ou démonstration.

5. On notera que les programmes actuels de collège n'utilisent pas le mot « proposition ». Ce mot, utilisé comme synonyme d'énoncé dans ce qui précède, tend, dans les textes mathématiques contemporains, à désigner un théorème certes nécessaire ou utile comme maillon dans l'organisation déductive des connaissances, mais dont la force générative en tant qu'outil technologique de production de techniques est réduite. Ce que le *Dictionnaire des mathématiques* de Lucien Chambadal (Hachette, 1978) exprimait dans les termes suivants :

proposition, syn. de *théorème*. En pratique, le mot *théorème* est réservé aux résultats d'une grande importance, de démonstration parfois difficile ou fort longue. Les propositions rassemblent des résultats faciles, ou n'ayant qu'un intérêt technique.

6. Une propriété reconnue et utilisée dans une classe de collège (et au-delà) n'est pas *a priori* un théorème *stricto sensu* : c'est d'abord ***un fait*** (spatial, numérique, algébrique, etc.) ***tenu pour vrai*** (ou pour très hautement vraisemblable), et, le cas échéant, qui sera intégré à ce titre dans la ***théorie disponible***, où il devrait figurer alors ***en toute rigueur à titre d'axiome***. Parler de propriété c'est mettre l'accent sur… la propriété, en « oubliant » volontairement ou non son ***statut théorique*** – il peut s'agir d'un résultat expérimentalement sûr, d'une conjecture très vraisemblable acceptée comme axiome, d'une propriété démontrée. Parler de théorème, c'est, en principe et par contraste, faire allusion au statut de la propriété vis-à-vis d'une certaine théorie mathématique en construction. Ce jeu avec le statut est illustré assez clairement dans les passages suivants – déjà cités – des programmes de collège.

On prendra garde, à ce sujet, de ne pas demander aux élèves de prouver des propriétés perçues comme évidentes.

La symétrie centrale et les propriétés caractéristiques du parallélogramme permettent de démontrer ces théorèmes.

Bien entendu, il arrive que l'on mobilise l'un ou l'autre mot, que l'on parle de propriété ou de théorème de Pythagore ou de Thalès, par exemple, sans véritable raison de choisir tel mot ou d'écarter tel autre. Ce qui explique peut-être certains usages abusifs, comme dans le passage suivant du *Larousse du bac* (1992), où s'insinue une certaine confusion entre « propriété » et « énoncé d'une propriété » :

Exemples. – Parmi tous les quadrilatères, la propriété « les diagonales se coupent en leur milieu » caractérise les parallélogrammes…

D'une façon générale, il convient de passer du temps dans les *archives*, à farfouiller, à lire, à relire les développements qui semblent avoir un rapport avec la question que l'on se pose.

e) Un autre outil de formation qu'il ne faut pas se lasser de travailler est constitué des comptes rendus d'observation que nous serons amenés à analyser. C'est en particulier dans le travail sur le compte rendu d'une séance en classe de 4e que sont apparues les notions d'*organisation mathématique* et d'*organisation didactique*, fondamentales pour la suite de la formation. À titre d'exemple, on reproduit les notes (figurant dans les *Résumés* du Séminaire) relatives à l'organisation didactique qui se donne à voir dans le paragraphe 2 du compte rendu étudié. On relira ces notes en se demandant si tout y est désormais transparent, et sinon, en s'interrogeant sur ce qu'il conviendrait de faire pour que la transparence advienne.

Paragraphe 2

P s'enquiert si des élèves ont encore leur DM à rendre : deux élèves se signalent. P précise que, comme quelques élèves étaient absents hier, on explique rapidement ce qu'on a fait. « On a travaillé sur les médianes. Qui rappelle ce qu'on a appris ? » Une élève précise la définition de la médiane puis on rappelle le concours des médianes au point G, centre de gravité. P rappelle le tracé de la médiane.

Organisation didactique

OD2-1. Du point de vue de la *chronogenèse*, la séance est située implicitement dans la perspective de la séance de la veille : on s'attend donc à ce que le *temps didactique* avance.

OD2-2. Du point de vue de la *topogenèse*, on note qu'il revient aux élèves, sur instruction du professeur, d'effectuer le *travail de mémoire* – le « rappel » – demandé.

OD2-3. Le travail de mémoire participe d'une *technique d'étude collective*. Il est ici discrètement justifié – par le professeur – à l'aide d'un argument de circonstance : l'absence de certains élèves à la séance précédente. Cet élément de *technologie didactique* est distinct de celui qui affirmerait que, de façon moins contingente, davantage intrinsèque, le groupe a besoin de « se rappeler à lui-même », régulièrement, en des instants qu'il appartient au professeur de déterminer (et peut-être aux élèves de suggérer), le travail accompli en telle séance précédente.

OD2-4. Du point de vue de la *topogenèse* toujours, on note que le professeur se réserve le rappel de la *technique* τ_{me}. Le compte rendu ne permet pas de savoir s'il s'agit d'un rappel verbal ou si le geste est joint à la parole (avec usage d'instruments de tracé).

f) On n'oubliera pas les deux dispositifs principaux permettant d'impulser et de réguler le progrès de la découverte des phénomènes didactiques et de leur compréhension adéquate : les *questions de la semaine*, d'une part, le *GFP*, d'autre part.

1.2. La dialectique des médias et des milieux

a) Le titre de cette sous-section fait référence à une notion présentée dans la section 6 de la notice *Éducation mathématique & citoyenneté*, dont on reproduit ici deux paragraphes (en y remplaçant les notes de bas de page par des développements entre accolades).

6.4. L'éducation scolaire des futurs citoyens doit promouvoir un rapport à l'étude qui leur permette de parvenir, au sein de collectifs appropriés, à identifier les ***questions*** qui se posent à eux et à œuvrer pour leur apporter réponse en mobilisant – voire en contribuant, directement ou indirectement, à créer – les connaissances et savoirs pertinents. Cette activité fabricatrice de réponses engendre des ***chaînes de questions*** qui, en nombre de cas, étendent ouvertement ou subrepticement certaines de leurs ramifications jusque dans l'univers mathématique, ainsi bien sûr que dans les autres champs de connaissance.

6.5. À tout instant dans ce processus, quelle que soit la question en cours d'étude, on est conduit à interroger le monde autour de soi en le saisissant principalement (mais non bien sûr exclusivement) à travers certains des ***« médias »*** qui le font connaître {On entend ici par ***média*** tout système de mise en représentation du monde à l'adresse d'un certain public. Le cours du professeur de mathématiques, le prêche d'un clerc, le journal d'un présentateur de télévision relèvent en ce sens du système des médias au sens large}. Une telle interpellation de la culture soulève en permanence un double défi : celui de l'observation, de l'analyse, de l'évaluation, de l'exploitation des éléments de réponse recherchés, mais aussi des éléments ***non sollicités*** que les médias interrogés leur associent de façon plus ou moins contingente. Une éducation citoyenne doit alors permettre ***l'abord critique*** tant des éléments recherchés que des éléments qui leur sont associés en mettant en avant l'exigence d'une lecture ***« excriptrice »*** des médias, c'est-à-dire d'une lecture qui tente d'extraire les éléments ***inscrits*** dans le discours par lequel le média interrogé – du magazine grand public au manuel scolaire, du documentaire haut de gamme à l'émission de divertissement populaire, par exemple – répond en quelque sorte par avance à nos questions. Cette exigence appelle une ***dialectique des médias et des milieux*** {Un ***milieu*** est un système qu'on peut regarder comme dénué d'intention « didactique » dans la réponse qu'il peut apporter, de manière explicite ou implicite (il faut alors interpréter son comportement de « réponse »), à telle question déterminée : il se comporte *à cet égard* comme un fragment de « nature ». Par contraste, pour nombre de questions que l'on entend leur poser, les médias sont en général mus par une intention (par exemple « d'informer ») à l'endroit du questionneur. Bien entendu, un média peut fort bien, à propos de telle question, être regardé comme un milieu, et être utilisé comme tel}, qui est au cœur de toute formation citoyenne.

b) Cette dialectique, décrite ici à propos de l'élève de collège ou de lycée, s'applique à chacun de nous : c'est à tout moment que nous sommes soumis – qu'on l'ait recherché ou non – à des « messages » techniques, technologiques ou théoriques venus des médias les plus divers (y compris ce séminaire !). D'une manière générale, il nous appartient de mettre ces messages à l'épreuve d'une validation objective – et pas seulement de rechercher l'approbation de l'opinion commune.

c) Cette règle de conduite à la fois épistémologique et citoyenne s'applique à chacun. On peut la lire en termes d'épidémiologie : à croire sans s'imposer de vérifier, à vouloir savoir sans payer le prix de la connaissance, on participe à la diffusion de rumeurs, de « légendes urbaines », dont, en certains domaines, le recensement et l'étude occupe aujourd'hui de nombreux spécialistes. Qui n'a entendu parler du chat mis à sécher dans un four à micro-ondes et retrouvé cuit à point ? Ou des alligators dans les égouts de New York ? (Qui voudrait en savoir plus là-dessus pourra se reporter au livre de Véronique Campion-Vincent et Jean-Bruno Renard, *Légendes urbaines. Rumeurs d'aujourd'hui*, Payot & Rivages, Paris, 2002.) De la même façon, des légendes *scolaires*, des rumeurs *pédagogiques*, et même des légendes *mathématiques* (nous en verrons) se répandent, par le biais par exemple des salles des professeurs – bruits qui affirment par exemple que, aujourd'hui, on ne devrait plus dire « théorème de Pythagore » mais « *propriété* de Pythagore », ou – légende scolaire plus récente – que l'inconnue *x* devrait s'écrire au traitement de texte avec la police Dumachin, etc. Vénielle ou gravissime, l'erreur ainsi propagée doit être identifiée et, autant qu'on le peut, analysée et déconstruite.

d) La 4^e^ de couverture de l'ouvrage sur les « rumeurs d'aujourd'hui » indique que toutes les légendes contemporaines « camouflent nos angoisses, nos fantasmes, nos refus, pour former le nouveau folklore de citadins protégés par une modernité qui leur échappe ». Rien n'indique que cette analyse ne vaille pas aussi bien pour les rumeurs *scolaires* (au sens large). Le travail sur le matériau légendaire ou, plus largement, sur les *flux médiatiques* qui nous atteignent, constitue aujourd'hui un effort essentiel de la part du citoyen ou de l'apprenti citoyen. On sera donc attentif, à cet égard, à ne pas se laisser *contaminer* et, plus encore, à ne pas contaminer autrui – à l'instar de ceux qui, ayant cru à la légende des alligators new-yorkais, s'en font ensuite les ardents propagateurs.

e) S'agissant de cette formation, les récits parcellaires, condensés parfois en une formule frappante, de faits didactico-scolaires regardés comme curieux ou mémorables lancés *ex abrupto* par exemple à la pause du séminaire entre participants doivent donc être émis et reçus *avec discernement*, afin de ne pas hypothéquer le travail de professionnalisation que les formateurs ont par ailleurs la responsabilité d'impulser, de nourrir, de guider, de réguler. À cet égard, le slogan – économiquement intéressant – de la *mutualisation* apparaît *on ne peut plus ambigu* tant qu'on ne sait pas préciser sous quelles conditions la mutualisation a des chances d'échapper à la pure et simple contamination.

f) Depuis toujours, pourtant, il existe une condition que l'école (au sens large du terme) s'engage à réaliser : la « contamination » scolaire, quelle qu'en soit la forme, est placée sous le contrôle d'une *instance de vérification* – fonction qu'assume notamment les professeurs (chacun dans son domaine de compétence). Dans une classe, ainsi, les élèves sont appelés à s'exprimer, à proposer, à débattre, mais toujours, en dernière instance, *sous la supervision du professeur*. Dans le cas du travail du chercheur, cette supervision n'est pas, sauf exception, le fait d'un « superchercheur », mais de la *communauté des pairs* – ce qu'on nomme de façon commode *la* communauté scientifique. D'une façon plus générale, tout collectif de travail – qu'il soit nombreux ou réduit à une personne – doit se donner une *instance de supervision*, qui diminuera les risques de pollution épistémologique. Un thésard a un directeur de thèse (et présente le fruit partiel de ses travaux dans un séminaire de pairs, par exemple) ; un trinôme réalisant son TER – la chose deviendra bientôt d'actualité – est supervisé par le tuteur du GFP ; etc. Que cette supervision cesse d'exister et l'engagement formatif de l'institution concernée sera par définition néantisé.

g) À cet égard, au reste, deux types de « contrats » sociaux peuvent exister, entre lesquels passe une ligne de démarcation franche, qu'il faut apprendre à reconnaître. N'importe qui peut m'inonder de messages sans prendre vis-à-vis de moi aucun engagement concernant la vérité, ou du moins la vérification du contenu de ces messages – même s'il existe des remparts contre le mensonge systématique (tel le BVP en matière de publicité). La défiance méthodique est ici de mise, dans tous les cas. Mais dans ce cas, si ma bonne foi est abusée, et si cela me porte préjudice, je n'ai aucun recours légal contre le « média » mystificateur. Il en va tout autrement si je peux prouver que ma contamination par une technique, une technologie ou une théorie erronée a été activement ou même passivement favorisée par l'institution avec laquelle avait été passé, explicitement ou implicitement, un contrat *de formation*. Je pourrai en ce cas me retourner contre elle pour m'avoir abandonné à certaines légendes ou rumeurs relevant du domaine même où elle devait me former. En un tel cas, l'institution pourra toujours chercher à se défendre. Mais malheur à elle si l'on peut montrer que, par incurie, légèreté ou imbécillité, elle a laissé se propager les rumeurs dont je déclare pâtir ! Sa non-culpabilité sera au contraire éclatante si elle peut montrer qu'elle a été empêchée de mettre en œuvre les moyens idoines de limiter les risques de contamination, c'est-à-dire de promouvoir au niveau utile une vigoureuse dialectique des médias et des milieux.

h) Une bonne façon de permettre le développement d'une telle dialectique consiste à l'appuyer sur la pratique de l'*epochè*. Sur ce mot grec, et sur la notion qu'il porte en lui, on fouillera les archives du Séminaire.

2. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques

2.1. On poursuit l'examen de la notice ***Éducation mathématique & citoyenneté***, arrêtée lors de la séance à la fin de la sous-section 3.2.

2.2. L'examen se poursuit jusqu'à la sous-section 4.3. incluse.

3. Forum des questions

3.1. Poursuites & anticipations

a) On revient d'abord un instant, à travers deux textes, sur la question de la « dyslexie ».

1) Le premier texte est un article paru en 2001, qui réagit à la décision de l'Éducation nationale d'officialiser la notion de « dyslexie » : il est signé d'une autorité en la matière, Jacques Fijalkow, professeur de psychologie à l'Université de Toulouse-Le Mirail. On en parcourt d'abord rapidement le début.

***Dyslexie : le retour*, par Jacques Fijalkow**

VEI Enjeux, 126 (septembre 2001), 148-165

Extrait 1

Le 21 mars 2001, un « Plan d'action pour les enfants atteints d'un trouble spécifique du langage » a été présenté par le ministre de l'Éducation nationale, le ministre délégué à la santé et le secrétaire d'État aux personnes âgées et aux personnes handicapées (http://www.education.gouv.fr/discours/2000/dyslex.htm). Ce texte officialise l'existence de la dyslexie dans le cadre éducatif. À l'intention de ceux qui se demandent quelle est la portée de ce plan, il suffit de rapporter que ce texte vise 4 à 5 % des enfants, dont 1 % présentant des troubles sévères (p. 5), ce que les auteurs qualifient eux-mêmes d'« affaire d'État » (p. 7). Sans vouloir dramatiser outre mesure cette question, ces précisions devraient suffire pour que les personnes concernées par l'entrée dans l'écrit des enfants en France ne la considèrent pas comme négligeable.

Ce plan d'action nous paraît porteur de quatre risques majeurs :

– un risque relatif aux enfants visés par ces mesures : rien ne dit en effet que le fait de caractériser les enfants mauvais lecteurs de « dyslexiques » permette de résoudre le problème qu'ils posent. On peut même craindre que la stigmatisation ainsi opérée et la ségrégation qu'elle porte en germe ne l'aggravent ;

– un risque relatif aux enseignants dans les classes desquels sont scolarisés ces enfants. Le fait de considérer ces enfants comme « autres », et relevant donc d'une expertise non strictement pédagogique, peut inciter les enseignants à adopter une attitude de déresponsabilisation par rapport à eux et, par suite, aux difficultés scolaires. À l'acharnement pédagogique, qui est une des caractéristiques remarquables des enseignants français et une des raisons de leur efficacité auprès des élèves les plus faibles, on risque donc de voir se substituer une attitude d'abandon des élèves en difficulté ;

– un risque relatif à l'école publique. Dans un contexte politique où l'école publique est confrontée à de fortes poussées libérales, on peut craindre que confier certains élèves à des personnels extérieurs à l'Éducation nationale ne renforce le processus en cours ;

– un risque relatif aux inégalités scolaires. Il a été maintes fois vérifié en effet qu'une différenciation opérée dans une sous-population scolaire au bénéfice présumé d'une population à risque a pour conséquence, non pas de réduire les difficultés de ceux en faveur desquels elle a été instituée, mais de permettre aux autres de progresser plus vite et donc d'accroître l'écart entre le groupe que l'on a déclaré vouloir favoriser et le reste de la population.

2) On prend maintenant connaissance de la fin de cet article.

Dyslexie : le retour, **par Jacques Fijalkow**

VEI Enjeux, 126 (septembre 2001), 148-165

Extrait 2

… il importe d'abord de rappeler avec force que les mauvais lecteurs, contrairement à une approche qui ne connaît que des individus, se recrutent pour la plupart dans certains milieux sociaux, les milieux socialement défavorisés. C'est un fait statistique, mille fois vérifié, que l'échec scolaire en général, et au cycle 2 en particulier, est fondamentalement un fait sociologique. Ces jeunes, des garçons le plus souvent, se caractérisent par une histoire sociale et scolaire difficile, ce dont tous les enseignants sont parfaitement conscients, mais qui curieusement échappe aux praticiens de la santé. Les étiqueter « dyslexiques » quand ils sont en début de scolarité, c'est masquer sous une étiquette médicale un problème social.

À ce problème social, il y a des solutions. Il y a d'abord des solutions qui relèvent de l'action politique contre les inégalités sociales, mais celles-ci sont hors de notre champ. Il y a aussi, secondairement, des solutions pédagogiques. Ces solutions sont celles sur lesquelles repose le pari républicain de l'école pour tous. En mettant à l'écart, sous prétexte de mieux les prendre en charge, les enfants qui ont des difficultés à comprendre le sens de l'école et de ce qui y est enseigné, on peut craindre qu'on ne s'engage dans une voie dont l'expérience des tentatives analogues a montré qu'elle conduit à une impasse ou à une aggravation du problème. On peut penser, par exemple, aux classes spéciales ou aux groupes de niveau. Par contre, encourager la recherche pédagogique en soutenant les innovations, en favorisant, après une évaluation rigoureuse, leur généralisation contrôlée, permettrait sans doute de réduire le nombre des enfants en difficulté. De telles solutions existent (Le Bastard et Suchaut, 2000), mais demeurent sans lendemain faute d'être prises en considération par l'Éducation nationale.

À côté des enfants de milieu défavorisé qui constituent la masse des mauvais lecteurs, il existe aussi, mais dans une faible proportion, un certain nombre d'enfants qui avaient tout pour réussir et qui pourtant piétinent au seuil de l'écrit. Ces enfants, peu nombreux, sont souvent issus des classes moyennes. Ce sont leurs parents qui animent ou soutiennent les associations de parents d'élèves dyslexiques. La causalité est ici toute différente. Dans le cas de ces enfants, une analyse clinique du contexte familial montre que ce n'est pas parce que la lecture n'a pas de sens pour l'enfant qu'il la refuse, mais, au contraire, que c'est parce qu'il a très bien compris quel sens elle revêt aux yeux de ses parents qu'il se refuse à son apprentissage. Dans ce second cas, la lecture constitue en fait non pas un terrain que l'enfant refuse, mais, au contraire, le terrain qu'il choisit pour livrer bataille. Ce qui apparaît en effet, à l'étude des cas que nous avons rencontrés, c'est que l'enfant choisit le symptôme de la lecture pour faire pression sur ses parents, son refus d'apprentissage constituant alors, sur le mode général, un message à décrypter, mais dont la signification précise varie selon le contexte familial. Le fait que, à la tête des associations de parents militants de la dyslexie, on trouve nombre de psychologues, psychiatres, enseignants, est ici particulièrement éloquent, car, la lecture étant particulièrement valorisée par eux, elle apparaît bien comme un moyen particulièrement pertinent de les atteindre.

On comprend évidemment la souffrance des parents concernés, ainsi que le processus d'attribution externe qui les conduit à rechercher une origine des difficultés de leur enfant excluant tout facteur familial ou éducatif intolérable dans ce type de milieu. L'hypothèse d'un trouble organique fournit en effet la réponse anxieusement recherchée. Son caractère insaisissable même contribue à sa fonction. Paradoxalement, le fait d'exercer une profession où le livre occupe une place centrale, loin de constituer une arme pour identifier la source du problème, empêche d'identifier la causalité effective. De cela résulte que seul un regard extérieur, un regard clinique attentif à ce qui se joue dans la famille, peut amener ce type de parents à identifier ce qui fait problème à leur enfant. Leur souffrance, aussi respectable soit-elle, ne saurait pourtant conduire à ce que les problèmes du plus grand nombre, problèmes d'origine sociale et pédagogique le plus souvent, soient masqués par un étiquetage médical qui ne correspond au bout du compte qu'à un nombre de cas extrêmement limité, tels qu'un praticien expérimenté les compte sur moins d'une seule main.

Le plan d'action présenté conduit donc à investir un maximum de moyens sur un minimum d'enfants. En concentrant ceux-là sur les enfants des classes moyennes, il favorise des enfants déjà favorisés par leur naissance. En se désintéressant de ceux qui sont défavorisés par leur naissance et dont les difficultés ont une autre origine, il contribue à faire en sorte que ces derniers soient encore plus défavorisés. Accordant enfin sa confiance à des intervenants appartenant à ces mêmes classes moyennes plutôt qu'à ceux de l'école républicaine, il renforce encore le caractère ségrégatif de la ségrégation initiale.

Ainsi, selon nous, les difficultés d'entrée dans l'écrit renvoient, dans la majorité des cas, à des déterminants sociologiques et donc pédagogiques. Ils renvoient parfois, mais plus rarement, tout particulièrement pour des enfants de classe moyenne, à des déterminants psychologiques internes à la sphère familiale. Ils ne renvoient que de façon tout à fait exceptionnelle à des déterminants médicaux ; mais, même dans ces cas rarissimes, cela n'exige nullement que soit fait appel à la notion douteuse de « dyslexie » ou à son indéfinissable succédané appelé « trouble spécifique du langage ». De cela résulte que le plan d'action mis en place ne saurait que susciter les craintes les plus vives.

b) L'article de Jacques Fijalkow est en ligne sur le site de l'IUFM, rubrique *Documents 2nd degré* : on en prendra connaissance. Notons ici qu'une circulaire ministérielle de 2002 a concrétisé le *Plan d'action* de mars 2001 ; intitulée *Mise en œuvre d'un plan d'action pour les enfants atteints d'un trouble spécifique du langage oral ou écrit*, on la trouvera à l'adresse suivante : http://www.education.gouv.fr/bo/2002/archive.htm.

c) Le type d'analyse proposé par l'auteur à propos des enfants « issus des classes moyennes » ayant des difficultés notables à entrer dans l'écrit fait apparaître une forme de raisonnement dont la notion de *symptôme* est l'une des clés, avec laquelle il convient de se familiariser. À titre d'exemple plus « violent », on a reproduit ci-après un texte du pédopsychiatre Marcel Rufo où se montrent différents positionnements possibles, tous paradoxaux pour le profane, par rapport à « la maladie ».

Extrait de *Positions rivales fraternelles à l'adolescence*, par Marcel Rufo

in Alain Braconnier (éd.), *L'adolescence aujourd'hui*, érès, 2005, 29-35

La rivalité fraternelle peut paradoxalement s'exprimer dans le souhait d'être malade comme son frère ou sa sœur. L'exemple clinique le plus démonstratif que j'ai rencontré dans ma pratique clinique est celui d'une infirmière puéricultrice en oncologie qui est la deuxième fille d'une famille de trois enfants : un frère aîné jaloux de la leucémie de sa sœur et un frère cadet étrangement protégé par un handicap néonatal.

Cette jeune femme a aujourd'hui plus de 30 ans et nous l'avions rencontrée à l'âge de 16 ans sur la demande du service de pédiatrie en raison d'une importante pathologie dépressive. Elle faisait partie des leucémies guéries, ce qui était rare à cette époque. C'est sa mère qui, initialement, nous dit qu'un interne avait prédit qu'elle avait deux chances sur cent de s'en sortir. Le père, corse, ne voulait absolument pas entendre parler de « la maladie ».

Lors de la première hospitalisation, elle se lie d'amitié avec une jeune fille, elle aussi leucémique. Toutes deux étaient les survivantes, dans leurs représentations imaginaires, des leucémiques hospitalisée à l'époque dans le service (donc deux sur cent patients). L'entrée dans la phase dépressive sera la résultante de la rechute et de la mort de cette amie, et c'est à ce moment que nous nous rencontrons. Elle refusait tous les soins, avait perdu toute confiance en la médecine, pensant que « les deux chances sur cent » étaient un mensonge puisque son amie était morte. Lors des séances psychothérapiques, elle critiquait tout le système médical. Le service, de son côté, me demandait de continuer à la suivre, comme si la psychothérapie pouvait, dans un imaginaire collectif, empêcher la rechute. J'avais l'impression que la magie psychothérapique avait remplacé la magie statistique médicale du début.

Venons-en aux frères de cette patiente. L'aîné était très brillant. Toute son enfance a été perturbée par un double désir : celui, inquiétant, d'être leucémique lui aussi en raison de la sacralisation, l'idéalisation de sa sœur malade, et un désir culpabilisant de souhaiter la mort de celle-ci. Il est devenu lui aussi soignant et a dû ultérieurement s'engager dans un travail psychanalytique.

Le cadet, au contraire, n'a jamais présenté le moindre désordre psychologique. Il faut noter qu'il était né avec une amblyopie, que cet handicap l'avait en quelque sorte protégé. Le paradoxe consiste dans le fait que l'enfant né handicapé a été puissamment soutenu par le père et la mère, et a donc magnifiquement tiré partie de son handicap. En revanche, le frère non handicapé et non malade a violemment pâti de la maladie de sa sœur.

d) Le professeur de mathématiques n'est pas un pédopsychiatre et il serait dangereux qu'il en vienne à s'identifier imaginairement, sur un mode oblatif qu'on ne lui demande nullement, à un soignant. Mais il doit certainement apprendre à reconnaître les contraintes de la vie psychique, non pour les affronter en quelque sorte à mains nues, mais pour les intégrer et tenter de les faire évoluer *dans le champ qui est le sien*, c'est-à-dire *dans le champ du travail de la classe*. Le texte reproduit ci-après fournit un exemple de ce qu'il convient de s'efforcer d'apercevoir (ne serait-ce que pour en débattre) : intitulé « Tirer le fil de la curiosité », et paru dans le numéro de novembre 2005 du mensuel *Le Monde de l'éducation*, il est dû à Serge Boimare.

1) Ce texte commence par un constat et une interrogation.

Extrait 1

Djamel connaît par cœur la liste des footballeurs professionnels de la 1re division, ainsi que leurs salaires déclarés. Carine collectionne depuis trois ans tous les articles de journaux qui parlent de la « Star Academy ». Elle accumule et classe avec beaucoup de rigueur tous les détails de la vie des candidats. Kévin peut réciter des pages entières du Livre des records. Tous les trois sont en échec sévère dans la même classe de 4e et ne peuvent pas prétendre au brevet des collèges.

Pourquoi des jeunes gens vifs et éveillés, dont l'intelligence ne fait de doute pour personne, bloquent-ils devant des savoirs qui sont largement à leur portée ? Pourquoi cette mémoire dont ils font preuve par ailleurs n'est-elle pas récupérable pour apprendre la liste des verbes irréguliers anglais ? Pourquoi cette curiosité, qui paraît si vive devant des sujets futiles, ne peut-elle se reporter sur l'une des disciplines du programme ?

2) Il se poursuit par une analyse que voici.

Extrait 2

Si nous cherchons à comprendre le fonctionnement intellectuel de ces jeunes gens, nous voyons que nous sommes ici devant une curiosité qui n'a pas été sublimée. C'est-à-dire une curiosité qui n'a jamais été réellement détournée des questions primaires : comment être le plus beau ? Le plus fort ? Le plus aimé ? Le plus riche ? En un mot, comment être dans la jouissance permanente et ne pas connaître le manque.

Pour satisfaire leur besoin de savoir, Djamel, Carine et Kévin ne doivent surtout pas faire de détour. Voir, entendre, être dans la maîtrise immédiate, leur suffit largement pour être comblés. Ils vont privilégier ces voies d'accès à la connaissance aux dépens du travail réflexif. La situation d'apprentissage qui leur impose de se confronter à leurs insuffisances, au doute et à des règles leur est insupportable. Elle les provoque dans leur mode de fonctionnement, créant du malaise et de la déstabilisation. Non seulement cet exercice leur montre qu'ils ne seraient peut-être pas les plus beaux ni les plus forts, mais qu'ils peuvent eux aussi rencontrer des idées de vide, d'abandon, d'insuffisance.

Pour échapper à ces sentiments insupportables, ils vont s'opposer au cadre qui les confronte à cette demande mais ils vont aussi réamorcer cette curiosité primaire qui les rassure. Fermant ainsi la boucle de ce circuit court qui se fait aux dépens de la pensée.

3) Que faire, si l'on veut agir ? Les participants au Séminaire découvriront la proposition de Serge Boimare dans la publication indiquée plus haut (que l'on trouve dans les médiathèques de l'IUFM et dans tous les kiosques de presse). Pour avancer un peu, on empruntera ici à un

autre billet du même auteur, paru dans le numéro de septembre 2005 du *Monde de l'éducation*, intitulé « Jérémy et la peur d'apprendre », à propos d'un élève de 13 ans qui, ayant à faire en classe un exercice sur la règle d'accord du participe passé, y renonce bruyamment « en disant haut et fort et d'un ton provoquant à l'égard de sa professeure que *"la grammaire est un truc de gonzesse"* ».

Pour réconcilier Jérémy avec la grammaire, il ne suffira pas de le prendre dans un petit groupe de soutien et d'augmenter le temps réservé aux savoirs fondamentaux en étant ferme et autoritaire.

Cette vision simpliste de la pédagogie, qui consiste à vouloir traiter ceux qui ne peuvent pas s'appuyer sur leur pensée pour apprendre, de la même façon que ceux qui ont besoin d'un coup de pouce personnalisé pour combler leurs lacunes, est dramatique. Elle explique non seulement pourquoi nous n'arrivons pas à faire baisser ce chiffre de 12 % d'irréductibles qui traversent leur scolarité sans maîtriser le socle des fondamentaux, mais aussi le malaise des professeurs en face d'eux.

On notera que, à suivre l'auteur, le professeur peut s'attendre à avoir devant lui une classe comportant, à un moment donné, une majorité d'élèves qui suivent tant bien que mal le rythme impulsé, à quoi s'ajoutent quelques élèves en rupture momentanée de rythme (et qui ont donc besoin d'un « coup de pouce »), avec en plus quelques élèves comme Jérémy, Djamel, Carine ou Kévin, pour lesquels les choses sont *a priori* moins simples – ce qui ne signifie *nullement* que ce ne soit pas *d'abord* à travers l'enseignement donné à tout le groupe-classe que le professeur pourra les aider !

e) On s'arrête maintenant sur la question suivante.

Que faire figurer dans la synthèse relative aux configurations et transformations du plan en 2de sachant que les seules notions nouvelles sont les triangles isométriques et semblables et que ce chapitre doit permettre de revoir tous les acquis du collège ? (NFG, MJ, 2de, 6)

La réponse est toujours la même : la synthèse doit fournir un inventaire raisonné de l'organisation mathématique mise en place, et donc recenser et illustrer les types de tâches étudiés, les techniques élaborées ainsi que leurs environnements technologico-théoriques. Comme dans l'ensemble des AER menées à bien (éventuellement au sein d'un ou plusieurs PER), le travail de synthèse doit partir des types de tâches, non des technologies (Thalès, Pythagore, symétries centrales, etc.) considérées *ex abrupto*. Supposons ainsi que l'on ait étudié le type de problèmes suivant :

Un point P extérieur à la feuille sur laquelle on travaille est défini comme l'intersection de deux droites *d* et *d'*. Comment déterminer la droite passant par S et P ? (Voir la figure ci-dessous à gauche.)

Si la technique mise en place est celle illustrée par la figure ci-dessus à droite (H et K étant les projetés orthogonaux de S sur *d* et *d'* respectivement, on trace les médiatrices de [SH] et [SK], qui se coupent en P_1 : on a (SP) = (SP_1) ; si P_1 est extérieur à la feuille, on recommence), c'est cette technique qu'il conviendra de faire figurer dans la synthèse, suivie, bien entendu, de sa technologie – qu'on abandonne, en l'espèce, à la sagacité des participants au Séminaire.

3.2. Exposés du jour

a) On écoute un exposé de *SPM* sur la question suivante :

Exposé 13. Les « cahiers d'AER » doivent-ils témoigner de tous les essais faits lors d'une recherche, y compris les essais inaboutis ? Sinon, quel partage envisager entre brouillon et cahier d'AER ?

b) Remarques et commentaires.

4. À propos du C2i2e

4.1. On a déjà évoqué le C2i2e lors de la séance 5. On explicite ici les « 27 compétences réparties en 7 domaines » tels qu'ils figurent dans une circulaire ministérielle à paraître. (Ce projet de circulaire est disponible sur l'Espar de la filière *Mathématiques*.) En bleu figurent les 18 « compétences » qui doivent obligatoirement être validées pour permettre l'obtention du C2i2e, qui suppose en outre la validation de 5 au moins des 9 compétences restantes.

A – Compétences générales liées à l'exercice du métier	
Domaines	**Compétences**
A.1. **Maîtrise de l'environnement numérique professionnel**	1. Identifier les personnes ressources TIC et leurs rôles respectifs, dans l'école ou l'établissement, et en dehors (circonscription, bassin, Académie, niveau national...).
	2. S'approprier différentes composantes informatiques (lieux, outils...) de son environnement professionnel.
	3. Choisir et utiliser les ressources et services d'un environnement numérique de travail (ENT).
	4. Choisir et utiliser les outils les plus adaptés pour communiquer avec les acteurs et usagers du système éducatif.
	5. Se constituer et organiser des ressources en utilisant des sources professionnelles.
A.2. **Développement des compétences pour la formation tout au long de la vie**	1. Utiliser les ressources en ligne et les dispositifs de Formation Ouverte et à Distance (FOAD) pour sa formation.
	2. Se référer à des travaux de recherche liant savoirs, apprentissages et TICE.
	3. Pratiquer une veille pédagogique et institutionnelle, notamment par l'identification des réseaux d'échanges concernant son domaine, sa discipline, son niveau d'enseignement.
A.3. **Responsabilité professionnelle dans le cadre du système éducatif**	1. S'exprimer et communiquer en s'adaptant aux différents destinataires et espaces de diffusion (institutionnel, public, privé, interne, externe...).

	2. Prendre en compte les enjeux et respecter les règles concernant notamment : – la recherche et les critères de contrôle de validité des informations, – la sécurité informatique, – le filtrage Internet.
	3. Prendre en compte les lois et les exigences d'une utilisation professionnelle et citoyenne des TICE concernant notamment : – la protection des libertés individuelles et publiques, – la sécurité des personnes, – la protection des mineurs, – la confidentialité des données, – la propriété intellectuelle, – le droit à l'image.
	4. Respecter et faire respecter la charte d'usage de l'établissement, dans une perspective éducative d'apprentissage de la citoyenneté.
B - Compétences nécessaires à l'intégration des TICE dans sa pratique	
Domaines	**Compétences**
B.1. **Travail en réseau avec l'utilisation des outils de travail collaboratif**	1. Rechercher, produire, partager et mutualiser des documents, des informations, des ressources dans un environnement numérique.
	2. Contribuer à une production ou à un projet collectif au sein d'équipes disciplinaires, interdisciplinaires, transversales ou éducatives.
	3. Concevoir des situations de recherche d'information dans le cadre des projets transversaux et interdisciplinaires.
B.2. **Conception et préparation de contenus d'enseignement et de situations d'apprentissage**	1. Identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE.
	2. Concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de classe.
	3. Intégrer des outils et des ressources dans une séquence d'enseignement, en opérant des choix entre les supports et médias utilisables et leurs modalités d'utilisation.
	4. Préparer des ressources adaptées à la diversité des publics et des situations pédagogiques en respectant les règles de la communication.
B.3. **Mise en œuvre pédagogique**	1. Conduire des situations d'apprentissage en tirant parti du potentiel des TIC : – travail collectif, individualisé, en petits groupes, – recherche documentaire.
	2. Gérer l'alternance, au cours d'une séance, entre les activités utilisant les TICE et celles qui n'y ont pas recours.

	3. Prendre en compte la diversité des élèves, la difficulté scolaire en utilisant les TICE pour gérer des temps et des modalités de travail différenciés, en présentiel et/ou à distance.
	4. Utiliser les TICE pour accompagner des élèves, des groupes d'élèves dans leurs projets de production ou de recherche d'information.
	5. Anticiper un incident technique ou savoir y faire face.
B.4. **Mises en œuvre de démarches d'évaluation**	1. Identifier les compétences des référentiels TIC (B2i® ou C2i®) mises en œuvre dans une situation de formation proposée aux élèves, aux étudiants.
	2. S'intégrer dans une démarche collective d'évaluation des compétences TIC (B2i® ou C2i®).
	3. Exploiter les résultats produits par des logiciels institutionnels d'évaluation des élèves.

4.2. Un certain travail a déjà été impulsé dans le cadre de ce Séminaire : il appartient à chacun de l'identifier nettement et de se rendre maître des *types de tâches* correspondants. On ébauche ici un inventaire concis de cet « acquis ».

a) Dès après la *séance 1*, chacun a dû apprendre à maîtriser (si ce n'était déjà fait) l'accès à la partie mathématique du site Internet de l'IUFM et la recherche sur ce site de divers documents (http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/index.html).

b) Dès la *séance 2*, on a répondu à la question : « Comment obtient-on à l'ordinateur les symboles des ensembles de nombres ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) ? » On doit supposer que chacun des participants au Séminaire dispose désormais sur son ordinateur de la police *Bookshelf Symbol 5*.

c) Au cours de la *séance 3*, on a ouvert un PER (de formation) en apportant de premiers éléments de réponse à la question suivante : « Où trouve-t-on les logiciels de géométrie dynamique (Geoplan, Geospace, Cabri), les traceurs de courbes (Graphmatica, GeoGebra) et Acrobat Reader ? » Dans cette même *séance 3*, on a étendu la pratique de la recherche sur Internet au-delà du site de l'IUFM (éducation, droit).

d) Toujours dans la *séance 3*, certains types de tâches ont été examinés en relation avec des gestes élémentaires du travail statistique :

– à l'aide du traitement de texte utilisé, dépouiller une enquête relative à des caractères à petit nombre de modalités ;

– à l'aide du traitement de texte utilisé, déterminer les effectifs de chaque modalité ;

– avec le traitement de texte utilisé, réduire selon une règle prescrite le nombre de colonnes d'un tableau.

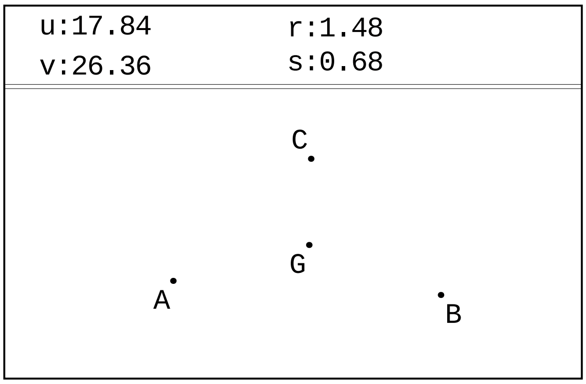
e) Lors de la *séance 4*, on a présenté un tableau (sous Word) obtenu à partir d'un tableau donné par une permutation de ses lignes selon un certain critère : le savoir-faire correspondant est-il acquis ?

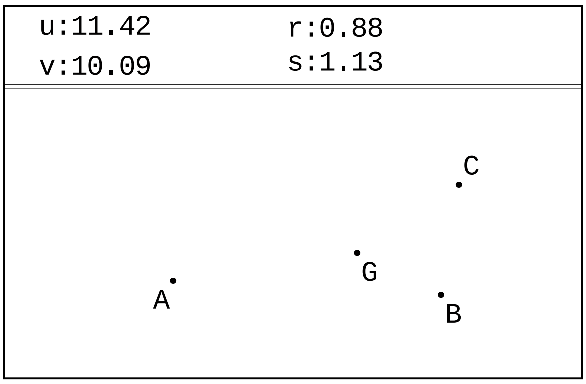
f) Au cours de la première *séance d'explicitation* (tenue le même jour que la séance 4), a été évoquée une expérience graphique à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

Lucas : « On fait une étude avec le logiciel ! » P : « Oui, avec le logiciel Wallis, c'est ça. Alors comment on fait ça ? Alors Anaïs ? » Anaïs : « On fait la figure. » P : « Oui. » Anaïs : « Et après on demande d'afficher l'angle $\widehat{BAG}$ et l'angle $\widehat{GAC}$, et on compare. » P à la classe : « Vous êtes d'accord ? » Des élèves en chœur : « Oui. » P : « Bon, moi j'ai une question. "On compare", ça veut dire quoi ? Vous faites quoi ? » Silence… P : « Alors ? » Jocelyn : « On regarde si l'un est le double de l'autre, ou le triple, je sais pas… » P : « Mais pour ça, qu'est-ce qu'on peut faire ? » Un élève demande la parole. P : « Camille ? » Camille : « On demande à Wallis d'afficher le rapport des angles, comme ça on sait directement si c'est un ou un demi, ou deux… » P : « Est-ce qu'on sait faire ça ? » Les élèves en chœur : « Oui ! » P : « Bon, alors vous noter ça dans votre cahier de textes pour jeudi. Allez… »

Les élèves s'affairent. P circule, échange quelques mots avec un élève. Une élève l'appelle. P se rend auprès d'elle, l'écoute. P : « Écoutez, un peu. Amélie demande comment on appelle les mesures des angles. Sarah ? » Sarah : « Moi j'ai mis *u* et *v*, comme on avait fait déjà. » P : « Oui, d'accord, on peut faire ça. Et puis pour le rapport de *u* et *v* donc ? » Sarah : « *r* ? » P : « Voilà, *r*, par exemple ! » Un élève se manifeste : « Madame on peut aussi faire afficher *v*/*u* ! Ça facilite. » P : « Oui, pourquoi pas. Et tu l'appelles comment ? » Florian : « Je l'appelle *s*. » P : « D'accord. Bon, alors on verra jeudi ce qu'on fait… On en reste là pour cette recherche aujourd'hui ! »

On se sera assuré que l'on sait effectivement réaliser – en particulier à l'aide du logiciel utilisé dans la classe que l'on a en responsabilité – l'expérience demandée à ces élèves :

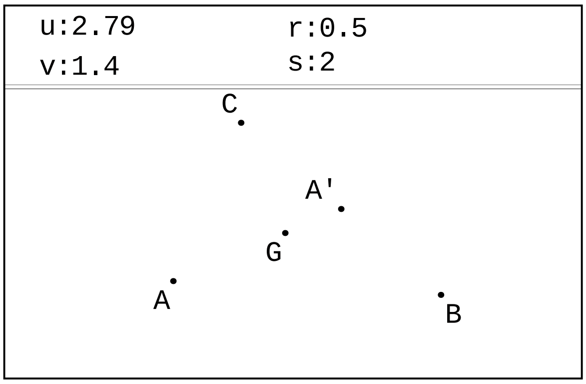


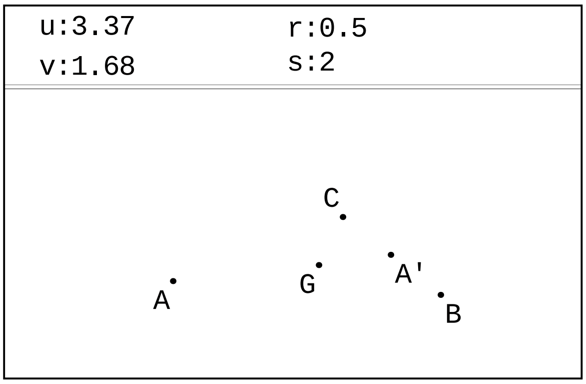


De la même façon, une autre expérience graphique était évoquée :

Camille : « On peut faire comme avec les angles : on regarde si par exemple GA' est égal à GA, ou si c'est le double, etc. » P : « Vous êtes d'accord ? » Silence. P : « On peut essayer ça ? » La classe semble approuver. P : « Bon, alors vous savez ce qu'il vous reste à faire ! Cette fois *u* c'est la mesure GA, *v* c'est GA'. C'est clair ? » Les élèves : « Oui. » P : « Alors vous notez ça dans votre cahier de textes. Vous pensez aussi à faire une narration écrite de la recherche qu'on a arrêtée, en vue de la synthèse à venir. » Un élève : « C'est pour quand, Madame ? » P : « Pour lundi prochain. »

On aura obtenu de même quelque chose comme ceci :





g) Lors de la *séance 5*, on a mentionné la police *Symbol*, où l'on trouve notamment la croix (×) et le point (·) de multiplication, et bien d'autres choses qui concernent la classe de mathématiques. Et on a mentionné aussi la police MT-Extra (pour la cursive ℓ), tout en réservant le sort que l'on sait à la police Ducahier.

h) Dans cette même *séance 5*, on a évoqué l'Espar que l'on trouve à l'adresse http://www.aix-mrs.iufm.fr/espar/.

i) Lors de la *séance 6*, à propos toujours de l'étude statistique sur le rejet ou l'acceptation de certains comportement d'élèves, on a travaillé explicitement ou implicitement sur les types de tâches suivants, qui devraient donc être maîtrisés :

– trier un tableau selon une colonne ou selon plusieurs colonnes ;

– transformer une colonne (à contenus numériques) en texte afin de bâtir un diagramme « express » de la série statistique correspondante, diagramme « en bâtons » sur lequel on pratique ensuite, éventuellement, un regroupement en classes ;

– coller un tableau Word dans une feuille Excel afin d'effectuer un certain calcul ;

– effectuer un calcul sous Excel pour chacune des lignes d'un tableau donné.

4.3. Les « compétences » retenues par le projet de circulaire ministérielle ne sauraient renvoyer, dans l'actuel des choses, à des ensembles précis de types de problèmes (lesquels deviendront ensuite simplement, pour nous, des types de tâches). Il appartient en effet aux professions concernées de préciser leurs besoins en la matière, dans la mesure où ces besoins naissent d'une pratique relativement méconnue, notamment parce lorsqu'elle est innovante, du métier. Cet effort d'identification des types de tâches les plus utiles aux professeurs de mathématiques sera accompli au sein de la formation essentiellement en Séminaire le mardi matin et en GFP le mardi après-midi, d'une part, et d'autre part dans le cadre *de l'activité professionnelle propre* à chacun des participants au Séminaire : loin de se contenter de soumettre des « réalisations » à la validation de l'équipe de formateurs, chacun devra d'abord préciser les *types de problèmes* rencontrés – dont on montrera alors, mais alors seulement, comment on a su les résoudre dans le cas de tel ou tel spécimen.

a) On donne ici un exemple très simple. Un professeur de mathématiques qui utilise le logiciel Géoplan souhaite imprimer un triangle de côtés BC = 7,5, CA = 9,1, AB = 10,9 : par la formule

$$m_{\mathrm{A}}{}^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

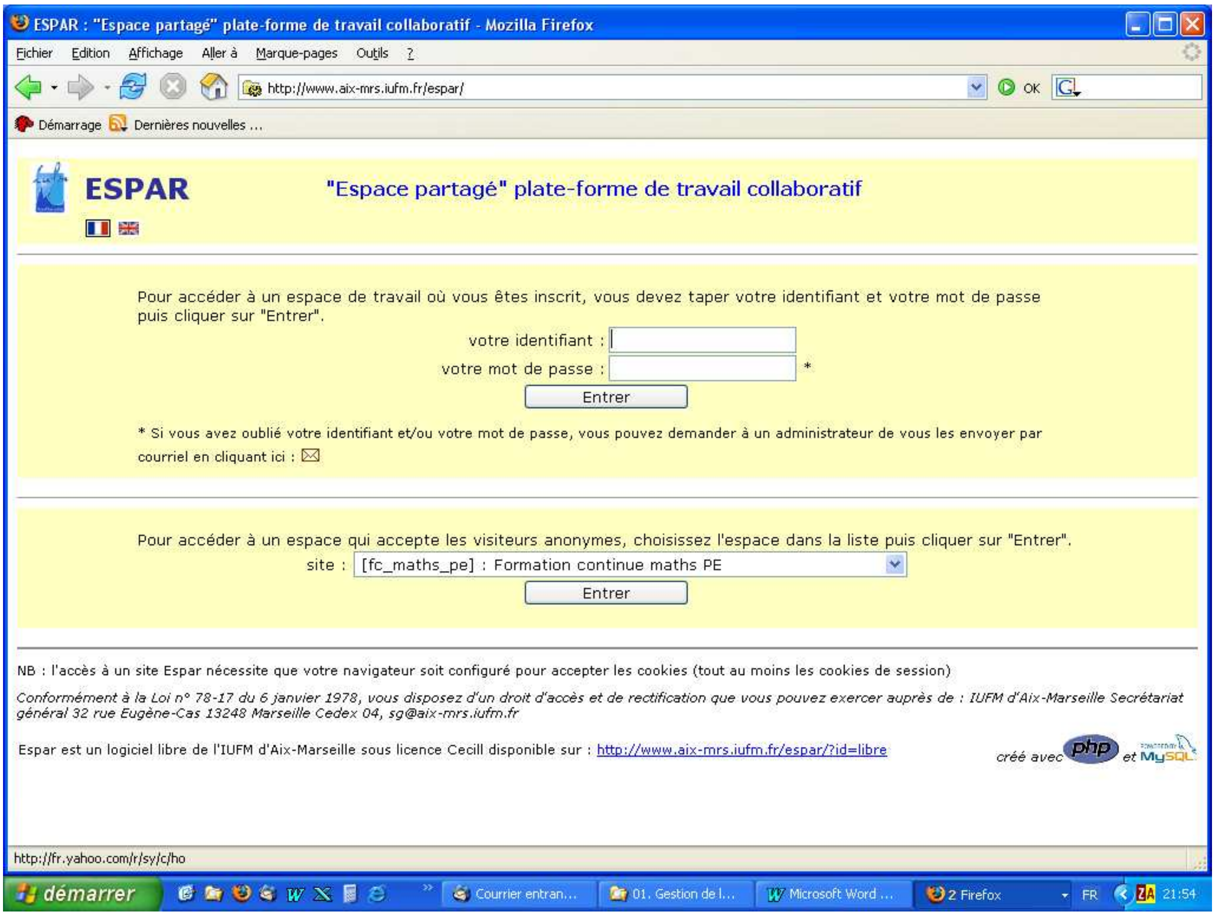
où m_{A} désigne la longueur de la médiane et a, b, c ont le sens habituel, il a en effet calculé que l'on aurait alors $m_{\mathrm{A}} \approx 6{,}3$. Il s'aperçoit à ce moment-là qu'il n'a jusqu'ici jamais fait imprimer une figure obtenue avec Géoplan *en vraie grandeur*. Comment faire ? Dans cet épisode de travail, ce professeur rencontre deux choses précieuses :

– un type de tâches (encore) *problématique* (pour lui) ;

– une *question Q* : comment réaliser les tâches de ce type ?

b) En l'espèce, la réponse *R* est assez facile à trouver : dans **Editer**, choisir **Copier image (copie ajustée)** ; là, choisir pour « Unité de référence » l'entrée **unité de longueur Uoxy**, puis, pour « Nombre de millimètres de l'unité », **10** ; et lancer l'impression. Mais ce qui est important n'est pas seulement de proposer tel ou tel type de tâches : c'est de montrer en quoi il peut être *didactiquement utile* au professeur et/ou à la classe, question dans laquelle on n'entrera pas plus avant ici, mais qui constitue l'horizon de notre travail.

4.4. ***L'accès aux portfolios*** est maintenant possible – sauf difficulté particulière (par exemple à cause d'une orthographe fautive du nom usité comme identifiant) : il est donc possible d'y déposer ce qui est requis aux échéances indiquées (entre le 1er décembre et le 15 février).



a) Pour mieux comprendre le système adopté, il n'est pas inutile de s'arrêter sur le *mot* de *portfolio* et sur ce à quoi il renvoie. Le mot nous vient de la langue anglaise – qui elle-même l'a emprunté autrefois à l'italien, ainsi que le rappelle le *Online Etymology Dictionary* :

> 1722, from It. *portafoglio* "a case for carrying loose papers," from *porta*, imperative of *portare* "to carry" (…) + *foglio* "sheet, leaf," from L. *folium* (…). Meaning "collection of securities held" is from 1930.

1) Le volume 2 (*English-French*) du *Dictionnaire Cambridge Klett Compact* propose les traductions suivantes :

> **Definition**
> **portfolio** 1. (case) *serviette* f 2. (examples of drawings, designs) *portfolio* m 3. FIN, POL *portefeuille* m

2) Le sens utilisé lorsqu'on parle de *portfolio* dans le C2i2e dérive, par généralisation, du sens 2 : le mot de portfolio est en fait depuis longtemps utilisé en français en ce sens dans le monde des arts plastiques (au sens large). Mais cette acception comporte une ambiguïté

classique : le portfolio, qui est d'abord un contenant, désigne aussi le contenu, comme il en va lorsqu'un membre du jury d'entrée dans une école d'art dit à un candidat : « J'ai aimé votre portfolio, il contient beaucoup de bonnes choses… » Mais la référence au *contenu* est parfois gommée dans les dictionnaires, comme dans le *One Look Dictionary*, où on lit ceci :

Quick definitions (*portfolio*)
• ***noun***: the role of the head of a government department (Example: *"He holds the portfolio for foreign affairs"*)
• ***noun***: a case for carrying papers or drawings or maps; usually leather
• ***noun***: a list of the financial assets held by an individual or a bank or other financial institution

En revanche, le *Compact Oxford English Dictionary of Current English* est, lui, explicite :

Portfolio
• noun (pl. *portfolios*) 1 a thin, flat case for carrying drawings, maps, etc. 2 a set of pieces of creative work intended to demonstrate a person's ability. 3 a range of investments held. 4 the position and duties of a Minister or Secretary of State.

On lit de même dans l'édition 2000 de *The American Heritage Dictionary of the English Language* les précisions suivantes, où pourtant, typiquement, l'acception 1 (a & b) se trouve encore limitée au domaine de l'art :

1a. A portable case for holding material, such as loose papers, photographs, or drawings. b. The materials collected in such a case, especially when representative of a person's work: a photographer's portfolio; an artist's portfolio of drawings. 2. The office or post of a cabinet member or minister of state. 3. A group of investments held by an investor, investment company, or financial institution.

b) Il s'est développé depuis vingt ans aux Etats-Unis et au Canada (anglophone et francophone) une « pédagogie du portfolio » dont les portfolios du C2i2e ne sont que l'un des avatars. Pour fournir un point de départ, on a reproduit ci-après la présentation de la notion de portfolio que propose un « Centre d'expertise pédagogique » québécois sur son site Internet (http://cep.cyberscol.qc.ca/ressources/guides/ev_portfolio.html).

Le portfolio

Qu'est-ce qu'un portfolio ?

Dans la mesure où le portfolio est un outil d'évaluation, on peut dire qu'il s'agit d'un ensemble de pièces, accompagnées d'indications et de commentaires structurés, choisies par l'élève et la personne enseignante, dans le but de démontrer le développement des compétences de l'élève.

Selon une autre définition, seul l'élève sélectionne les pièces à insérer dans le portfolio et on y met seulement les meilleures productions. Dans ce cas-ci, le portfolio ne sert pas à l'évaluation, mais bien de dossier de présentation comme le portfolio de l'artiste.

L'utilisation du portfolio en éducation

Le portfolio en éducation sert à archiver des productions d'élèves afin de rendre compte du niveau de développement de leurs compétences. En ce sens, il est un outil presque indispensable à la réforme de l'éducation.

Le portfolio peut être utilisé à différentes fins. Il peut être un outil servant davantage à l'élève. Ce dernier y met ses pièces préférées pour démontrer ce qu'il peut accomplir. Ce type de portfolio se nomme souvent Dossier de présentation et se rapproche du portfolio de l'artiste.

Lorsque le portfolio sert à témoigner de l'évolution de l'élève, il contient des pièces de niveaux différents et pas seulement les meilleures. L'élève et la personne enseignante choisissent le contenu. Dans ce cas, on le nomme Dossier d'apprentissage.

Le portfolio peut également servir à faire le bilan des apprentissages. Il contient alors des pièces choisies par l'enseignant.

Le contenu du portfolio

Les pièces choisies pour mettre dans le portfolio peuvent varier:

- L'ensemble des cahiers de l'élève complétés pour chaque projet.
- Une photo de l'élève en présentation orale.
- Un texte écrit.
- Une photo de présentation artistique ; une maquette, un collage, une sculpture, etc.
- Des travaux réalisés dans toutes les disciplines.
- Des évaluations, auto-évaluations et évaluation par les pairs.
- Des fiches d'exercices.
- Des réflexions.
- Des commentaires des enseignants de l'école.
- Des productions ou des photos de productions en musique, en éducation physique, en anglais, etc.

Ce qui importe c'est que les pièces choisies soient cohérentes avec l'objectif du portfolio. Si ce dernier doit permettre de montrer l'évolution de l'élève, il sera important de choisir plusieurs pièces de même nature afin de permettre la comparaison.

Les « raisons d'être » des pièces à mettre dans le portfolio

Chaque élément placé dans le portfolio devrait avoir sa raison d'être. Généralement, on demande aux élèves d'accompagner chaque pièce de « sa raison d'être ». Pour les petits, ces raisons seront illustrées; plus les élèves sont âgés, plus il est possible d'exiger des explications écrites accompagnant les travaux.

Voici quelques exemples de « raisons d'être » :

- Je suis fier de ce travail.
- C'est le meilleur travail que j'ai fait jusqu'à présent.
- C'était très difficile, mais j'y suis arrivé.
- Mon prof me l'a demandé.
- Mes parents me l'ont demandé.
- C'est la première fois que je fais ce genre de chose.
- J'ai aimé faire ce travail
- Je me suis améliorée.

Avec les plus petits, il sera important de limiter les raisons d'être possibles et de les accompagner d'images. Le choix des raisons d'être et des images pour les représenter devrait être fait avec les enfants afin qu'elles soient le plus significatives possible.

Lorsque l'occasion se présente, la personne enseignante peut questionner les élèves et noter les éléments pertinents sur le portfolio. Idéalement, quelques périodes d'échange avec chaque élève seront prévues pour favoriser la réflexion.

Quelques questions à se poser

Les questions suivantes portent sur les décisions à prendre concernant l'utilisation du portfolio. La personne enseignante peut prendre ses décisions seule ou de concert avec les élèves, afin de favoriser leur engagement dans ce processus. La personne enseignante doit, de préférence, répondre elle-même à certaines questions; elles sont identifiées par (PE).

Quel type de portfolio désirons-nous ? (PE)

D'abord, il faudra savoir à quoi servira le portfolio. Est-ce qu'il s'agit d'un portfolio de présentation, un portfolio d'apprentissage ou un bilan des apprentissages ? C'est possible que le portfolio qui convienne remplisse plusieurs fonctions à la fois.

Quel type de pièces faudra-il placer dans le portfolio ? (PE)

• Est-ce qu'on limite les disciplines ? (un portfolio en art et en français ?) Plus la personne enseignante travaille par projets, plus il sera difficile de séparer les disciplines.

• Est-ce qu'on accepte des photos ou seulement les productions qui entrent dans le format de portfolio?

• Est-ce qu'on y insère seulement les meilleures pièces de chaque élève? Les productions qui ont été difficiles à réaliser ? Est-ce qu'on y met seulement les évaluations? Etc.

Différentes pièces peuvent être mises dans le portfolio, mais s'il doit servir de bilan des apprentissage, il sera important que des pièces de même nature y soient conservées pour être en mesure d'observer l'évolution.

Qui aura accès au portfolio ?

• Est-ce que les parents auront accès au portfolio sur demande ? Systématiquement ? Seulement à la fin de l'année ?

• Est-ce que les spécialistes peuvent aussi participer au portfolio ?

Qui choisira les pièces à mettre dans le portfolio ? (PE)

• Est-ce que l'élève peut mettre les éléments de son choix ?

• Est-ce que l'enseignant peut exiger ou mettre des éléments dans le portfolio ?

Quel format prendra le portfolio ?

• Le portfolio prendra la forme d'une boîte, d'un cartable, d'une mallette ? Il sera fait de cartons, de grandes feuilles ? Quel sera son format ?

• Comment sera t-il organisé ? Est-ce que je vais le séparer en étapes, en matières, en « raisons d'être » ?

• Est-ce que je préfère un portfolio électronique ?

• Est-ce que le tout sera numéroté ?

• Est-ce qu'il y aura une table des matières ?

Attention au format du portfolio. Si vous décidez que les élèves pourront amener le portfolio à la maison pour le montrer aux parents, il devra être facile à transporter. Par ailleurs, il ne devrait pas être plus grand que l'espace de travail des élèves afin d'en faciliter l'utilisation.

Si vous avez prévu que les élèves y déposeront un nombre illimité de pièces, il faudra également prévoir un portfolio extensible qui permet l'ajout de pages.

Les portfolio devra contenir une table des matières différente selon les élèves. Il suffit de laisser quelques pages blanches au début du portfolio et les élèves y inscriront les pièces qu'il contient. Il sera alors plus facile pour l'élève et la personne enseignante de repérer les éléments désirés.

À quelle fréquence faut-il mettre des pièces dans le portfolio ?

• Est-ce que j'exige une pièce par jour ? Quelques pièces par semaine ?

• Est-ce que l'élève est entièrement libre de mettre ou de ne pas mettre des pièces dans son portfolio ?

Il faut réfléchir à la grosseur du portfolio. Si vous avez prévu un cahier contenant 50 pages, il faudra limiter le nombre de pièces du portfolio et cibler davantage ce qui sera conservé.

La gestion quotidienne s'avère parfois lourde et il n'y a pas forcément quelque chose à mettre dans le portfolio à tous les jours. Il est donc préférable de gérer le portfolio à toutes les semaines.

Est-ce que les parents participent au portfolio ?

• Est-ce que l'élève amène son portfolio à la maison sur une base régulière ?

• Est-ce que les parents commentent et notent leurs observations ?

• Est-ce que les parents notent les observations de leur choix ou si la personne enseignante propose des questions ?

Où placer les portfolios en classe ?

• Sont-ils accessibles en tout temps ?

• Est-ce que chaque élève conserve son portfolio ou bien on les met dans un endroit commun ?

• Est-ce que les élèves doivent demander la permission pour avoir leur portfolio ?

Est-ce qu'il y a des règles générales qui devront être connues par les élèves ?

- Tous les pièces du portfolio doivent être exemptes de fautes.
- Elles doivent être accompagnés de la raison d’être.
- Elles doivent être datées.
- Elles doivent être approuvées par la personne enseignante.
- Elles doivent être indexées.
- Le portfolio doit être propre.
- Etc.

c) L’idée de portfolio est relativement étrangère à la culture actuelle des professeurs français. Dans un portfolio, une personne – qui peut être une petite personne de 8 ans, une jeune personne de 18 ans ou une vieille personne de 28 ans… – réunit des « productions » relevant d’un certain domaine d’activité et qui témoignent de son activité propre en ce domaine. Ces *“pieces of creative work”*, pour parler comme l’un des dictionnaires consultés, ne sont pas nécessairement les « meilleures productions » de l’auteur du portfolio mais un ensemble significatif d’« œuvres » témoignant de son inscription subjective dans le domaine d’activité concerné – les mathématiques, la fiction littéraire, la photographie, les TIC, etc. Il y a là, par rapport tout à la fois à la situation de *test* (DS, examen, etc.) ou même de *projet* (TER, thèse, etc.), une spécificité sur laquelle on reviendra.

d) La description précédente renvoie davantage à l’idée de « portfolio d’artiste » – même si elle a pour finalité institutionnelle une validation (comme il en va, de fait, avec le portfolio demandé en relation avec le C2i2e). La forte contextualisation du portfolio – son contenu dépend des singularités de l’activité contextualisée de son auteur (en tel collège ou tel lycée, avec telle classe, dans tel environnement concret de travail, en telle dynamique d’enseignement-apprentissage) – fait qu’on ne peut guère « copier » un portfolio, pas plus qu’on ne peut en produire à la chaîne. Les traces de cette contextualisation dans les œuvres qu’il contient sont d’ailleurs un signe certain de son authenticité subjective : on s’efforcera donc, non de gommer ces traces, mais de les énoncer, de les commenter et, dans la mesure du possible, de les expliquer.

e) Les remarques qui précèdent n’enlèvent rien, toutefois, à un principe très général : la production soumise à évaluation n’étant pas élaborée *in praesentia*, un contrôle même minimal est de mise (à l’instar du mini-contrôle d’un DM, ou de la soutenance orale d’un mémoire de thèse ou de TER, etc.). Ce contrôle pourra s’exercer ici sous la forme d’une question d’explicitation relative à telle pièce de son portfolio posée au candidat lors de son interrogation par le jury d’évaluation des enseignements.

f) En vue de poursuivre le travail amorcé plus haut sur la notion de portfolio, on pourra *par exemple* visiter les pages Internet suivantes :

- http://www.freinet.org/ne/116/encart116-pdf.pdf#search='qu'estce%20qu'un%20portfolio'
- http://www.caslt.org/research/portfolio3.htm
- http://www.sandiego.gov/public-library/pctech/tech/students/port/1.shtml#topic
- http://www.mehs.educ.state.ak.us/portfolios/

On pourra aussi faire *sa propre recherche* sur le sujet.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 8 : mardi 15 novembre 2005

➔ **Matin** : 0. Questions de la semaine // 1. Observation & analyse // 2. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques.

➔ **Après-midi** (explicitation) : 3. Forum aléatoire // 4. Des questions à revisiter ? // 5. Forum des questions : exposés à venir // 6. Une nouvelle notice.

Matin

1. Observation & analyse

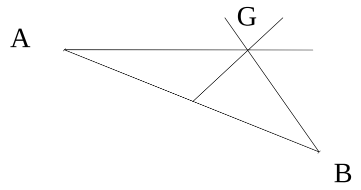
1.1. Une séance en 4^{e}

a) On examine ici les paragraphes 5, 6, 7 du compte rendu de la séance en 4^{e} intitulée *À propos des médianes d'un triangle*.

Paragraphe 5, 6, 7

L'élève qui avait lu l'énoncé intervient spontanément : « On n'a pas toutes les données !… » Il est 14 h 12. Murmures de travail.

P : « Qui a une idée ? » Un élève, qu'elle envoie au tableau, dit qu'on peut construire les trois médianes – contrairement à ce qu'affirment certains, souligne P.



L'élève au tableau met en place le milieu de [AB]. P conteste sa manière de faire ; il recommence, cette fois correctement, mais il est gêné par le bas du tableau, trop proche de son dessin…

Structure et contenu de la séance

SC567-1. L'épisode consiste en une recherche sur la manière de construire les médianes d'un triangle dont on connaît deux sommets et le centre de gravité.

SC567-2. Dans le cadre de l'élaboration d'une technique idoine, le compte rendu montre également un sous-épisode furtif relatif à la détermination graphique (à l'aide des instruments usuels : règle, compas, etc.) du milieu d'un segment donné.

Organisation mathématique

OM567-1. L'organisation mathématique ponctuelle qui émerge, $[T_{me/\{A,\ B,\ G\}}/\tau_{me/\{A,\ B,\ G\}}/\theta/\Theta]$, semble suggérée plutôt qu'explicitée. En particulier, le résultat technologique clé mis en jeu n'est pas nettement formulé :

$\theta_{me/\{A,\ B,\ G\}}$. La droite support de la médiane issue d'un sommet peut être déterminé de deux façons (outre sa définition usuelle comme droite passant par ce sommet et par le milieu du côté opposé) : comme la droite passant par le sommet considéré et par le centre de gravité, ou comme la droite passant par le milieu du côté opposé et par le centre de gravité.

Ce résultat se déduit du concours des médianes au centre de gravité ; mais cette déduction semble elle-même être tenue pour aller de soi.

OM567-2. S'agissant de la technique τ_M relative au type de tâches T_M de détermination graphique du milieu d'un segment donné, P intervient pour rectifier une manière de faire qu'elle juge inadéquate. Le compte rendu ne dit rien ni sur cette inéquation, ni sur ce qui fonde, au plan de la technologie, la « bonne » manière de faire à laquelle P ramène l'élève. Il ne précise pas davantage τ_M elle-même. On peut donc écrire ainsi *l'organisation mathématique ponctuelle* constituée autour du « point » que constitue l'unique type de tâches T_M : $[T_M/\tau_M/\theta/\Theta]$.

Organisation didactique

OD567-1. Selon un style de conduite assez classique (mais dont on peut questionner la pertinence vis-à-vis des apprentissages), P ne prend en compte que les apports des élèves qui font avancer sans pauses ni digressions apparentes vers le but qu'elle vise. Il est remarquable que l'intervention du lecteur de l'énoncé (« On n'a pas toutes les données !… ») ne rencontre ainsi aucun écho, alors même qu'elle est l'indice d'une interrogation (les données sont-elles suffisantes ?) ou plus exactement d'un doute confinant à la certitude (on ne dispose pas de toutes les données indispensables) qui donne pourtant tout son prix à la solution qui va être trouvée. (On peut gager que, à l'état isolé – comme il en va dans le cadre d'un DS –, cet élève arrêterait là sa recherche, pour un motif laissé ici indiscuté et jugé par lui, conséquemment, comme indiscutable.)

OD567-2. D'autres apports sont au contraire intégrés – sans plus de discussion – à la construction collective que P impulse et régule. Ainsi en va-t-il pour la mise en place de la technique $\tau_{me/\{A,\ B,\ G\}}$, proposée par l'élève envoyé au tableau par P. L'épisode relève du *moment de l'émergence de la technique*, ce moment se réalisant, ici, par une interaction minimaliste de P avec l'élève proposant, *sans place faite à « la classe »*.

OD567-3. Le sous-épisode relatif à T_M relève tout à la fois du moment du *travail de la technique* τ_M et d'une reprise du moment de l'*institutionnalisation* – qui porte sélectivement, et de façon apparemment autoritaire (« Pas comme ça ! Comme ça ! », semble dire P), sur la technique « officielle » τ_M, non sur sa technologie (notée plus haut θ).

Gestion de la séance

GS567-1. Le choix sélectif qu'opère P parmi les apports plus ou moins spontanés des élèves est sans doute surdéterminé par une volonté de gérer de façon parcimonieuse le temps d'horloge pour construire du temps didactique. S'il est inutile de souligner l'intérêt d'une telle gestion, on doit répéter que le réglage optimal du temps didactique doit prendre en compte, non seulement le temps *de l'horloge*, mais aussi le temps (moyen) *de l'apprentissage*.

GS567-2. Dans cette logique temporelle « triphasée », la dépense engagée à propos de τ_M mérite d'être soulignée : le contraste est frappant, ici, entre l'attention portée à l'institutionnalisation de

τ_M – mais non, il est vrai, à celle de θ_M – et la hâte avec laquelle est géré l'« accouchement » qui donne naissance à la technique $\tau_{me/\{\mathrm{A, B, G}\}}$, pourtant radicalement *neuve* dans la classe.

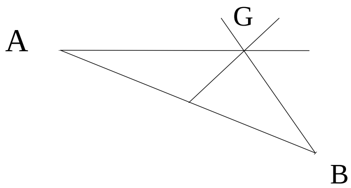
---

b) On se penche maintenant sur certains aspects des travaux réalisés lors de la séance 6 en réponse à la consigne de rédiger une analyse (partielle) du passage du compte rendu d'observation en 4e reproduit ci-après, en précisant au moins une indication relevant de chacune des quatre rubriques habituelles : 1. *Structure et contenu* ; 2. *Organisation mathématique* ; 3. *Organisation didactique* ; 4. *Gestion de la séance*.

[Paragraphes 5 à 10]

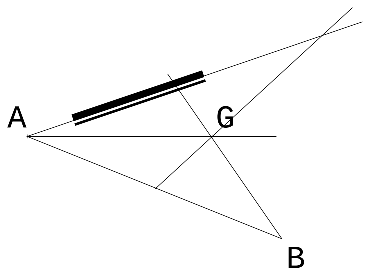
[5] L'élève qui avait lu l'énoncé intervient spontanément : « On n'a pas toutes les données !… » Il est 14 h 12. Murmures de travail.

[6] P : « Qui a une idée ? » Un élève, qu'elle envoie au tableau, dit qu'on peut construire les trois médianes – contrairement à ce qu'affirment certains, souligne P.



[7] L'élève au tableau met en place le milieu de [AB]. P conteste sa manière de faire ; il recommence, cette fois correctement, mais il est gêné par le bas du tableau, trop proche de son dessin…

[8] Il est 14 h 18. « Voilà ! Ça devrait être bon ! » P souligne qu'on a ainsi la 3e médiane, bien qu'on n'ait pas le point C. « Comment construire le point C ? » Plusieurs doigts se lèvent. C est sur la médiane, mais où ? L'idée s'exprime de faire glisser la règle pour obtenir approximativement la situation voulue…



[9] P : « Il faudrait qu'on sache où se trouve le centre de gravité sur une médiane… » Une élève : « Au milieu ! » P fait observer qu'alors on aurait C facilement. On laisse de côté le problème, indique-t-elle, on y reviendra.

[10] On passe à l'étude de la position du centre de gravité de G sur les médianes. P a fait la figure au tableau, sur le quadrillage peint. Les élèves sont invités à travailler sur la feuille distribuée, qui porte deux exemples. P leur montre comment placer le milieu à l'aide du quadrillage. Il est 14 h 24.

1) Parmi les 28 fiches élaborées, 8 étaient l'œuvre de personnes seules, 17 de binômes, 3 de trinômes, ce qui représente le travail des 51 participants présents cette séance-là. Dans ce qui suit, on examine en priorité les indications qui sont l'indice d'éventuels malentendus, en commençant par la première rubrique.

2) La rubrique *Structure et contenu* doit mentionner certainement que la structure didactique de l'épisode considéré est celle d'un fragment d'*AER* : ce n'est pas, par exemple, un fragment de *synthèse*, etc. En revanche, ce qui est fort peu noté, c'est que l'épisode se scinde assez

nettement en trois sous-épisodes (d'étude et de recherche) : le premier correspond aux paragraphes 5, 6, 7 ; le deuxième, aux paragraphes 8 et 9 ; le troisième, au paragraphe 10. Le premier sous-épisode a pour *contenu* la recherche (réussie) d'une technique relative au type de tâches $T_{me/\{A, B, G\}}$. Le deuxième sous-épisode a pour *contenu* le retour à la recherche (avortée) d'une technique relative au type de tâches $T_{?C}$. Le troisième sous-épisode a pour *contenu* le lancement d'une recherche relative au type de tâches qu'on notera $T_{G/me}$: « Placer sur la médiane d'un triangle le centre de gravité de ce triangle. »

3) Mais la description précédente est sans doute trop détaillée (par rapport à la longueur relative du passage à analyser). La rubrique *Structure et contenu* n'impose pas, *ici*, que l'on entre dans un si grand détail. En l'espèce, on pouvait se contenter d'indiquer *par exemple* ceci :

> L'épisode de classe, d'une durée de 12 minutes, est consacré à une *activité d'étude et de recherche* qui, à propos *des médianes et du centre de gravité d'un triangle*, porte successivement sur *trois* types de tâches pour lesquels il s'agit chaque fois d'élaborer une technique. Dans le premier cas, l'objectif est atteint ; dans le deuxième cas, il est rapidement laissé de côté ; dans le troisième cas, l'épisode se limite à l'amorçage de la recherche.

4) La présentation faite sous la rubrique *Structure et contenu* doit ramener le passage analysée à ses lignes essentielles. Même si cela peut sembler parfois un peu maladroit du point de vue de *l'ordre d'exposition*, tout ce qu'on peut être tenté d'ajouter à cette première rubrique peut, en règle générale, être préférentiellement recensé sous l'une des trois autres rubriques – qui sont le lieu véritable de *l'analyse didactique* à laquelle on doit procéder. Ainsi en va-t-il par exemple de cette description indiquant que, « à l'aide d'un quadrillage, on cherche à conjecturer, par le tracé des médianes dans deux triangles, la place du centre de gravité sur les médianes » : cette notation, en effet, relèverait plutôt de la rubrique *Organisation didactique*, dans la mesure où l'accent y est placé sur l'étude d'un problème et – surtout – sur la *technique d'étude* mise en œuvre (utilisation d'un quadrillage, etc.). Il en va même ainsi, à la limite, de l'affirmation selon laquelle « il s'agit de construire le troisième sommet à partir des deux premiers et du centre de gravité » : pour « dégraisser » la rubrique *Structure et contenu*, on pourra réserver cette notation à la rubrique *Organisation mathématique*, du moins si on la reformule ainsi par exemple :

> L'organisation mathématique qui émerge dans ce passage se met en place en partant du type de tâches $T_{me/\{A, B, G\}}$: « Construire les médianes d'un triangle dont on connaît deux sommets et le centre de gravité. »

5) Les remarques précédentes ont trait à ce qu'on peut appeler, plus généralement, la *« tentation narrative »*, soit la propension à simplement *raconter l'épisode* au lieu de le ramener à ses lignes de force. C'est à cette tentation que succombent – entre autres – les auteurs d'une fiche dont la rubrique *Structure et contenu* se réduit en l'espèce à ceci : « Elle pose la question "Qui a une idée ?". Elle lance le débat. Un élève passe au tableau pour placer le milieu d'un segment. Enfin, elle donne l'outil pour résoudre le problème. C'est une séance sur les médianes d'un triangle. »

6) Le travail de « stylisation » (mathématique et didactique) qu'appelle la première rubrique n'est certes pas facile et recèle quelques pièges. La présentation suivante de la structure et du contenu de l'épisode examiné paraît *a priori* conforme aux indications données jusqu'ici : « AER ayant pour objectif de savoir situer le centre de gravité sur une médiane ». Mais cette présentation de la séance pose pourtant problème. Par sa concision d'abord : elle ne mentionne rien quant à la structure de l'épisode, avec ses trois temps relativement distincts.

Mais elle fait problème aussi *par excès*, en avançant une interprétation au moins trop précoce : dire que l'objectif est « de savoir situer le centre de gravité sur une médiane », c'est, en effet, raconter l'épisode selon les canons d'une certaine histoire officielle, qui privilégie le résultat relatif à la position du centre de gravité et ignore ce qui, ici, motive – ou est censé motiver – l'intérêt pour ce résultat : la résolution du problème posé par le type de tâches $T_{?C}$.

7) De façon générale, l'effort à poursuivre doit viser à se dégager de la tendance à donner une présentation qui prétende aller à l'essentiel et qui, en cela, tende à clore l'« analyse », pour situer cette présentation comme le point de départ d'un déploiement de l'analyse à travers les trois autres rubriques – celle de l'organisation mathématique, celle de l'organisation didactique, celle de la gestion de la séance. Pour faire mieux, il est nécessaire, ici, de voir, de démêler, de commenter, ce que le professeur est trop souvent réduit à vivre sans pouvoir l'analyser.

1.2. Une séance en 3^e^

Présentation rapide d'un compte rendu d'une séance dans une classe de 3^e^ : ***Calculer avec des radicaux***.

2. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques

2.1. On poursuit l'examen de la notice *Éducation mathématique & citoyenneté* à partir de la sous-section 4.4 et jusqu'à la sous-section 5.5 exclue.

2.2. Introduction à la notion de ***raison d'être***.

Après-midi

Séance d'explicitation

3. Forum aléatoire

3.1. On considère les questions des séances 5, 6 et 7. Les triplets de questions émanant de *quelques* participants parmi les 53 généralement présents font ci-après l'objet d'un examen rapide. Ces participants sont tirés au sort (à l'aide de http://www.randomizer.org/form.htm) : les nombres tirés sont, en l'espèce, 2, 22, 48, 40, 13.

3.2. Le numéro 2 dans la liste des 53 participants, est *MB* (CR, 4^e^ + 4^e^ partagée).

a) Sa question 5 est la suivante :

> Lors d'un contrôle important (un des deux DS du trimestre), quelle procédure doit-on mettre en place lorsque les élèves sont absents ?

Il s'agit là d'une question déjà travaillée, sur laquelle on ne s'arrête donc pas davantage.

b) La question 6 est reproduite ci-après :

Faut-il donner à faire un travail important aux élèves pendant les vacances scolaires ?

Réponse express. *– La réponse est essentiellement* négative *: il ne faut pas donner aux élèves un « travail de vacances » qui prétende* faire avancer le temps didactique, *même si l'on peut – et si l'on doit, en règle générale – proposer un travail de bilan, d'inventaire de ce qui a été fait, de ce que l'on sait faire, etc.*

c) La question 7 de MB est la suivante :

Lors du stage de pratique accompagnée, peut-on prendre la classe lors de deux séances séparées avec deux classes de niveaux différents (1re ES et TS par exemple) ?

Réponse express. *– La réponse est, ici, essentiellement* positive *: l'intervention, dans le cadre du SPA, en deux classes différentes (par exemple une première ES et une terminale L) ne saurait être déconseillée, à moins que des conditions particulières ne s'y opposent (par exemple si le professeur d'accueil estime inapproprié de perturber par une intervention extérieure ponctuelle une classe qui traverserait une période critique).*

3.3. Le numéro 22 est celui attribué à *FE* (MJ, 5e)

a) Sa question 5 est la suivante.

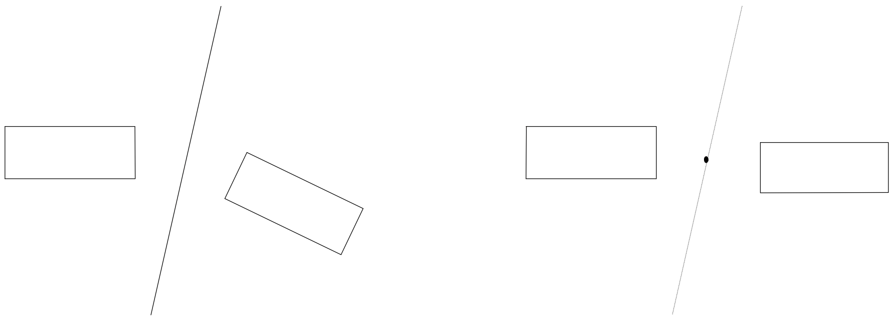
Comment introduire en pratique les PER pour que les élèves en aient conscience ?

Réponse express. *– Le premier obstacle tint à ce que les élèves n'ont jamais eu à faire de PER, du moins consciemment. On travaillait autrefois – en 4e – sur les problèmes « de plus courte distance » : l'affrontement répété, au fil de l'année, avec de tels problèmes ressemblait dans une certaine mesure à un PER, la conscience (institutionnelle) de la chose en moins. Mais cette manière de faire s'est très largement perdue : aujourd'hui, l'habitude a été prise de se limiter à l'étude de problèmes* isolés, *pris l'un après l'autre, selon un processus de style « markovien », où ce que l'on a fait avant ne compte guère pour ce que l'on fera demain – situation qui rend en apparence sans utilité la mémoire du vécu mathématique accumulé. La pratique des PER vise, par contraste, à redonner sa place à une culture plus authentique du point de vue de la vie mathématique : tout scientifique qui travaille en un domaine donné bénéficie rapidement de la connaissance de tout un ensemble de situations du domaine qui l'aide à se repérer face à un problème neuf – ne serait-ce qu'en le lui faisant apparaître, le cas échéant, comme très différent de ce qu'il aura rencontré jusque-là, et donc appelant l'invention (ou la mobilisation) d'un outillage partiellement inédit. Comment faire alors pour que les élèves aient conscience de ce rapport nouveau à la connaissance ? La chose ne peut se faire à coût nul ou quasi nul : la mise en place d'un premier PER – par exemple relatif au calcul sur les nombres qui s'écrivent avec « beaucoup » de chiffres, ou encore sur la reconstitution de figures géométriques dont certains éléments ont été effacés – et la familiarisation même avec l'*idée *de PER ne sauraient être instantanées : elles appellent une attention et des soins idoines, qui devront permettre que tout une culture se construise. Mais cette culture deviendra très vite le meilleur soutien de l'action du professeur* et du travail de la classe, *dans la mesure où elle tordra le cou à l'illusion – et à la réalité en laquelle cette illusion se concrétise souvent – que l'on doit chaque jour « repartir de zéro ». Bien entendu, la formulation même du sujet d'un PER pourra troubler les élèves : de quelles « figures » parle-t-on, par exemple, dans le PER déjà évoqué, là où les élèves s'attendent à voir mentionné, comme cela a toujours été fait, un type « standard » de figures (cercles, parallélogrammes, etc.) ? Dans ce contexte, il est essentiel de choisir un cheminement approprié : en l'espèce, on pourra par exemple partir du problème consistant à retrouver le sommet C d'un triangle ABC dont on connaît seulement les sommets A et B et le centre du cercle inscrit ; puis on passera au cas où l'on connaît A et B et l'orthocentre, avant d'arriver plus tard au cas que l'on a vu une classe de 4e étudier – cas auquel il serait sans doute hasardé de confronter la classe d'emblée, sans plus de préparation.*

b) La question 6 est reproduite ci-après :

Lors d'un DM sur des constructions de symétriques de figures par rapport à un point sur papier blanc et quadrillé, trois élèves (sur 29) font des pseudo-symétries axiales (après deux semaines sur la symétrie centrale). Sachant qu'il n'y a pas de SDA de prévu, comment ne pas laisser à la marge ces élèves ?

Réponse express. *– D'une façon générale, il n'est facile pour personne de tracer « à main levée », donc par simple inspection visuelle, le symétrique d'une figure même simple dès lors que l'axe de symétrie n'est pas « vertical » (voir ci-dessous, à gauche). L'« intuition » (le latin* intuitus, *qui signifie « coup d'œil, regard ») du tracé du symétrique* par rapport à un point *ne va pas davantage de soi (ci-dessous, à droite).*



Par rapport au problème posé, deux ordres de considérations doivent être solidairement engagées. D'une part, il est vraisemblable que le comportement des élèves évoqués – qui en restent à l'impression visuelle en dépit du travail accompli (en principe) en 6^e et du travail récemment effectué en 5^e – fait symptôme, dans le sens d'une difficulté à accepter de quitter le temps de l'enfance, marqué par la prévalence de l'abord visuel des figures géométriques. Il est de ce point de vue hors de question de les enfermer dans cette difficulté à grandir par une commisération « puérocentrée » : il convient au contraire de leur signifier qu'ils font partie d'un groupe qui avance, tant dans le savoir que dans les années (les deux apparaissent ici consubstantiels). D'autre part, au plan didactique, il faut aménager – ou réaménager – les tâches proposées de façon à en bannir la tyrannie de l'impression visuelle : problème d'ingénierie didactique que l'on laissera ouvert ici.

c) La question 7 de FE est la suivante :

Comment gérer un élève qui n'a pas rendu son DM, qui a « oublié » l'heure de retenue dans laquelle il devait faire son DM (heure de retenue qu'il a obtenue après avoir eu une deuxième chance pour rendre son DM) ? Il est prévu dans l'établissement que cette heure de retenue soit reportée, mais je ne peux pas attendre davantage pour rendre et corriger ce DM…

Réponse express. *– Cet élève, l'un des trois de la question précédente, accumule les symptômes autour du refus des exigences de l'école : il est possible, on l'a dit, que s'exprime en cela un refus corrélatif de la difficulté à quitter l'enfance. En ce cas, la réponse ne saurait être apportée par le professeur de mathématiques seul : la situation doit être prise en charge de façon plus large et collective – par delà même l'équipe pédagogique de la classe. Ce principe ne retranche rien au fait que le professeur doit agir : mais il doit le faire en tant que professeur – non dupe des pièges de l'économie psychique. Ici, il convient de signifier à l'élève que la classe ne saurait l'attendre plus longtemps, et que le DM va donc être corrigé. Mais il faut lui signifier en même temps, pour espérer contribuer à le ramener « dans le troupeau », que cela ne le dispense en rien d'effectuer ce qui a été requis de tous et de chacun : un travail hors classe, qui, désormais, n'aura plus le même contenu que le DM non rendu, mais qui aura la même fonction didactique, c'est-à-dire qui devra jouer un rôle analogue dans la dynamique des apprentissages impulsés et régulés par le professeur.*

3.4. Le numéro 48 est celui de *RR* (OS, 4^e).

a) Sa question 5 est la suivante.

Que faire d’un élève qui ne souhaite pas travailler, au point de ne pas vouloir rendre le moindre travail (DM, DS, etc.) ? Jusqu’où aller au niveau des punitions ?

Réponse express. – *Redisons encore que le problème posé par cette élève doit faire l’objet d’un examen large, collectif, incluant certainement l’intervention du conseiller d’orientation-psychologue. L’action individuelle du professeur de mathématiques, qui doit renoncer à se croire aisément thaumaturge, est cependant essentielle, dans la mesure où elle participe – par le biais de la mise en fonctionnement ouvert des règles de vie et de travail de la classe – d’un effort de socialisation cognitive, didactique, scolaire des élèves. Cet effort, qui vient ici buter sur la problématique propre à l’élève évoquée, peut aussi, du même coup, faire évoluer cette problématique, à condition que le maniement du* topos *des élèves – et de cette élève-là en particulier –, au lieu de confirmer (de façon en général involontaire) la posture d’extériorité de l’élève, ne néglige aucune des possibilités normales de favoriser son retour au sein du groupe et son inclusion dans la vie intellectuelle et affective de la classe, et cela même au prix d’accepter de sa part un positionnement comportant une dose de singularité.*

b) La question 6 est reproduite ci-après :

Je structure les DS de telle sorte que les applications directes permettent d’obtenir entre 10 et 12 points (en comptant les points de présentation). Je propose ensuite des exercices plus complexes (mais pas trop quand même) pour compléter la note sur 20. Cette structure est-elle convenable ou doit-on se contenter de ne faire que des exercices « basiques » ?

Réponse express. – *Pour beaucoup de classes, sans doute, la structure de DS évoquée dans la question apparaît peu opportune. Un DS est un* contrôle, *qui doit viser à contrôler la maîtrise par les élèves de ce qui a été fait par la classe, et non de ce qui n’y a pas été fait. Le fait qu’on y propose des « exercices » – c’est-à-dire des problèmes relevant de types* bien travaillés par la classe *– est essentiel ; qu’ils soient « simples » (« basiques ») ou « plus complexes » ne se décide pas au moment de concevoir le DS, mais dépend des types de tâches étudiés (même si la proportion dans le DS des uns et des autres peut en effet varier). Si tel type de tâches étudié est complexe – c’est-à-dire suppose la mise en œuvre d’une technique dont l’exécution se découpent en plusieurs étapes successives –, un spécimen de ce type pourra figurer légitimement dans un contrôle en classe, sans excès quantitatif. Mais il faut se garder autant qu’il est possible de commettre une rupture de contrat – en tant qu’*évaluateur *– en proposant un problème d’un type non étudié, ou étudié seulement de façon très partielle – ce qui reviendrait à se décharger de sa responsabilité de* formateur. *Si une telle manœuvre peut apparaître flatteuse pour l’enseignant dans la mesure où elle donne de l’enseignement prodigué une image arrangée, elle est infidèle à la réalité vécue par les élèves et peut être désastreuse pour la classe. Cela n’interdit pas, cependant, de proposer, dans un ensemble respectueux du travail accompli, un problème qui se situerait, non dans la ZEN (la* zone d’étude normale, *celle où le travail de la classe s’est mené à bien), mais dans la ZEP (la* zone d’étude proche*), c’est-à-dire pour un problème dont la résolution supposerait la construction par les élèves, guidés par l’énoncé, c’est-à-dire en autonomie didactique relative, d’une technique certes inédite mais peu complexe et combinant un petit nombre d’éléments techniques eux-mêmes bien connus.*

c) La question 7 de RR est la suivante :

Ayant une classe assez difficile à gérer, l’équipe pédagogique a décidé de mettre en place une fiche de suivi de la classe, ainsi que des fiches de suivi pour les 5 élèves les plus gênants. N’ayant pas l’expérience de ce genre de dispositif, je l’ai accepté, mais j’émets des doutes sur son efficacité. Quels autres dispositifs peuvent être utilisés afin d’obtenir plus d’attention et de calme de la part des élèves dans des délais raisonnables (au plus tard avant les vacances de Noël) ?

Réponse express. – *S’il est raisonnable de noter les incidents critiques – ne serait-ce que pour pouvoir en tenter une analyse collective –, la petite police dans le quotidien de la classe et l’action répressive subséquente ne sauraient remplacer l’action éducative menée au plus près de l’instruction donnée dans les diverses disciplines. Cela rappelé, le fait que l’équipe se manifeste d’abord autour d’une intention punitive importe peut-être moins, dans l’état actuel des choses, que le simple fait qu’elle* se manifeste, *apparaissant ainsi aux yeux des élèves comme une équipe solidaire, et cela en premier lieu pour faire savoir qu’elle* *adopte une attitude bien partagée, commune, résolue vis-à-vis de certains comportements d'élèves. Bien entendu, à plus long terme, il conviendrait que le centre de gravité de l'action de l'équipe se déplace vers une recherche visant à réinsérer les élèves fautifs dans le circuit long de la règle commune – pour autant que cette équipe soit parvenue à s'accorder sur une réelle « synnomie ».*

3.5. Le numéro 40 est celui de *CO* (MJ, 2^de^).

a) Sa question 5 est la suivante.

Les élèves ont-ils le droit de grève ?

Réponse express. *– Le droit de grève concerne les salariés. Sur le site Vie-publique.fr on trouve à cet égard ceci (*http://www.vie-publique.fr/decouverte_instit/approfondissements/approf_122.htm*) :*

Traditionnellement, la grève est définie comme une cessation concertée du travail par des salariés, dans le but de défendre des revendications de nature professionnelle.

Jusqu'au XIX^e^ siècle, non seulement la grève était interdite mais elle constituait en outre un délit pénalement sanctionné. Ce n'est que le 25 mai 1864 qu'une loi mit fin à cette pénalisation de la grève, sans toutefois lui donner sa pleine portée. En effet, selon cette loi, la grève constituait toujours une rupture du contrat de travail, et pouvait justifier un licenciement du salarié gréviste. Pourtant, malgré les risques encourus par les salariés, la grève a joué tout au long de la Troisième République un rôle majeur dans la vie politique et sociale (exemple : grève générale avec occupations d'usines en 1936, après la victoire du Front populaire).

Ce n'est qu'à la Libération que le droit de grève est pleinement consacré. Il est inscrit dans le préambule de la Constitution du 28 octobre 1946 : « Le droit de grève s'exerce dans le cadre des lois qui le réglementent ». Contrairement à ce que semblait annoncer ce texte, le législateur n'est pas intervenu pour encadrer le droit de grève, mais seulement pour l'interdire à certaines catégories de personnels. C'est le cas des Compagnies républicaines de sécurité (CRS) par une loi de 1947, des personnels de police (loi de 1948) et des magistrats en vertu d'une ordonnance de 1958. En raison de cette carence du législateur, le Conseil d'État, tout en reconnaissant le droit de grève des fonctionnaires, a demandé à l'administration de réglementer les conditions de son exercice (arrêt Dehaene de 1950).

Sous la Cinquième République, le droit de grève est totalement reconnu (le préambule de la Constitution de 1958 fait référence au préambule du texte constitutionnel de 1946). Cependant, le législateur est intervenu en 1963 pour encadrer quelque peu ce droit. Sont ainsi interdites les grèves « tournantes », qui visent à paralyser l'action d'une entreprise. De même, dans la fonction publique, un syndicat souhaitant organiser une grève est contraint de déposer un préavis cinq jours au moins avant la cessation du travail. Par ailleurs, un service minimum a été mis en place dans certains secteurs. Le contrôle aérien fait ainsi l'objet depuis 1964 d'une prise en charge minimale pour des raisons évidentes de sécurité. Il en va de même, depuis une loi de 1979, de la télévision et de la radio (qui ont l'obligation de diffuser un journal d'information et une émission de divertissement chaque jour).

En revanche il existe un droit de l'enfant, sur lequel on pourra utilement s'informer, par exemple sur le site http://www.droitsenfant.com/.

b) La question 6 est reproduite ci-après :

Quels points doit-on aborder lors d'une réunion parents-professeurs où on ne reçoit pas les parents individuellement ?

Réponse express. *– Il s'agit là d'une grande question, sur laquelle on reviendra : ce qu'on peut dire aux parents peut en effet jouer un rôle des plus utiles dans l'aménagement des conditions et des contraintes de l'activité de la classe. Rappelons seulement que, contre une certaine tradition qui limite aux aspects les plus génériques le contenu de l'échange, et contre parfois le désir même de ceux à qui l'on s'adresse, il* *convient de tenter d’informer correctement les parents, par écrit et oralement, de la* structure *et du* contenu *du travail scolaire dans la discipline que l’on enseigne – cela, bien sûr, dans un langage idoine qui se mettra au point au fur et à mesure de l’interaction. La notice* Le temps de l’étude *rappelait à cet égard ce précédent mémorable : « en 1925, Anatole de Monzie, premier “ministre de l’Éducation nationale” (et non plus “de l’Instruction publique”), signait un arrêté énonçant que les “programmes doivent être connus non seulement des administrateurs et des professeurs, mais encore, dans tous leurs détails, des familles et des élèves”. » Il convient d’étendre cet objectif afin notamment de désarmer les « légendes scolaires » et « les légendes didactiques » qui peuvent gêner le travail de la classe et de chacun de ses élèves.*

c) La question 7 de CO est la suivante :

Doit-on considérer les types de tâches consistant à résoudre des équations du type $| ax + b | = r$ ou des inéquations du type $| ax + b | \le r$ comme au programme de 2de, étant donné que $| ax + b |$ ne peut pas être considéré comme une distance ? Bien sûr on peut se ramener à un problème du type $\left| x - \frac{b}{a} \right| \le \frac{r}{|a|}$ ou $\left| x - \frac{b}{a} \right| \le \frac{r}{|a|}$ mais je ne vois pas très bien ce que cela apporte ni à quels problèmes concrets cela peut se rattacher.

***Réponse express**. – Ce qui paraît le plus près de la vérité est à peu près le contraire de ce qui semble être indiqué dans la question : les inéquations du type $| ax + b | \le r$ ne peuvent guère être regardées comme non hors programme en 2de* que *dans la mesure où leur résolution se réalise par une modélisation en termes de distance, selon le schéma suivant :* $| 2x + 3 | \le 1 \Leftrightarrow \left| x + \frac{3}{2} \right| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| x - \frac{-3}{2} \right| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} ; -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right]$ $\Leftrightarrow x \in [-2 ; -1]$. *Pour un exemple de problème « concret » qui se laisse modéliser par une inéquation du type considéré ici, voir les notes du Séminaire 2002-2003, séance 5. Pour une généralisation (qui excède largement le programme de la 2de) de la technique d’étude géométrique recommandée ici, voir Shiyuan (Steve) Wei, “Solving Absolute Value Algebraically and Geometrically”,* Mathematics Teacher, *99, 1 (août 2005), p. 72-74.*

4. Des questions à revisiter ?

4.1. Plusieurs questions ont été élaborées dans les GFP. La première sur laquelle on s’arrêtera est la suivante.

Q_1. À propos de la différence entre propriété et théorème, comment, plus généralement, penser le lien entre réalité et modélisation mathématique ? Comment l’expliciter aux élèves, comment le faire vivre dans la classe ?

a) Il s’agit là d’une grande question, qui fera en principe l’objet d’une notice entière – à venir.

b) Son abord suppose la *déconstruction* de certains erreurs épistémologiques qui grèvent la culture mathématique scolaire et la *construction* corrélative d’une nouvelle épistémologie scolaire sur laquelle nous travaillerons de façon substantielle.

c) Un certain travail a d’ores et déjà été entrepris, en particulier à travers certains développements – que l’on pourra reprendre – de la notice *Éducation mathématique & citoyenneté*. On ajoute ici un exemple simple, relatif à la géométrie. Considérons trois points A, B, C dans l’espace sensible et mesurons les angles et les côtés du triangle ABC : on obtient des résultats semblables à ceux-ci (obtenus à l’aide d’un logiciel de géométrie).

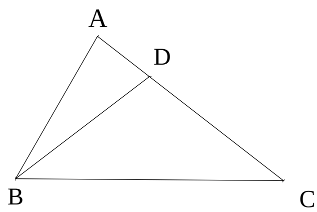
a:5.37	b:3.05	c:4.62	a:3.19	b:4.03	c:2.81
a':86.28	b':34.52	c':59.2	a':51.91	b':84.1	c':43.99

Une telle *expérience graphique* (que, dans une classe, on ferait réaliser *d'abord* sur papier blanc, les mesurages se faisant à l'aide de la règle graduée et du rapporteur), répétable à l'infini, permet d'établir un *fait spatial* que l'on tiendra désormais pour *vrai* : *dans un triangle de l'espace sensible, l'ordre des côtés est le même que celui des angles opposés*. Nous tenons là une *propriété* de l'espace sensible, c'est-à-dire une connaissance relevant de la *géométrie expérimentale*. Notons-la Δ. Le fait que Δ est vraie dans l'espace sensible *E* se notera : $\models_E \Delta$.

d) Cette propriété Δ peut-elle être un théorème de notre théorie géométrique, c'est-à-dire peut-elle être déduite de certains théorèmes ou axiomes (éventuellement introduits pour la circonstance) de la théorie géométrique disponible, la TGD ? C'est poser là une question qui relève de la *géométrie théorique* : a-t-on bien ce qu'on notera $\vdash_{TGD} \Delta$? Voici comment, autrefois, au collège, on *théorisait* la propriété Δ (ce qui suit est emprunté à un manuel conforme au programme de 1947).

---

152. Théorème. À un plus petit angle d'un triangle est opposé un plus petit côté.



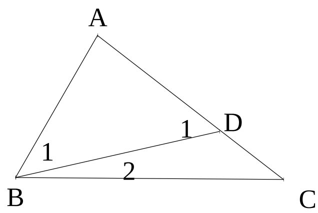
Hypothèse : $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$
Conclusion : AB < AC.

Construisons l'angle $\widehat{CBD} = \widehat{BCD}$. Le triangle BDC est isocèle.
La droite étant plus courte que toute autre ligne aboutissant aux mêmes extrémités, on a successivement :

AB < AD + DB
AB < AD + DC
AB < AC

Corollaire. Dans un triangle rectangle un côté de l'angle droit est plus petit que l'hypoténuse.

Réciproque. – À un plus petit côté d'un triangle est opposé un plus petit angle.



Hypothèse : AB < AC
Conclusion : $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$.

Portons AB en AD sur AC. Le point D est entre A et C puisque on a : AB < AC.
Le triangle ABD est isocèle et $\widehat{D_1} = \widehat{B_1}$.

Or $\widehat{D_1} = \widehat{ACB} + \widehat{B_2}$

Par suite $\widehat{ACB} < \widehat{D_1}$

ou $\widehat{ACB} < \widehat{B_1}$

et à plus forte raison : $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$

---

e) Dans la classe, la condition *sine qua non* de la constitution d'une culture adéquate est l'établissement continué d'une distinction claire entre le plan de la *réalité empirique* (la spatialité, la numérosité, la variabilité, etc.) et de sa connaissance expérimentale (sous la forme de *propriétés*, formulées à travers des énoncés que l'expérience a montré être *vrais*), d'une part, et le plan de l'*organisation déductive* des propriétés de cette réalité empirique (propriétés qui deviennent alors des axiomes ou des théorèmes), d'autre part.

4.2. La question ci-après fera l'objet de quelques rapides développements.

Q_2. Certaines des notions employées dans le travail de formation, dans le séminaire du mardi matin comme dans les GFP du mardi après-midi, n'ont pas fait l'objet de définitions explicites. Est-ce délibéré ? Ces définitions – telle celle de « question cruciale » par exemple – seront-elles données plus tard ? Que peut-on envisager à cet égard ?

a) D'une manière générale, il convient de se défier des « définitions de dictionnaire », qui donnent à peu de frais le sentiment que l'on sait de quoi il est question… Une telle définition ne saurait être qu'un *élément* de la construction d'un rapport approprié à la notion considérée.

b) Dans beaucoup de cas, une telle définition vient aisément dès lors que la construction de ce rapport est suffisamment avancé. On prolongera cette remarque en examinant le cas de la notion de *question cruciale*. Dans ce but, on reprend ici, rapidement, un extrait du résumé de la séance d'explicitation précédente (séance 4).

OD44. Une autre organisation de l'étude consisterait à partir de la question cruciale « Comment déterminer un point du plan ? » Dans le cas étudié, une réponse vient à l'esprit qui aurait pu être explorée prioritairement : C peut être obtenu comme point d'intersection des droites portant les côtés [AC] et [BC]. On décrit cette possibilité ci-après à l'aide d'un compte rendu fictif.

Semaine *n* – Lundi

La classe étudie le problème suivant : on a effacé le point C d'un triangle ABC dont on avait marqué le centre de gravité G ; comment retrouver le point C à partir de ce qui reste, c'est-à-dire A, B et G ?

P : « Comment trouver le point C ? Kévin, tu as une idée ? » Kévin : « Si on sait tracer les deux côtés, on a C ! » P : « Qu'en pensez-vous ? Farida ? » Farida : « Oui, mais comment on trace les côtés ? On sait pas, ça !… » P : « Bon, alors ? Quelle question on peut se poser ? Si on veut tracer les côtés ? » Un élève lève le doigt. P : « Oui, Ricardo… » Ricardo : « Comment on fait pour déterminer une droite ? » P : « Oui, c'est ça. Comment peut-on déterminer une droite. Alors comment ? Qui peut répondre ? Qu'est-ce qu'on connaît ici ? » Nabil : « On connaît un point ? Ça suffit pas. » P : « Exact. Alors ? Qu'est-ce qu'il faudrait ? »

……………………………………………………………………………………………………

Semaine *n* – Jeudi

P : « Bon alors, maintenant on revient au problème de retrouver le sommet C d'un triangle dont on connaît les sommets A et B et le centre de gravité G. J'ai demandé à Farida de nous rappeler ce qu'on avait fait et ce qu'il y avait à faire. Farida, à toi ! » Farida va au tableau et trace rapidement à main levée une figure où apparaisse les points A, B, C et G ainsi que les médianes ; puis elle s'adresse à la classe : « On avait posé la question "Comment faire pour déterminer les droites (AC) et (BC) ?" On a étudié la réponse "On cherche à déterminer la direction de (AC) et de (BC)", un peu comme on avait fait à propos du même problème avec le centre du cercle inscrit I à la place du centre de gravité G. Mais là on n'a pas trouvé une relation simple… Il fallait faire une étude expérimentale avec Wallis pour voir si par exemple [elle se tourne vers le tableau] l'angle $\widehat{GAC}$ serait la moitié ou le tiers ou autre chose de l'angle $\widehat{GAC}$. Voilà… » P : « Merci Farida, très bien… Bon, vous avez donc étudié ça avec Wallis. Alors votre réponse ? »

……

c) On poursuit en écoutant un court extrait de l'enregistrement sonore de la séance 6.

d) Ce premier travail se poursuivra sous la forme d'un *exposé* dont le sujet est proposé plus loin.

4.3. On s'arrête également sur la question suivante.

Q$_3$. Comment arriver à concilier tous les dispositifs proposés (synthèses collectives, corrections de devoirs, AER, PER, etc.) avec les contraintes de temps ?

a) Pour certains, il semble que le problème soulevé n'existe pas ! La tendance semble être, tout à l'inverse, à une extrême économie de moyens didactiques dans l'organisation du travail de la classe. Le problème n'est plus alors celui de la profusion, mais bien celui de la pénurie, voire de l'indigence, sur fond de traditionalisme pédagogique ! Ce n'est évidemment pas là un gage de bonne santé professionnelle.

b) La question soulève le problème *de l'organisation didactique* ou, plus exactement, celui du *choix* de dispositifs génériques différenciés et coordonnés. Il n'est certainement pas possible de mettre en œuvre *tout* ce qui est proposé, mais il n'est pas non plus *indispensable* – du point de vue des principales fonctions didactiques à prendre en charge – d'implémenter dans la classe *tout* ce qui est évoqué dans la formation.

c) La clé de la solution cherchée se trouve : 1° dans un choix sévère, raisonné, lisible des dispositifs didactiques mis en place ; 2° dans la recherche d'un haut degré *d'intégration* du fonctionnement des dispositifs retenus.

5. Forum des questions : exposés à venir

5.1. L'axiome de Wallis

a) Cet exposé examinera ce qu'apportent les archives du Séminaire à propos de la question suivante.

Exposé 18. Qu'est-ce que l'« axiome » de Wallis ? Qu'implique-t-il à propos de l'expérimentation spatiale dans la construction d'une théorie géométrique de l'espace sensible, du moins si l'on suppose que cet espace est euclidien ?

b) Cet exposé sera proposé et présenté par *MG*.

5.2. La notion de question cruciale

a) Cet exposé examinera ce que l'on peut apprendre, dans les archives du Séminaire, à propos de la notion de question cruciale.

Exposé 19. Quel est le rôle des questions cruciales dans le travail mathématique ? Quelle est leur place dans la constitution d'une éducation mathématique ?

b) Cet exposé sera proposé et présenté par *DP*.

6. Une nouvelle notice

Une notice intitulée ***Questions & réponses*** est diffusée aux participants.

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 9 : mardi 22 novembre 2005

0. Le programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions : poursuites & anticipations // 2. Forum des questions : exposés du jour & à venir.

1. Forum des questions : poursuites & anticipations

1.1. Questions de TIC

a) On examine la question suivante.

> Lorsque je donne certains documents aux élèves, je fais les fractions à la main car je n'arrive pas à les faire avec Word. Comment y remédier ? (GB, MJ, 3^e, 8)

1) La combinaison CTRL + F9 ouvre un champ dans lequel on saisit la chaîne de caractères **eq \f(2;3)** ; en utilisant alors la touche F9, on obtient ceci : $\frac{2}{3}$.

2) Pour accélérer ce type d'opérations, on pourra utiliser le logiciel (distribué en *shareware*) **aMath** (voir le site http://www.amath.net/).

b) La question suivante concerne plus particulièrement les participants en stage dans les Bouches-du-Rhône.

> Mes élèves viennent de recevoir leurs ordinateurs portables prêtés par le conseil général. Comment utiliser ces ordinateurs dans le cadre de mes cours ? Puis-je demander aux élèves de télécharger des logiciels gratuits de géométrie ? Leur donner du travail à faire à la maison sur ces ordinateurs ? (NA, JT, 4^e, 8)

1) L'opération « Ordina 13 » du conseil général des Bouches-du-Rhône a un site Internet, auquel on se réfèrera : http://www.ordina13.com/. Le bon usage didactique de l'ordinateur en classe de mathématiques fera l'objet d'un travail au long cours dans ce séminaire – travail qui a commencé et dont un bref inventaire figure dans le résumé de la séance 7.

2) Les ordinateurs fournis par le conseil général ne sont pas équipés pour la géométrie. Il convient donc d'y faire installer, en principe par l'ATI, *l'accompagnateur technique informatique* (ou, dans les collèges privés, par le « référent informatique »), un tel logiciel, que l'on choisira gratuit, sauf décision contraire de l'établissement.

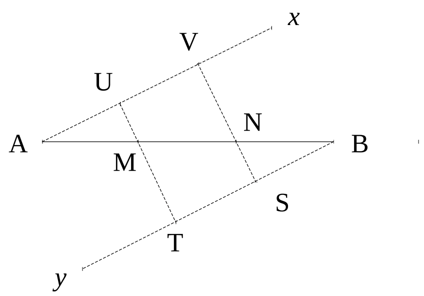
3) L’intégration de l’ordinateur au travail de la classe est une affaire de longue haleine : on commencera par l’utiliser pour des usages ciblés (vérifications et expériences numériques ou graphiques, etc.), dont on découvrira peu à peu la possibilité. Pour ce qui est du travail « à la maison », il est soumis aux critères usuels en ce domaine. En particulier, il ne doit pas innover du point de vue de l’usage à faire de l’instrument, mais au contraire recourir à des usages amplement travaillés en classe sous les yeux du professeur.

1.2. Questions d’organisations mathématiques

a) On s’arrête d’abord sur la notion de *construction géométrique* et les problèmes qu’elle soulève.

> 1. Que doit-on faire concernant les constructions à la règle et au compas ? Vaut-il mieux les glisser au fur et à mesure dans les chapitres de géométrie ou faire une séance entière portant sur le sujet ? (MD, MJ, 4^{e}, 8)
>
> 2. Pourquoi n’accepte-t-on pas que les élèves trouvent le milieu d’un segment avec la règle graduée ? L’argument traditionnel : « C’est plus précis » me paraît complètement faux. Même question pour la bissectrice d’un angle avec le rapporteur. (DC, OS, 2de, 8)

1) La notion de construction géométrique englobe plusieurs des notions évoquées jusqu’ici. Le *calcul graphique*, par exemple, relève entièrement des constructions géométriques, et il en va de même de la reconstitution d’une figure dont certains éléments ont disparu. Les problèmes de construction sont ainsi *le fondement de l’étude de la géométrie* : ils fournissent ses raisons d’être essentielles *à l’étude des propriétés de l’espace*. Examinons par exemple le schéma ci-après.

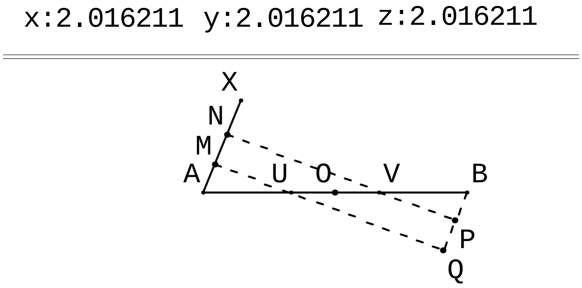


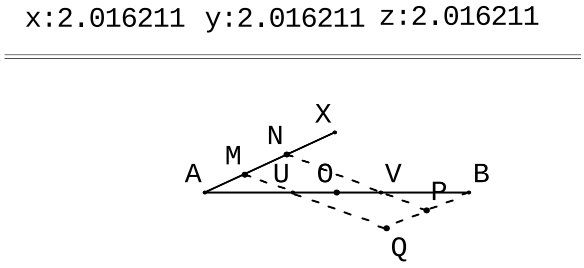
Il illustre une technique pour découper un segment en n parties égales (ici, $n = 3$). Cette technique est à plusieurs égards intéressante : elle ne nécessite que le tracé de *deux* parallèles (ce qui peut être fait à l’aide d’une règle à deux bords parallèles) ; elle suppose seulement, alors, le report sur chaque parallèle de $n - 1$ segments de même longueur (ce qu’on peut faire à l’aide d’une règle dont le bord porte deux marques). Cette technique est fondée sur une propriété clé θ : l’égalité des longueurs des segments qu’elle permet de découper sur [AB]. Pour établir cette propriété on peut successivement tenter

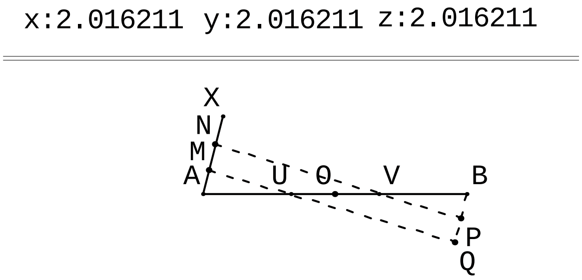
– de la *vérifier expérimentalement* : a-t-on $\models_E \theta$?

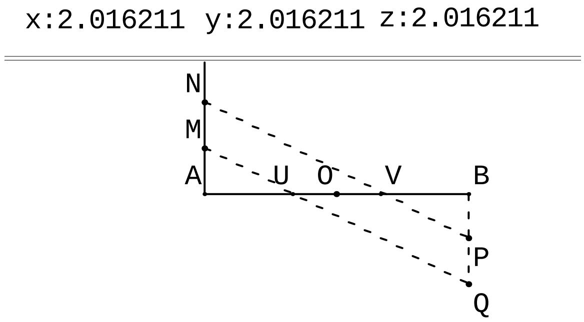
– de la *déduire de la théorie* géométrique disponible : a-t-on $\vdash_{\mathrm{TGD}} \theta$?

Notons au passage la variété des usages *pertinents* que l’on peut faire d’un logiciel de géométrie. Ce logiciel permet d’abord – classiquement – une vérification expérimentale de la propriété θ ; mais il permet aussi de vérifier expérimentalement l’idée de déduction de θ à laquelle on aura pu parvenir : si l’on pense par exemple à utiliser la symétrie de centre le milieu O de [AB], on peut définir la figure d’expérimentation en définissant P et Q comme les symétriques de M et N par rapport à O (voir ci-après) : on vérifiera ainsi *du même coup* que les demi-droites [AN) et [BQ) sont de support parallèles – si l’on en doutait – et la propriété θ elle-même.









2) L’observation précédente montre que les problèmes de construction géométrique devraient être ubiquitaires dans l’étude de la géométrie. Dans les manuels d’autrefois, l’usage était de consacrer, en chaque chapitre, une section aux « applications graphiques ». Dans l’un de ces manuels, déjà mentionné, les auteurs envisagent par exemple, dans le chapitre des *Droites parallèles*, les deux applications suivantes.

Applications graphiques

98. Problème. Mener une parallèle à une droite donnée MN, par un point A situé en dehors de cette droite.

……………………………………………………………………………………………………….

99. Problème. Mener la bissectrice de l’angle formé par deux droites dont on ne peut obtenir le point d’intersection.

……………………………………………………………………………………………………….

---

3) La question des constructions géométriques doit être le *fil rouge* de l’étude de la géométrie. Cette « dissémination » du travail n’empêche en rien, mais au contraire *appelle*, une synthèse spéciale sur les constructions géométriques, synthèse qui sera mise à jour régulièrement, comme l’illustre l’exemple suivant.

Collège Georges Bouligand

4^{e}5 – Mathématiques

Synthèse : constructions géométriques

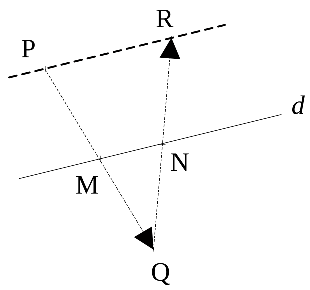
(Dernière mise à jour : *22-11-05*)

………

n*. Tracer une parallèle, *bis

On a vu plus haut (§ *n – p*) le tracé d'une parallèle à l'aide d'une règle à deux bords, technique fondée sur les propriétés du parallélogramme. La technique ci-après a une justification différente.

1) Technique. Étant donné une droite *d* et un point P hors de *d* (voir ci-après), choisir un point M sur *d* et marquer le point Q symétrique de P rapport à M ; choisir un autre point N sur *d* et marquer le point R symétrique de Q rapport à N. La droite (PR) est la parallèle à *d* passant par P.

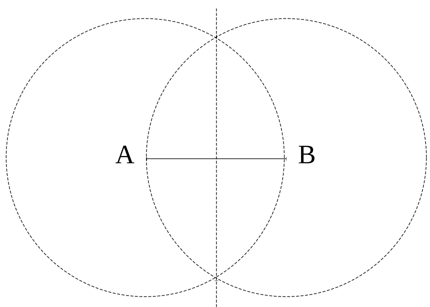


2) Justification de la technique

D'après les propriétés de la symétrie centrale, la droite *d* passe par les milieux M et N des côtés [QP] et [QR] du triangle PQR. D'après le premier théorème des milieux appliqué au triangle PQR, la droite (MN) est donc parallèle à (PQ), CQFD.

………

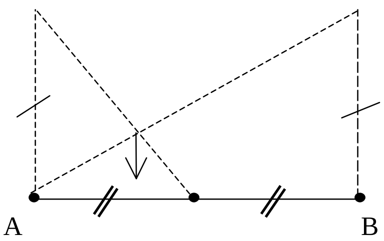
4) Pour comprendre l'origine de l'interdit assez répandu pesant sur l'usage de la règle graduée pour marquer le milieu d'un segment, il convient de bien distinguer *exact* et *précis* : construire le milieu à l'aide du compas et de la règle (à un bord, non graduée) comme illustré ci-après c'est effectuer une construction exacte – même si, à cause de l'imprécision des tracés graphiques, cette technique peut se révéler fort imprécise (ce qui n'est pas le cas ici). La notion d'exactitude a trait à la *théorie* géométrique, la notion de précision a trait à la réalisation *graphique*.



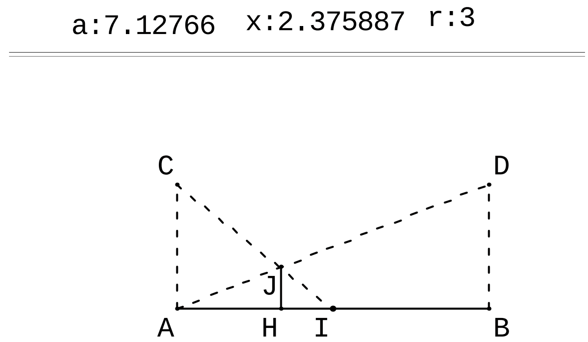
5) Il existe des constructions géométriques *exactes* dont la mise en œuvre graphique conduit à des tracés relativement *imprécis* : ainsi en va-t-il par exemple de la construction du cercle circonscrit à un triangle donné. Par ailleurs, il existe des constructions qui sont *impossibles* à l'aide de tel système donné d'instruments – par exemple la règle (à un bord non marqué) et le compas. En pratique, on doit alors soit changer de systèmes d'instruments (pour espérer obtenir une technique exacte), soit recourir à une technique *approchée*. Une telle technique approchée peut être plus précise qu'une technique exacte, quand il en existe. Ainsi en va-t-il par exemple s'agissant du tracé d'un heptagone régulier ou de la trisection d'un angle.

6) Faute que les distinctions précédentes soient claires, on observe dans les classes des comportements anomiques, dont le refus de toute construction approchée, et en particulier du mesurage approché, sans qu'on sache toujours clairement ce qui pourrait bien justifier ce refus – « En maths, ça ne se fait pas ! » L'usage graphique de techniques approchées se justifie pourtant dans deux cas diamétralement opposés :

– lorsqu'on souhaite dessiner le *schéma* d'une expérience graphique à réaliser, cas où la précision compte peu, comme on le voit ci-après à propos d'un schéma d'une construction (exacte) du point coupant un segment [AB] au tiers (on marque le milieu de [AB], on trace en A et B deux segments de même longueur de direction perpendiculaires à (AB) et du même côté de (AB), etc.) ;



– lorsqu'on dessine une *épure* pour réaliser une certaine expérience graphique, et qu'une technique *approchée* apparaît plus fiable (par exemple parce que plus « légère ») que la technique *exacte*, et donc plus précise en moyenne, la précision étant ici essentielle (voir ci-après, où a = AB, x = AH, r = a/x).



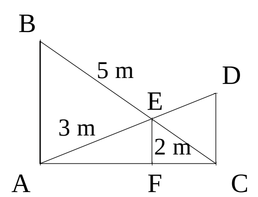
7) En revanche, quand on demande une construction tout court, c'est-à-dire une construction *exacte*, l'emploi *approché* de la graduation de la règle est exclu, tandis que son emploi *exact* ferait passer à un système d'instruments *strictement plus puissant* que le système traditionnel « règle (à un bord non gradué) + compas » : ce dernier, en effet, ne permet pas par exemple *la trisection exacte des angles* (théorème de Wantzel, 1837), alors que le système « règle à un bord portant deux marques + compas » le permet.

b) Les questions suivantes ont entre elles une relation de cas général à cas particulier.

1. Qu'est-ce qu'une question cruciale ? (CD, CR, 5^{e}, 8)

2. J'ai vu sur Internet un problème que je n'arrive pas à résoudre. Voici le problème.

BC = 5 m
AD = 3 m
EF = 2 m



La question est : calculer AC. Comment faire ? (GD, JT, 2de, 8)

Pour résoudre ce problème, la succession des *questions cruciales* peut être la suivante.

Q_1. Que s'agit-il de faire dans ce problème ?
R_1. Il s'agit de déterminer la valeur α d'une longueur inconnue.

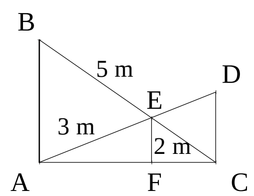
Q_2. Comment peut-on déterminer la valeur α d'une longueur inconnue ?
R_2. Lorsque α ne peut être obtenue explicitement en fonction des données, comme cela semble bien être le cas, en déterminant, puis en résolvant, une équation $f(x) = a$ (où a est donnée) ou une équation $f(x) = g(x)$ vérifiée par α.

Q_3. Comment parvenir à une équation $f(x) = a$ (où a est donnée) ou à une équation $f(x) = g(x)$ vérifiée par α ?
R_3. En examinant si et comment la figure étudiée est déterminée par la donnée (supposée) de α.

Q_4. Comment la figure étudiée est-elle déterminée par la donnée (supposée) de α ?
R_4. La donnée de A et C tels que AC = α détermine B, D, et donc E et F.

Q_5. Comment en tirer une équation vérifiée par α ?
R_5. L'équation s'écrit $f(x)$ = EF = 2.

Q_6. Mais comment obtenir l'expression de f ?
R_6. En « suivant » la détermination géométrique de EF à partir de la donnée de α.



Q_7. C'est-à-dire ?
R_7. D'après le théorème de Pythagore, AB et CD valent respectivement $\sqrt{25-\alpha^2}$ et $\sqrt{9-\alpha^2}$.

Q_8. Mais comment obtenir l'expression de EF en fonction de AB et CD ?
R_8. D'après la figure, par le théorème de Thalès.

Q_9. C'est-à-dire ?
R_9. On obtient (en posant les bonnes questions) $\mathrm{EF} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{\mathrm{CD}}}$, et on a donc $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}}$.

Q_{10}. Comment résoudre l'équation $f(x) = 2$ sur l'intervalle $]0\,;3[$?
R_{10}. Dans la mesure où elle ne ressemble pas à une équation habituelle, il est bon de l'aborder avec les outils liés à la notion de fonction.

Q_{11}. C'est-à-dire ?
R_{11}. En se posant d'abord la question : « Cette équation a-t-elle une ou plusieurs solutions sur $]0\,;3[$? »

Q_{12}. Comment répondre à cette question ?
R_{12}. En examinant $f(]0\,;3[)$.

Q_{13}. Comment faire pour cela ?
R_{13}. Dans le cas général, en déterminant les variations de f sur $]0\,;3[$ et ses valeurs limites aux bornes des intervalles de monotonie.

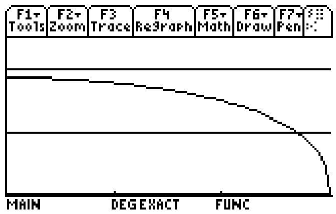
Q_{14}. Comment déterminer les variations de f sur $]0\,;3[$?
R_{14}. L'expression de f permet de voir aisément qu'elle est strictement décroissante sur $]0\,;3[$: quand x augmente, $\sqrt{25-x^2}$ et $\sqrt{9-x^2}$ diminuent, donc $\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ augmentent et donc f diminue. On a par ailleurs $f > 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}} = \dfrac{15}{8}$. Il vient donc $f(]0\,;3[) \subset \left]0\,;\dfrac{15}{8}\right[$.

Q_{15}. Comment faire alors ?

R_{15}. Examiner si $2 \in \left]0\,;\frac{15}{8}\right[$, ce qui à l'évidence n'est pas le cas, puisque $\frac{15}{8} = 1{,}875$. L'équation $f(x) = 2$ n'a donc pas de solution dans]0 ; 3[.

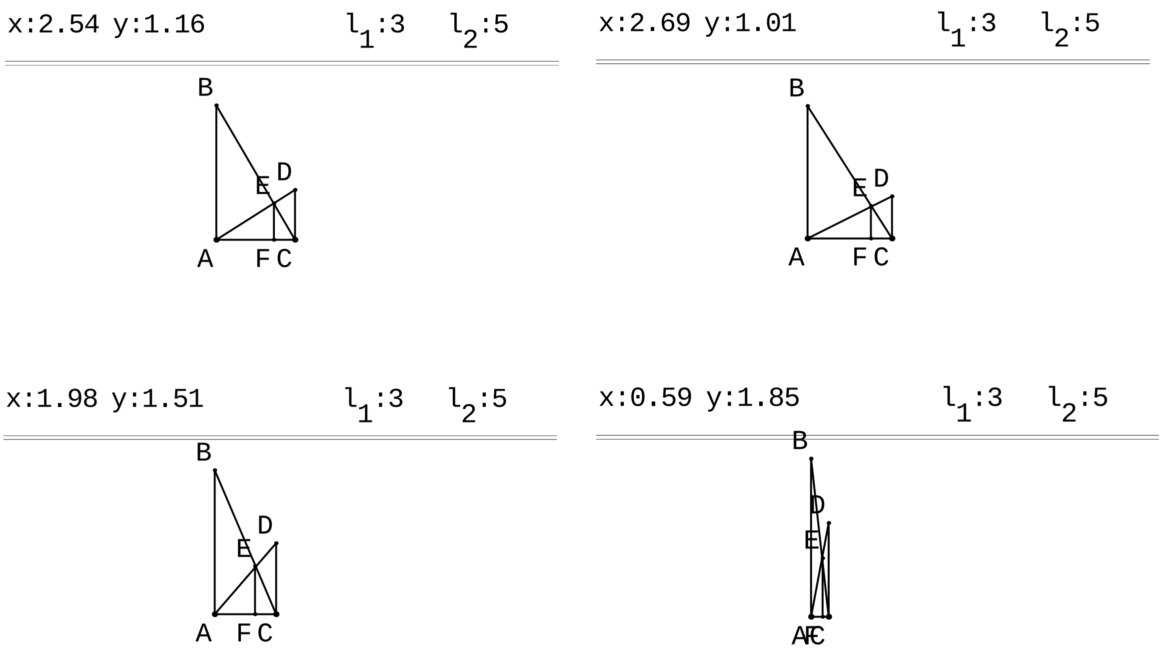
Q_{16}. Comment contrôler ce résultat ?

R_{16}. Avec une calculatrice graphique, où l'on représente f sur [0 ; 2,5] (par exemple), en faisant figurer sur le même écran la droite d'équation $y = 2$ (et, pour le contraste, également la droite d'équation $y = 1$ par exemple).



Q_{17}. Peut-on contrôler le résultat en amont de l'expression de f, au cas où l'on se serait trompé en déterminant cette expression ?

R_{18}. On peut recourir pour cela à un logiciel de géométrie dynamique. Comme ci-après.



---

c) La question suivante a trait au domaine de la *modélisation*.

Lors du cours sur les fonctions, on aborde les fonctions définies sur un ensemble fini. Lors de ma recherche d'exemples, je me suis posé une question : toutes les courbes de l'INSEE représentant le chômage sont représentées par des courbes affines par morceaux (de janvier 2005 à février 2005, etc.) Sachant que la fonction est définie sur un ensemble *fini* (relevés discrets en tout cas…), il est donc incorrect de la représenter par une courbe continue. Est-il judicieux de le faire remarquer ? (DV, CR, 2de, 8)

1) C'est plutôt l'occasion de faire remarquer qu'il y a là un *choix* de modélisation mathématique – en trois temps. Dans un premier temps, on décide de regarder le taux de chômage r comme une fonction du temps t, lui-même regardé comme une variable « continue » prenant ses valeurs dans l'intervalle [0 ; 365] (par exemple) : $r = f(t)$. Dans un deuxième temps, on relève la valeur de r en $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ À ce stade, une représentation graphique ne comporterait qu'un nombre fini de points (t_1, r_1), (t_2, r_2), (t_3, r_3), etc. Dans un troisième point, on décide de rechercher des valeurs approchées de r sur $]t_1 ; t_2[$,$]t_2 ; t_3[$, etc., *par interpolation*, et en l'espèce par interpolation *« affine »*.

2) La représentation de r par une « courbe continue » n'est donc nullement « incorrecte » : elle résulte en effet, *non du phénomène étudié lui-même*, mais d'une *décision de modélisation* – consistant (ici) à opter pour un modèle continu plutôt que pour un modèle discret. Cette remarque est essentielle : ce ne sont pas les phénomènes étudiés qui « dictent » le modèle. Dans tous les cas, bien entendu, il restera à examiner ce que le modèle élaboré nous apprend vraiment sur le système qu'il modélise. Pour ne prendre ici qu'un exemple, on peut modéliser l'évolution d'une population par un modèle discret de la forme

$$x(t + 1) = x(t)[1 + r(t, x(t))]$$

c'est-à-dire par une relation de récurrence d'ordre 1, ou par un modèle continu de la forme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(t)r(t, x).$$

(Sur cette question, voir par exemple Alain Hillion, *Les théories mathématiques des populations*, PUF [coll. « Que sais-je ? »], Paris, 1986.)

1.3. Questions d'organisations didactiques

a) On s'arrête d'abord sur la question suivante.

> Dois-je interdire à un élève d'utiliser une technique hors programme dans la résolution d'un exercice, s'il sait la justifier ? (JG, OS, 2^{de}, 8)

1) La clarté doit prévaloir en ce domaine. Ou bien la technique mise en œuvre est effectivement hors programme. En ce cas, si elle apparaît au cours d'une AER, elle sera prise en compte mais elle ne sera pas institutionnalisée – la chose étant dûment justifiée. En revanche, si elle apparaît dans le cadre d'un contrôle, elle ne devrait pas être considérée comme validée dans ce contexte : car ce n'est pas de cette technique que le professeur avait à contrôler la maîtrise par l'élève, mais d'une autre, et dont il sera alors incapable de s'assurer que l'élève est à même de la mettre en œuvre !

2) La situation peut se produire notamment parce que l'élève utilise une technique inusuelle vue l'année d'avant mais non accréditée dans la classe. Voici un exemple explicité dans une « question de la semaine » de l'année 2004-2005 :

> En DM j'ai proposé aux élèves l'exercice suivant :
>
> 1. Simplifier $A = \dfrac{a}{a-b} + \dfrac{b}{a+b} + \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
> 2. Trouver a et b tels que $A = \dfrac{1}{2}$.
>
> Un élève écrit :

1. $A = \dfrac{2a}{a-b}$

2. $A = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2a}{a-b}$ donc $2a = 1$ et $a - b = 2$

donc $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{3}{2}$

et je vérifie $\dfrac{2a}{a-b} = \dfrac{2 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

Je lui dis que les valeurs de a et b sont justes, qu'il ne s'agit que d'un exemple de couple solution et je rajoute que son raisonnement est faux : on n'a pas le droit de dire que, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *alors* $a = c$ et $b = d$. Il me répond : *Si ! On a le droit…* « Lorsqu'une des deux fractions ne contient pas d'inconnue et que l'on veut déterminer les inconnues présentes dans l'autre fraction, on peut faire comme ça ! » Que répondre ? Cette « méthode » permet en effet de déterminer un couple solution. Aurais-je dû mieux formuler ma question ? Comment contrer ce type de raisonnement dans le fond comme dans la forme ?

On verra, en consultant les archives (année 2004-2005, séance 5), que la technique mise en œuvre est parfaitement justifiable, en effet ; et l'on trouvera aussi bien d'autres considérations *importantes*, sur lesquelles on ne s'étendra pas ici. Il n'en reste pas moins que, *quand bien même la justification de cette technique serait donnée par l'élève*, ce n'est pas cette technique-là que le professeur demandait à l'élève de mettre en œuvre. Si la position à adopter vis-à-vis de cet épisode dans le cadre d'un DM doit être certainement mesurée (car était-il évident pour cet élève que ce n'était pas là ce qu'on attendait de lui ?), il en ira tout autrement dans le cadre d'un DS ultérieur, où un autre spécimen du même type de problèmes serait proposé ! La construction des OM – et leur contenu même – *est une affaire collective*, qui se négocie avec la classe sous la direction du professeur. Libre à chacun d'agir à sa guise dans sa vie mathématique *privée*, et même de faire un usage *privé* (c'est-à-dire *non visible dans la classe*) de ce qu'il aura élaboré pour son propre compte (par exemple pour contrôler son utilisation de la technique institutionnalisée dans la classe). Mais gare à l'idionomie, surtout quand elle menace ce qui est le point d'appui principal du travail des élèves et du professeur – le groupe classe.

b) On revient brièvement sur des questions déjà travaillées.

1. Comment réagir avec deux élèves qui ont rendu deux copies identiques (à la virgule près : même fautes d'orthographe, mêmes phrases écrites aux mêmes endroits, présentation identique) d'un DM ? Je le leur ai fait remarquer en les gardant tous les deux seulement à la fin d'un cours mais je n'ai adopté aucune sanction… (SPM, CR, 5^{e}, 8)

2. Y a-t-il un intérêt à faire un devoir pour travailler sur du long terme ? Par exemple, un DS portant sur plusieurs chapitres fait au début de l'année ? (DP, OS, 5^{e}, 8)

3. J'ai demandé aux élèves de recopier la correction d'un contrôle. J'ai deux copies écrites par le même élève mais bien sûr deux noms différents. Que dois-je faire ? (SP, CR, 4^{e}, 8)

1) De la même façon que le professeur de mathématiques s'efforce de mettre en place de « bonnes techniques » pour accomplir les tâches mathématiques de tel ou tel type, de même il doit prendre sa part dans la mise en place et l'adoption, au moins dans l'espace de la classe, de « bonnes techniques » relatives aux types de tâches que l'élève doit accomplir dans sa relation à l'institution scolaire et à ses acteurs – élèves, professeurs, personnels de toute nature, parents, etc. Au souci d'*éducation mathématique* s'ajoute ainsi – de façon distincte,

certes, mais en pratique organiquement liée – le souci d'*éducation « institutionnelle »*, l'une et l'autre offrant des techniques (et des technologies / théories) dont l'élève, dûment « équipé », pourra ensuite faire librement usage dans son activité hors de l'institution scolaire.

2) Face à une anomalie comme celle rapportée dans la première question ci-dessus, il convient de réagir à différents niveaux. On a dit que, pour dissuader ce comportement, inacceptable dans son principe (hormis lorsque le principe de travaux à plusieurs est admis), mais surtout pour réguler les effets d'apprentissage recherchés, il convenait de mettre en place un *contrôle du DM* sous la forme d'une micro-épreuve en classe, la note de l'ensemble DM + μ-DS se distribuant de façon étudiée (20 = 15 + 5 = 12 + 8 = 10 + 10 = …). Mais lorsque, malgré cela, la chose advient, la « technique institutionnelle » usitée par les élèves ne doit pas davantage être validée que ne le serait une technique mathématique inappropriée ! Ici, la première étape est sans doute celle d'un rappel formel au règlement, comme cela semble avoir été le cas. Mais en cas de récidive, il convient de mettre en œuvre – après l'avoir clairement annoncé – une mesure déterminée, par exemple une retenue avec rédaction d'un devoir qui se substituerait, pour les élèves concernés, au DM copié (sans μ-DS de contrôle).

3) D'une façon générale, les travaux en classe et hors classe ne doivent pas apparaître comme passés et dépassés : qu'ils le soient ne peut qu'inciter les élèves les plus faibles moralement (et en général mathématiquement) à « s'en débarrasser » d'une manière ou d'une autre. On pourra ainsi prendre le parti d'inclure en tout DS l'un des petits problèmes ou des exercices étudiés dans l'un des DM précédents. On pourra même consacrer de loin en loin tout un DS à une reprise de situations travaillées dans les DS et DM précédents, avec, bien sûr, une exigence de qualité – au plan mathématique comme au plan rédactionnel – sensiblement accrue. En revanche, il conviendra, en annonçant clairement le *programme du DS*, de préciser les DM et DS auxquels le DS à venir pourra emprunter, comme le suggère ce document.

Collège Georges Bouligand
4^{e}5 – Mathématiques

DS 5 : programme

Le DS 5 du lundi 28 novembre portera sur les contenus mathématiques suivants :

– DM 6, DM 7, DS 3 ;

– Types de problèmes mettant en jeu le centre de gravité d'un triangle ;

– Types de problèmes mettant en jeu des puissances de 10 d'exposant entier relatif.

4) Le dispositif évoqué dans la troisième question – recopier la correction d'un contrôle et remettre sa rédaction sous la forme d'une « copie » – pâtit sans doute, mais de façon plus nette encore, du même défaut que les DM « ordinaires » : quelle fonction didactique poursuit-il qui pourrait dissuader au moins certains élèves de « se débarrasser » du pensum qui leur est infligé ? Dans le principe, on pourrait reprendre à son propos ce qui a été dit plus haut ; mais il conviendra plus sûrement encore de ré-envisager, à la lumière des observations précédentes, l'ensemble du dispositif de contribution personnelle des élèves au travail de la classe.

c) On s'arrête enfin sur une question qui, subtilement, renvoie aux considérations faites jusqu'ici sur la citoyenneté.

Le soutien en 4e a pour objectif d'aider les élèves les plus en difficulté. Or, en pratique, les élèves « sans espoir » de progrès au niveau de la note (et le plus souvent démotivé par tout ajout scolaire) ne sont pas choisis pour le soutien. Comment se positionner et quels outils mettre en œuvre ? (JNM, MJ, 4e, 7)

1) Même si le professeur n'a pas de pouvoir thaumaturge, on l'a souligné, il ne saurait renoncer à rechercher des effets systématiques d'éducation mathématique et institutionnelle même chez ces élèves qui semblent parfois se désigner eux-mêmes comme « inéducables ». Si l'on peut comprendre le découragement et l'érosion de la volonté devant la rétivité ou l'opposition affichées par certains, on ne peut en revanche accepter le *principe* selon lequel l'École renoncerait à agir sur les cas les plus difficiles. Il y a là, en effet, une méprise qu'il convient encore et encore de dénoncer : dans la *scolarité obligatoire*, on ne cherche pas en priorité à sélectionner les plus capables (ce qui, en certains contextes de formation, est une problématique légitime), mais, en conformité avec le « pacte national d'instruction » que scellent les programmes des classes successives, *à augmenter autant que faire se peut l'instruction et l'éducation de chaque futur citoyen*. À cet égard, ni l'élève ni le professeur ne sont libres de décider d'un commun accord ! Dans le principe, le professeur doit chercher à instruire l'élève, tandis que l'élève ne peut refuser cette *instruction obligatoire* – quand bien même il serait tenté de le faire. Tel est le principe qui devrait prévaloir. Si quelques élèves semblent véritablement inaccessibles au dispositif de soutien mis en place, il appartient à l'établissement d'envisager d'autres dispositifs jugés plus appropriés. Quant au professeur, il ne doit pas se lasser d'assumer son rôle auprès de chacun de ses élèves.

2) Le non-investissement dans la formation scolaire qui est la tentation de trop élèves doit être évaluée avec eux à son juste prix : ne pas s'instruire, refuser de s'éduquer (aux multiples sens du mot), c'est à *coup presque sûr* se faire du tort à soi-même (ce que tel élève peut ne pas entendre), mais aussi, dès aujourd'hui, faire du tort à ses futurs enfants – s'ils viennent un jour à la vie –, mais aussi à tout ceux qui vous entoureront dans dix, vingt, trente ans et plus, et plus largement à la société tout entière. *A contrario*, l'effort d'aujourd'hui, d'un côté, la bienveillance et la sollicitude à l'endroit de cet effort, de l'autre, sont un gage très sûr d'une amélioration de la vie future de l'élève, de ses descendants, de ses proches et de la société où il vivra. Même s'il n'est pas entendu, ce discours devra être tenu et médité.

3) Pour illustrer positivement le schéma évoqué ici, on cite ici la conclusion d'une étude récente due à Éric Maurin et Sandra McNally, intitulé (on comprendra pourquoi en lisant les lignes qui suivent) *« Vive la Révolution ! » Les bénéfices de long terme de mai 68*.

Mai 68 a eu des conséquences importantes pour les étudiants qui n'étaient au moment des événements plus très loin d'être éliminés du système éducatif et de devoir renoncer à poursuivre des études supérieures. De fait, les modifications des procédures d'examens et la volonté de les alléger ont conduit à des taux de réussite au bac et aux examens universitaires très supérieurs à ceux observés habituellement à l'époque. Pour beaucoup d'étudiants (notamment les meilleurs), cela n'a fait aucune différence. Tout au plus, cela a-t-il modifié le timing de leur progression à l'intérieur du système universitaire. Pour un groupe non négligeable, en revanche, les événements ont permis de différer le moment de l'élimination scolaire et significativement augmenté leur niveau final de qualification. Ce groupe appartient aux cohortes de naissance qui se trouvaient, au moment des événements de 68, aux étapes les plus sélectives du système universitaire, ce qui correspond en particulier aux cohortes de 48 et 49.

L'analyse du destin des étudiants de 1968 révèle que le surcroît de formation dont a bénéficié ce petit groupe s'est traduit par la suite par des salaires significativement plus élevés et des accès plus nombreux aux fonctions d'encadrement. Pour ceux de ces étudiants devenus pères, les effets se sont même transmis à la génération suivante puisqu'il est montré que leurs enfants ont moins redoublé à l'école (et qu'ils ont été plus souvent en mesure de sauter des classes). Rapporté au surcroît de formation, le surcroît de réussite professionnelle et familiale observé pour les étudiants bénéficiaires de la désorganisation des examens permet d'évaluer l'effet proprement causal de la formation supérieure sur les destins familiaux, à peu près exactement comme le permettrait un protocole vraiment expérimental. Il s'avère que cet impact est important, plus important que ce que laissent imaginer les évaluations non-expérimentales habituellement utilisées.

Le relâchement des examens en Mai 1968 est homologue à une expérience de laboratoire permettant d'évaluer les effets d'une formation universitaire pour les personnes qui, en temps ordinaire, seraient restées aux portes de l'université. Le fait que cet impact soit aussi particulièrement élevé et persistant à travers les générations est un argument de poids pour ceux qui aujourd'hui militent pour une expansion nouvelle de notre enseignement supérieur.

Sous le titre condensé *Vive Mai 68*, on trouvera l'intégralité de l'étude dans les *Documents / 2^nd^ degré* sur le site de l'IUFM.

2. Forum des questions : exposés du jour & à venir

2.1. Diffusion radiale ou percolation ?

a) On écoute un exposé de *MK* sur la question suivante :

Exposé 14. Comment trouver un bon équilibre qualitatif et quantitatif, dans le travail de la classe, entre les interventions du professeur et la communication entre élèves, notamment pour parer à la diffusion de techniques erronées ou de technologies inappropriées lorsque les élèves travaillent entre eux ?

b) Remarques et commentaires.

2.2. Calculer avec des radicaux

a) Cet exposé examinera ce que contiennent les archives du Séminaire pour l'année 2004-2005 à propos de la question suivante.

Exposé 20. Que pourrait contenir l'analyse didactique du compte rendu d'une séance en classe de 3^e^ (consacrée au calcul sur les radicaux) qui a été diffusé lors de la séance 8 de ce séminaire ?

b) Cet exposé sera proposé et présenté par *DC*.

2.3. Constructions géométriques & systèmes d'instruments

a) Cet exposé examinera quel sort est fait, dans les archives du Séminaire, à la question suivante.

Exposé 21. Que signifie l'affirmation selon laquelle certains procédés de construction exacts sont en pratique peu précis ? Et comment le fait de changer de système d'instruments peut-il changer la notion de procédé de construction exact ?

b) Cet exposé sera proposé et présenté par *DB*.

2.4. Les nombres rationnels au collège

a) Cet exposé devra tenter d'expliciter la réponse qu'apportent les archives du Séminaire à la question suivante.

Exposé 22. Comment peut-on justifier, au collège, en respectant l'esprit des programmes, que l'on a $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$; $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$; etc. Comment situer la problématique correspondante par rapport à la problématique « moderne » de la « construction » du corps des rationnels ?

b) Cet exposé sera proposé et présenté par *DV*.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 10 : mardi 29 novembre 2005

0. Le programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. Problématique et fonctionnement de la formation // 2. Observation & analyse // 3. Forum des questions : exposés du jour.

1. Problématique et fonctionnement de la formation

1.1. Les programmes !

a) Plusieurs questions récentes conduisent à revenir sur la question des programmes (et, plus largement, des documents officiels), pour souligner encore le précepte suivant : lorsqu'un professeur se met en marche pour concevoir et planifier l'enseignement d'un thème mathématique donné, et notamment pour ***déterminer l'organisation mathématique locale*** (OML) qui répondra à ce thème d'études, le premier geste à accomplir est la ***consultation du programme*** de la classe, et non pas du ***manuel*** de la classe (ou d'autres manuels).

b) Pour évoquer ce que l'absence de ce « geste » essentiel peut provoquer – sous la forme d'« auto-rumeurs » ou de reprises de rumeurs –, on s'arrête rapidement sur les deux questions ci-après. La première est celle-ci.

> J'ai commencé avec mes élèves le chapitre « Théorème de Pythagore ». Lors de la détermination de la longueur de côtés d'un triangle rectangle, je leur ai expliqué que, lorsqu'on connaît le carré d'un nombre, on appuie sur la touche $\boxed{\surd}$ de la calculatrice pour trouver ce nombre. Plusieurs d'entre eux parlent de « racine carrée » et veulent écrire par exemple : $BC^2 = 25$ donc $BC = \sqrt{25} = 5$. Puis-je leur permettre d'écrire cela (sachant que ce n'est pas, je pense, au programme de parler de racines carrées) ? (NA, JT, 4^e^, 9)

1) Une recherche sur le fichier Word contenant tous les programmes du collège (et les documents d'accompagnement correspondants), fait apparaître d'abord ceci, qui figure dans le programme de 4^e^ :

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
1. Nombres et calcul numérique Touche $\surd$ de la calculatrice.	Trouver à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre positif.	Le théorème de Pythagore fournit l'occasion de calculer des racines carrées de nombres positifs dans des cas qui relèvent d'une situation où le nombre calculé a une signification que l'élève peut identifier. On peut aussi

		rattacher le calcul d'une racine carrée à des problèmes où interviennent l'aire d'un carré et la mesure de son côté.

2) Le programme de 4e livre encore ceci :

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
2. Calcul littéral Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre. Applications.	Écrire des encadrements résultant de la troncature ou de l'arrondi à un rang donné d'un nombre positif en écriture décimale ou provenant de l'affichage d'un résultat sur une calculatrice (quotient, racine carrée...).	

3) Conclusion : il est parfaitement normal que, en 4e, les élèves (et les professeurs) « parlent de "racine carrée" et [écrivent] par exemple : $BC^2 = 25$ donc $BC = \sqrt{25} = 5$ ».

c) Une seconde question appelle des remarques analogues.

> Certains termes mathématiques comme « antécédent », « projection orthogonale », « contraposée » ne sont plus aux programmes des classes de collège ou lycée alors que les notions correspondantes le sont. De plus, certains élèves connaissent ces termes et demandent si c'est la même chose. Je suis obligée alors d'expliciter pour éviter toute confusion. Pourquoi ces termes ont-ils été enlevés des programmes ? (NFG, MJ, 2de, 9)

1) Cette fois, c'est le fichier Word contenant le programme de 2de ainsi que son document d'accompagnement qu'il convient en premier lieu de consulter. S'agissant du mot *antécédent* (et de la notion correspondante), le document d'accompagnement livre ceci :

> Le programme demande explicitement de traiter des exemples de fonctions données à l'aide d'une courbe (elles sont fréquentes dans les documents des autres disciplines ou dans les média : la légende accompagnant la courbe suffit en général pour comprendre le lien fonctionnel entre les deux grandeurs en jeu) ainsi que celles fournies par un tableau de données (type « tarifs postaux »). À propos de fonction définie par une courbe, il importe que les élèves sachent lire de façon critique l'information contenue dans la courbe (lectures approchées d'images et d'antécédents, ou lectures exactes dans certains cas précisés par le graphique, variations, etc.) ; on pourra convenir ici que l'information sur les variations est exhaustive et on montrera la nécessité d'une telle convention à l'aide de courbes tracées avec un grapheur à partir d'une formule (des changements de fenêtre peuvent modifier l'allure de la courbe : mais il ne s'agit plus là de fonction définie par une courbe).

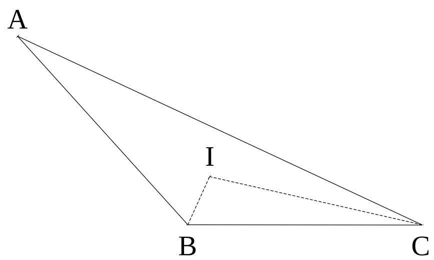
2) Pour ce qui est des ***projections orthogonales*** (et du projeté orthogonal), on notera d'abord que l'un des « thèmes d'étude » (ce qu'on nommera ici plus précisément thèmes d'études *libres*, TEL, par opposition aux TEI, thèmes d'études *imposés*) est formulé ainsi :

> Projections orthogonales d'une sphère ou d'un disque sur un plan.

En outre, à propos du TEI des *Fonctions de référence*, le document d'accompagnement précise ceci :

Les élèves sortant du collège disposent des connaissances de base de la trigonométrie dans un triangle rectangle ; ces connaissances seront entretenues en géométrie, lors de la résolution de problèmes relatifs à diverses configurations du plan. La notion d'angle orienté est introduite en géométrie (voir § Géométrie ci-dessous) mais aucune compétence n'est exigée les concernant ; la notion de cercle trigonométrique sera introduite ici. Un logiciel de géométrie dynamique sera alors particulièrement utile pour bien montrer comment l'ensemble des nombres réels *s'enroule* sur le cercle et comment varient les projections de l'extrémité d'un arc AM en fonction de la longueur de cet arc.

3) Le terme de « contraposée » relève d'un cas de figure un peu différent. Sur ce vocable, de fait, les deux ensembles de textes – relatifs respectivement au collège et à la classe de 2$^{\text{de}}$ – sont muets. Mais on se rappellera ici (voir l'exposé 12, dû à MD) que l'emploi du mot cité a été ***fortement déconseillé*** : chaque fois qu'on serait tenté d'en user, on en remplacera l'usage par le recours à un *« raisonnement par contraposition »* énoncé explicitement, comme par exemple celui-ci : *Si ce triangle, dont les côtés mesurent 10, 15, 18, était rectangle, on aurait* $18^2 = 10^2 + 15^2$*. Or on a* $18^2 = 324$ *et* $10^2 + 15^2 = 325 \neq 324$*. Donc ce triangle n'est pas rectangle.* Cela noté, on se rappellera aussi que le raisonnement « par contraposition » peut être regardé comme un *raisonnement par l'absurde*. Le raisonnement par contraposition, en effet, s'énonce dans sa généralité ainsi : *Si p alors q. Or non-q. Donc non-p*. Le raisonnement par l'absurde est a priori plus large ; on peut l'énoncer formellement ainsi : *Si p alors q et non-q. Donc non-p*. La différence *fonctionnelle* entre les deux formes est la suivante : dans un raisonnement *par contraposition,* on *connaît a priori* une certaine implication *Si p alors q* (il s'agira par exemple du théorème de Pythagore), en sorte que *q* est fixée ; dans un raisonnement *par l'absurde*, où on cherche à prouver que *non-p*, on recherche pour cela une proposition *q* telle qu'on puisse établir que l'on a tout à la fois *Si p alors q* et *Si p alors non-q*, l'une de ces deux implications étant vraie, en général, parce que son conséquent (*q* pour la première, *non-q* pour la seconde) *est connu par ailleurs pour être vrai*. Considérons par exemple le triangle ABC ci-après, où I est le point de concours des bissectrices, et soit *p* la proposition « les bissectrices (BI) et (CI) sont perpendiculaires ».



Montrons par l'absurde que *p* est faux. Soit *q* la proposition « $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} \neq 180°$ » : on sait qu'elle est *vraie* comme conséquence du fait bien connu que « la somme des angles d'un triangle est de 180° ». Par ailleurs, montrons que *p* implique *non-q*, c'est-à-dire que *si le triangle* BIC *est rectangle, alors* $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180°$. Dans le triangle (supposé) rectangle BIC, on a en effet $\widehat{IBC} + \widehat{BCI} = 90°$, et il vient donc : $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 2\widehat{IBC} + 2\widehat{BCI} = 2(\widehat{IBC} + \widehat{BCI}) = 2 \times 90° = 180°$, CQFD.

4) Dans la section IV du document d'accompagnement du programme de 3$^{\text{e}}$, section intitulée ***Au terme du collège***, on peut lire ceci :

[Les élèves] ont rencontré et ont eu l'occasion d'élaborer, au cours de démonstrations, différents types de raisonnement : raisonnement déductif, raisonnement par disjonction des cas lors de l'examen de l'effet de la multiplication sur l'ordre, infirmation par mise en évidence d'un contre-exemple, approche du raisonnement par l'absurde lorsqu'il s'agit de reconnaître si une configuration est une configuration de Thalès ou si un triangle est rectangle.

Mais ce passage avait déjà été cité : on le trouvera, plus haut, dans le résumé de la séance 5, où l'on lit notamment ceci :

En réalité, le raisonnement « par l'absurde » est travaillé ***dès le collège***. […] À plus forte raison le raisonnement par l'absurde est-il un outil logique du travail mathématique en classe de seconde !

Notons encore, à propos des outils logiques du travail mathématique, que l'*Introduction* du programme de 2de précise clairement l'exigence de formation posée par le programme :

Le développement de l'argumentation et l'entraînement à la logique font partie intégrante des exigences des classes de lycée. À l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique formelle de ceux de la logique du langage courant, et, par exemple, à dissocier implication mathématique et causalité.

1.2. Les archives du Séminaire, encore et encore

a) Les archives du Séminaire sont à interroger ***en priorité*** quand on rencontre une difficulté. C'est ainsi que les notes du Séminaire 2002-2003 contiennent par exemple un développement relatif au « problème » – rencontré plus haut – de la notion (ou du mot ?) d'*antécédent*, comme le montre cet extrait.

« Antécédent » ?

Existe-t-il des documents sur les programmes plus détaillés que les programmes officiels ? Certaines notions apparaissent dans tous les livres sans être explicitement au programme : la limite est parfois floue. Exemple : le mot « antécédent » en 2de. (…, MJ, 2de, 10)

Matériaux pour une réponse

En règle générale, le ***document d'accompagnement*** du programme d'une classe est là pour donner des détails supplémentaires – même s'il est souvent muet ou peu disert sur bien des questions que peut légitimement se poser un professeur ! S'agissant du mot « antécédent », on lit tout de même ceci dans celui de 2de :

À propos de fonction définie par une courbe, il importe que les élèves sachent lire de façon critique l'information contenue dans la courbe (lectures approchées d'images et d'antécédents, ou lectures exactes dans certains cas précisés par le graphique, variations, etc.)…

Il va de soi que le mot d'***antécédent*** se trouve ainsi validé, au même titre que celui d'***image***, par les auteurs du document d'accompagnement : d'où le fait que les auteurs de manuels en fasse une usage courant. Il s'agit là, au reste, d'un vocabulaire désormais ancien, comme l'atteste cet extrait du *Dictionnaire de mathématiques* de Lucien Chambadal publié en 1978 :

L'unique élément y de F correspondant à l'élément x par l'application f s'appelle *transformé* de x par f, ou encore *image* de x par f, et se note $f(x)$. Soit y un élément de F. On appelle *antécédent* de y tout élément x de E tel que $f(x) = y$.

b) Il faut prendre l'habitude de fureter, de fouiner dans les archives : ce que la langue anglaise désigne par le verbe *to browse* – qui signifie, au sens propre, « brouter, paître » et, au sens figuré, rechercher dans un livre (idée qu'a reprise le langage informatique il y a quelques décennies). Considérons ainsi la question suivante.

Pensez-vous qu'il vaut mieux commencer par les puissances de 10 ou par les puissances d'exposant entier ? Je suis censé, selon la progression commune établie dans le collège, traiter ces deux notions dans le même chapitre. (MD, MJ, 4^e, 9)

La même source – les notes du Séminaire 2002-2003 – livre ceci.

Puissances de 10 d'abord ?

1. Le programme de 4^e notifie les puissances de 10 avant la notion de puissance. Cela sous-entend-il dans l'organisation du thème qu'il faille traiter les puissances de 10 avant les puissances ? (…, JT, 4^e, 13)

2. Dans le chapitre « Puissances », faut-il commencer par les puissances de 10, ou par les puissances d'un nombre quelconque et ensuite travailler sur les puissances de 10 considérées alors comme un cas particulier très utile ? (…, OS, 4^e, 13)

3. J'ai voulu séparer en deux chapitres non consécutifs les puissances de 10 et les puissances d'un nombre quelconque afin d'alléger ce chapitre et d'aborder les puissances d'un nombre quelconque (exemples numériques) après que celui sur les puissances de 10 a été « digéré ». Se pose alors le problème de l'introduction de la formule $(10^n)^m = 10^{n\times m}$ (pour n, $m \in \mathbb{Z}$). L'égalité $(10^4)^{-2} = \frac{1}{(10^4)^2}$ ne peut pas être justifiée sans les puissances d'un nombre quelconque. (…, OS, 4^e, 13)

4. Dans mon chapitre sur les puissances, j'ai eu la difficulté suivante : j'ai choisi de traiter les puissances de 10 avant les puissances d'entiers relatifs. J'ai alors été confrontée au problème d'introduction de $(10^m)^p = 10^{m\times p}$: en effet, cela cadre plutôt avec les puissances d'entiers relatifs. Comment y remédier ? (…, MJ, 4^e, 13)

Matériaux pour une réponse

1. On notera d'abord que la rencontre avec ***certaines*** puissances a lieu dès la 6^e, mais sans usage de la ***notation exponentielle*** (voir la séance ? de ce Séminaire). C'est ce que rappelle l'extrait suivant du programme de cette classe :

Compétences exigibles
Utiliser l'écriture décimale et en connaître le sens. Multiplier et diviser un décimal par 10 ; 100 ; 1000 ou par 0,1 ; 0,01 ; 0,001.
Commentaires
La multiplication et la division par une puissance de dix sont à relier à des problèmes d'échelles ou de changements d'unités.

2. En classe de 4^e, le programme comporte les développements successifs suivants.

Contenus [1]
Puissances d'exposant entier relatif.
Compétences exigibles [1]
Utiliser sur des exemples numériques, avec ou sans calculatrice scientifique, les égalités : $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$; $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$; $(10^m)^n = 10^{mn}$, où m et n sont des entiers relatifs.
Commentaires [1]
En liaison avec la physique, les activités insisteront sur l'usage des puissances de dix. Les calculatrices seront largement utilisées. Les élèves doivent maîtriser l'usage des touches correspondantes de leur calculatrice.

Contenus [2]
Notation scientifique des nombres décimaux. Ordre de grandeur d'un résultat.
Compétences exigibles [2]

Sur des exemples numériques, écrire un nombre décimal sous différentes formes faisant intervenir des puissances de 10.
Utiliser la notation scientifique pour obtenir un encadrement ou un ordre de grandeur.

Commentaires [2]

Modifier l'écriture d'un nombre comme 25 698, 236 sous la forme $2{,}5698236 \times 10^4$ ou $25\,698\,236 \times 10^{-2}$ ou $25{,}698236 \times 10^3$ est une activité que doivent pratiquer les élèves.
La notation ingénieur n'est pas exigible.

Compétences exigibles [3]

Utiliser sur des exemples numériques, pour des exposants très simples des égalités telles que $a^2 \times a^3 = a^5$, $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$, $(ab)^2 = a^2b^2$, où a et b sont des nombres relatifs non nuls.

Commentaires [3]

Cette rubrique ne doit pas donner lieu à des calculs artificiels sur les puissances entières d'un nombre relatif.
Pour des nombres autres que 10, on s'en tiendra au cas d'exposants simples.

3. Observons d'abord que la question qui nous intéresse apparaît comme un ***thème*** dans le ***secteur*** « Nombres et calcul numérique » du domaine des ***travaux numériques***. Cela fait, il convient surtout de souligner que ce thème d'études est intitulé ***« Puissances d'exposant entier relatif »*** : il se définit donc d'entrée de jeu par la référence aux nombres de la forme a^n (où $a \in \mathbb{Z}^*$, $n \in \mathbb{Z}$), et pas seulement par rapport aux puissances de 10. ***Il n'est donc pas exact*** de dire que le programme de 4e mentionne « les puissances de 10 avant la notion de puissance » ! En revanche, il est vrai que, ***dans le cadre de l'étude des nombres*** $\boldsymbol{a^n}$, « les activités insisteront sur l'usage des puissances de dix », lesquelles doivent ainsi occuper ***l'essentiel du temps d'étude alloué au thème***. Mais cela ne signifie pas non plus que l'on soit tenu de « commencer par les puissances de 10 » : on peut aussi bien commencer « par les puissances d'un nombre quelconque et ensuite travailler sur les puissances de 10 »…

4. L'argument selon lequel la considération d'égalités telles que $(10^3)^4 = 10^{12}$ ou $(10^4)^{-2} = 10^{-8}$ supposerait la notion « générale » de puissance d'un nombre relatif relève d'une vision des mathématiques comme construction *a priori* que l'on dévoilerait en partant du plus général pour en faire dériver le plus particulier : il s'agit là d'une conception où l'on suppose l'histoire faite, au lieu de la regarder comme « à revivre ». Tout à rebours, on peut envisager de travailler d'abord sur les puissances de 10 (on établira alors par exemple que $10^3 \times 10^3 = 10^{3+3} = 10^6$, etc.), puis sur les ***puissances des puissances de 10*** (ce qui conduira à observer que, en écrivant $(10^3)^2$ le produit $10^3 \times 10^3$, on arrive à $(10^3)^2 = 10^6 = 10^{3\times 2}$, etc.), avant de généraliser aux puissances d'un entier non nul quelconque (par exemple). Dans tous les cas, même si l'on a d'abord travaillé sur les nombres a^n (avec a relatif non nul quelconque et $n \in \mathbb{Z}$), il conviendra encore de ***motiver*** l'étude du cas particulier $a = 10$ (qui conduira bien sûr à s'intéresser plus généralement au cas $a = 10^p$, avec $p \in \mathbb{Z}$)…

c) On prendra un dernier exemple, sans sortir des notes du Séminaire de l'année 2002-2003.

En ce qui concerne le domaine de définition d'une fonction, je n'ai pas compris l'objectif du programme. Il faut bien sûr en parler aux élèves et leur demander de justifier l'existence de ce domaine mais doivent-ils la trouver par eux-mêmes ? Est-ce une compétence exigible ? (DV, JT, 2de, 9)

Ici, le « butin » prend la forme suivante.

« Domaines de définition » ?

1. Y a-t-il une notation spécifique en 2de pour le domaine de définition ? J'ai personnellement introduit la notation que j'avais apprise en 2de ($\mathcal{D}_f$), mais je me suis aperçu que dans tous les livres on parle de $\mathcal{E}$, et que les élèves redoublants connaissent aussi cette notation. Est-ce que cela a un intérêt pédagogique ou est-ce juste une différence de notation sans intérêt ? (…, MJ, 2de, 8)

2. Le programme de 2^de^ n'est pas très clair, je trouve, sur la notion d'ensemble de définition. On m'a expliqué que cette notion avait été supprimée, puis réintégrée dans les programmes, mais qu'on avait voulu « alléger » le programme à ce sujet. Que dois-je attendre de mes élèves ? (…, JT, 2^de^, 9)

3. Dans le programme de 2^de^, il est explicitement écrit que l'on ne fera pas d'exercices sur l'ensemble de définition. Pourtant il me paraît important pour les classes supérieures (filières S et ES) de savoir trouver un ensemble de définition pour des fractions ou des radicaux. De plus, lorsqu'on résout $\frac{ax+b}{cx+d}$ =, ≤, ≥ 0, on doit parler de « valeur interdite ». (…, JT, 2^de^, 11)

Matériaux pour une réponse

1. Le changement de notation est lié au fait qu'on ne parle plus comme autrefois de ***domaine*** de définition mais d'***ensemble*** de définition : la lettre $\mathcal{D}$ est alors naturellement remplacée par la lettre $\mathcal{E}$. On notera, au reste, que le mot de « domaine », qui désigne classiquement une partie ***ouverte et connexe*** d'un espace topologique, ne convenait pas, par exemple, pour désigner un segment [*a*, *b*] de $\mathbb{R}$.

2. On notera surtout ce que disait ***déjà*** l'ancien programme de la classe de 2^de^ :

[Le programme] ne porte que sur ***l'étude d'exemples*** et se place dans le cadre des ***fonctions définies sur un intervalle*** ; on évitera tout exposé général sur les fonctions (statut mathématique du concept de fonction, notion d'ensemble de définition, opérations algébriques, composition, relation d'ordre, restriction...). Le plus souvent, l'intervalle d'étude sera indiqué lors de la définition de la fonction considérée. Dans certains exemples, l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles : on se ramène alors à une étude portant sur chacun de ces intervalles ; on ne multipliera pas de tels exemples.

On observera ici, notamment, l'emploi de l'expression « ensemble de définition » en lieu et place de l'ancien « domaine de définition », et l'exhortation à ne pas céder à la tentation de l'étude formelle de l'ensemble de définition « maximal » d'une fonction donnée par son expression algébrique – type de tâches qui, en une évolution spontanée quelque peu pathologique, avait autrefois reçu, dans les classes de 2^de^, un développement très excessif.

3. On notera que ce sont en fait les rédacteurs des programmes du début des années 1980 qui ont voulu donné un coup d'arrêt à l'excessif développement de la pratique systématique de rechercher le « domaine de définition » de fonctions données par leur expression analytique. C'est alors en effet qu'apparaît l'injonction sans appel, reconduite programme après programme, de placer l'étude à conduire « dans le cadre des ***fonctions définies sur un intervalle*** », injonction reprise sous une forme à peine allégée par l'actuel programme de 2^de^, lequel énonce ceci :

À l'occasion de tous ces exemples, on abordera la notion d'ensemble de définition. On évitera les exercices systématiques de détermination d'ensemble de définition ; dans la plupart des cas, on le donnera. En dehors de quelques exemples où celui-ci pourra être fini (cas de fonctions du temps du type « nombre de mariages en fonction de l'année » où la variable est discrète et les graphiques correspondants parfois continus !), ce sera toujours un intervalle ou la réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

4. En pratique, la recherche de l'ensemble « maximal » sur lequel une expression donnée est définie doit rester exceptionnelle. On demandera en revanche aux élèves de se rendre capable de vérifier, chaque fois qu'une fonction est donnée par son expression algébrique, que cette fonction est bien définie sur tel intervalle ***donné*** sur lequel on souhaiterait *a priori* – à tort ou à raison – l'étudier. Une telle étude peut conduire alors à scinder l'intervalle en deux sous-intervalles disjoints, ou à en rejeter une partie, etc. Ce qu'illustrent les problèmes ci-après :

Dans chacun des cas suivants, la formule algébrique permet-elle de définir une fonction sur l'intervalle *I* ?

a) $\frac{\sqrt{x-1}}{x}$; $I =]0, +\infty[$

b) $\dfrac{\sqrt{2x + 7}}{x^2 - 4}$; I =]–2, 5[.

Bien entendu, on devra soigneusement doser la quantité d’exercices formels du type précédent, sous peine de voir refleurir la domaine-de-définitionite qui sévit jadis si lourdement.

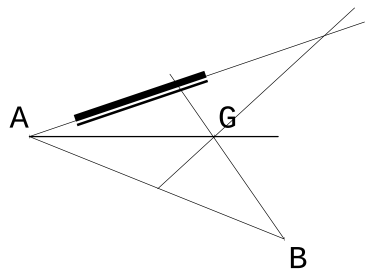
2. Observation & analyse

2.1. Une séance en 4^e

a) On examine d’abord les paragraphes 8, 9, 10 du compte rendu de la séance en 4^e intitulée *À propos des médianes d’un triangle*.

Paragraphe 8, 9, 10

Il est 14 h 18. « Voilà ! Ça devrait être bon ! » P souligne qu’on a ainsi la 3^e médiane, bien qu’on n’ait pas le point C. « Comment construire le point C ? » Plusieurs doigts se lèvent. C est sur la médiane, mais où ? L’idée s’exprime de faire glisser la règle pour obtenir approximativement la situation voulue…



P : « Il faudrait qu’on sache où se trouve le centre de gravité sur une médiane… » Une élève : « Au milieu ! » P fait observer qu’alors on aurait C facilement. On laisse de côté le problème, indique-t-elle, on y reviendra.

On passe à l’étude de la position du centre de gravité de G sur les médianes. P a fait la figure au tableau, sur le quadrillage peint. Les élèves sont invités à travailler sur la feuille distribuée, qui porte deux exemples. P leur montre comment placer le milieu à l’aide du quadrillage. Il est 14 h 24.

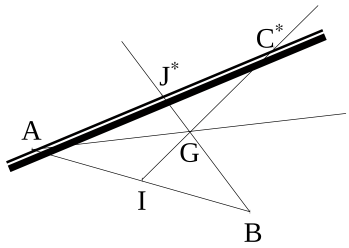
Structure et contenu de la séance

SC8910-1. L’épisode examiné participe d’une activité d’étude et de recherche dont l’objet est la résolution du problème suivant : déterminer le sommet C, supposé perdu, d’un triangle ABC dont on connaît le centre de gravité G et les sommets A et B.

SC8910-2. Un premier sous-épisode, narré dans les paragraphes 8 et 9, voit la classe proposer des directions d’attaque du problème. Un second sous-épisode d’étude et de recherche est alors lancé par P, *motu proprio*, à propos du problème suivant : quelle est la position du centre de gravité sur la médiane ?

Organisation mathématique

OM8910-1. Dans cet épisode de classe, plusieurs organisations mathématiques *potentielles* affleurent autour du type de tâches $T_{C?}$. Une première OMP potentielle $[T_{C?}/\tau_{C?}^*/\theta_{C?}/\Theta_{C?}]$ intègrerait ainsi une technique $\tau_{C?}^*$ de construction *approchée*, consistant à faire tourner la règle *graduée* autour du point A jusqu’à ce que les points C* et J* d’intersection du bord de la règle avec, respectivement, la droite (IG) et la droite (BG), soient situés de façon que J^* apparaisse (sur la graduation de la règle) comme très voisin du milieu de $[AC^*]$ (voir la figure ci-dessous).



OM8910-2. Une deuxième OMP potentielle est ébauchée à travers la formulation d'une conjecture technologique $\theta_{C?}^{**}$: G serait au milieu de [IC]. La technique $\tau_{C?}^{**}$ correspondante, qui semble évidente à P, est laissée implicite dans la classe. Cette OMP, qu'on peut noter $[T_{C?}/\tau_{C?}^{**}/\theta_{C?}^{**}/\Theta_{C?}]$, est, sur l'injonction de P, abandonnée dans cet état.

OM8910-3. La construction d'une troisième OMP potentielle est lancée par P, qu'on peut noter $[T_{C?}/\tau_{C?}/\theta_{C?}/\Theta_{C?}]$, et dont la technologie $\theta_{C?}$ devrait préciser la position de G sur [IC].

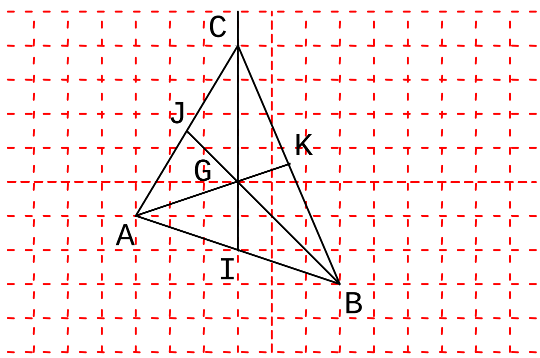
OM8910-4. Une ultime organisation mathématique apparaît, en fin d'épisode, autour du type de tâches suivant : étant donné deux points d'un quadrillage, marquer le milieu du segment dont ces points sont les extrémités. Le compte rendu ne dit rien sur la technique mise en place et sa justification éventuelle.

Organisation didactique

OD8910-1. L'épisode relève en son entier du *moment de l'émergence d'une technique* $\tau_{C?}$ ainsi que, corrélativement et partiellement, du *moment technologique*.

OD8910-2. Les propositions techniques ou technologico-techniques des élèves sont sollicitées et brièvement examinées par P, de façon soit explicite (c'est le cas de la technique $\tau_{C?}^{*}$), soit implicite (cas de la technique $\tau_{C?}^{**}$) : le *débat* à leur endroit est des plus réduits.

OD8910-3. La direction de l'étude par P joue un rôle essentiel dans le passage – relativement immotivé, semble-t-il, pour la classe – du premier sous-épisode au second, qui sera consacré à l'étude d'un élément technologique *supposé* clé. On doit noter, à ce propos, le dissociation du *topos* de P et du *topos* des élèves : pour P, la recherche technologique lancée doit aboutir à un résultat classique, que P sait producteur d'une technique $\tau_{C?}$ adéquate ; pour les élèves, il y a là au mieux une conjecture. On peut, en vérité, penser que nombre d'entre eux se guident en l'espèce sur le désir de P, non sur l'analyse objective de la situation d'étude et de recherche.



OD8910-4. L'étude de la position de G sur la médiane se présente d'abord comme expérimentale. L'expérimentation utilise un quadrillage (voir la figure ci-contre). Ce choix n'est pas le fruit d'une délibération collective : il apparaît entièrement comme celui de P, qui a de même assumé la préparation pratique du « montage expérimental » – qui se réduit ici aux figures dessinées sur le tableau (sur un volet quadrillé de celui-ci), ainsi que sur la feuille de travail distribuée aux élèves.

Gestion de la séance

GS8910-1. La gestion de l'épisode est sans doute déséquilibrée par le désir de P d'en venir à ce qui, institutionnellement, semble motiver toute la séance : établir le résultat classique sur la position de G.

GS8910-2. Ce déséquilibre conduit notamment à ne pas approfondir les apports de la classe. Ainsi la proposition concernant la technique $\tau_{C?}^{*}$ ne fait-elle pas l'objet d'une analyse mettant en jeu la distinction entre construction *exacte* et construction *approchée*, analyse qui permettrait seule de justifier son rejet (car elle constitue un procédé *approché* tout à fait acceptable).

GS8910-3. Il en va de même de la technique $\tau_{C?}^{**}$: celle-ci aurait pu être le point de départ d'une étude expérimentale conçue par la classe, avec l'aide de P (par exemple pour l'idée, peut-être encore trop peu familière, d'user d'un quadrillage), conduisant à établir que la conjecture formulée à l'emporte-pièce par une élève (« Au milieu ! ») est en vérité erronée, et amenant la classe, au-delà, vers d'autres conjectures formulées en termes de rapports numériques « simples » et chaque fois dûment soumis à l'expérience.

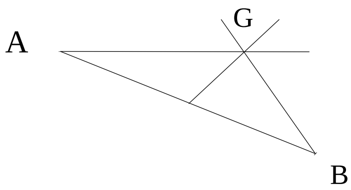
---

b) On revient maintenant aux travaux portant sur les paragraphes 5, 6, 7, 8, 9, 10 du compte rendu, paragraphes que l'on reproduit à nouveau.

[Paragraphes 5 à 10]

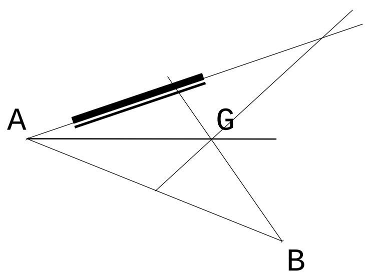
[5] L'élève qui avait lu l'énoncé intervient spontanément : « On n'a pas toutes les données !… » Il est 14 h 12. Murmures de travail.

[6] P : « Qui a une idée ? » Un élève, qu'elle envoie au tableau, dit qu'on peut construire les trois médianes – contrairement à ce qu'affirment certains, souligne P.



[7] L'élève au tableau met en place le milieu de [AB]. P conteste sa manière de faire ; il recommence, cette fois correctement, mais il est gêné par le bas du tableau, trop proche de son dessin…

[8] Il est 14 h 18. « Voilà ! Ça devrait être bon ! » P souligne qu'on a ainsi la 3^{e} médiane, bien qu'on n'ait pas le point C. « Comment construire le point C ? » Plusieurs doigts se lèvent. C est sur la médiane, mais où ? L'idée s'exprime de faire glisser la règle pour obtenir approximativement la situation voulue…



[9] P : « Il faudrait qu'on sache où se trouve le centre de gravité sur une médiane… » Une élève : « Au milieu ! » P fait observer qu'alors on aurait C facilement. On laisse de côté le problème, indique-t-elle, on y reviendra.

[10] On passe à l'étude de la position du centre de gravité de G sur les médianes. P a fait la figure au tableau, sur le quadrillage peint. Les élèves sont invités à travailler sur la feuille distribuée, qui porte deux exemples. P leur montre comment placer le milieu à l'aide du quadrillage. Il est 14 h 24.

1) On s'arrête cette fois sur le contenu de la deuxième rubrique du plan d'analyse indiqué : *Organisation mathématique*. Rappelons que 28 fiches de travail ont été produites, dont 8 étaient l'œuvre de personnes seules, 17 de binômes, 3 de trinômes.

2) La rubrique *Organisation mathématique* doit en principe mentionner à la fois les OM en cours de construction durant l'épisode étudié et les principales OM antérieurement construites (ou simplement introduites au cours de l'épisode) et qui sont mobilisées comme outils du travail mathématique. Le contenus des travaux réalisés – il y a maintenant longtemps – reste à cet égard loin de l'objectif à atteindre. Rappelons que la consigne était de préciser « au moins une indication relevant de chacune des quatre rubriques habituelles », et donc en particulier de la rubrique *Organisation mathématique*.

3) Un certain nombre de fiches proposent un ou plusieurs *types de tâches*, ce que les exemples ci-après suffisent à illustrer.

• Construction des médianes connaissant un côté et le centre de gravité.

• Construire à la règle et au compas le 3^{e} sommet d'un triangle connaissant un côté et le centre de gravité.

• Placer le milieu d'un segment à l'aide du quadrillage.

4) Les tentatives de préciser une *technique* ne sont pas légion. En outre, plusieurs d'entre elles sont viciées par une confusion – qu'il faudra apprendre à éviter – entre technique et technologie. Ainsi en va-t-il clairement dans la réponse suivante, reproduite aussi fidèlement que possible :

Type de tâches : Tracer les médianes du triangle.

Technique : ~~une médiane passe par le centre de gravité et par le milieu d'un côté~~

Technologie : • une médiane passe par le centre de gravité et par le milieu d'un côté.
• les trois médianes concourent au point G, centre de gravité.

Pour être tout à fait justes, les formulations adoptées auraient dû être quelque chose comme ceci :

Type de tâches : Tracer les médianes d'un triangle dont on connaît deux sommets et le centre de gravité.

Technique : 1) Marquer le milieu du côté connu ;

2) tracer les droites passant par les sommets connus et le centre de gravité et la droite passant par le milieu du côté connu et le centre de gravité.

Technologie : La médiane issue d'un sommet passe par ce sommet, par le centre de gravité du triangle et par le milieu du côté opposé.

On observera aussi que les formulations d'origine sont souvent *insuffisamment précises*. Il en est de même, par exemple, dans le cas suivant :

Type de tâches : Construire les médianes d'un triangle.

Technique : Construction à la règle.
Technologie : définition de la médiane ; propriété de G.

Dans certains cas, l'imprécision conduit à une description étonnante, comme dans cette réponse :

T_2 : Placer un point sur droite (non réalisée).
τ_2 : Placer le 3e sommet d'un triangle connaissant G (non réalisée).

Un effort sensible doit donc être porté sur la *description précise* tant du type de tâches que de la technique ou des énoncés technologiques et théoriques.

5) Une erreur qu'il convient de relever consiste à confondre l'organisation mathématique qui se met en place et l'organisation didactique qui permet cette mise en place. Considérons ainsi ce fragment de réponse :

Type de tâches : construire à la règle et au compas le 3e sommet d'un triangle connaissant un côté et le centre de gravité du triangle.

Technique : émettre une conjecture quant à la position du centre de gravité sur la médiane d'un triangle.

Ici, la prétendue technique est une technique *didactique*, c'est-à-dire une technique d'étude et de recherche, pour trouver le résultat technologique clé qui permet de produire et de justifier la technique *mathématique* attendue. Le bilan de l'analyse aurait donc dû avoir à peu près le contenu suivant :

Type de tâches. Construire à la règle et au compas le 3e sommet d'un triangle connaissant un côté et le centre de gravité du triangle.

Technique. 1) Marquer le milieu I du côté connu ;
2) sur la droite (IG), du côté de G ne contenant pas I, marquer C tel que GC = 2GI.

Technologie. Le centre de gravité d'un triangle est situé sur chaque médiane aux deux tiers de la longueur à partir du sommet.

La confusion du *mathématique* et du *didactique* (en mathématiques) est plus nette encore dans le cas suivant :

Type de problème : trouver la position du centre de gravité sur les médianes.
Technique : les élèves tentent des techniques graphiques : faire glisser la règle, tracer les médianes.

Le problème évoqué est un problème d'étude et de recherche dont la solution sera un couple technique mathématique/technologie mathématique, cela dans un certain cadre théorique. On notera en passant que, de plus, les éléments de technique didactique indiqués ne se rapportent nullement à la tâche didactique considérée.

6) D'autres réponses sont assez loin de donner une description de l'organisation mathématique dont l'épisode observé voit l'ébauche de la mise en place. Dans cette catégorie, la *tentation narrative* déjà mise en évidence réapparaît. Ainsi en va-t-il, parmi quelques autres, de la réponse suivante :

La recherche avec les élèves porte d'abord sur l'appartenance du sommet à une médiane puis sur la position du centre de gravité sur cette médiane.

7) Une conclusion s'impose. Du temps a passé depuis ces premiers travaux. Les choses se sont-elles éclaircies ? Il convient de s'en assurer. On le fera notamment en examinant attentivement les notes relatives à l'organisation mathématique que proposent d'une part le résumé de la séance 8, d'autre part le présent résumé – notes que l'on réunit ci-après à cette fin.

Organisation mathématique

OM567-1. L'organisation mathématique ponctuelle qui émerge, $[T_{me/\{A,\ B,\ G\}}/\tau_{me/\{A,\ B,\ G\}}/\theta/\Theta]$, semble suggérée plutôt qu'explicitée. En particulier, le résultat technologique clé mis en jeu n'est pas nettement formulé :

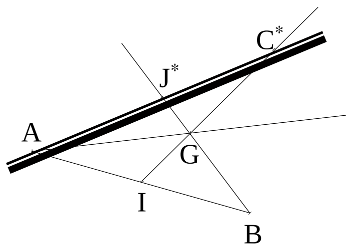
$\theta_{me/\{A,\ B,\ G\}}$. La droite support de la médiane issue d'un sommet peut être déterminé de deux façons (outre sa définition usuelle comme droite passant par ce sommet et par le milieu du côté opposé) : comme la droite passant par le sommet considéré et par le centre de gravité, ou comme la droite passant par le milieu du côté opposé et par le centre de gravité.

Ce résultat se déduit du concours des médianes au centre de gravité ; mais cette déduction semble elle-même être tenue pour aller de soi.

OM567-2. S'agissant de la technique τ_M relative au type de tâches T_M de détermination graphique du milieu d'un segment donné, P intervient pour rectifier une manière de faire qu'elle juge inadéquate. Le compte rendu ne dit rien ni sur cette inéquation, ni sur ce qui fonde, au plan de la technologie, la « bonne » manière de faire à laquelle P ramène l'élève. Il ne précise pas davantage τ_M elle-même. On peut donc écrire ainsi *l'organisation mathématique ponctuelle* constituée autour du « point » que constitue l'unique type de tâches T_M : $[T_M/\tau_M/\theta/\Theta]$.

Organisation mathématique

OM8910-1. Dans cet épisode de classe, plusieurs organisations mathématiques *potentielles* affleurent autour du type de tâches $T_{C?}$. Une première OMP potentielle $[T_{C?}/\tau_{C?}^*/\theta_{C?}/\Theta_{C?}]$ intègrerait une technique $\tau_{C?}^*$ de construction *approchée*, consistant à faire tourner la règle *graduée* autour du point A jusqu'à ce que les points C* et J* d'intersection du bord de la règle avec, respectivement, la droite (IG) et la droite (BG), soient situés de façon que J* apparaisse (sur la graduation de la règle) comme très voisin du milieu de [AC*] (voir la figure ci-dessous).



OM8910-2. Une deuxième OMP potentielle est ébauchée, à travers la formulation d'une conjecture technologique $\theta_{C?}^{**}$: G serait au milieu de [IC]. La technique $\tau_{C?}^{**}$, qui semble évidente à P, est laissée implicite dans la classe. Cette OMP, qu'on peut noter $[T_{C?}/\tau_{C?}^{**}/\theta_{C?}^{**}/\Theta_{C?}]$, est, sur l'injonction de P, abandonnée dans cet état.

OM8910-3. La construction d'une troisième OMP potentielle est lancée par P, qu'on peut noter $[T_{C?}/\tau_{C?}/\theta_{C?}/\Theta_{C?}]$, et dont la technologie $\theta_{C?}$ devrait préciser la position de G sur [IC].

OM8910-4. Une ultime organisation mathématique apparaît, en fin d'épisode, autour du type de tâches suivant : étant donné deux points d'un quadrillage, marquer le milieu du segment dont ces points sont les extrémités. Le compte rendu ne dit rien sur la technique mise en place et sa justification éventuelle.

c) On complètera les notations précédentes en s'arrêtant sur la question suivante.

Doit-on à chaque outil technologique associer une tâche et une technique ? Exemple :

θ_1. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{numérateur}}{\text{dénominateur}}$ (à rédiger)

T. Identifier les éléments d'une fraction

τ. Le numérateur est l'élément du haut ; le numérateur est l'élément du haut

Ou dois-je laisser θ_1 et passer à θ_2 ? En résumé, a-t-on toujours le triptyque [θ, T, τ] ? (CM, OS, 4e, 9)

1) Notons d'abord que l'écriture adoptée inverse l'ordre usuel d'écriture : on note [$T/\tau/\theta/\Theta$] l'organisation mathématique ponctuelle (OMP) formée autour du type de tâches *T*. Le fait de « partir » de θ peut laisser entendre que θ « vient avant », ce dont il faut se garder.

2) On suppose ici que l'on se réfère à des quotients d'entiers ou de décimaux. Le nombre que l'on note $\dfrac{a}{b}$ est, *par définition*, le nombre qui, multiplié par b, donne a ; en d'autres termes, c'est le nombre qui, multiplié par le *dénominateur*, donne le *numérateur*. Le *type de tâches* « identifier le numérateur et le dénominateur d'une écriture fractionnaire » est certainement un type de tâches à maîtriser – et cela, dès l'année de 6e. La *technique* indiquée est essentiellement la bonne ; mais on n'oubliera pas que le programme n'écarte pas l'usage de la notation / (la barre oblique, appelée aussi, en anglais, *solidus*), comme le souligne *in fine* ce passage de l'introduction au programme du cycle central :

Le vocabulaire et les notations seront introduits, comme en sixième, au fur et à mesure de leur utilité : la notation cos, les symboles $\sqrt{\ }$, $\geq$, $\leq$, $\approx$, et les notations a^n et a^{-n} ; il y aura également lieu de familiariser les élèves avec le décodage de calculs utilisant pour la division les symboles ÷ et /.

3) La technologie de cette technique est plus subtile à préciser. Il faut y distinguer au moins deux éléments. Le premier consiste à énoncer que l'application (qui porte sur des assemblages écrits)

$$\text{écriture fractionnaire} \mapsto (\text{« haut »}, \text{« bas »})$$

est bien définie, ce qui ne pose guère de problèmes lorsqu'on utilise la barre horizontale, mais qui peut en poser lorsqu'on utilise la barre oblique : quel est le « haut », c'est-à-dire le « devant », de l'écriture $2 + 3/5$, par exemple ? Dans son célèbre ouvrage *A History of Mathematical Notations* (1928-1929), Florian Cajori écrit (§ 275) :

Alexander Macfarlane [*Lectures on Ten British Physicists*, New York, 1919] adds that Stokes wished the solidus to take the place of the horizontal bar, and accordingly proposed that the terms immediately preceding and following be welded into one, the welding action to be arrested by a period. For example, $m^2 - n^2/m^2 + n^2$ was to mean $(m^2 - n^2)/(m^2 + n^2)$, and a/bcd to mean $\dfrac{a}{bcd}$, but $a/bc \cdot d$ to mean $\dfrac{a}{bc}\,d$. "This solidus notation for algebraic expressions occurring in the text has since been used in the *Encyclopaedia Britannica*, in Wiedemann's *Annalen* and quite generally in mathematical literature." It was recommended in 1915 by the Council of the London Mathematical Society to be used in the current text.

4) Une fois le « haut » et le « bas » bien justifiés dans leur existence non ambiguë, le second élément technologique concerne les *noms usuels* qu'on leur donne : *numérateur* pour désigner le « haut », *dénominateur* pour désigner le « bas ». On peut utilement préciser, ici, que le dénominateur ***« dénomme »***, tandis que le numérateur ***« nombre »***, c'est-à-dire compte. Ainsi l'écriture $\frac{3}{5}$ désigne-t-elle *trois* « parties de l'unité » qui, en l'espèce, sont des *cinquièmes*, tandis que $\frac{5}{16}$ est l'écriture fractionnaire d'un nombre qu'elle décrit comme *cinq seizièmes* : « seizième » est la dénomination des parties de l'unité considérée, et « cinq » est le nombre de telles parties que l'on « prend ». Dans son *Liber abbaci* (1202), Fibonacci (1170-1250) écrit ainsi (en latin, traduction personnelle) : « Quand, au-dessus d'un nombre quelconque, apparaît une barre, et, que, au-dessus de celle-ci, un autre nombre quelconque est écrit, le nombre du dessus désigne la part ou les parts du nombre du dessous ; le nombre du dessous est appelé dénominateur, le nombre du dessus numérateur. »

5) On a toujours le « triptyque » [T/τ/θ/Θ]. Ce que l'on *explicite* de θ au moment de « mettre en forme » l'OMP, partie de l'OML en cours de construction, peut varier beaucoup. Le type de tâches T évoqué ici pourrait peut-être être « oublié » dans une 4^{e} ne présentant pas de lourds déficits en la matière. En revanche, parce que la chose n'a sans doute jamais été explicitée, il apparaît judicieux de préciser, ainsi qu'on vient de le faire, les raisons des noms de dénominateur et de numérateur – avant de passer à la suite.

6) Pour compléter un peu les indications précédentes, on a reproduit ci-dessous un extrait des *History of Mathematics Pages* rédigées par un professeur de *high school* américain, Jeff Miller (qui, dans l'extrait suivant, s'appuie d'ailleurs essentiellement sur le livre de Cajori). On trouvera ces pages à l'adresse http://members.aol.com/jeff570/.

The horizontal fraction bar was introduced by the Arabs. "The Arabs at first copied the Hindu notation, but later improved on it by inserting a horizontal bar between the two numbers" (Burton).

Several sources attribute the horizontal fraction bar to al-Hassar around 1200.

When Rabbi ben Ezra (c. 1140) adopted the Moorish forms he generally omitted the bar.

Fibonacci (c.1175-1250) was the first European mathematician to use the fraction bar as it is used today. He followed the Arab practice of placing the fraction to the left of the integer (Cajori vol. 1, page 311).

According to the DSB, Abu Abdallah Yaish ibn Ibrahim ibn Yusuf ibn Simak al-Umawi (14th or 15th century) insisted that the horizontal fraction bar be used, whereas easterners continued to write it without the bar.

The bar is generally found in Latin manuscripts of the late Middle Ages, but when printing was introduced it was frequently omitted, doubtless owing to typographical difficulties. This inference is confirmed by such books as Rudolff's *Kunstliche Rechnung* (1526), where the bar is omitted in all ordinary fractions but is inserted in fractions printed in larger type and those having large numbers (Smith vol. 2, page 216).

Michael Closs points out that if we define a horizontal fraction bar to be a horizontal line that separates the numerator from the denominator and demarcates them as such, then this type of notation was used with exactly that purpose more than a millennium before al-Hassar. In *Demotic Mathematical Papyri*, (Brown University Press, London, 1972, pages 8-9) Richard A. Parker writes that in three papyri dating from the third century B. C. to the Roman period, "the numerator is written first, and the denominator follows on the same line. In problems 2, 3, 10, and 13 (the Cairo papyrus) the numerator is underlined. In problems 51 and 72 the denominator is underlined."

Some writers use the term vinculum for the horizontal fraction bar. This term originally applied to the mark when used as a grouping symbol. Fibonacci used the Latin word *virga* for the horizontal fraction bar.

The diagonal fraction bar (also called a *solidus* or virgule) was introduced because the horizontal fraction bar was difficult typographically, requiring three terraces of type.

An early handwritten document with forward slashes in lieu of fraction bars is Thomas Twining's Ledger of 1718, where quantities of tea and coffee transactions are listed, e.g. 1/4 pound green tea. This usage of the horizontal fraction bar was found by Hans Lausch, who believes there are likely even earlier occurrences.

Lausch has also found the horizontal fraction bar in *Allgemeine Deutsche Bibliothek*, a Berlin review journal which was started in 1765. A precise reference may be forthcoming.

The earliest instance of a diagonal fraction bar shown by Cajori (vol. 1, page 313) is in 1784, when a curved line resembling the sign of integration was used in the *Gazetas de Mexico* by Manuel Antonio Valdes.

In 1843, a curved line was used by Henri Cambuston in *Definicion de las principales operaciones de arismetica* (Cajori vol. 1, page 313)

In 1845, the use of the solidus was recommended by De Morgan in an article "The Calculus of Functions" published in the Encyclopaedia Metropolitana of 1845 (Cajori vol. 1, page 313).

In 1852, the solidus was used by Antonio Serra Y Oliveres in Manuel de la Tipografia Española (Cajori vol. 1, page 313).

3. Forum des questions : exposés du jour

3.1. Analyse didactique d’une séance en classe de 3^e^

a) On écoute un exposé de *DC* sur la question suivante :

Exposé 20. Que pourrait contenir l’analyse didactique du compte rendu d’une séance en classe de 3^e^ (consacrée au calcul sur les radicaux) qui a été diffusé lors de la séance 8 de ce séminaire ?

b) Remarques et commentaires.

3.2. Exposés en attente

~~***MD* : Équations & inéquations**~~

Exposé 15. Quels sont les principaux problèmes auxquels on doit être attentif au moment de concevoir et de programmer l’étude du thème des équations et inéquations en seconde ?

~~***WB* : Maîtrise et emplois pertinents des outils informatiques**~~

Exposé 17. Comment former les élèves à un emploi judicieux des outils informatiques dans le travail mathématique ?

~~***MG* : expérimentation spatiale et géométrie euclidienne**~~

Exposé 18. Qu’est-ce que l’« axiome » de Wallis ? Qu’implique-t-il à propos de l’expérimentation spatiale dans la construction d’une théorie géométrique de l’espace sensible, du moins si l’on suppose que cet espace est euclidien ?

~~***DP* : la notion de question cruciale par l’exemple**~~

Exposé 19. Quel est le rôle des questions cruciales dans le travail mathématique ? Quelle est leur place dans la constitution d'une éducation mathématique ?

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 11 : mardi 6 décembre 2005

0. Le programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques // 2. Forum des questions : exposés du jour // 3. Forum des questions : poursuites & anticipations // 4. Évaluation & développement

1. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques

1.1. Lecture commentée de la notice *Éducation mathématique & citoyenneté* de la sous-section 5.5 à la sous-section 6.3.

1.2. Début de la lecture de la notice *Questions & réponses* : sections 1 & 2.

2. Forum des questions : exposés du jour

a) On écoute un exposé de *DP* sur la question suivante :

Exposé 19. Quel est le rôle des questions cruciales dans le travail mathématique ? Quelle est leur place dans la constitution d'une éducation mathématique ?

b) Remarques et commentaires.

3. Forum des questions : poursuites & anticipations

3.1. Se former et former

a) On considère ici un ensemble de trois questions qui appelle des remarques décisives.

1. J'ai tenté plusieurs sortes de correction pour un DS : en DM (après avoir donné les exercices correspondants faits en classe) ; en commun au tableau ; en n'expliquant que les points qui ont posé problème ; etc. Je n'ai toujours pas trouvé la formule qui me convienne parfaitement, ainsi qu'aux élèves. Quelles peuvent être les solutions différentes ? (CM, OS, 4^{e}, 10)

2. En faisant un bilan du premier trimestre, je me rends compte que de nombreux élèves manquent de méthode de travail, en particulier quand il s'agit de préparer un DS. Quel est le rôle de l'enseignant dans l'acquisition des méthodes de travail *propres* à chaque élève ? (NFG, MJ, 2de, 10)

3. Puis-je changer le mode de fonctionnement de la classe au cours de l'année – par exemple instaurer des micro-contrôles lorsqu'ils me rendent leur DM, alors que je ne le faisais pas avant ? (SP, MJ, 2de, 10)

b) La question de la correction d'un DS est en apparence difficile. Notons ce paradoxe apparent : au XIX[e] siècle, la classe n'est qu'un point de rendez-vous avec le professeur entre deux périodes passées « en étude ». Pour l'essentiel, le professeur y fait réciter les leçons, rend les copies corrigées des jours précédents, puis dicte de nouveaux devoirs à faire, avant de consacrer un temps à la traduction d'une page de latin ou de grec que les élèves ont dû préparer à l'avance. La classe terminée – elle dure alors deux heures –, les élèves retournent en étude. Bien entendu, la correction est ici l'essentiel, le « cours » n'est rien, ou quasiment. La situation s'est ensuite inversée : le cours est devenu le point central de l'activité de la classe, tandis que la correction des devoirs se voyait ramenée à un rôle d'appendice didactique – qui est nécessairement là, qui peut faire souffrir très fort, mais qui – croit-on – ne sert pas à grand chose ! L'institution « correction de devoirs » est ainsi en crise depuis plusieurs décennies au moins : du côté du professeur comme du côté des élèves, on n'en reconnaît plus les ***fonctions didactiques***. C'est donc aujourd'hui à la reconstruction didactique de ce qui peut apparaître comme un rituel dénué de sens que la profession doit s'employer. Dans ce but, on commencera entendre un exposé présentant les éléments contenus dans les archives du Séminaire qui esquissent une réponse à la double question suivante :

Exposé 23. Comment peut-on donner sens à la correction d'un DS entendue comme *œuvre collective* ? En quoi cela modifie-t-il le travail de « correction » que le professeur doit penser, organiser et impulser dans la classe ?

Cet exposé sera préparé et présenté par *CM* elle-même.

c) En attendant d'entrer dans le vif du sujet, on soulignera ici, toutefois, un aspect de la formulation adoptée qui mérite attention : « Je n'ai toujours pas trouvé la formule qui me convienne parfaitement, ainsi qu'aux élèves », note Cécile. Or la « formule » cherchée, qui est en vérité une certaine *technique didactique*, ou, plus exactement, une *praxéologie* didactique ponctuelle (c'est-à-dire une organisation didactique ponctuelle : le mot de praxéologie a été introduit à l'occasion de l'exposé 14, dû à MK), avec sa technique et sa technologie (et, derrière celle-ci, ses éléments théoriques), cette formule, donc, n'a pas pour première vertu de « convenir » à qui que ce soit, mais *de permettre à qui la met en œuvre* – ici, une classe, élèves et professeure agissant ensemble en coopération – *de produire les effets escomptés*. La rhétorique tellement marquée au plan éthique du « convenable » est, dans un cadre de formation, à plusieurs égards *nuisible*, et cela aussi bien en ce qui concerne la formation scolaire des élèves que la formation professionnelle, initiale ou continuée, des professeurs. La formation qui lui est proposée n'a pas en effet à convenir au formé *tel qu'il est* au moment où elle lui est proposée, comme si celui-ci était un être figé dans ses compétences et ses incapacités : visant à l'*élever*, elle doit au contraire créer en lui le sentiment d'une inadéquation, d'une inadaptation, d'une incongruité entre ce qu'il est présentement et ce que la formation lui impose de devenir. Au figement, et à la revendication narcissique du figement, doit donc se substituer en chacun une tension créatrice d'être. Au lieu de chercher une manière de faire qui, platement, me « convienne », je chercherai une manière de faire *qui m'aide à m'élever* et qui, du même mouvement, pousse les élèves qui me sont confiés à progresser, dans un exhaussement partagé. La toxicité de la demande de « convenance » ne saurait à cet égard être trop soulignée : là où, pour user d'un vocabulaire cher au psychologue Jean Piaget (1896-1980), la formation devrait viser à provoquer une *accommodation* – c'est-à-dire une transformation structurelle – chez le formé, celui-ci ne cherche plus guère que des réponses directement assimilables *par lui tel qu'il est et tel qu'il entend demeurer*, c'est-à-dire des « réponses » dont la réception ne suppose en lui aucun changement fondamental *qui* *l'élève*. Au plan personnel, on risque fort alors de se laisser suffoquer par des bouffées d'*adultisme* (sur ce mot, on consultera les archives). Au plan institutionnel, on ouvre ainsi la voie à la transformation de l'École – au sens large, incluant l'IUFM – en un supermarché où chacun viendrait faire son marché « à sa convenance », dans un consumérisme quiet qui deviendrait bientôt un obstacle insurmontable au besoin objectif que chacun a de s'élever.

d) Ce qui précède apporte des éléments de réponse précieux à la deuxième question, sur « le rôle de l'enseignant dans l'acquisition des méthodes de travail *propres* à chaque élève ». Tout d'abord, il faut, là encore, se refuser à sanctifier ce qui serait « propre » à telle personne : les techniques didactiques dont chacun doit travailler à s'équiper ont pour premier mérite de lui permettre d'accomplir les tâches des types visés, avant que de lui donner le sentiment qu'elles lui « conviendraient » particulièrement bien ! À cet égard, le professeur n'a pas pour seule mission d'équiper ses élèves de praxéologies mathématiques, mais aussi de les aider à élaborer et à améliorer des praxéologies *didactiques* personnelles et collectives qui soient appropriées aux organisations praxéologiques mathématiques à maîtriser. Sans doute y a-t-il à cet égard une certaine liberté de l'élève, mais celle-ci ne saurait en aucune façon hypothéquer le travail du groupe classe – par exemple en cela que, quoique regardées par l'élève comme lui « convenant », les techniques qui lui seraient « propres » ne lui permettraient pas de jouer son rôle au sein du groupe classe. On peut d'ailleurs reprendre sur ce point cette notation de la séance 10 à propos de techniques mathématiques :

> Libre à chacun d'agir à sa guise dans sa vie mathématique *privée*, et même de faire un usage *privé* (c'est-à-dire *non visible dans la classe*) de ce qu'il aura élaboré pour son propre compte (par exemple pour contrôler son utilisation de la technique institutionnalisée dans la classe). Mais gare à l'idionomie, surtout quand elle menace ce qui est le point d'appui principal du travail des élèves et du professeur – le groupe classe.

e) La tension qui doit traverser chacun de nous pour lui permettre de s'élever ne saurait se satisfaire d'un univers immuable : elle suppose au contraire que l'on essaie de nouvelles solutions – le contraire serait à la longue suspect. Si certains changements lourds gagnent à n'être introduits qu'aux changements d'année scolaire, nombre de modifications adaptatives plus légères ne doivent pas être différées trop longtemps, sans pour autant que l'on cède à un désir compulsif de changement ! Les césures ménagées dans le temps scolaire par les vacances successives (des vacances de la Toussaint jusqu'aux vacances de printemps *incluses*) constituent en général le bon moment pour cela : on y songera donc opportunément en préparant la rentrée de janvier.

3.2. Programmes

a) On s'arrête d'abord sur la question suivante.

> Les programmes officiels seront-ils un jour découpés en types de tâches, en techniques correspondantes et en technologies pour « uniformiser » le travail des professeurs ? (JB, OS, 4^e, 10)

1) Dans une large mesure les programmes sont d'ores et déjà organisés à partir des *types de tâches*. C'est ainsi par exemple que le domaine « Organisation et gestion de données. Fonctions », le futur programme de 4^e, applicable à la rentrée 2007, comporte, sous la rubrique « Compétences » – et non plus « Compétences exigibles » – l'inventaire suivant de types de tâches :

T_1. Déterminer une quatrième proportionnelle.

T_2. Déterminer le pourcentage relatif à un caractère d'un groupe constitué de la réunion de deux groupes dont les effectifs et les pourcentages relatifs à ce caractère sont connus.

T_3. Utiliser dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité par l'alignement de points avec l'origine.

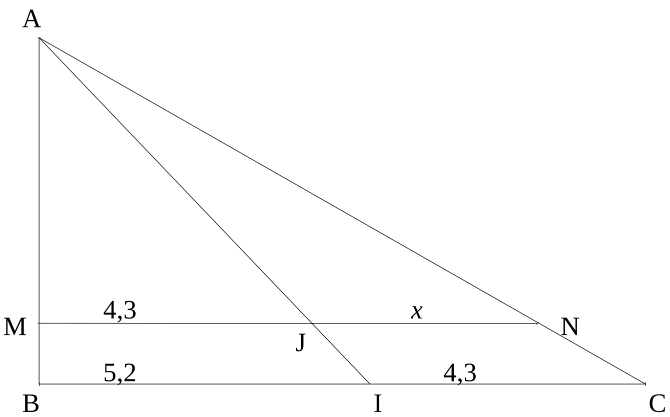
T_4. Calculer la moyenne d'une série de données.

Tels sont les types de tâches « au programme » : c'est cela que les élèves doivent savoir accomplir dans un certain nombre de situations où une tâche de l'un de ces types se rencontre.

2) Prenons ainsi le type de tâches T_1 : « Déterminer une quatrième proportionnelle. » La maîtrise de ce type de tâches commande, classiquement, les problèmes dits autrefois de « règle de trois », tel le suivant :

Trois exemplaires d'un même modèle de cahier ont coûté 3,45 €. Combien coûteront 11 cahiers du même modèle.

On a la correspondance suivante : $\begin{cases} 3 \mapsto & 3{,}45 \\ 11 \mapsto & x \end{cases}$. Ce modèle peut se traduire par l'égalité de rapports suivante : $\frac{3}{11} = \frac{3{,}45}{x}$. Il convient que, face à ce type d'équations, l'élève arrivant en fin de 4e sache trouver la valeur de x, à savoir, ici, $x = \frac{3{,}45 \times 11}{3}$. Bien entendu, le réquisit est plus général : il s'agira pour lui de savoir résoudre une équation formée par l'égalité de deux rapports, quelle que soit la position de l'inconnue x dans cette égalité (qu'on appelait autrefois une *proportion*). On a vu par exemple (dans la notice *Le temps de l'étude*) le cas représenté par l'épure ci-contre. Ici, en considérant d'abord les triangles AJN et AIC, et en vertu du théorème de Thalès, on a $\frac{x}{4{,}3} = \frac{\text{AJ}}{\text{AI}}$; puis, en considérant les triangles AJM et AIB, on a encore $\frac{\text{AJ}}{\text{AI}} = \frac{4{,}3}{5{,}2}$, en sorte qu'on arrive à l'équation $\frac{x}{4{,}3} = \frac{4{,}3}{5{,}2}$. L'élève devra être capable d'obtenir la solution $x = \frac{4{,}3^2}{5{,}2}$.



3) Qu'en est-il de la *technique*, de la *technologie*, voire de la *théorie* ? En l'espèce, la rubrique intitulée « Exemples d'activités, commentaires » propose ceci :

Aux diverses procédures étudiées en classes de sixième et de cinquième pour rechercher une quatrième proportionnelle, s'en ajoute une nouvelle, communément appelée « produit en croix » qui doit être justifiée (en lien avec l'égalité de quotients : voir § 2.2 ci-dessous).

La *technique* τ_1 qui doit être mise en place en 4e est donc celle des « produits en croix ». Appliquant cette technique à l'équation $\frac{x}{4{,}3} = \frac{4{,}3}{5{,}2}$, on obtient d'abord l'égalité $5{,}2\,x = 4{,}3^2$ puis $x = \frac{4{,}3^2}{5{,}2}$. La *technologie* θ_1 recommandée est liée à « l'égalité de quotients » : l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entraîne d'abord que $bd \times \frac{a}{b} = bd \times \frac{c}{d}$, et donc encore (par commutation et association), $d\left(b \times \frac{a}{b}\right) = b\left(d \times \frac{c}{d}\right)$; on a alors, par définition, $d \times a = b \times c$. Quant à la *théorie* Θ, elle consiste essentiellement en ceci qu'on postule, pour tout couple (a, b) d'entiers positifs, il existe un *nombre* noté $\frac{a}{b}$ tel que qu'on ait : $\frac{a}{b} \times b = a$, ainsi que l'indique explicitement le programme de 6e :

> À l'école élémentaire, l'écriture fractionnaire est introduite en référence au partage d'une « unité ».
> Les activités en sixième s'articulent autour de trois idées fondamentales :
> – le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre (solution du problème évoqué au 2.1) ;
> – le produit de $\frac{a}{b}$ par b est égal à a ;
> – le nombre $\frac{a}{b}$ peut être approché par un décimal.

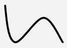
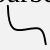
4) Bien entendu, la *détermination* de l'OML à mettre en place à partir de cette OMP autour de T_1 reste à faire en partie. En outre, les programmes ne sont pas toujours aussi explicites que l'est ici le programme de 4e. Mais d'une manière générale, les éléments principaux des OMP et des OML visées par les programmes affleurent de manière suffisante pour donner prise à un travail effectif : encore faut-il, bien entendu, apprendre à les identifier !

b) On examine maintenant la question que voici.

> Dans le programme de 2de, pour le thème « Étude qualitative des fonctions », je ne comprends pas le sens du commentaire suivant : « S'il s'agit des courbes, on distinguera celles pour lesquelles, par convention, l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. » (CG, OS, 2de, 10)

Une recherche rapide dans les archives du Séminaire livre notamment le développement suivant, qu'on examinera attentivement.

Courbes & courbes en 2de

Dans le bulletin officiel (programme de 2de), il est écrit dans la section « Étude qualitative de fonctions. Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle » : « S'il s'agit des courbes, on distinguera celles pour lesquelles, par convention, l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique ». Je ne comprends pas tout à fait à quoi il est fait allusion. Est-ce qu'ils font référence au fait que, pour certaines courbes du style  la calculatrice « écrase » la partie centrale, c'est-à-dire renvoie le graphe suivant :  ?

(…, JT, 2de, 7)

Matériaux pour une réponse

1. Non. Pour voir ce dont il s'agit, reprenons du début.

① Une fonction f étant donnée par son expression analytique, ***« l'étude de f »*** consistait autrefois en un ensemble de gestes (étude des variations, déterminations de quelques points, dont les extrémums, ainsi que des tangentes correspondantes, etc.) qui culminait dans le tracé de la ***représentation graphique*** f.

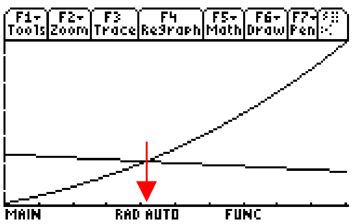
② Classiquement, la représentation graphique, qui était le point terminal de l'étude de la fonction, ***ne servait à rien***. Plus anciennement, pourtant, elle servait en principe à résoudre des équations et inéquations par le ***« calcul graphique »***.

❶ Il fallait alors, pour cela, que la courbe représentative soit une ***épure*** (et non un tracé qualitativement correct mais quantitativement approximatif).

❷ Ainsi, pour résoudre graphiquement les équations du type $x^3+px+q = 0$ (auxquelles se ramène ***toute*** équation de degré 3), on ***tabule*** une fois pour toutes l'application $x \mapsto x^3$, comme ci-après.

1,4	2,74
1,41	2,80
1,42	2,86
1,43	2,92
1,44	2,99
1,45	3,05
1,46	3,11
1,47	3,18
1,48	3,24
1,49	3,31
1,5	3,38

Pour résoudre l'équation $x^3+px+q = 0$, il suffit alors de tracer la courbe $\mathcal{C}_3$ représentative de $x \mapsto x^3$, puis la droite $\mathcal{D}_{p,q}$ d'équation $y = -px-q$, enfin de lire l'abscisse de l'intersection de $\mathcal{C}_3$ avec $\mathcal{D}_{p,q}$. Ainsi, pour $4x^3+3x-11\sqrt{2} = 0$ on construit sur du papier finement quadrillé la courbe $\mathcal{C}_3$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -0{,}75x+2{,}75\sqrt{2}$, ou plutôt la droite $\mathcal{D}^*$ d'équation $y = -0{,}75x+3{,}89$ ($2{,}75\sqrt{2} \approx 3{,}89$). (De façon anachronique, on a réalisé l'opération, ci-après, avec une calculatrice graphique.)



Il ne reste plus alors qu'à « lire » la solution x^* par ***« interpolation à vue »*** : $x^* \approx 1{,}41$. (En fait, on a $4x^3+3x-11\sqrt{2} = 0$ pour $x = \sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$)

❸ Pour résoudre les équations du second degré $x^2+px+q = 0$ on peut, de même, opérer graphiquement par l'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ avec la droite $y = -px-q$, ou encore par l'intersection de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ avec la droite $y = -\frac{1}{q}x - \frac{p}{q}$ (ce qui pose le problème de la division par q).

2. Cela rappelé, parmi les ***« capacités attendues »***, le programme de 2[de] mentionne les deux suivantes, réciproques l'une de l'autre en quelque sorte :

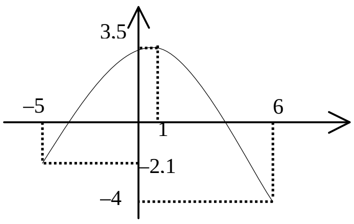
Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe.

Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation.

C'est en ce point que prend place le passage cité dans la question examinée ici :

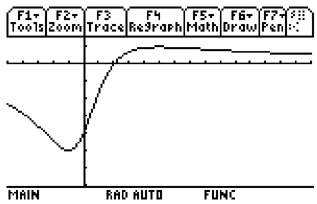
« S'il s'agit des courbes, on distinguera celles pour lesquelles, par convention, l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. »

① Dans le cas où la « courbe » apporte une « information exhaustive » sur les variations de la fonction, le passage de la « courbe » au tableau de variation n'est en fait qu'un changement de ***code graphique*** : il n'y a pas plus dans la courbe qu'il n'y a dans le tableau de variation ; la courbe n'est qu'une expression graphique plus proche par l'apparence de la réalité représentée. Sur le schéma ci-contre, par exemple, on ***voit*** que $f(x)$ croît de –2,1 à 3,5 quand x croît de –5 à 1, puis décroît de 3,5 à –4 quand x croît de 1 à 6. En vérité, le schéma ***n'est qu'une autre manière de dire*** ce qui vient d'être indiqué. Il s'agit donc purement et simplement d'apprendre à décoder les informations qui s'y expriment, et inversement à coder sous la forme d'un tel schéma les informations apportées par un tableau de variation ou sous forme discursive (comme ci-dessus : « $f(x)$ croît de –2,1 à 3,5 quand x croît de –5 à 1, puis décroît de… »).



② Dans le cas où la « courbe » est « obtenue sur un écran graphique », les choses sont ***très différentes***. Le tableau de variation, en effet, modélise, non sans incertitude éventuelle, une réalité graphique « empirique », qui apporte des informations partielles sur la fonction f étudiée.

❶ Supposons que l'on étudie la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+5}$ sur l'intervalle $[-5, 15]$. Une calculatrice graphique livre par exemple le tracé ci-contre du graphe de f. On peut traduire le comportement observé par la ***conjecture*** suivante : f décroît d'abord sur $[-5, \alpha]$, où $\alpha \approx -1$, puis croît sur $[\alpha, \beta]$, où $\beta \approx 5$, enfin décroît sur $[\beta, 15]$. Il resterait alors à vérifier qu'il en est bien ainsi, opération pour laquelle on ne dispose, en 2de, que d'***outils rudimentaires***, mais néanmoins utilisables, ainsi qu'on va le voir.



❷ Soit a, $b \geq 5$, avec $a < b$; tentons d'établir que $f(a) > f(b)$, c'est-à-dire que $\dfrac{a-2}{a^2+5} > \dfrac{b-2}{b^2+5}$. On a successivement : $f(a) > f(b) \Leftrightarrow (a-2)(b^2+5) > (b-2)(a^2+5) \Leftrightarrow ab^2 + 5a - 2b^2 - 10 > a^2b + 5b - 2a^2 - 10$ $\Leftrightarrow ab(b-a) + 5(a-b) - 2(b^2-a^2) > 0 \Leftrightarrow ab - 5 - 2(a+b) > 0$. Pour $a \geq 5$, on a :

$$ab-5-2(a+b) \geq 5b-5-2(a+b).$$

Il vient $5b-5-2(a+b) = 3b-5-2a = (b-5)+2(b-a) > 0$ et donc $ab - 5 - 2(a+b) > 0$, comme espéré. On a ainsi établi que f est strictement décroissante sur $[5, 15]$.

③ Qu'est-ce qui motive l'étude des variations d'une fonction sur un intervalle ? Une réponse classique, liée à ce qu'on appelait autrefois les ***« problèmes de maxima et de minima »***, est que c'est là une voie – qui n'est pas la seule ni nécessairement la plus directe – pour déterminer les ***extrémums*** d'une fonction.

❶ On peut par exemple avoir à chercher quel est le maximum (s'il existe) de la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+5}$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On sait déjà que $f(5) > f(b)$ pour $b > 5$. Reprenons alors le travail sur l'inégalité $f(a) > f(b)$. On a : $f(a) > f(b) \Leftrightarrow ab(b-a) + 5(a-b) - 2(b^2-a^2) > 0$. Faisons $a = 5$, et supposons $b < 5$. Il vient : $f(5) > f(b) \Leftrightarrow 5b - 5 - 2(b+5) < 0 \Leftrightarrow 3b - 15 < 0 \Leftrightarrow b < 5$. On obtient ainsi que $f(5) > f(b)$ sur $[0, 5[$: f atteint donc son maximum sur $[0,+\infty[$ en 5.

❷ On saisit mieux alors l'intérêt de l'étude préalable des variations d'une fonction f : dispenser d'études locales multiples. Pour la fonction f déjà examinée, par exemple, les égalités (♣), (♦), (♥) ci-après justifient respectivement les comportements de f conjecturés sur $[5, 15]$, $[-1, 5]$, $[-5, -1]$:

$$
\begin{aligned}
f(a)-f(b) = \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}[ab-5-2(a+b)] &= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}[(a-5)b+(b-5)+2(b-a)] \quad (\clubsuit)\\
&= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}[(b-5)(a+1)+3(a-b)] \quad (\blacklozenge)\\
&= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}[a(b+1)-3(a+1)-2(b+1)] \quad (\heartsuit)
\end{aligned}
$$

3.3. Symboles & vocabulaire

a) On commence par cette question.

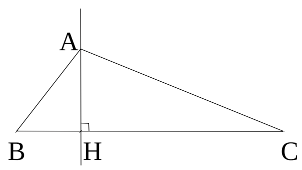
> Doit-on écrire $\simeq$ ou $\approx$ pour « à peu près égal » ? (CO, MJ, 2de, 10)

On a vu, lors de la séance 10, ce passage de l'introduction au programme du cycle central, qui répond implicitement à la question :

> Le vocabulaire et les notations seront introduits, comme en sixième, au fur et à mesure de leur utilité : la notation cos, les symboles $\sqrt{\ }$, $\geq$, $\leq$, $\approx$, et les notations a^n et a^{-n} ; il y aura également lieu de familiariser les élèves avec le décodage de calculs utilisant pour la division les symboles ÷ et /.

Pour des précisions plus étendues, on se référera à l'entrée MATHEMATIQUES ET DE LA PHYSIQUE (COMPOSITION DES) du *Lexique des règles typographiques* (Imprimerie nationale, Paris, 2002).

b) On poursuit par cette question.

> En 5e, dans le thème des triangles, on introduit la définition des « hauteurs » d'un triangle. On énonce : dans un triangle, la hauteur relative au sommet A est la droite passant par A et perpendiculaire au côté opposé à A. Mais on parle aussi de hauteur pour la longueur du segment [AH] (voir la figure).
>
> 
>
>
> Comment expliquer qu'un même mot désigne une *droite* mais aussi la *longueur d'un segment* ? Ce n'est pas très clair pour moi ! (AS, JT, 5e, 10)

Là encore, les archives du Séminaire apportent des éléments de réponse que l'on méditera. Les notes de l'année 2001-2002 contiennent par exemple cette question :

> Pour le SPA, nous prenons la classe en main lors de la leçon « Droites remarquables dans un triangle » en 4e. Un problème survient lors de la définition de la hauteur : « C'est la droite qui… » Or, pour un calcul d'aire de triangle, on donne $\mathcal{A} = \frac{h\times b}{2}$. Ici on considère la « mesure de la hauteur ». Les livres scolaires ne parlent pas du problème. Que doit-on faire ? Faire comme s'il n'y en avait pas, considérant que cela va de soi que, lorsqu'on écrit $\frac{h\times b}{2}$, on ne considère pas vraiment la hauteur mais qu'une partie ? Ou essayer d'expliquer le problème au risque de « pinailler » à leurs yeux (en expliquant que si on définit la hauteur comme étant « le segment qui… », l'orthocentre aura du mal à exister, à moins de

parler des supports de segment, etc.) ? Bref, je pense que trop de détails risque de les perdre. (…, JT, 2^{de}, 8)

Les « matériaux pour une réponse » contiennent notamment cet extrait d'un manuel ancien, du temps où la polysémie ne semblait pas poser problème. (On observera en même temps le souci d'expliciter les raisons d'être de l'étude des propriétés du parallélogramme.)

> **99. Remarque.** — *Utilité des théorèmes concernant les parallélogrammes.* Ces théorèmes servent à en démontrer d'autres qui ont pour objet de prouver :
>
> 1° Que deux droites sont égales ;
>
> 2° Que deux angles sont égaux ;
>
> 3° Que deux droites sont parallèles.

Ce passage fait l'objet du commentaire suivant, que l'on méditera.

Cette ***polysémie*** du lexique et des notations a le grand mérite d'alléger le langage : ainsi la notation AB désignait-elle jadis à la fois la droite (AB), le segment [AB], la longueur AB, le cas de la « hauteur » évoqué dans la question examinée apparaissant ainsi comme ***un vestige d'une telle pratique***. Le démérite dont on crédite aujourd'hui ces pratiques polysémiques procède d'une croyance abusive, installée dans la pensée didactique des professeurs de mathématiques à l'occasion de la réforme des « mathématiques modernes » (autour de 1970), selon laquelle la difficulté éprouvée par les élèves dans la maîtrise de certaines techniques ou notions mathématiques proviendrait en premier lieu de ***« malentendus »*** dus eux-mêmes à ***l'imprécision*** du vocabulaire ou des notations : d'où une chasse forcenée – dont on n'a plus guère idée aujourd'hui – à l'imperfection langagière ! À cet égard, la position avancée dans la question posée est sage, à condition de ne pas être motivée par… les élèves et leur faiblesse supposée. Chacun peut comprendre – et le professeur pourra donc l'indiquer aux élèves – qu'il est économique d'employer le même mot pour désigner des choses apparentées – la ***droite hauteur***, le ***segment hauteur***, la ***longueur hauteur*** –, que le contexte d'emploi permet de distinguer.

3.4. Conseil de classe

a) De multiples questions ont été posées à propos des conseils de classe. On en reproduit ci-après l'essentiel.

1. Comment se passe un conseil de classe ? Quels sont les impacts et les enjeux pour les élèves de 2^{de} d'un avertissement de travail ou de discipline ? (MK, OS, 2^{de}, 5)

2. Peut-on donner, pendant les vacances, un DM qui va permettre d'avancer dans le chapitre ? (EB, CR, 4^{e}, 6)

3. Que dire de plus, en conseil de classe, que les appréciations portées sur le bulletin ? (AC, OS, 2^{de}, 8)

4. En FGC, on a vu que la famille exprime des vœux d'orientation, puis le conseil de classe formule des propositions d'orientation. S'il y a accord avec la famille, la proposition devient décision d'orientation. Un élève ne risque-t-il pas d'être orienté au-dessous de ses capacités par manque d'ambition de sa famille ? (CM, MJ, 5^{e}, 8)

5. Comment intervenir pendant les conseils de classe ? Que dire ? (MT, OS, 4^{e}, 8)

6. Est-ce qu'on doit « parler » du conseil de classe aux élèves ? Que dire à son sujet ? (MG, MJ, 2^{de}, 9)

7. Comment préparer le conseil de classe ? Que peut-on y dire ? (AI, JT, 2^{de}, 9)

8. Comment préparer au mieux le conseil de classe avec sa classe ? (CO, MJ, 2^{de}, 9)

9. Lors du conseil de classe, quel est notre rôle ? Doit-on faire un commentaire (oral) pour chaque élève ou doit-on réagir ponctuellement sur ceux posant un problème quelconque (de travail ou de comportement) ? (RR, OS, 4^{e}, 9)

10. Les conseils de classe approchent. Comment préparer un conseil de classe ? (EB, CR, 4^{e}, 10)

11. Quels sont les objectifs du conseil de classe ? (GF, MJ, 2de, 10)

12. Y a-t-il une façon positive d'utiliser le résultat d'un conseil de classe ? De ma petite expérience (bientôt trois mois d'enseignement…), je retire l'impression que les bilans faits sur les élèves n'aboutissent à aucune action « pédagogique » (ou alors à des actions qui ne changent rien). (DV, JT, 2de, 10)

b) Pour lancer sur ce thème un travail qui se poursuivra dans les mois à venir, on prendra d'abord connaissance d'un document mis en ligne (rubrique *Documents 2nd degré*) : ***Changer le conseil de classe***.

4. Évaluation & développement

4.1. Une AER ?

a) On ouvre cette rubrique par la question suivante.

L'utilisation du logiciel Géoplan pour faire la réciproque de Thalès peut-elle être considérée comme une AER ? (GB, MJ, 3^{e}, 10)

b) Plusieurs malentendus peuvent se nicher derrière cette question.

1) Un commentaire du programme de 4^{e} indique :

Le théorème de Thalès dans toute sa généralité ainsi que sa réciproque seront étudiés en classe de 3^{e}.

Si l'on prend cette déclaration au mot, la « propriété de Thalès » ainsi étendue (« dans toute sa généralité ») ainsi que sa réciproque doivent, en principe, recevoir en 3^{e} le statut de *théorèmes* de la *théorie géométrique en construction*.

2) Cela noté, le programme de 3^{e} propose ce commentaire.

Il s'agit d'un prolongement de l'étude faite en quatrième.

L'étude de la propriété de Thalès est l'occasion de traiter des situations de proportionnalité dans le cadre géométrique du plan et de l'espace. La réciproque est formulée en tenant compte de l'ordre relatif des points sur chaque droite.

L'utilisation d'un logiciel de construction géométrique peut permettre de créer des situations reliées au théorème de Thalès, notamment lors des activités d'approche de la propriété par la mise en évidence de la conservation des rapports.

Le travail de construction de points définis par des rapports de longueurs permet de mettre en évidence l'importance de la position relative de ces points sur la droite.

On s'intéressera particulièrement au problème suivant : étant donné deux points A et B, construire les points C de la droite (AB) sachant que le rapport $\frac{CA}{CB}$ a une valeur donnée sous forme de quotient d'entiers.

Le travail avec un logiciel de géométrie est donc explicitement mentionné, même s'il ne l'est qu'à propos de la propriété *directe*.

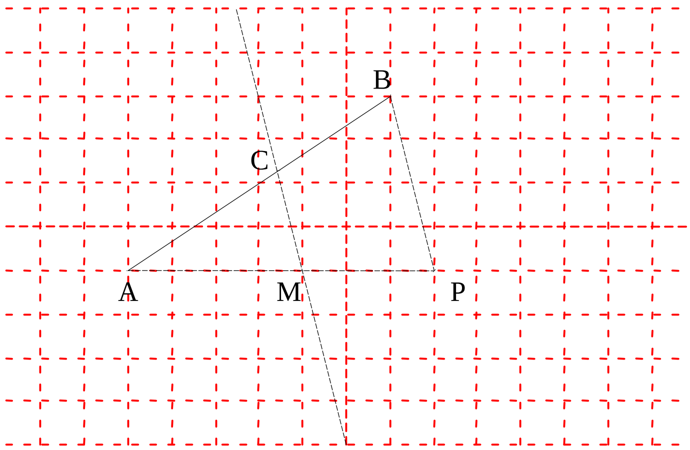
3) S'agissant de la propriété réciproque comme de toute autre, trois étapes *classiques* doivent être envisagées *en principe* au sein d'une suite d'AER relative à une propriété donnée :

Étape 1. La propriété doit être ***motivée*** par son rôle technologique vis-à-vis d'au moins un type de tâches *T*.
Étape 2. La ***vérité*** de cette propriété de l'espace doit être ***étudiée expérimentalement***.
Étape 3. La ***déductibilité*** de la propriété dans la théorie géométrique disponible (TGD) – qui devient par là un théorème de cette théorie – doit être enfin établie.

4) La *motivation* de la propriété de Thalès peut ainsi être trouvée dans l'étude du type de tâches mis en avant par le programme :

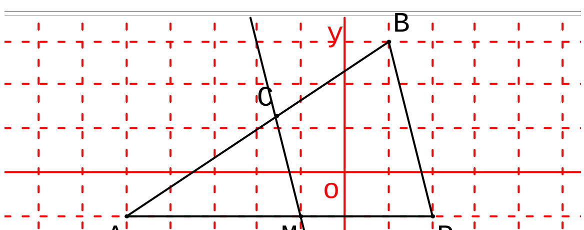
T. Étant donné deux points A et B, construire les points C de la droite (AB) sachant que le rapport $\frac{\text{CA}}{\text{CB}}$ a une valeur donnée sous forme de quotient d'entiers.

La *technique* τ à mettre en place préférentiellement consiste, si le rapport est $\frac{p}{q}$ (où *p*, *q* sont des entiers strictement positifs premiers entre eux), à prendre une demi-droite auxiliaire sur laquelle on porte $p + q$ fois une longueur *u* (sur la figure ci-après on a ainsi $\text{AP} = (p + q)u = (4 + 3)u$) et où on marque le point M tel que $\text{AM} = pu$ (sur la figure ci-dessous, $\text{AM} = 4u$) ; la parallèle à (BP) passant par M coupe alors [AB] en un point C tel que $\frac{\text{CA}}{\text{CB}} = \frac{p}{q}$.



5) C'est l'étude de la *vérité* de la propriété de Thalès, fondamentale pour justifier la technique τ, qui peut mobiliser préférentiellement d'abord un simple *quadrillage* (sur lequel on mesurera CA et CB), ensuite un *logiciel de géométrie dynamique*, auquel on demandera de mesurer les longueurs CA et CB et de donner le rapport $\frac{\text{CA}}{\text{CB}}$, comme on le voit ci-après (où $a = \text{CA}$, $b = \text{CB}$, $r = \frac{a}{b}$.

a:4.12063 b:3.090473 r:1.333333



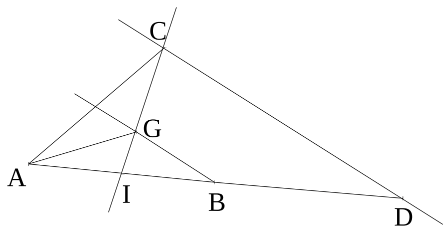
6) Rappelons ici que le logiciel de géométrie peut aussi être utilisé dans la recherche d'une démonstration : il permet en particulier de « tester » rapidement une conjecture visant à ouvrir une « voie déductive ».

7) Pour la séance de la rentrée, on recherchera un type de tâches $T_{\lrcorner}$ motivant la *réciproque* de la propriété de Thalès.

4.2. Imprévu fatal ?

a) L'examen de la séance observée en 4e a suscité cette question, sur laquelle on s'arrête maintenant.

En relation avec le compte rendu d'une séance en 4e, qu'aurait pu faire P si un élève lui avait proposé la solution suivante : « Si on note D le point symétrique de A par rapport à B, la droite (Δ) parallèle à (BG) coupe la médiane (IG) en A » ? Et ce en s'appuyant sur le théorème de la droite des milieux.



N'y aurait-il pas alors une réelle diversion dans l'étude proposée par P, et comment alors revenir à l'étude envisagée par P ? (GB, OS, 2de, 10)

b) La « difficulté » évoquée n'est pas si redoutable qu'on peut le penser de prime abord, ce qu'explicitent les observations ci-après.

1) Lors de la préparation de l'AER (ou de la suite d'AER) prévue, il est essentiel de procéder à une *analyse* a priori des situations d'étude et de recherche envisagées. Cette analyse préalable doit tenter d'identifier les différentes « histoires » mathématiques qui pourront se vivre concrètement dans la classe, sous la direction du professeur. On se rappelle ainsi qu'on avait imaginé une telle histoire – qui n'aboutira pas, ici… – dans laquelle la classe recherchait à déterminer le point C comme intersection de deux droites. On reproduit ci-après le passage correspondant.

Semaine *n* – Lundi

La classe étudie le problème suivant : on a effacé le point C d'un triangle ABC dont on avait marqué le centre de gravité G ; comment retrouver le point C à partir de ce qui reste, c'est-à-dire A, B et G ?

P : « Comment trouver le point C ? Kévin, tu as une idée ? » Kévin : « Si on sait tracer les deux côtés, on a C ! » P : « Qu'en pensez-vous ? Farida ? » Farida : « Oui, mais comment on trace les côtés ? On sait pas, ça !… » P : « Bon, alors ? Quelle question on peut se poser ? Si on veut tracer les côtés ? » Un élève lève le doigt. P : « Oui, Ricardo… » Ricardo : « Comment on fait pour déterminer une droite ? » P : « Oui, c'est ça. Comment peut-on déterminer une droite. Alors comment ? Qui peut répondre ? Qu'est-ce qu'on connaît ici ? » Nabil : « On connaît un point ? Ça suffit pas. » P : « Exact. Alors ? Qu'est-ce qu'il faudrait ? »

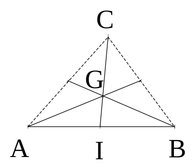
Une élève se signale : « Madame ! Madame ! » « Oui, Sarah… » Sarah : « Madame, si on connaissait la direction du côté ! Comme quand on a fait avec le point de concours des bissectrices ! » P : « Oui, qu'est-ce qui s'était passé ? Qui peut nous le rappeler ? Joris ? » Joris : « Ben, au lieu de G on avait le point… » P : « Comment on l'avait noté ce point ? » Des élèves : « I… » P : « Voilà, on l'avait appelé I. Et c'était ? » Des élèves : « Le centre du cercle inscrit dans le triangle. » P : « Bien, c'est ça. Alors, Joris ? » Joris : « Bon, le côté passant par A par exemple c'était le symétrique de (AB) par rapport à (AI), on doublait l'angle, quoi… » P : « Vous êtes d'accord ? » Des élèves en chœur : « Oui ! » P : « Bon, et ici ? Est-ce qu'on peut faire ça ? » Silence…

2) La proposition de Kévin, en l'espèce, constitue un cas particulier de réponse – simple, trop simple – à la question *cruciale* générique « Comment déterminer un point ? ». L'une des réponses possibles est en effet : « Comme l'intersection de deux droites (connues). » Le *choix* de ces deux droites est lui-même *crucial* : celui proposé par Kévin n'aboutira pas – du moins dans l'histoire imaginaire narrée lors de la séance 4 !

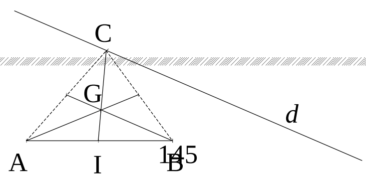
3) La question examinée fournit, non pas une autre histoire, mais un autre aboutissement, sans que l'histoire elle-même nous soit contée. Une telle histoire ne peut être qu'assez complexe : une reconstitution possible pourrait en être celle-ci.

La classe étudie le problème suivant : on a effacé le point C d'un triangle ABC dont on avait marqué le centre de gravité G ; comment retrouver le point C à partir de ce qui reste, c'est-à-dire A, B et G ?

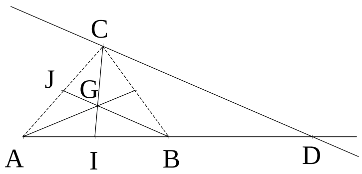
P : « Comment trouver le point C ? Kévin, tu as une idée ? » Kévin : « Comme intersection de deux droites… » P : « D'accord. Mais lesquelles ? » Silence. Farida : « On peut prendre (IG). » P. « Exact. Et puis ? Quelle autre droite ? Comment on détermine une droite ? » Ricardo : « Ben, par deux points distincts… » P. « Oui. Et puis ? » Nabil : « Comme parallèle à une droite donnée passant par un point donné. » P. « Oui. Mais quel point ? Et parallèle à quelle droite ? Ici ?… » Silence. P relance : « Bon, on a déjà vu ça. Qu'est-ce qu'il faut faire dans ce cas ? Si on est bloqués ? Si on ne voit pas ? » Sarah lève la main : « On fait par analyse-synthèse. » P. « Ce qui veut dire ? » Sarah : « On suppose le problème résolu, on regarde la figure. » P. « Bon, regardons ! » Elle trace rapidement un schéma de figure au tableau. Je mets en trait plein ce qu'on connaît. »



P. « Alors, cette droite passant par C qui serait parallèle à une droite de la figure ? Ça pourrait être quoi ? » Silence. P. « Regardons les droites de la figure… Laissons de côté (IG), puisque, ça, c'est la première droite, si on suit la proposition de Farida. » Brice : « Ça peut pas être (AB) ou (BC), puisqu'on les connaît pas. » P. « En effet. Donc ça nous laisse trois droites. À savoir ? » Anaïs : « Ben, y a (AB), mais il faudrait avoir un point autre que C. » P. « Oui, et ça, apparemment, on l'a pas ! » Silence. P. « Alors ? » Elle avise un élève qui lève le doigt : « Oui, Belkacem ? » Belkacem : « Il reste plus que (AG) et (BG). » P. « Oui, et alors ? Qu'est-ce qu'on peut faire ? » Belkacem : « Ben on trace la parallèle par exemple à (BG). » P. « Oui, voilà… » Elle complète son dessin.



P. « Voilà. J'ai tracé la parallèle *d* à (BG) passant par C. Le problème, c'est qu'on n'a pas le point C ! Quelle question doit-on se poser alors ? » Lucas : « Si on connaît un point de la droite *d*, à part C. » P. « Vous êtes d'accord ? Qui a une idée ? » Farida : « Ça peut être le point d'intersection avec une droite connue. Ça veut dire (AB). Ou (AG)… » P. « Oui. Pas avec (BG) bien sûr ! Et alors ? » Kévin : « Madame, vous pouvez pas marquer l'intersection de *d* avec (AB) ? » P s'exécute.

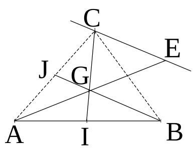


P. « Pourquoi ? Tu as vu quelque chose, Kévin ? » Kévin : « Oui, la droite des milieux. Dans… ACD. » P. « Explicite. » Kévin : « Dans le triangle ACD, J est le milieu de [AC] et (JB) est parallèle à (CD) ; donc B est le milieu de [AD]. » Une élève se manifeste : « Madame, je sais ! Je sais ! » P. « Oui, Manon, qu'est-ce que tu veux dire ? » Manon : « On prend D symétrique de A par rapport à B ! » P. « Oui, et alors ? » Manon : « Et après on trace la parallèle à (BG) passant par D. Et on a C. » P. « On dirait en effet que ça marche… Bon alors écoutez-moi. On va reprendre ça tous ensemble d'abord. Mais après, chacun va rédiger une mise en forme de la construction de C que, apparemment, nous venons de trouver. Sur une feuille que vous me remettrez. Je veux savoir où vous en êtes… Alors, qui peut reprendre ? »

4) Cette reconstitution imaginaire montre que la création endogène spontanée (et non dirigée par P) du procédé de construction évoqué dans la question est sans doute très peu probable ! Notons, en passant, que d'autres histoires mathématiques de classe, voisines, auraient pu se construire. Reprenons ainsi le compte rendu fictif précédent.

………

P. « Voilà. J'ai tracé la parallèle *d* à (BG) passant par C. Le problème, c'est qu'on n'a pas le point C ! Quelle question doit-on se poser alors ? » Lucas : « Si on connaît un point de la droite *d*, à part C. » P. « Vous êtes d'accord ? Qui a une idée ? » Farida : « Ça peut être le point d'intersection avec une droite connue. Ça veut dire (AB). Ou (AG)… » P. « Oui. Pas avec (BG) bien sûr ! Et alors ? » Kévin : « Madame, vous pouvez pas marquer l'intersection de *d* avec (AG) ? » P s'exécute.



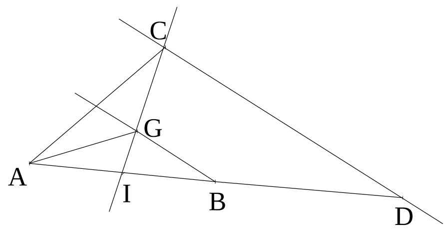
P. « Pourquoi ? Tu as vu quelque chose, Kévin ? » Kévin : « Oui, la droite des milieux. Dans… ACE. » P. « Explicite. » Kévin : « Dans le triangle ACE, J est le milieu de [AC] et (JG) est parallèle à (CE) ; donc G est le milieu de [AE]. » Une élève se manifeste : « Madame, je sais ! Je sais ! » P. « Oui, Manon, qu'est-ce que tu veux dire ? » Manon : « On prend E symétrique de A par rapport à G ! » P. « Oui, et alors ? » Manon : « Et après on trace la parallèle à (BG) passant par E. Et on a C. » P. « On dirait en effet que ça marche… »

5) S'il est peu probable que, pendant le temps de la recherche en classe, un élève parvienne seul, par son activité propre, à l'une des solutions alternatives évoquées ici, il est certes possible qu'un élève l'*apporte* toute faite de l'extérieur de la classe, parce qu'on la lui aura montrée dans un cours particulier, parce qu'il l'aura trouvée toute faite dans un livre, etc. À ce moment-là devra s'enclencher la « dialectique des médias et des milieux », le « milieu »

approprié étant ici, soit la théorie géométrique disponible (si, du moins, elle contient les théorèmes des milieux), soit l'expérimentation graphique (sur papier blanc ou sur papier quadrillé) ou l'expérimentation numérico-graphique (à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique), soit les deux. Mais ce qui manquera, du point de vue des apprentissages, aura été, pour cette solution-là, le processus collectif et dirigé d'étude et de recherche – tel par exemple qu'on l'a imaginé dans le compte rendu fictif précédent.

6) Plusieurs observations sont encore essentielles. Qu'une telle solution ait été produite en classe par un ou des élèves ou qu'elle ait été apportée en classe par l'un d'eux (si l'AER s'est étendue sur deux séances successives par exemple), l'attention à lui porter, en règle générale indubitable, *n'aura pas de priorité* par rapport à l'histoire collective en cours de construction dans la classe. Le professeur prendra acte de la solution proposée, en en différant toutefois l'étude collective – qui pourra aussi bien se faire dans le cadre d'un DM, par exemple, dès lors du moins que les conditions didactiques requises par ce dispositif seront satisfaites.

7) Quel que soit le cheminement parcouru, on devra en fin de parcours tenter de dégager la solution « la plus simple ». Cette exigence a déjà été évoquée à propos d'une autre solution : si l'on cherche à définir C comme intersection de (AC) et de (IG), on peut être amené à chercher à déterminer la position de J sur [BG], et donc arriver par là au résultat technologique θ qui commande la séance observée : le centre de gravité est situé sur chaque médiane aux deux tiers de la longueur à partir du sommet. Mais on devra s'efforcer ensuite de « réduire » la solution obtenue – en observant qu'il n'est nul besoin de construire J, etc., puisqu'une construction directe de C sur [IG] est possible à l'aide de θ. Le même genre de réduction fera passer de la solution évoquée dans la question examinée ici à la solution « standard » visée par P : dans le triangle ICD, B est, par définition de D, situé aux deux tiers de [ID] à partir de D, et donc, d'après le théorème de Thalès appliqué aux triangles ICD et IGB, G est situé aux deux tiers de [IC] à partir de C. La synthèse enregistrera, *in fine*, la solution standard, à laquelle on arrive quelle que soit l'aventure mathématique vécue dans la classe.



4.3. Calcul sur les radicaux

a) L'exposé 20 réalisé par DC a permis d'entrer dans l'analyse didactique d'une séance dans une classe de 3^e à partir d'un compte rendu d'observation intitulé *Calculer avec des radicaux*. Dans une perspective d'***évaluation*** et de ***développement***, on complète cet ensemble en considérant d'abord la question suivante.

> Lors de la résolution algébrique de l'équation $x^2 = 36$, les élèves me répondent que les solutions de cette équation sont –6 et 6 car $\sqrt{36}$ c'est –6 ou 6. Comment leur expliquer simplement leur erreur ? (EMTY, MJ, 2de, 10)

1) La première question appelle d'abord une remarque historique. Longtemps, l'arithmétique et l'algèbre sont demeurés deux domaines mathématiques nettement séparés. En arithmétique n'étaient admis que les nombres appelés *positifs* en algèbre, les nombres que nous appelons aujourd'hui *relatifs* n'étant introduits qu'en *algèbre*, où ils s'imposent pour faciliter les calculs et dont ils apparaissent à ce point consubstantiels qu'on les nommera longtemps nombres *algébriques*. Dans cette organisation classique du corpus mathématique enseigné, le jeu entre l'arithmétique et l'algébrique conduit à des définitions décalées par rapport à l'usage

actuel. C’est ainsi que, dans le chapitre IV – intitulé *Racine carrée* – de la partie traitant du programme de 3e d’un ouvrage d’*Arithmétique et Algèbre* pour les classes de 5e, 4e et 3e (programmes d’avril 1938) dû à Georges Foulon, « ancien élève de l’École normale supérieure, professeur agrégé au lycée Carnot », on lit ceci : « On appelle racine carrée d’un nombre A un autre nombre a dont le carré est égal à A. » L’auteur ajoute : « c’est-à-dire tel que l’on ait : $a^2 = A$; et on écrit : $a = \sqrt{A}$. » Il n’est pas question ici de mentionner les nombres *négatifs* – même s’ils sont supposés connus du lecteur, puisque les nombres « algébriques » ont été introduits en 4e… Dans le chapitre V qui suit, et qui s’intitule *Résolution algébrique de l’équation du second degré*, l’auteur et son lecteur se situent en revanche dans le domaine de l’algèbre ; les choses changent et, dès la première page, on peut lire ceci :

> *Un nombre positif a deux racines carrées opposées.* – Ainsi 4 a deux racines carrées – 2 et + 2 ; 3 a deux racines carrées $-\sqrt{3}$ et $+\sqrt{3}$.
> On représente souvent les deux racines carrées opposées ensemble en écrivant : ± 2, $\pm\sqrt{\mathrm{A}}$, $\pm\sqrt{3}$.

Un autre ouvrage pour la classe de 3e, conforme au même programme, mais intitulé quant à lui *Algèbre et Géométrie* et dû à deux très prolifiques auteurs, Camille Lebossé (1905-1995) et Corentin Hémery (1908-1992), dans une leçon intitulée *Radicaux arithmétiques*, comporte une deuxième section intitulée, elle, *Racines des nombres algébriques*, où on lit : « On appelle racine carrée d’un nombre algébrique A tout nombre x dont le carré est égal à A. » Un peu plus loin, les auteurs ajoutent : « … les racines de + 5 sont $\pm\sqrt{5}$. Le symbole $\sqrt{\mathrm{A}}$ désigne la racine positive de A. » Le distinguo est subtil : dans cette organisation mathématique ancienne, les racines carrées de 36 sont –6 et 6, ce que les élèves pouvaient être tentés d’écrire « $\sqrt{36} = \pm 6$ », ce dont ils ne se privaient pas, bien que cette écriture fût officiellement proscrite !

2) Aujourd’hui, l’organisation correspondante est différente : si, comme autrefois, $\sqrt{a}$ désigne la racine carrée positive du nombre (positif) a, désormais l’expression de racine carrée ne désigne plus que cette « racine carrée positive ». Quant aux solutions de l’équation $x^2 = a$, le programme de 3e en parle ainsi :

> Savoir que, si a désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a.
> Sur des exemples numériques où a est un nombre positif, utiliser les égalités : $(\sqrt{a})^2 = a$, $\sqrt{a^2} = a$.
> Déterminer sur des exemples numériques les nombres x tels que $x^2 = a$, où a désigne un nombre positif.

3) Ce qu’il convient donc de faire entendre aux élèves, c’est que c’est par *convention* – la chose *ne va pas de soi*, elle n’est pas « évidente » – que l’écriture $\sqrt{a}$ désigne le *seul* nombre *positif* α tel que $\alpha^2 = a$, le but de cette convention étant de faire correspondre à l’écriture $\sqrt{a}$ *un unique nombre*, et non deux, pour se mettre en conformité avec l’usage courant des notations mathématiques. Cela étant, il vient

$$x^2 - a = x^2 - \alpha^2 = (x - \alpha)(x + \alpha)$$

ce qui montre que, su bien sûr $a \neq 0$, l’équation $x^2 = a$ possède *deux* solutions, α et $-\alpha$, c’est-à-dire « racine carrée de a » et « moins racine carrée de a », ce qu’on note $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

b) L’exposé qu’elle a assuré a suscité chez DC cette question.

> J’ai vu, en préparant mon exposé, que si deux nombres de la forme $\sqrt{a}$ et $b\sqrt{c}$ ont la même écriture décimale jusqu’à quelques chiffres après la virgule, on pouvait dire qu’ils sont égaux. En est-il de même pour d’autres nombres (par exemple des fractions) ? (DC, OS, 2^{de}, 10)

1) Rappelons d’abord ce qu’il en est pour $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$. Soit $a, b, c \in \mathbb{N}^*$; si $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$, alors…

$$|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| = \frac{|a^2b - c|}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} \geq \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

On a donc la proposition suivante :

$$a\sqrt{b} \neq \sqrt{c} \Rightarrow |a\sqrt{b} - \sqrt{c}| \geq \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

Cette proposition est équivalente à sa contraposée :

$$|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| < \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} \Rightarrow a\sqrt{b} = \sqrt{c}.$$

2) Pour $a = 2$, $b = 2$ et $c = 8$, on a

$$\frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} > \frac{1}{2 \times 2 + 3} = \frac{1}{7} > 0{,}1.$$

En d’autres termes, si $2\sqrt{2} \neq \sqrt{8}$, alors les affichages de la calculatrice *diffèrent avant la 2^e décimale*. Si ces affichages *sont identiques jusqu’à la 1^{re} décimale incluse*, alors $2\sqrt{2} \neq \sqrt{8}$. De même, pour $a = 3$, $b = 5$ et $c = 45$, on a :

$$\frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} > \frac{1}{3 \times 3 + 7} = \frac{1}{16} > 0{,}06.$$

Par suite, si $3\sqrt{5} \neq \sqrt{45}$, la chose se voit sur les affichages de la calculatrice *avant la 3^e décimale*. Inversement, si ces affichages sont *identiques jusqu’à la 2^e décimale incluse*, alors $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$.

3) On a des résultats analogues pour les ***fractions d’entiers***. Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier naturel $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{\pm k}{\text{PPCM}(b, d)}.$$

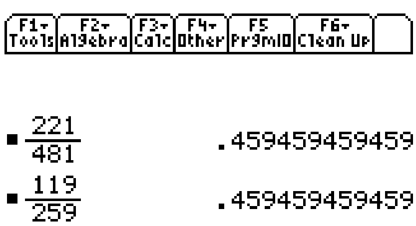
Si $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ alors on a : $\left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| = \frac{k}{\text{PPCM}(b, d)} \geq \frac{1}{\text{PPCM}(b, d)}$. On a donc la proposition suivante :

$$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \Rightarrow \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| \geq \frac{1}{\text{PPCM}(b, d)}.$$

Cette proposition est équivalente à sa contraposée :

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| < \frac{1}{\text{PPCM}(b, d)} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

4) Supposons que l’on se demande si l’on a bien l’égalité $\frac{221}{481} = \frac{119}{259}$. La calculatrice indique ceci :



Peut-on faire confiance à la calculatrice et conclure que l'égalité est *vraie* ? On a 481 – 259 = 222, 259 – 222 = 37, 222 – 6 × 37 = 0 : le PGCD de 481 et 259 est 37 et on a donc : PPCM(481, 259) = $\frac{481 \times 259}{37}$ = 3367. Par suite,

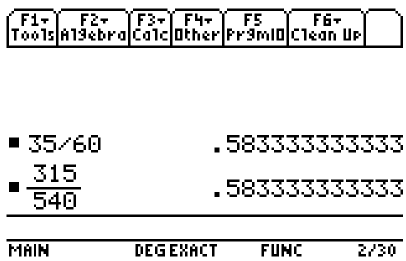
$$\left| \frac{a}{481} - \frac{c}{259} \right| \geq \frac{1}{3367} > \frac{1}{4000} = 0{,}00025.$$

Ainsi, si $\frac{a}{481} \neq \frac{c}{259}$, la chose se voit sur les affichages de la calculatrice *avant la 5*^{e} *décimale*. Inversement, si ces affichages sont *identiques jusqu'à la 4*^{e} *décimale incluse*, alors $\frac{a}{481} = \frac{c}{259}$.

De la même façon, si $\frac{35}{60} \neq \frac{315}{540}$, on a

$$\left| \frac{35}{60} - \frac{315}{540} \right| \geq \frac{1}{\text{PPCM}(60, 540)} = \frac{1}{540} = 0{,}00185185185\ldots$$

Inversement, si les affichages relatifs à $\frac{35}{60}$ et $\frac{315}{540}$ coïncident jusqu'à la 3^{e} décimale, alors ces fractions sont égales : $\frac{35}{60} = \frac{315}{540}$. Or on a ceci :



c) D'une façon générale, et contrairement à une croyance encore très répandue, la calculatrice constitue, pour la plupart des types de faits numériques à étudier au collège et au lycée, un laboratoire très sûr, permettant d'obtenir des résultats fiables. Bien entendu, si l'« expérience numérique » que l'on réalise en interrogeant la calculatrice permet donc très souvent de tenir pour *sûre* l'égalité (ou l'inégalité) de deux expressions numériques données, il reste encore à *déduire*, dans la *théorie numérique disponible* (TND), cette égalité (ou cette inégalité) ; faute de quoi l'on ne saurait prétendre « faire des mathématiques ».

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 12 : mardi 13 décembre 2005

0. Le programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques // 2. Forum des questions : exposés du jour // 3. Observation, analyse, évaluation, développement // 4. Former et se former

1. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques

1.1. Fin de la lecture commentée de la notice *Éducation mathématique & citoyenneté* (à partir de la sous-section 6.4).

1.2. Poursuite de la lecture de la notice *Questions & réponses* (sections 3 et 4).

2. Forum des questions : exposés du jour

a) On écoute un exposé de *MD* sur la question suivante :

Exposé 15. Quels sont les principaux problèmes auxquels on doit être attentif au moment de concevoir et de programmer l'étude du thème des équations et inéquations en seconde ?

b) Remarques et commentaires

c) On écoute un exposé de *WB* sur la question suivante :

Exposé 17. Comment former les élèves à un emploi judicieux des outils informatiques dans le travail mathématique ?

d) Remarques et commentaires

3. Observation, analyse, évaluation, développement

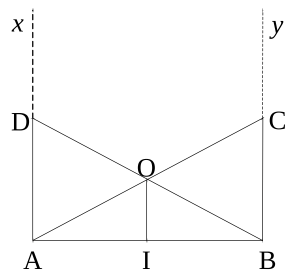
3.1. La notion d'organisation praxéologique

a) Toute activité humaine peut s'analyser comme accomplissement de tâches enchaînées, de certains types T. Ainsi toute activité humaine consiste-t-elle en la mise en jeu de certaines techniques τ. Le système, noté $[T / \tau]$, formé par un type de tâches et la technique qui lui est associée dans un certain milieu de vie peut être regardé comme un *savoir-faire*. Pour éviter des connotations inutiles, on parlera parfois, plus abstraitement, de *praxis* (mot grec qui signifie « action », de *prassein*, agir). Un « bloc praxique » $[T / \tau]$ va généralement accompagné d'une technologie θ et d'une théorie Θ, qui forment elles-mêmes un second bloc, noté [θ / Θ], qui peut être regardé, quant à lui, comme *un savoir*. Mais, là encore, on évitera des débats oiseux en parlant plus abstraitement de *logos* – mot grec qui signifie « parole » et « raison » : discours raisonné. Autour d'un type de tâches *T* se constitue ainsi une combinaison de savoir-faire et de savoir, de *praxis* et de *logos*, qu'on notera [*T* / τ / θ / Θ] et qu'on nommera *une praxéologie*.

b) D'après ce qui précède, toute activité humaine découle de la mise en jeu de certaines praxéologies [*T* / τ / θ / Θ] ayant entre elles des liens précis, et formant ainsi ce qu'on nommera une *organisation praxéologique*, qu'on peut noter $[T_i / \tau_i / \theta_i / \Theta_i]_{i\in I}$. Cette dernière notation ne précise certes pas la *structure* de l'organisation en question, qui peut être fort complexe. Une organisation praxéologique peut aussi être appelée *organisation de savoir* (en oubliant le « savoir-faire »), voire *savoir*, tout court, ou, à l'inverse, organisation de savoir-faire ou savoir-faire, tout court (en oubliant cette fois le « savoir »). On parlera aussi de praxéologie, tout court, pour désigner une organisation praxéologique même lorsqu'elle est constituée d'un grand nombre de praxéologies « ponctuelles » (c'est-à-dire de praxéologies de la forme [*T* / τ / θ / Θ], constituées autour de ce « point » qu'est *un* type de tâches déterminé *T*).

c) On notera un cas fondamental de liens qui peuvent exister au sein d'une organisation praxéologique. Très classiquement, ici, on s'en tiendra pour cela à des praxéologies *mathématiques* (ou organisations mathématiques).

1) Considérons le type de tâches *T* suivant : « Étant donné des points distincts A et B, construire le milieu I de [AB] à l'aide d'une équerre et d'une règle marquée. »



2) Une technique τ possible est la suivante :

– d'un même côté de (AB), on élève en A et B des demi-droites [A*x*) et [B*y*) perpendiculaires à (AB) ;

– on marque respectivement sur ces demi-droites des points D et C tels que AD = BC ;

– on trace [AC] et [BD], qui se coupent en O ;

– on marque le projeté orthogonal I de O sur (AB].

3) On voit que, pour accomplir *par cette technique* une tâche du type *T*, on est notamment amené à accomplir des tâches des types suivants :

T_1. Élever une demi-droite d'un côté donné d'une droite (AB) ;

T_2. Marquer sur une demi-droite [A*x*) donnée le point M tel que AM soit égal à la distance entre deux marques données sur la règle ;

T_3. Construire le projeté orthogonal, sur une droite [AB] donnée, d'un point O donné.

On dira par exemple que *T*, ou plutôt la technique τ, ou plus exactement la praxéologie [*T* / τ / θ / Θ], *motive* le type de tâches T_3 ; ce qu'on peut écrire : [*T* / τ / θ / Θ] ➦ T_3. Pratiquement, telle personne pourra avoir appris à construire le projeté orthogonal à l'aide d'une équerre *uniquement* parce qu'elle avait besoin de savoir accomplir ce type de tâches afin de construire le milieu de segments par la technique ci-dessus. Dans l'univers « praxéologique » de cette personne, le type de tâches *T*, et plus exactement la praxéologie [*T* / τ / θ / Θ], apparaît alors comme la *raison d'être* du type de tâches T_3 ou, plus exactement, de la praxéologie correspondante $[T_3 / \tau_3 / \theta_3 / \Theta_3]$. Bien entendu, on pourra semblablement se demander ce que sont les raisons d'être du type de tâches *T* – pourquoi veut-on construire le milieu de segments ? – ou, plus exactement, de la praxéologie [T / τ / θ / Θ]…

3.2. La notion d'organisation didactique

a) L'*organisation didactique* qui concerne le professeur est une organisation praxéologique constituée autour d'un grand type de tâches *T*, qu'on peut énoncer de façon simple dans les termes suivants : « enseigner un thème mathématique figurant au programme de la classe ». La technique τ à construire (et à justifier…) est ce qui permettra au professeur d'accomplir tel ou tel spécimen de *T*, par exemple la tâche consistant à « enseigner le "théorème de Pythagore" » (en 4e) ou à « enseigner les fonctions de référence » (en 2de), etc.

b) La construction de τ (ou plus exactement de [T / τ / θ / Θ]) est une affaire terriblement complexe, notamment parce que toute technique τ acceptable fait nécessairement appel à un *très grand nombre de types de tâches* – toutes celles par exemple qui transparaissent dans les « questions de la semaine » formulées depuis le début de l'année ! Cette complexité comporte au moins deux sources. D'une part, le professeur doit gérer, verticalement, tout un ensemble de conditions et de contraintes liées à la société, à l'école, à la pédagogie « générale », à la discipline enseignée, à son découpage en secteurs, thèmes et sujets ; d'autre part, horizontalement, il doit intégrer les élèves (et aussi leurs parents, etc.), dans un grand nombre de types de tâches didactiques qu'il ne peut accomplir que de façon *coopérative*.

c) Verticalement, il est usuel de distinguer des conditions et contraintes *« génériques »* (qui pèsent en principe sur l'accomplissement de *toute* tâche d'enseignement), et des conditions et contraintes *« spécifiques »* (c'est-à-dire supposées propres à l'enseignement de tel thème mathématique, voire de tel sujet relevant de ce thème). En réalité, cette distinction n'est pas aussi tranchée qu'on pourrait le croire. Rencontrer les parents d'élèves, en groupe ou individuellement, par exemple, est, certes, un type de tâches qui apparaît comme une condition et une contrainte *générique* de l'enseignement (et des apprentissages qu'il vise) ; mais l'accomplissement de ce type de tâches peut avoir des effets *spécifiques*, positifs ou négatifs, à propos de tels contenus mathématiques particuliers – par exemple si le professeur demande aux parents de s'assurer que leur enfant, élève de 6e, connaît ses « tables de multiplication », mais ne leur demande rien quant à l'attention qu'ils pourraient porter au travail donné à faire à leur enfant en matière de déduction en géométrie par exemple.

3.3. Questions d'organisation didactique

a) On illustrera les considérations précédentes, à propos de contraintes et conditions « génériques », en s'arrêtant d'abord brièvement sur la question suivante.

> Toutes les appréciations « classiques » que l'on peut trouver au pied du bulletin (Tableau d'honneur – Félicitations – Avertissement travail-conduite – Encouragement…) sont-elles mises en place officiellement ou est-ce l'établissement qui décide de leur utilisation ? J'ai eu l'impression, lors du conseil de classe, qu'elles étaient distribuées à la va-vite et que la lecture de ces appréciations par les parents ou les élèves n'aura pas le poids qu'auraient pu avoir des appréciations plus personnalisées. (SPM, CR, 5e, 11)

1) Le texte ci-après ainsi que le modèle de bulletin trimestriel figurant à sa suite apportent des éléments éclairants sur l'interrogation soulevée.

Présentation et contenu des bulletins trimestriels
BO n° 28 du 15 juillet 1999

Dans le cadre des mesures pour « le collège des années 2000 », il a été décidé de modifier la forme et le contenu des bulletins trimestriels afin de mieux les inscrire dans une démarche pédagogique et éducative. Il s'agit d'abord d'encourager l'élève à progresser plutôt que de l'enfermer dans une évaluation-sanction. La sévérité, pour être utile, doit être associée à un regard positif et prospectif.

Remplir un bulletin scolaire est une tâche exigeante et difficile pour les équipes enseignantes mais d'une importance capitale pour les élèves.

S'agissant des performances scolaires, les informations portées sur le bulletin doivent être suffisamment précises et complètes. Ainsi, pour les notes trimestrielles, il convient de distinguer les notes obtenues à l'oral et à l'écrit et, pour ces dernières, d'indiquer à combien de contrôles et de devoirs elles correspondent. L'évaluation de l'oral porte sur des compétences précises et pas seulement sur la participation de l'élève. Il y a lieu, également, de faire figurer, pour chaque discipline, la note moyenne de la classe ainsi que les notes minimale et maximale attribuées aux élèves de la classe. Il y a des efforts qui doivent être reconnus même s'ils ne débouchent pas sur de bonnes notes. Il faut donc expliquer pourquoi et comment progresser.

Il est utile également de prendre en compte, dans l'évaluation du travail et des activités des élèves, des compétences qui ne portent pas directement sur les performances scolaires : sens de l'initiative, autonomie, prise de responsabilité, travail fourni.

Les commentaires relatifs à chaque élève doivent comporter, d'une part, une appréciation sur ses performances scolaires, valorisant ses points forts et l'encourageant à progresser et, d'autre part, des conseils précis sur les moyens d'améliorer ses résultats. Il convient que les appréciations portées soient suffisamment détaillées et nuancées ainsi que respectueuses de la personne de l'élève. Il est demandé de bannir tout vocabulaire trop vague (« peut mieux faire », « moyen »), réducteur (« faible », « insuffisant ») voire humiliant (« inexistant », « nul », « terne ») qui n'aide aucunement l'élève. Il faut dire à l'élève ce qu'il fait et ce qu'il doit faire et privilégier les appréciations de nature à l'encourager pour que le bulletin trimestriel remplisse réellement son rôle éducatif.

Le bulletin et sa fonction doivent être expliqués devant la classe, dans leur principe. Le bulletin individuel peut faire l'objet d'une analyse au cours d'un entretien avec l'élève en présence ou non des parents, en particulier pour les élèves qui ont besoin d'être soutenus et encouragés.

Enfin, des propositions de documents d'auto-évaluation à remplir par l'élève au cours de l'heure de vie de classe, seront disponibles au centre départemental de documentation pédagogique et sur le site Internet (www.cndp.fr/college). Les équipes pédagogiques sont invitées à les utiliser : ils permettront de mieux comprendre certaines des difficultés rencontrées par les élèves et d'éclairer les enseignants sur les raisons de certains points faibles des élèves, tant au niveau des apprentissages qu'à celui du comportement.

Le modèle de bulletin trimestriel annexé à la présente circulaire peut être complété par l'établissement (la taille du modèle est celle d'un format A3).

La ministre déléguée, chargée de l'enseignement scolaire
Ségolène ROYAL

2) Le bulletin s'adresse en priorité aux élèves, qu'il doit aider, par le diagnostic et le conseil, à progresser. Notons en particulier cette indication : « Il y a des efforts qui doivent être reconnus même s'ils ne débouchent pas sur de bonnes notes. » Il ne faut pas oublier, en effet, qu'une note est un « instantané », une coupe dans une dynamique d'apprentissage (ou, quelquefois, de désapprentissage). Si l'on modélise les résultats d'un élève ω par une application $t \mapsto f_\omega(t)$, la note au temps t_0, soit $f_\omega(t_0)$, n'a qu'une valeur informative limitée si l'on ne sait pas dire si $f_\omega'(t_0) > 0$ ou si $f_\omega'(t_0) < 0$ (c'est-à-dire s'il y a amélioration en cours ou, au contraire, détérioration), et même si $f_\omega''(t_0) > 0$ ou $f_\omega''(t_0) < 0$ (c'est-à-dire si l'amélioration observée est en voie de régression, ou si la détérioration constatée atteint ses limites, etc. Une once de subtilité est ici requise.

BULLETIN TRIMESTRIEL

Disciplines	Notes (élève)	(classe) moy	m	M	Appréciations générales (savoirs, savoir-faire, comportement)	Progrès et efforts faits dans les matières et dans le comportement	Conseils pour progresser
	E						
	O						
Disciplines classées par ordre alphabétique. Seules celles concernant l'élève sont reportées.							
	E						
	O						
	E						
	O						
	E						
	O						
	E						
	O						
	E						
	O						
	E						
	O						
	E						
	O						

E : écrit ; O : oral ; moy : moyenne ; m : note minimale ; M : note maximale

Assiduité (nombre d'absences, de retards, justifiés, non justifiés) :
Comportement au sein de l'établissement : - sens de l'initiative - autonomie - prise de responsabilité
Appréciation globale de l'équipe pédagogique :

Signature du chef d'établissement

b) Un ensemble de conditions et de contraintes assez génériques encore et liées aux conditions et contraintes précédentes est constitué par les procédures d'*évaluation* et d'attribution de *notes* chiffrées. Il y a là un vaste secteur à explorer, que l'on aborde ici par la question suivante.

> Lors du chapitre sur le calcul fractionnaire une élève m'a fait remarquer que les corrections notées ne correspondent pas aux règles usuelles sur les additions de fractions. Par exemple, si un DS comporte quatre exercices notés sur 5, 4, 2 et 9, on additionne numérateur et dénominateur pour obtenir la note sur 20. Que répondre à cette élève ? (MD, MJ, 4^e, 11)

1) De la même façon que « le bulletin et sa fonction doivent être expliqués devant la classe, dans leur principe », le principe de la notation d'un devoir (ou, semblablement, celui de la formation de la note trimestrielle, sujet sur lequel on reviendra) doivent être clarifiés. La question soulevée par cette élève – question dont le mobile peut aller de la pure et simple interrogation intellectuelle devant ce qui lui apparaît comme une « contradiction » inattendue, jusqu'à la mise en cause et des mathématiques enseignées et des procédures de notation mise en œuvre à l'école – doit donc recevoir réponse.

2) Supposons un travail D constitué lui-même de travaux $D_1, \dots, D_\ell$. On suppose que D_i fait l'objet d'une note X_i sur N_i points : par exemple $N_i = 5$, tel élève ω recevant la note $X_i(\omega) = 3$. Dire que ω a obtenu la note 3 sur D_i n'est pas suffisant : si D_i est noté sur 10, ω n'a pas obtenu la « moyenne », qui est alors de 5 ; etc. L'usage est donc de dire que ω a obtenu « la note de 3/5 », et plus généralement la note $x_i(\omega) = X_i(\omega)/N_i$. Mais la notation 3/5 désigne-t-elle la fraction que l'on note habituellement $\frac{3}{5}$? Peut-on écrire que 3/5 = 0,6 ?… On sait qu'on ne dit pas, usuellement, « ω a obtenu 0,6 à D_i ». Mais on sait pourtant que l'on peut « traduire » une note sur 5, ou sur 10, en une note sur 20, par exemple : 3/5, cela veut dire 6/10 ou 12/20, etc.

3) En réalité, on peut regarder les choses ainsi : une note donnée à un travail « isolé » peut toujours être regardée comme un nombre compris entre 0 et 1 ; ω pourra ainsi avoir obtenu 0,4 à D_1, 0,9 à D_2, 0,5 à D_3. La moyenne arithmétique de ces trois nombres est ici $\frac{0,4 + 0,9 + 0,5}{3}$ = 0,6. Mais la note attribuée au travail D n'est pas nécessairement cette moyenne arithmétique-là : elle est en général une moyenne *pondérée*. En règle générale, on donne à chaque travail D_i un « poids » p_i, la somme des poids étant égale à 1. La note x attribuée à D est alors $x = p_1x_1 + \dots + p_\ell x_\ell$. Mais quels poids choisir ? L'idée est évidemment de donner à la note x_i un poids d'autant plus important que D_i est jugé plus important. Or son importance est, en principe, indiqué par la note maximale N_i qui lui est attribuée : un travail « noté sur 5 » est moins important qu'un travail « noté sur 12 », etc. En d'autres termes, on cherche un coefficient de proportionnalité k tel que $p_i = kN_i$; comme $p_1 + \dots + p_\ell = 1$, on a $1 = kN_1 + \dots + kN_\ell = k(N_1 + \dots + N_\ell) = kN$, et donc $k = 1/N$, en sorte que $p_i = N_i/N$; la note x s'écrit donc

$$x = p_1x_1 + \dots + p_\ell x_\ell = \frac{N_1}{N}x_1 + \dots + \frac{N_\ell}{N}x_\ell = \frac{N_1}{N}\frac{X_1}{N_1} + \dots + \frac{N_\ell}{N}\frac{X_\ell}{N_\ell} = \frac{X_1}{N} + \dots + \frac{X_\ell}{N}$$

$$= \frac{X_1 + \dots + X_\ell}{N} = \frac{X_1 + \dots + X_\ell}{N_1 + \dots + N_\ell}.$$

On retrouve ainsi l'observation de l'élève : on obtient la note au devoir D « en additionnant les numérateurs et les dénominateurs » des fractions X_i/N_i.

4) Il est instructif de regarder les choses « à l'envers » : si D se laisse décomposer en des travaux D_1, …, D_ℓ et si le professeur veut donner à ces travaux des poids p_1, … p_ℓ (dont la somme soit égale à 1), « sur combien » doit-il noter les travaux D_1, … D_ℓ ? Notons N_1, …, N_ℓ ces notes maximales inconnues, et écrivons toujours $x_i = X_i/N_i$ En se restreignant bien sûr à des poids rationnels $p_i = \frac{a_i}{b_i}$, fraction supposée réduite, si l'on veut que la note obtenue en ajoutant les notes X_i rapportées à la somme N des N_i corresponde aux poids souhaités, on doit avoir

$$\frac{N_1}{N} = \frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{N_\ell}{N} = \frac{a_\ell}{b_\ell}$$

et donc $N_1 = N \times \frac{a_1}{b_1}$, …, $N_\ell = N \times \frac{a_\ell}{b_\ell}$. L'entier N doit en particulier être divisible par b_1, …, b_ℓ et donc doit être un multiple de $\text{PPCM}(b_1, \ldots, b_\ell)$: il existe ainsi un entier $k \geq 1$ tel que $N = k\,\text{PPCM}(b_1, \ldots, b_\ell)$. Cela noté, l'entier k et donc l'entier N étant choisis, les notes maximales N_i sont données par $N_i = N \times \frac{a_i}{b_i}$. On a évidemment $N_1 + \ldots + N_\ell = N \times \frac{a_1}{b_1} + \ldots + N \times \frac{a_\ell}{b_\ell} = N(p_1 + \ldots + p_\ell) = N$. Supposons par exemple que $\ell = 3$ et que l'on souhaite donner à D_1, D_2, D_3 les poids respectifs $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$; comme $\text{PPCM}(6, 3, 2) = 6$, la note du travail D doit être un multiple de 6, par exemple 6, 12, 18 ou 24. Comme ces notes maximales sont inhabituelles, le professeur en général « bricole », par exemple pour arriver à 20. Ici, pour $N = 18$, on aurait $N_1 = 3$, $N_2 = 6$, $N_3 = 9$; le professeur peut par exemple décider d'ajouter un point à D_1 et un à D_3 : le système des poids devient alors $\frac{4}{20}, \frac{6}{20}, \frac{10}{20}$ soit encore $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}5$.

5) Pour l'essentiel, l'explication a donner aux élèves se situe dans le cadre du programme de la classe de 4^{e}, puisque celui-ci comporte le thème des *moyennes pondérées*. Il suffira donc d'expliquer que, dans un devoir D constitué par exemple de trois « problèmes » notés respectivement, disons, sur 3, sur 5 et sur 12, le coefficient de pondération de chaque note partielle est, *par convention*, donné respectivement par les fractions $\frac{3}{20}$, $\frac{5}{20}$ et $\frac{12}{20}$ (ces poids sont égaux respectivement à 0,15, à $\frac{1}{4}$ ou 0,25, et à $\frac{3}{5}$ ou 0,6), en sorte qu'un élève qui aurait obtenu respectivement 2 sur 3, 4 sur 5 et 9 sur 12 aurait pour note au devoir :

$$\frac{3}{20} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{20} \times \frac{4}{5} + \frac{12}{20} \times \frac{9}{12} = \frac{2}{20} + \frac{4}{20} + \frac{9}{20} = \frac{2+4+9}{20}.$$

Plus généralement, s'il avait obtenu a points sur 3, b points sur 5, c points sur 12, il aurait pour note

$$\frac{3}{20} \times \frac{a}{3} + \frac{5}{20} \times \frac{b}{5} + \frac{12}{20} \times \frac{c}{12} = \frac{a}{20} + \frac{b}{20} + \frac{c}{20} = \frac{a+b+c}{20}.$$

c) L'organisation de l'étude appelle, de la part du professeur, l'accomplissement d'une foule de tâches relevant d'un grand nombre de types de tâches. Les changements généraux qui affectent la société ne manquent pas, à cet égard, de modifier certains « paquets » de conditions et de contraintes sous lesquelles le professeur et les élèves sont amenés à travailler, faisant surgir en ces occasions toute une « problématicité » jamais encore rencontrée. Ainsi en va-t-il à propos de ce vers quoi pointent les questions suivantes.

1. Est-il conseillé de mettre éventuellement des fiches de cours pour les élèves sur Internet ? (GC, MJ, 2de, 0)

2. Dans mon lycée, un professeur qui utilise intensivement ESPAR a dû faire face à de vives critiques de la part d'un parent d'élève qui trouve que l'enseignement doit se faire « entre les murs de la république » et que les élèves peuvent ne pas avoir tous accès à Internet. Que faut-il en penser ? (JG, OS, 2de, 10)

3. Dans quelle mesure et selon quelles modalités peut-on mettre à disposition des documents (du type cahier de textes, classeur type…) sur Internet ? (CD, CR, 5^{e}, 11)

1) La question examinée soulève trois difficultés, que l'on considère tour à tour. Tout d'abord, mettre des documents « sur Internet » est une manière de dire qui, en l'espèce, n'est pas assez précise. Les mettre *où* sur Internet est, en effet, *une question cruciale*. Seul un site *officiellement associé* à l'établissement est acceptable : l'enseignement que donne un professeur *n'est pas une affaire privée*, et on ne demande pas aux élèves de venir chez soi pour y être enseignés ! En pratique, la situation des établissements et de leur communauté éducative peut varier beaucoup quant à la condition examinée ici : il faut d'abord que le site de l'établissement existe et soit administré activement, ce qui suppose un engagement de la communauté éducative à cet égard, engagement qui dépend à son tour du fait que soit pris en compte une deuxième difficulté clé.

2) Cette difficulté a trait à la possibilité effective qu'aura chaque élève (et, autant que possible, chaque parent d'élève) d'accéder aux ressources mises en ligne. Si la première condition – qui rappelle que la *res privata* ne saurait se substituer subrepticement à la *res publica* – fonde l'accès *formel* de chacun aux ressources en question, la deuxième condition *sine qua non* est d'assurer, autant que faire se peut, un accès *réel* de chacun à ce qui, en effet, pourrait concrètement prendre la forme concrète d'un ESPAR créé sur le site de l'établissement. La situation réelle peut de ce point de vue varier aujourd'hui beaucoup d'établissement à établissement. Le minimum minimorum qu'il faut viser est de rendre possible l'accès aux ressources en ligne à partir de connexions disponibles *au sein de l'établissement*, possibilités qui devront être ouvertes de façon raisonnable (en évitant par exemple les heures indues) à l'ensemble des élèves et des parents qui le souhaiteraient – même si l'évolution visée est de faire que, à terme, chacun puisse y accéder depuis son domicile.

3) La troisième condition, enfin, a trait à la nature même des documents mis en ligne. On peut l'exprimer ainsi : tout document proposé doit résulter d'un travail de la classe sous la direction du professeur et/ou doit nourrir la préparation d'un tel travail. Tout autre document (complément laissé à l'étude libre des élèves, etc.) doit être regardé comme un risque de *désengagement didactique du professeur*, de déresponsabilisation de celui-ci et de dérive vers une responsabilisation *abusive* des élèves : les élèves ne vont pas à l'école pour étudier seuls et être laissés à eux-mêmes. À cet égard, les documents mis en ligne par un professeur pour les élèves de telle classe dont il a la responsabilité ne devraient être accessibles aux élèves de telle autre classe que par le truchement de leur propre professeur, seul responsable, en l'espèce, de ce que l'établissement leur propose dans la matière concernée. Le réglage de cet accès éventuel des élèves (ou de certains d'entre eux) à des ressources constituées à d'autres fins doit être soigneusement étudié par les professeurs concernés et faire l'objet, à l'adresse de la communauté éducative, de règles clairement énoncées.

d) Au cœur de la tâche d'organisation de l'étude qui incombe au professeur se trouve, bien sûr, la *conception* et la *conduite* d'AER (dans le cadre d'un PER, par exemple), mais aussi de synthèses et d'exercices & problèmes. Ces types de tâches échoient au professeur, même si les décisions qu'il prend à cet égard sont discutées, voire sont élaborées avec les élèves sur plusieurs points. À cet égard, la question ci-après comporte, s'agissant de la responsabilité du professeur, une ambiguïté qu'il importe d'analyser.

> Je vais faire une séance en classe sur ordinateur avec le logiciel de géométrie Déclic. J'ai deux ou trois élèves qui semblent très motivés. J'envisage de leur proposer de diriger eux-mêmes la séance, c'est-à-dire qu'ils fassent le cours. Est-ce judicieux ? Dois-je les noter pour cela ? (CM, OS, 4e, 11)

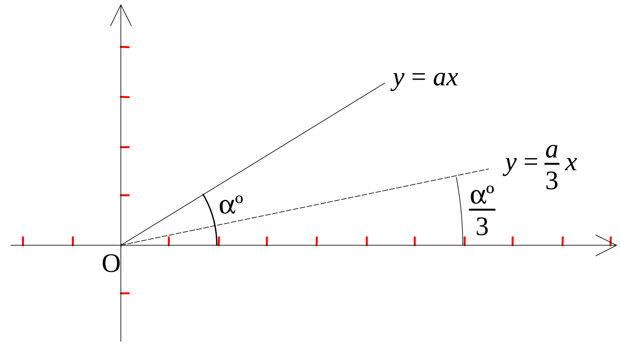
1) Si traditionnelle qu'elle soit, l'expression « faire (le) cours » n'a pas de sens univoque. En tous ses sens usuels, cependant, il est exclu que des élèves, si « motivés » se disent-ils, « fassent le cours » ! Si, par exemple, on entend par « faire le cours » la réalisation d'une *synthèse*, une telle dévolution ne saurait être acceptée : elle tomberait en effet sous le chef de « responsabilisation abusive » des élèves (voir ci-dessus). On a certes souligné que la synthèse est un acte qui doit solliciter toute la classe, *sous la direction du professeur*, celui-ci dynamisant, régulant et, finalement, validant le travail accompli. Ce qui est possible, en outre, c'est que la *mise en forme écrite* du travail de synthèse mené à bien en classe soit confié par le professeur à un ou plusieurs binômes d'élèves, ces binômes étant chargés d'une rédaction quasi définitive – à d'ultimes retouches près que le professeur pourra juger utile ou nécessaire d'apporter à leur texte. En ce cas, bien entendu, une note pourra être attribuée aux binômes concernés. Mais le professeur doit honorer sa charge en assumant la responsabilité de l'ensemble de ces opérations : il ne saurait s'en décharger sur des élèves.

2) S'il s'agit de l'*activité d'étude et de recherche* elle-même, il appartient tout autant au professeur d'en arrêter d'abord les *questions génératrices*, puis d'en valider les *questions cruciales*, qui naîtront du travail de la classe. Que le cheminement de l'étude doive se construire dans la classe, sous la direction du professeur, sans être imposé *a priori*, on l'a souligné. Mais cela n'entame en rien la responsabilité du professeur, qui ne saurait rétrocéder celle-ci à de « petits maîtres », dont la désignation pourrait en outre avoir un effet désastreux sur leur activité au sein du groupe classe et, corrélativement, sur la vie même de ce groupe.

3) Les remarques qui précèdent valent également pour les exercices & problèmes. Autant il est possible et utile que le contenu du travail d'une organisation mathématique mise en place puisse être arrêté par le professeur en tenant compte des demandes et des suggestions éventuelles des élèves – celles-ci étant recueillies par exemple à travers un dispositif du type « Questions de la semaine » –, autant il convient que le professeur conduise en première personne, sans en faire délégation à quiconque, cette partie nécessaire de l'étude – et cela jusqu'au point où, l'étude officielle prenant fin, le rôle du professeur s'allègera pour laisser l'élève travailler en autonomie didactique.

e) Pour éclairer un peu plus le cas d'une AER, on examine ici une nouvelle question, qui pose différents problèmes.

> Quelle est la différence entre la mesure d'un angle et la pente par laquelle on peut le représenter ? La semaine dernière vous avez parlé de trisection d'un angle, qui était impossible à la règle et au compas… Je me suis posé la question de le faire entrevoir à des élèves au collège. Mais je me suis trouvé confronté au problème suivant : je peux représenter un angle α par une droite $y = \alpha x$; donc mon angle α^{o} peut être représenté par la pente a. Donc pour procéder à la trisection de l'angle je divise ma pente par 3. Ceci est faux, mais peut être donné comme construction par un élève. Cela vient du fait que $\arctan(kx) \neq k\arctan(x)$. Mais, graphiquement, comment cela se matérialise ? Comment l'expliquer aux élèves ? (BR, JT, 4e, 11)



1) Il est exclu, au collège (et encore au lycée), que l'on puisse faire toucher du doigt le fait que telle construction est *impossible* avec tel système d'instruments : il s'agit là d'une problématique qui doit être entièrement laissée de côté.

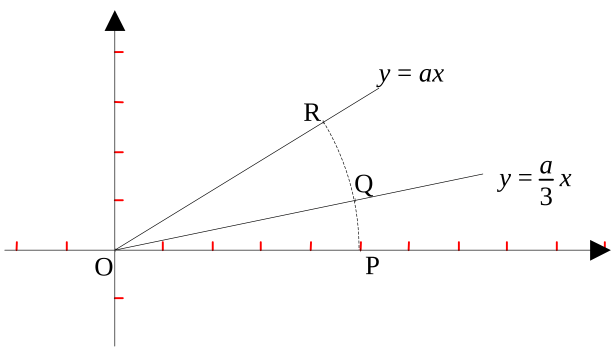
2) Ce qui est requis et souhaitable, en revanche, c'est de montrer que telle construction est *possible*, en démontrant que tel procédé de construction donne bien le résultat attendu. Dans cette perspective, on peut être amené à démontrer, en sens inverse, que tel procédé proposé ne donne pas ce qu'on attendrait de lui – ce qui, bien sûr, ne signifie pas qu'un procédé adéquat n'existe pas !

3) On pourra donc prouver que telle figure est constructible avec un certain système d'instruments, et cela en donnant un procédé de construction idoine. En revanche, on doit renoncer à vouloir prouver que telle figure n'est pas constructible avec tel système d'instruments : il s'agit là d'un type de résultats que les mathématiciens n'ont commencé à savoir démontrer que fort tardivement – au XIX^e^ siècle.

4) Dans le cas évoqué dans la question examinée, on peut envisager que le professeur prenne la décision de faire étudier par la classe la question suivante :

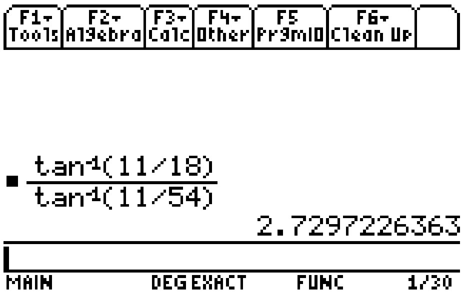
Si une droite d passant par l'origine d'un repère a pour équation $y = ax$ dans ce repère, est-il vrai que l'angle de la droite d'équation $y = \frac{a}{3}x$ avec l'axe des abscisses est le *tiers* de celui de d avec cet axe ?

Il restera alors à *concevoir* l'étude permettant de répondre de façon justifiée à cette question. La phase de conception doit être menée à bien par la classe sous la direction du professeur : en l'espèce, après une première étape de travail sur papier quadrillé avec rapporteur (par exemple), la classe peut envisager de travailler avec un logiciel de géométrie, en demandant l'affichage des mesures en degrés des angles ainsi que de leur rapport (dans le cas reproduit ci-contre, le logiciel donne un rapport de 2,7 environ). La mise au point du détail de l'étude fera de même l'objet d'un travail de la classe, etc. Notons que, en 3^e^, il sera possible d'utiliser la tangente de l'angle : si $\alpha = \tan^{-1}(a)$, l'angle β de la droite de pente $\frac{a}{3}$ est donné par $\tan^{-1}\left(\frac{a}{3}\right) =$



$\tan^{-1}\left(\frac{\tan\alpha}{3}\right)$; le rapport des mesures des angles est donc donné par $r = \dfrac{\alpha}{\tan^{-1}\left(\frac{\tan\alpha}{3}\right)} = \dfrac{\tan^{-1}(a)}{\tan^{-1}\left(\frac{a}{3}\right)}$.

Dans le cas représenté ci-dessus, par exemple, on a pris $a = \frac{11}{18}$ et donc $\frac{a}{3} = \frac{11}{54}$. La calculatrice donne ceci.



En pratique, on pourra construire un tableau comme le suivant (où l'on part de l'angle à trisecter).

Angle α	Coeff. dir.	Coeff. dir. /3	Angle β	α/3
72	3,077683537…	1,0258945123…	45,732301447…	34
57	1,539864963…	0,513288321…	27,170899971…	19
45	1	0,333333333…	18,434948822…	15
…	…	…	…	…
12	0,212556561…	0,070852187…	4,052758691…	4
…	…	…	…	…
1	0,017455064…	0,005818354…	0,333363422…	0,333333333…

On notera que, s'il est vrai que, lorsque α tend vers 0_+, le rapport $\frac{\alpha/3}{\beta}$ tend vers 1, pour α = 1º encore, la calculatrice n'en distingue pas moins nettement α/3 de β ; cela reste vrai pour des valeurs bien inférieures encore, comme le montre le tableau suivant.

Angle α	Angle β	α/3
0,3	0,100000812320…	0,1
0,03	0,010000000812…	0,01
0,003	0,001000000000812…	0,001

3.4. Analyse & développement

a) Le *développement* et la mise en fonctionnement d'une organisation didactique (OD) appropriée à la mise en place d'une certaine organisation mathématique (OM) *sont au cœur du travail du professeur*.

1) C'est ce que rappelle la question suivante, qui évoque tout un programme de travail – sur lequel le Séminaire a travaillé et continuera de travailler.

> Sachant que l'AER est le cœur de la vie mathématique, quelles questions faut-il se poser pour constituer une AER ? (Sur les archives, j'ai trouvé quelques éléments de réponse à cette question.) (MEK, MJ, 5e, 11)

2) Rappelons à ce propos que, pour la séance de la rentrée, les participants au Séminaire sont invités à rechercher un type de tâches $T_{\lrcorner}$ motivant, en 3^e^, la *réciproque* de la propriété de Thalès.

3) On notera la dialectique entre ***développement de l'OD*** et ***détermination de l'OM*** : en cherchant à créer une OD appropriée, on est amené à se poser des questions dont la réponse conditionnera le contenu précis de l'OM, qu'il s'agira alors d'« enseigner » par le moyen de l'OD envisagée.

b) Dans le travail de détermination mathématique et de développement didactique, les capacités d'*analyse didactique* sont à chaque pas essentielles. À titre d'illustration encore, on s'arrête sur la question suivante.

> Mes élèves continuent à avoir des difficultés pour calculer avec des nombres relatifs. Nous avons passé de longues semaines en début d'année à travailler dessus ; j'ai notifié aux élèves l'importance de la maîtrise des règles de calcul et leur utilisation dans un grand nombre de questions abordées ultérieurement. Une grande partie des élèves ne travaillent pas assez (en mathématiques comme dans les autres matières) et je n'arrive pas à les motiver. À chaque réutilisation du calcul avec les nombres relatifs, je souligne son importance ; j'ai déjà distribué une fiche d'outils et des exercices d'application afin que les élèves concernés (qui se sentent concernés en fait, car j'ai distribué ces fiches à toute la classe incitant celle-ci à travailler en autonomie) et j'ai organisé deux séances « portes ouvertes » au cours desquelles je répondais à toute question d'élève. Peu d'élèves ont assisté à ces séances et très peu d'élèves m'ont rendu un travail écrit. Que pourrais-je faire pour motiver mes élèves, d'autant qu'ils ont pu voir leurs lacunes et la difficulté d'acquérir de nouvelles connaissances (calcul fractionnaire, calcul de puissances) ? (LLL, JT, 4^e^, 11)

1) La pléthore de moyens didactiques déployés au service de l'apprentissage visé se retourne contre l'objectif poursuivi ! La chose n'est paradoxale qu'en apparence. Le paradoxe peut s'expliquer en termes de *contrat didactique*. L'insistance mise sur le calcul sur les nombres relatifs peut en effet être lue par les élèves comme signifiant qu'il s'agit là d'un savoir-faire *sur-éminemment difficile*. Or, pour nombre d'élèves, cela suffit pour les dissuader de s'y investir, en conformité avec le schéma de raisonnement suivant, appliqué ici au cas d'un DS ou d'un DM : si, dans un tel devoir, je ne fais pas la partie la plus difficile, tout en traitant honorablement les autres questions proposées, j'aurai rempli mon contrat et je devrai m'attendre à une note « correcte » (par exemple 12 ou même 14 sur 20), *à quoi personnellement je borne mes ambitions*. Étant donné le luxe de moyens que la professeure a mobilisés à propos des relatifs, je dois conclure qu'il s'agit là d'une question pour « l'élite » de la classe – en tout cas pas pour moi ! Voilà comment l'insistance, voire l'acharnement didactique peut provoquer des effets tout contraires à ceux recherchés.

2) Cette analyse faite, il reste bien sûr à concevoir une autre stratégie didactique. En l'espèce, l'analyse produite suggère une voie de restauration d'un contrat adéquat à propos des relatifs : il faut, non pas mettre en évidence, mais au contraire *banaliser* l'usage des relatifs, et cela bien entendu dans des activités mathématiques dans lesquelles le bon usage des relatifs soit un *moyen*, et non pas une fin en soi.

3) Les nombres relatifs sont en fait essentiellement motivés, historiquement, et aujourd'hui encore, par les besoins du *calcul algébrique* : sans eux, il serait très difficile de calculer ! C'est ainsi que, pour les mathématiciens indiens puis arabes, une équation telle $x^2 - 4x - 5 = 0$ ne pouvait pas être conçue : ce que l'on considérait alors s'écrirait en notation moderne

$$x^2 = 4x + 5.$$

Bien entendu, il n’était pas question d’écrire, comme on le ferait aujourd’hui : $x^2 - 4x - 5 = (x - 2)^2 - 4 - 5 = (x - 2)^2 - 9 = \ldots$ Partant de l’équation $x^2 = 4x + 5$, on devait par exemple procéder ainsi : $x^2 = 4x + 5 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 4x + 5 + 2x + 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 6(x + 1)$. Comme les négatifs étaient inconnus (ou ignorés), on pouvait alors achever le calcul ainsi : $(x + 1)^2 = 6(x + 1) \Leftrightarrow x + 1 = 6 \Leftrightarrow x = 5$.

4) Retenant cette l’idée essentielle, mais la situant en un contexte plus simple, on peut par exemple introduire une catégorie de problèmes qu’on peut appeler les problèmes du genre « Je pense à un nombre », dont voici un spécimen :

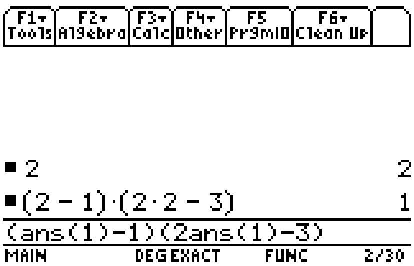
Je pense à un nombre. Si je lui retranche 1, d’une part, et si, d’autre part, je le double avant de lui retrancher 3, si je fais alors le produit des deux nombres ainsi obtenus, j’arrive au même nombre qu’en élevant au carré le nombre auquel j’ai pensé, en doublant le résultat ainsi obtenu puis en lui retranchant 7. À quel nombre avais-je pensé ?

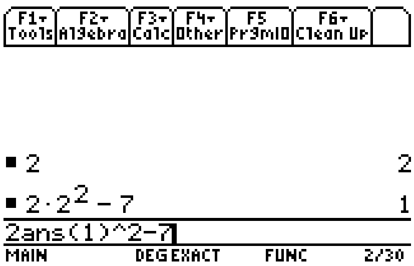
Pour que l’énoncé soit bien compris, on exécutera les programmes de calcul qu’il contient sur un nombre simple : $x = 7 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 6 \;\&\; 2x - 3 = 11 \Rightarrow (x - 1)(2x - 3) = 66 \\ x^2 = 49 \Rightarrow 2x^2 = 98 \Rightarrow 2x^2 - 7 = 91 \end{cases}$.

Le problème se met en équation ainsi : $(x - 1)(2x - 3) = 2x^2 - 7$. En développant on obtient $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 7$, et donc $5x = 10$, soit $x = 2$. La vérification est ici indispensable :

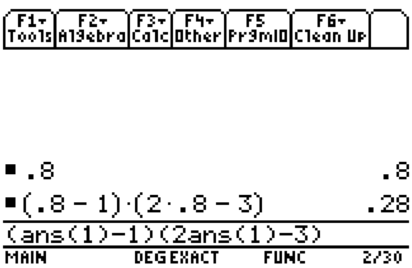
$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \;\&\; 2x - 3 = 1 \Rightarrow (x - 1)(2x - 3) = 1 \\ x^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow 2x^2 - 7 = 1 \end{cases}.$$

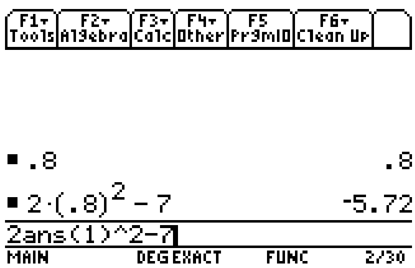
La calculatrice sera également mise à contribution :





Si, par exemple, un élève arrive l’égalité erronée $2x^2 - 5x - 3 = 2x^2 - 7$, il obtiendra (sauf nouvelle erreur de sa part) $x = 0{,}8$, ce qui donne ceci :





3.5. Une séance observée en 4[e]

a) On s’arrête maintenant sur le contenu de la troisième rubrique du plan d’analyse proposé : l’*Organisation didactique*. Les fiches recueillies lors de la séance 6 contiennent, conformément à la consigne donnée (il s'agissait de rédiger « au moins une indication relevant de [la] rubrique » considérée), des notations très généralement acceptables, sur lesquelles on ne s'étendra pas davantage. En revanche, pour compenser les limites un peu étroites du travail demandé alors, on explicite ci-après quelques éléments plus généraux, constitutifs de l'organisation didactique observée.

1) Comment l'étude est-elle organisée dans la séance observée ? Certains aspects de cette organisation ne sont pas le fait du professeur ; ils n'en sont pas moins fondamentaux. Un aspect de grande généricité est ainsi le suivant : l'étude se réalise – ici – dans la co-présence du professeur et des élèves, « en présentiel ». Il pourrait n'en être pas ainsi. Sans parler de formation à distance (que l'on pense au CNED), on peut simplement penser à ce qui se passe dans ce dispositif didactique qu'est le DM. En ce cas, le professeur et le groupe des élèves peuvent avoir des *points de rendez-vous* (ils en ont en principe au moins deux : quand le DM est proposé par le professeur, quand il est rendu par les élèves). On va plus loin encore, en principe, avec le cas du DS, où le professeur peut n'être pas présent du tout (s'il trouve un membre du personnel habilité à assurer la surveillance de l'épreuve, la collecte des travaux des élèves à l'issue de la séance, etc.). Dans la séance observée, en revanche, professeur et élèves sont *là*.

2) L'objectif de la séance est manifestement de commencer à mettre en place une organisation mathématique que l'on peut écrire [T_i / τ_i / θ / Θ], où θ est ce qu'on a appelé « le résultat technologique clé » – la position du centre de gravité sur les médianes. L'organisation de l'étude visant cette mise en place consiste ici à étudier le problème de la création d'une technique relative à un type de tâches que l'on a noté $T_{?\mathrm{C}}$ (et qui est l'un des types T_i visés), ce problème étant tel que sa résolution ait de fortes chances de conduire, directement ou indirectement (voir la séance 11, « Imprévu fatal ? »), vers une technique « attractive » dont la technologie inclue θ à titre de composant principal. Par contraste, dans une organisation didactique visant une introduction formelle (et non pas fonctionnelle) de θ, le professeur pourrait présenter θ *ex abrupto*, comme un résultat mathématique immotivé, et en montrer *ensuite* des « applications » éventuelles.

3) Le problème à étudier est, quant à lui, proposé aux élèves *ex abrupto* : ils le découvrent formulé sur la feuille de travail qui leur est distribuée. Par contraste, ce problème aurait pu être engendré par une difficulté préalable supposée rencontrée par un personnage évoqué par l'énoncé, comme il en va dans cette « historiette » :

Un trésor a été caché dans un bois en un point C situé au pied d'un chêne, point qui forme avec deux autres points A et B, occupés respectivement par un acacia et un bouleau, un triangle de très grandes dimensions dont le centre de gravité G se trouve, lui, occupé par une gentiane. Lorsque les propriétaires du trésor reviennent plusieurs mois plus tard le chercher, ils retrouvent aisément l'acacia, le bouleau, la gentiane, mais il n'y a plus trace de chêne ! Affreusement inquiets, ils se demandent s'ils peuvent retrouver C à partir de A, B et G.

4) Cela noté, dans l'étude du problème proposé, le professeur se fait alors directeur d'étude : on retrouve là les éléments d'analyse présentés au cours des séances 8 et 10.

5) D'ici la rentrée, chaque participant reprendra, pour les méditer, les développements consacrés, au fil des séances précédentes, à l'analyse de l'*organisation didactique*. Pour faciliter cette tâche, on les a reproduits ci-après *in extenso*.

Organisation didactique (séance 2)

OD21. Du point de vue de la *chronogenèse*, la séance est située implicitement dans la perspective de la séance de la veille : on s'attend donc à ce que le *temps didactique* avance.

OD22. Du point de vue de la *topogenèse*, on note qu'il revient aux élèves, sur instruction du professeur, d'effectuer le *travail de mémoire* – le « rappel » – demandé.

OD23. Le travail de mémoire participe d'une *technique d'étude collective*. Il est ici discrètement justifié – par le professeur – à l'aide d'un argument de circonstance : l'absence de certains élèves à la séance précédente. Cet élément de *technologie didactique* est distinct de celui qui affirmerait que, de façon moins contingente, davantage intrinsèque, le groupe a besoin de « se rappeler à lui-même », régulièrement, en des instants qu'il appartient au professeur de déterminer (et peut-être aux élèves de suggérer), le travail accompli en telle séance précédente.

OD24. Du point de vue de la *topogenèse* toujours, on note que le professeur se réserve le rappel de la *technique* τ_{me}. Le compte rendu ne permet pas de savoir s'il s'agit d'un rappel verbal ou si le geste est joint à la parole (avec usage d'instruments de tracé).

Organisation didactique (séance 2)

OD31. Le titre portée sur la feuille de travail – *Position du centre de gravité sur chacune des médianes* – anticipe beaucoup ! Car, précisément, ce qu'il s'agit de découvrir collectivement, c'est que le centre de gravité occupe sur la médiane une *position particulière* (il la divise en un rapport constant) *et que cette propriété constitue la clé du problème étudié*.

OD32. La *dévolution* du problème aux élèves s'appuie sur une lecture de l'énoncé par l'un des élèves, augmentée de commentaires lapidaires du professeur qui limitent *a priori* le travail de la classe en écartant un point essentiel d'incertitude – peut-on effectivement retrouver le point effacé ?

OD33. Le problème proposé apparaît ici *isolé*. Pour le contraste, on peut imaginer une dynamique d'étude dans laquelle il prendrait place dans un PER engendré par la question « Étant donné une figure dont certains éléments ont été effacés, peut-on – et alors comment – reconstituer la figure (c'est-à-dire retrouver les éléments effacés) ? » Il s'agit là d'un PER productif dans tous les secteurs de la géométrie de 4^{e} : peut-on par exemple, connaissant un arc de cercle dont le centre a été effacé, reconstituer le cercle ? Dans ce cadre général, la question de la possibilité de déterminer C, et en particulier la question de l'*unicité* de C, se poserait, à la longue, de façon quasi inévitable – par exemple si la classe s'attaque au problème suivant : « D'un rectangle tracé dans le plan, il ne reste plus que l'un des coins et le milieu de l'un des côtés ; peut-on reconstituer ce rectangle et, si oui, comment ? »

OD34. Le problème proposé lors de la séance observée pourrait alors se comparer utilement, par exemple, au problème analogue concernant le type de tâches $T_{⊾}$ suivant : "Dans un triangle ABC dont on a marqué l'orthocentre H, on a effacé le sommet C ; construire ce point à la règle et au compas connaissant A, B et H." » Ici, la clé de la résolution ne tient nullement au fait que H occuperait une position particulière sur les hauteurs : la propriété géométrique cruciale est d'une nature très différente.

Organisation didactique (séance 4)

OD41. Par le biais d'un « dialogue » animé par P, l'organisation de la recherche juxtapose (et articule de façon non précisée) l'effort individuel et l'action collective, jusqu'à ce que P renvoie chacun à son travail personnel (en disant « Je vous laisse un peu réfléchir… »).

OD42. L'invitation à réfléchir est marquée d'incertitude : s'agit-il de réfléchir sur $T_{me/\{A, B, G\}}$ ou sur $T_{C?}$? Ou encore sur $T_{me/\{A, B, G\}}$ mais en vue d'avancer (ultérieurement) sur $T_{C?}$?

OD43. Quel que soit le sens donné par les élèves à l'invitation de P, à la fin de l'épisode le problème soulevé à propos de $T_{me/\{A, B, G\}}$ demeure ouvert.

OD44. Une autre organisation de l'étude consisterait à partir de la question cruciale « Comment déterminer un point du plan ? » Dans le cas étudié, une réponse vient à l'esprit qui aurait pu être explorée prioritairement : C peut être obtenu comme point d'intersection des droites portant les côtés [AC] et [BC]. On décrit cette possibilité ci-après à l'aide d'un compte rendu fictif.

Semaine *n* – Lundi

La classe étudie le problème suivant : on a effacé le point C d'un triangle ABC dont on avait marqué le centre de gravité G ; comment retrouver le point C à partir de ce qui reste, c'est-à-dire A, B et G ?

P : « Comment trouver le point C ? Kévin, tu as une idée ? » Kévin : « Si on sait tracer les deux côtés, on a C ! » P : « Qu'en pensez-vous ? Farida ? » Farida : « Oui, mais comment on trace les côtés ? On sait pas, ça !… » P : « Bon, alors ? Quelle question on peut se poser ? Si on veut tracer les côtés ? » Un élève lève le doigt. P : « Oui, Ricardo… » Ricardo : « Comment on fait pour déterminer une droite ? » P : « Oui, c'est ça. Comment peut-on déterminer une droite. Alors comment ? Qui peut répondre ? Qu'est-ce qu'on connaît ici ? » Nabil : « On connaît un point ? Ça suffit pas. » P : « Exact. Alors ? Qu'est-ce qu'il faudrait ? »

Une élève se signale : « Madame ! Madame ! » « Oui, Sarah… » Sarah : « Madame, si on connaissait la direction du côté ! Comme quand on a fait avec le point de concours des bissectrices ! » P : « Oui, qu'est-ce qui s'était passé ? Qui peut nous le rappeler ? Joris ? » Joris : « Ben, au lieu de G on avait le point… » P : « Comment on l'avait noté ce point ? » Des élèves : « I… » P : « Voilà, on l'avait appelé I. Et c'était ? » Des élèves : « Le centre du cercle inscrit dans le triangle. » P : « Bien, c'est ça. Alors, Joris ? » Joris : « Bon, le côté passant par A par exemple c'était le symétrique de (AB) par rapport à (AI), on doublait l'angle, quoi… » P : « Vous êtes d'accord ? » Des élèves en chœur : « Oui ! » P : « Bon, et ici ? Est-ce qu'on peut faire ça ? » Silence…

P relance : « Qu'est-ce qu'il faudrait pour qu'on puisse espérer que ça marche ?… Qui a une idée ? » Une élève semble hésiter à répondre ; P la sollicite : « Manon, tu as une idée ? » Manon : « Si par exemple l'angle était le double, ou le triple, si on avait quelque chose comme ça… » P : « Précise : quel angle ? » Manon : « L'angle $\widehat{GAC}$, si c'était par exemple deux fois $\widehat{BAG}$, ou la moitié, comme ça… » P : « Oui, par exemple si c'était la moitié, qu'est-ce qu'on ferait ? Jocelyn ? » Jocelyn : « On prend la moitié de $\widehat{BAG}$… » P : « Dis-le en termes de symétrie, s'il te plaît. » Jocelyn hésite un peu, puis se lance : « (AC) c'est le symétrique de la bissectrice de $\widehat{BAG}$. » P : « Par rapport à ? » Jocelyn : « À la droite (AG) ! » P : « Oui, enfin, *ce serait !* »

Une élève intervient : « Ça marche pas ! » P : « Oui, Sofia, ça marche pas ? Comment tu sais ? Qu'est-ce qui ne marche pas d'abord ? » « Si on fait ce qu'a dit Jocelyn. » P : « Comment tu as fait ? » Sofia : « J'ai fait la figure avec le quadrillage. Ça marche pas. La moitié, ça marche pas. Et le double non plus. » P : « Bon, qu'est-ce que nous allons faire pour prolonger ce que nous dit Sofia ? Lucas ? » Lucas : « On fait une étude avec le logiciel ! » P : « Oui, avec le logiciel Wallis, c'est ça. Alors comment on fait ça ? Alors Anaïs ? » Anaïs : « On fait la figure. » P : « Oui. » Anaïs : « Et après on demande d'afficher l'angle $\widehat{BAG}$ et l'angle $\widehat{GAC}$, et on compare. » P à la classe : « Vous êtes d'accord ? » Des élèves en chœur : « Oui. » P : « Bon, moi j'ai une question. “On compare”, ça veut dire quoi ? Vous faites quoi ? » Silence… P : « Alors ? » Jocelyn : « On regarde si l'un est le double de l'autre, ou le triple, je sais pas… » P : « Mais pour ça, qu'est-ce qu'on peut faire ? » Un élève demande la parole. P : « Camille ? » Camille : « On demande à Wallis d'afficher le rapport des angles, comme ça on sait directement si c'est un ou un demi, ou deux… » P : « Est-ce qu'on sait faire ça ? » Les élèves en chœur : « Oui ! » P : « Bon, alors vous noter ça dans votre cahier de textes pour jeudi. Allez… »

Les élèves s'affairent. P circule, échange quelques mots avec un élève. Une élève l'appelle. P se rend auprès d'elle, l'écoute. P : « Écoutez, un peu. Amélie demande comment on appelle les mesures des angles. Sarah ? » Sarah : « Moi j'ai mis u et v, comme on avait fait déjà. » P : « Oui, d'accord, on peut faire ça. Et puis pour le rapport de u et v donc ? » Sarah : « r ? » P : « Voilà, r, par exemple ! » Un élève se manifeste : « Madame on peut aussi faire afficher v/u ! Ça facilite. » P : « Oui, pourquoi pas. Et tu l'appelles comment ? » Florian : « Je l'appelle s. » P : « D'accord. Bon, alors on verra jeudi ce qu'on fait… On en reste là pour cette recherche aujourd'hui ! »

Semaine *n* – Jeudi

P : « Bon alors, maintenant on revient au problème de retrouver le sommet C d'un triangle dont on connaît les sommets A et B et le centre de gravité G. J'ai demandé à Farida de nous rappeler ce qu'on avait fait et ce qu'il y avait à faire. Farida, à toi ! » Farida va au tableau et trace rapidement à main levée une figure où apparaisse les points A, B, C et G ainsi que les médianes ; puis elle s'adresse à la classe : « On avait posé la question “Comment faire pour déterminer les droites (AC) et (BC) ?” On a étudié la réponse “On cherche à déterminer la direction de (AC) et de (BC)”, un peu comme on avait fait à propos du même problème avec le centre du cercle inscrit I à la place du centre de gravité G. Mais là on n’a pas trouvé une relation simple… Il fallait faire une étude expérimentale avec Wallis pour voir si par exemple [elle se tourne vers le tableau] l’angle $\widehat{GAC}$ serait la moitié ou le tiers ou autre chose de l’angle $\widehat{GAC}$. Voilà… » P : « Merci Farida, très bien… Bon, vous avez donc étudié ça avec Wallis. Alors votre réponse ? »

Un élève : « Ça marche pas ! » P : « Vous êtes d’accord ? Que ça marche pas ? » Des élèves en chœur : « Oui. » P : « Qui aurait trouvé quelque chose ? » Silence… P regarde la classe : « Bon, alors on va abandonner cette voie – provisoirement ! On revient donc à la question rappelée par Farida : “Comment faire pour déterminer les droites (AC) et (BC) ?” On avait répondu en termes de direction de la droite. Quelle autre réponse est possible ? Pour déterminer une droite ? Kévin ? » Kévin : « Il suffit d’avoir un autre point. » P : « Oui, d’accord. Quel autre point ? Brice ? » Brice : « C. » Rires dans la classe. P : « Brice, pourquoi ils rient ? » Brice : « Parce que c’est ça qu’on cherche ! » P : « Bien. Alors, à quel autre point on pourrait penser ? » Brice : « Le point qui est sur la médiane (AG). » P : « D’accord. Et c’est quoi ce point ? » Ricardo : « Le milieu ! » La classe approuve. P : « Bien, le milieu A’, c’est ça. Problème : comment déterminer A’ ? » Camille : « On peut faire comme avec les angles : on regarde si par exemple GA’ est égal à GA, ou si c’est le double, etc. » P : « Vous êtes d’accord ? » Silence. P : « On peut essayer ça ? » La classe semble approuver. P : « Bon, alors vous savez ce qu’il vous reste à faire ! Cette fois *u* c’est la mesure GA, *v* c’est GA’. C’est clair ? » Les élèves : « Oui. » P : « Alors vous notez ça dans votre cahier de textes. Vous pensez aussi à faire une narration écrite de la recherche qu’on a arrêtée, en vue de la synthèse à venir. » Un élève : « C’est pour quand, Madame ? » P : « Pour lundi prochain. Vous notez ; après, on va faire des exercices de calcul littéral. Je vous donne le premier, vous le recopiez là où vous savez… » Elle écrit :

Exercice 11. Montrer que, si x est un entier pair, alors le nombre $y = 3x–(4x–2)$ est aussi un entier pair. Que peut-on dire de y lorsque x est impair ?

P : « Allez ! Dépêchons-nous… »

Organisation didactique (séance 8)

OD567-1. Selon un style de conduite assez classique (mais dont on peut questionner la pertinence vis-à-vis des apprentissages), P ne prend en compte que les apports des élèves qui font avancer sans pauses ni digressions apparentes vers le but qu’elle vise. Il est remarquable que l’intervention du lecteur de l’énoncé (« On n’a pas toutes les données !… ») ne rencontre ainsi aucun écho, alors même qu’elle est l’indice d’une interrogation (les données sont-elles suffisantes ?) ou plus exactement d’un doute confinant à la certitude (on ne dispose pas de toutes les données indispensables) qui donne pourtant tout son prix à la solution qui va être trouvée. (On peut gager que, à l’état isolé – comme il en va dans le cadre d’un DS –, cet élève arrêterait là sa recherche, pour un motif laissé ici indiscuté et jugé par lui, conséquemment, comme indiscutable.)

OD567-2. D’autres apports sont au contraire intégrés – sans plus de discussion – à la construction collective que P impulse et régule. Ainsi en va-t-il pour la mise en place de la technique $\tau_{me/\{A, B, G\}}$, proposée par l’élève envoyé au tableau par P. L’épisode relève du *moment de l’émergence de la technique*, ce moment se réalisant, ici, par une interaction minimaliste de P avec l’élève proposant, *sans place faite à « la classe »*.

OD567-3. Le sous-épisode relatif à T_M relève tout à la fois du moment du *travail de la technique* τ_M et d’une reprise du moment de l’*institutionnalisation* – qui porte sélectivement, et de façon apparemment autoritaire (« Pas comme ça ! Comme ça ! », semble dire P), sur la technique « officielle » τ_M, non sur sa technologie (notée plus haut θ).

Organisation didactique (séance 10)

OD8910-1. L’épisode relève en son entier du *moment de l’émergence d’une technique* $\tau_{C?}$ ainsi que, corrélativement et partiellement, du *moment technologique*.

OD8910-2. Les propositions techniques ou technologico-techniques des élèves sont sollicitées et brièvement examinées par P, de façon soit explicite (c’est le cas de la technique $\tau_{C?}^{*}$), soit implicite (cas de la technique $\tau_{C?}^{**}$) : le *débat* à leur endroit est des plus réduits.

OD8910-3. La direction de l’étude par P joue un rôle essentiel dans le passage – relativement immotivé, semble-t-il, pour la classe – du premier sous-épisode au second, qui sera consacré à l’étude d’un élément technologique *supposé* clé. On doit noter, à ce propos, le dissociation du *topos* de P et du *topos* des élèves : pour P, la recherche technologique lancée doit aboutir à un résultat classique, que P sait producteur d’une technique $\tau_{C?}$ adéquate ; pour les élèves, il y a là au mieux une conjecture. On peut, en vérité, penser que nombre d’entre eux se guident en l’espèce sur le désir de P, non sur l’analyse objective de la situation d’étude et de recherche.

OD8910-4. L’étude de la position de G sur la médiane se présente d’abord comme expérimentale. L’expérimentation utilise un quadrillage […]. Ce choix n’est pas le fruit d’une délibération collective : il apparaît entièrement comme celui de P, qui a de même assumé la préparation pratique du « montage expérimental » – qui se réduit ici aux figures dessinées sur le tableau (sur un volet quadrillé de celui-ci), ainsi que sur la feuille de travail distribuée aux élèves.

3.6. Une séance en 4^{e} : analyse d’une vidéo

On analyse quelques aspects de l’étude par la classe, à l’aide d’un quadrillage, de la position de G sur les médianes. L’emploi du quadrillage comme instrument d’expérimentation graphique pose le problème clairement de son bon usage. La vidéo montre, à cet égard, des élèves usant du papier quadrillé comme ils le feraient du papier blanc, sans que le problème de la construction de techniques adéquates soit nettement posé et résolu. Ainsi les droites sont-elles tracées à la règle, en trait continu, lorsqu’il conviendrait d’en marquer simplement les points situés sur le quadrillage, le tracé continu n’intervenant que si l’intersection de deux droites n’est pas un point du quadrillage (ce qui ne se produit pas ici). On voit de même des élèves procéder à la vérification graphique de l’égalité GC = 2 GC’ à l’aide du compas, alors que C, G, C’ sont des points alignés du quadrillage. Le travail requis pour installer les techniques adéquates reste clandestin et, implicitement, à la charge des élèves. Lorsque P est interpellée par une élève (dont le compte rendu nous dit qu’elle « regimbe devant l’utilisation du quadrillage »), elle répond en esquissant rapidement, au tableau, la technique d’obtention du milieu d’un segment dont les extrémités sont sur le quadrillage (pour aller de l’une à l’autre extrémité, il faut se déplacer vers la gauche de 2 cases puis monter de 8, etc.). Mais P n’explicite pas la technologie de cette technique, pourtant à portée de main (son composant essentiel n’est autre que le premier théorème des milieux). L’intelligibilité (pour les élèves) de la technique ainsi présentée en pâtit à l’évidence. La carence constatée s’explique : l’emploi du quadrillage comme instrument *mathématique* n’étant pas familier aujourd’hui encore à la profession, il est vraisemblable que P n’ait pas regardé jusqu’ici les techniques correspondantes comme des objets d’enseignement, qu’il est indispensable d’élaborer collectivement et d’institutionnaliser…

4. Former et se former

Chaque participant remplit le questionnaire ci-après, qui sera désormais proposé périodiquement.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Professeur stagiaire : ____________________________

Tuteur : ____________________________

Former & se former
Mardi 13 décembre 2005

Question 1a. Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous paraît plutôt *positif*.

Votre réponse :

Question 1b. Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt *négatif*.

Votre réponse :

Question 2a. Indiquez *un* aspect de votre travail personnel dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît plutôt *positif*.

Votre réponse :

Question 2b. Indiquez *un* aspect de votre travail personnel dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt *négatif*.

Votre réponse :

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

N.B. Divers additifs et correctifs pourront être apportés aux résumés ci-après, en fonction notamment des observations qui seront faites sur leur contenu et leur organisation.

Séance 13 – Séance 14 – Séance 15 – Séance 16 – Séance 17 – Séance 18
Séance 19 – Séance 20 – Séance 21 – Séance 22 – Séance 23 – Séance 24

➔ Séance 13 : mardi 3 janvier 2006

0. Le programme de la séance

➔ **Matin** : 0. Questions de la semaine // 1. Problématique et fonctionnement de la formation // 2. Forum des questions.

➔ **Après-midi** (explicitation) : 3. Faisons le point ! // 4. Forum des questions : exposés à venir // 5. Une nouvelle notice.

Matin

1. Problématique et fonctionnement de la formation

1.1. Les notices : *Questions & réponses*, suite

Poursuite de la lecture commentée : section 4.

1.2. La structuration des domaines de formation

a) Le travail de formation est fondé sur un schéma présenté dès le 31 août (dans le document intitulé *Formation et validation des PCL2 de mathématiques* : face à une question professionnelle Q, l'élaboration d'une réponse R (ou plutôt $R^♥$) suppose un parcours d'étude et de recherche, collectif et individuel, dont les étapes clés sont les suivantes :

1. ***Observer*** les réponses $R^◊$ existantes dans la culture ou les pratiques professionnelles.
2. ***Analyser***, au double plan clinique / expérimental et théorique, ces réponses $R^◊$.
3. ***Évaluer*** ces mêmes réponses $R^◊$.
4. ***Développer*** une réponse propre $R^♥$.
5. ***Diffuser et défendre*** la réponse $R^♥$ ainsi produite.

b) Les questions Q étudiées portent sur l'***organisation didactique*** – dans ses aspects les plus génériques comme dans ses aspects les plus spécifiques – à propos d'***organisations***

mathématiques qui apparaissent elles-mêmes ***problématiques*** à divers niveaux et de diverses façons.

c) Le questionnement comporte notamment quatre thèmes communs à l'ensemble des filières de formation, que l'on rappelle :

1. ***Évaluation***.
2. ***Gestion de la diversité***.
3. ***Éducation à la citoyenneté***.
4. ***Travail en équipe***.

À ces thèmes il convient d'en ajouter un cinquième, en relation avec la préparation du C2i2e :

5. ***Intégration didactique des TICE***.

d) On articulera désormais de façon plus systématique le travail développé dans le Séminaire à la structuration en grands ***domaines d'études*** des mathématiques à enseigner, telle que cette structuration s'affirme, avec des variantes mineures, dans les programmes actuels de l'enseignement scolaire :

1. ***Géométries***.
2. ***Nombres, calculs, fonctions***.
3. ***Statistique***.
4. ***Grandeurs et mesures***.

On notera deux faits orthographiques : 1) « géométries » est mis ici (volontairement) au pluriel ; 2) en revanche, « statistique » est écrit sans marque du pluriel : le professeur de mathématiques enseigne de ***la*** statistique, non ***des*** statistiques – même si la classe de mathématiques a besoin de statistiques pour faire de ***la*** statistique.

1.3. Les outils de la formation

a) Le premier outil de formation, ce sont les ***questions de la semaine***. C'est par les dynamiques enclenchées par les questions écrites posées que le temps didactique peut avancer. Le travail mené à bien est ainsi une coproduction des participants au Séminaire et du responsable du Séminaire. Les questions de la semaine permettent à chacun, chaque semaine, de s'exprimer en s'interrogeant et en interrogeant : toute question posée, consultable par chacun, devient *ipso facto* un ***problème*** posé devant le Séminaire, même si les dynamiques en cours conduisent à différer le travail collectif sur tel ou tel problème. C'est par les questions de la semaine que passe l'essentiel de l'apport des participants au travail du Séminaire, notamment sous la forme de « remontées du terrain » – à partir du stage en responsabilité comme du stage de pratique accompagnée.

b) Un deuxième outil est constitué des ***exposés*** relatifs au contenu des archives du Séminaire. À propos de telle question Q, un participant est désigné pour aller extraire des archives, fruit du travail des promotions précédentes, des éléments de réponse $R^{\lozenge}$ qui, présentés oralement puis par écrit, constituent un point de départ pour un travail ultérieur du Séminaire sur la question Q. La rigueur de l'investigation demandée et la fidélité de la restitution des éléments de réponse ainsi identifiés sont des conditions *sine qua non* du travail à accomplir.

c) Dans la période qui s'ouvre, une source importante de questions sera constituée par les ***travaux d'étude et de recherche*** – qui sont d'abord, par les ***problèmes*** qu'ils conduiront à étudier, un outil de formation ***individuel*** et ***collectif***. Leur rôle dans le travail du Séminaire, tant en ce qui concerne les questions de la semaine que les réponses à élaborer, devrait prendre désormais une place croissante.

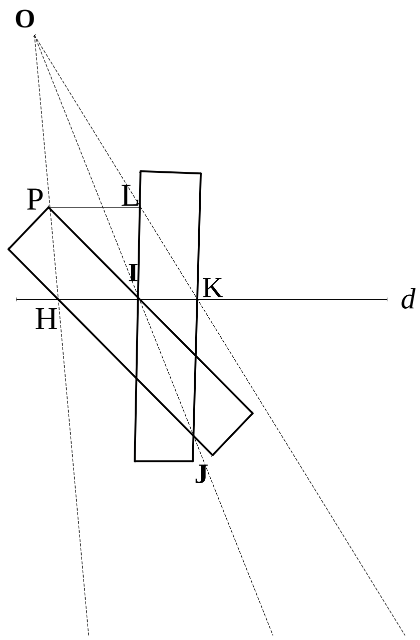
d) Bien entendu, les ***notices***, le ***forum des questions*** et les autres rubriques du Séminaire constituent autant d'outils de formation cruciaux : leurs contenus, travaillés en temps réel lors des séances du Séminaire, doivent être ensuite retravaillés (individuellement ou en équipe) à partir des notes personnelles et des résumés mis en ligne.

2. Forum des questions

2.1. *Géométries* : une question de développement

a) Lors de la séance 11, la consigne suivante avait été passée : « Pour la séance de la rentrée, on recherchera un type de tâches $T_{\lrcorner}$ motivant la *réciproque* de la propriété de Thalès. »

b) Une solution possible est la suivante : à l'aide seulement d'une règle à deux bords parallèles, construire la parallèle à une droite d passant par un point P. La figure ci-après illustre la technique à mettre en œuvre :



1. On place la règle de façon que l'un de ses bords passe par P et que l'autre coupe d (en un point H), puis on trace les droites b_P et b_H matérialisées par les bords ; le bord b_P coupe d en un point I.
2. Sur (PH) on choisit un point O situé du côté de P qui ne contient pas H et on trace [OI), qui coupe b_H en un point J.
2. On place la règle en position symétrique par rapport à (IJ) : le bord b'_J coupe d en un point K.
3. Le droite (OK) coupe b'_I en L : (PL) est la droite demandée.

c) Bien entendu, ce qui précède n'est que le « ressort mathématique » d'une AER qu'il resterait à concevoir, à élaborer, à réaliser.

2.2. *Géométries* : exposé

a) On écoute un exposé de *DB* sur la question suivante :

Exposé 21. Que signifie l'affirmation selon laquelle certains procédés de construction exacts sont en pratique peu précis ? Et comment le fait de changer de système d'instruments peut-il changer la notion de procédé de construction exact ?

b) Remarques et commentaires

2.3. *Nombres, calculs, fonctions* : chiffres et nombres

a) On s'arrête d'abord sur une question de vocabulaire.

Dans l'enseignement secondaire, quel est le statut du chiffre par rapport au nombre ? Plus précisément, considère-t-on le chiffre comme une représentation ou dessin (et dans ce cas le chiffre 3 est plus grand que le chiffre 7) ou comme un entier naturel inférieur à dix (dans la base décimale) ? (MD, MJ, 4^e, 12)

b) Le programme du cycle des apprentissages fondamentaux indique : « La capacité à connaître la valeur d'un chiffre en fonction de sa position dans l'écriture d'un nombre constitue un objectif essentiel. » On lit de même dans le programme du cycle des approfondissements : « À la fin du cycle 3, les élèves doivent […] comprendre les principes de la numération décimale, en particulier que la valeur des chiffres dépend de leur position dans l'écriture des nombres… » On lit alors dans le programme de 6^e les indications ci-après.

Contenus	Compétences	Exemples d'activités, commentaires
2.1. Nombres entiers et décimaux Désignations *[Programme cycle 3 ; document d'application, p. 22 à 24]*	– Connaître et utiliser la valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un entier ou d'un décimal. – Associer diverses désignations d'un nombre décimal : écriture à virgule, fractions décimales. *[SVT]*	À partir de l'évaluation des connaissances des élèves, l'objectif est de consolider et d'enrichir les acquis de l'école élémentaire relatifs à la numération de position et à l'ordre sur les nombres entiers et décimaux. Les activités proposées doivent permettre une reprise de l'étude des nombres décimaux, sans refaire tout le travail réalisé à l'école élémentaire, l'objectif principal étant d'assurer une bonne compréhension de la valeur des chiffres en fonction du rang qu'ils occupent dans l'écriture à virgule.

c) S'il est vrai qu'on peut quelquefois appeler « chiffres » les nombres désignés par les chiffres, c'est-à-dire par les symboles 0, 1, 2, …, 9, confondant ainsi le représentant avec le représenté, tel n'est pas l'usage établi à l'école : on parlera par exemple « d'écrire des nombres en chiffres arabes » (ou « en chiffres romains », etc.). Dans son *Dictionnaire des mathématiques* (Hachette, Paris, 1978, article **numération**), Lucien Chambadal écrit de même ceci (où « supérieur » et « inférieur » doivent être entendus au sens large) :

Soit p un entier naturel supérieur à 2. Tout entier naturel a s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$a = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n p^n,$$

où (d_n) est une suite d'entiers naturels inférieurs à p – 1 et nuls à partir d'un certain rang (numération de base p). Les p éléments de l'intervalle [0, p – 1] sont notés par des symboles appelés *chiffres*.

2.5. *Statistique* : médiane & moyenne

a) On examine la question ci-après.

Dans le programme de 2^de^, on calcule la moyenne d'une série a_1, …, a_n à partir de la moyenne de sous-groupes disjoints formés de a_i. Dans le programme (ou l'accompagnement de programme), on nous dit qu'il faut montrer qu'on ne peut pas faire la même chose avec la médiane d'une série de nombres. Comment faire ? (CO, MJ, 2^de^, 12)

b) Parmi les « Capacités attendues », le programme de 2^de^ retient celle-ci : « Calculer la moyenne d'une série à partir des moyennes de sous-groupes. » Un commentaire ajoute : « On remarquera que la médiane d'une série ne peut se déduire de la médiane de sous-séries. » Il s'agit là d'un ***fait fondamental***. Ce qui est en effet premier du point de vue statistique, ***c'est la médiane*** (et plus généralement, les ***quantiles***) : un exposé à venir nous le montrera. La moyenne n'est intéressante – si l'on oublie une certaine fixation « culturelle » sur cet indicateur – qu'à titre ***d'approximation de la médiane***.

1) Supposons que, lors d'une enquête, trois enquêteurs aient interrogé chacun un certain nombre de personnes sur leur taille en centimètres : le premier a recueilli 7 tailles, dont la médiane est 172 et la moyenne 174 ; le deuxième a recueilli 9 tailles, dont la médiane est 175 et la moyenne 176 ; le troisième a recueilli 5 tailles, dont la médiane est 173 et la moyenne est 175,4.

2) Le calcul de la moyenne est aisé : la série des 21 tailles a pour moyenne

$$\frac{7 \times 174 + 9 \times 176 + 5 \times 182}{21} \approx 176{,}76.$$

Que vaut la médiane ? Si la série est assez symétrique, la moyenne en donne une valeur approchée raisonnable.

3) Supposons que les trois sous-séries soient respectivement les suivantes :

165 ; 169 ; 170 ; 171 ; 175 ; 180 ; 188 ;
165 ; 166 ; 170 ; 171 ; 175 ; 176 ; 184 ; 186 ; 191 ;
178 ; 181 ; 182 ; 183 ; 186.

La série triée par ordre croissant s'écrit : 165 ; 165 ; 166 ; 169 ; 170 ; 170 ; 171 ; 171 ; 175 ; 175 ; **176** ; 178 ; 180 ; 181 ; 182 ; 183 ; 184 ; 186 ; 186 ; 188 ; 191. Sa médiane est 176. La moyenne n'en est donc pas très éloignée.

4) Supposons maintenant que les trois sous-séries soient respectivement les suivantes :

165 ; 169 ; 170 ; 171 ; 172 ; 183 ; 188 ;
165 ; 166 ; 170 ; 171 ; 172 ; 176 ; 187 ; 186 ; 191 ;
172 ; 181 ; 182 ; 186 ; 189.

La série triée par ordre croissant s'écrit : 165 ; 165 ; 166 ; 169 ; 170 ; 170 ; 171 ; 171 ; 172 ; 172 ; **172** ; 176 ; 181 ; 182 ; 183 ; 186 ; 186 ; 187 ; 188 ; 189; 191. Sa médiane est 172. La moyenne en est assez éloignée (bien que l'erreur relative ne dépasse pas 3 %).

c) On peut multiplier les séries et sous-séries : il n'est pas possible de connaître la médiane de la série à partir des médianes des sous-séries. Lors d'une enquête où dix enquêteurs interrogent chacun de 80 à 100 personnes, il leur suffit de communiquer la moyenne de leur sous-échantillon et sa taille pour que la moyenne sur l'ensemble des personnes enquêtées puisse être calculée : tel est l'intérêt premier de la moyenne.

Après-midi

3. Faisons le point !

3.1. À propos des programmes

a) La question suivante fournit d'abord l'occasion de mentionner un aspect non dénué d'importance du développement de la profession.

> Quelles sont les personnes qui élaborent les programmes ? Un professeur « quelconque » peut-il émettre un avis ? (JG, OS, 2de, 12)

1) On aura une réponse (et plus encore) en consultant, sur le site EDUSCOL, la page qui se trouve à l'adresse http://eduscol.education.fr/D0048/progparcours.htm?rub=238. On a extrait de cette page le passage ci-après (où est mentionnée la DESCO, soit la Direction de l'enseignement scolaire au ministère de l'Éducation nationale).

> **Comment sont élaborés les programmes ?**
>
> La rédaction des programmes est confiée à un groupe d'experts, sous la présidence d'un universitaire nommé par le ministre (après avis du président du CNP).
>
> Les membres des groupes d'experts sont désignés à titre personnel pour leur compétence professionnelle reconnue. Ils sont choisis par le président du groupe, en accord avec la direction de l'Enseignement scolaire, de manière à disposer d'une diversité et d'une complémentarité dans les expertises au sein du groupe : universitaires garants de la validité scientifique des contenus et didacticiens, formateurs en IUFM, enseignants de terrain, dont certains sont impliqués dans la formation des enseignants et émanant de diverses académies, inspecteurs qui connaissent la diversité des pratiques et les besoins concrets (inspecteurs en charge des circonscription du premier degré, inspecteurs d'académie pédagogiques régionaux, inspecteurs généraux de l'Éducation nationale, enseignants) selon les niveaux et les disciplines concernées.
>
> La direction de l'Enseignement scolaire est chargée de suivre les groupes d'experts, tout au long de leur exercice. Elle en assume l'organisation matérielle, veille au respect du cahier des charges, et assure le relais permanent entre le groupe, le CNP, et l'ensemble des acteurs du système éducatif durant les diverses étapes d'élaboration des textes. En outre, la direction de l'Enseignement scolaire assure la diffusion aux groupes d'experts des textes de programmes en cohérence verticale ou horizontale avec ceux dont ils ont la charge.
>
> **La voix des enseignants**
>
> Pendant la phase d'élaboration, des consultations régulières sont organisées entre les groupes d'experts, le CNP et les partenaires habituels, représentant des enseignants, des parents d'élèves, etc.

D’autres consultations informelles sont menées soit par la DESCO, soit par le groupe d’experts, à divers stades d’avancement de l’écriture des programmes, en vue d’affiner leurs perceptions respectives quant aux réactions des syndicats, des associations professionnelles et des maisons d’éditions notamment vis-à-vis de l’éventuelle mise en œuvre du projet en cours d’élaboration.

Une étape intermédiaire de consultation systématique de tous les enseignants de la discipline sur chaque nouveau projet de programme a été placée sous la responsabilité des recteurs et confiée aux IA-IPR. Cette consultation permet notamment de recueillir l’avis des enseignants sur les futurs programmes, d’évaluer leurs besoins en termes de documents ou d’actions d’accompagnement et, plus globalement, d’organiser une réflexion sur les conséquences des nouveaux programmes sur les modalités d’évaluation des élèves (notamment lors des examens). Les groupes d’experts, le CNP et l’IGEN sont destinataires des synthèses académiques collationnées par la DESCO. Les groupes d’experts sont également informés des éventuelles réactions de l’IGEN et du CNP à ces synthèses.

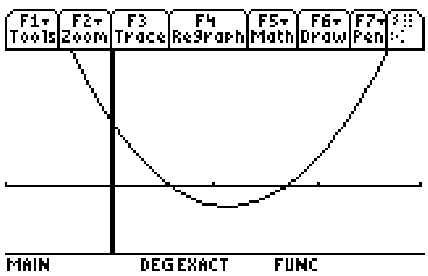
2) On notera par exemple que sont consultables actuellement trois chapitres du projet de document d’accompagnement des nouveaux programmes du collège : ils portent respectivement sur le thème de la ***proportionnalité***, sur ***l’organisation et la gestion de données*** et sur la ***liaison école-collège***. On les trouvera sur le site EDUSCOL à l’adresse suivante : http://eduscol.education.fr/D0015/LLPHAG00.htm.

3) Pour compléter cette information, il convient de mentionner encore l’activité de la CREM – la ***commission de réflexion sur l’enseignement des mathématiques***, dont on trouvera les principales productions à l’adresse : http://eduscol.education.fr/D0015/LLPHAG03.htm.

b) La question ci-après permet maintenant de revenir sur un aspect de la mise en œuvre des programmes qui demeure un problème pour la profession.

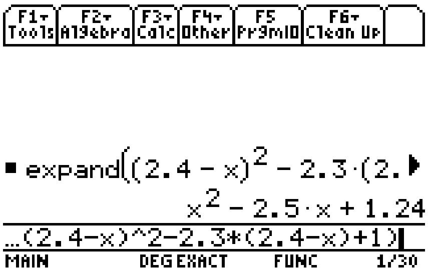
Est-ce gênant de parler rapidement de la parité des fonctions, sachant que cette notion est sortie récemment des programmes ? Je ne comptais pas le faire ; mais quelques élèves qui cherchent les exercices du manuel m’ont posé des questions à ce sujet. Plutôt que de leur dire que ce n’était pas au programme, j’en ai parlé cinq minutes et certains ont noté ces remarques dans la synthèse. (FL, CR, 2de, 12)

1) Il n’est pas tout à fait exact de dire que la notion est « sortie » du programme de la classe de seconde. Un passage du commentaire relatif au thème intitulé « Étude qualitative de fonctions » indique en effet ceci : « La perception sur un graphique de symétries ou de périodicité pourra conduire à une formulation analytique de ces propriétés. » La même terminologie est usitée en classe de première S, dont un commentaire précise : « On justifiera les symétries observées sur les représentations graphiques. » La différence entre les deux classes et que, en seconde, le fait qu’une courbe représentative apparaisse symétrique *pourra* donner lieu à une « formulation analytique », tandis qu’en première S, il *faudra* établir la symétrie analytiquement.



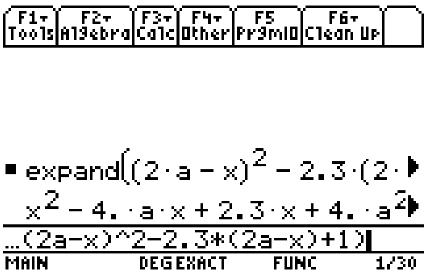
2) Considérons par exemple l’application $x \mapsto f(x) = x^2 - 2{,}3x + 1$. L’examen de la courbe représentative obtenue à l’écran d’une calculatrice graphique laisse penser à une symétrie par rapport à un axe « vertical », d’équation $x = a$. On suppose que la conjecture surgit, dans l’AER conduite en telle classe de seconde, que l’on pourrait bien avoir $a = 1{,}2$. Comment s’exprime analytiquement la symétrie supposée ? Les abscisses x et $x’$ sont

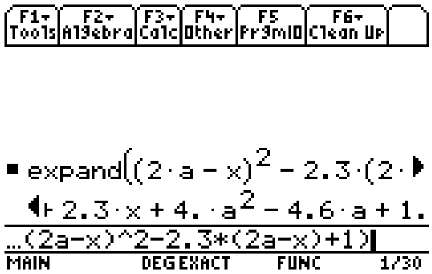
symétriques par rapport à a si $\dfrac{x + x'}{2} = a$, c'est-à-dire si $x' = 2a - x$. Pour que la courbe soit symétrique, il est donc nécessaire et suffisant que l'on ait toujours $f(2a - x) = f(x)$, soit ici $f(2{,}4 - x) = f(x)$. Or on a ceci :



L'égalité n'est vraie que si $x^2 - 2{,}5x + 1{,}24 = x^2 - 2{,}3x + 1$, soit si $0{,}2x = 0{,}24$ et donc si $x = 1{,}2$, ce qui était évident sur l'écriture $f(2{,}4 - x) = f(x)$! Déception…

3) Pour en avoir le cœur net, on peut songer à résoudre en a l'équation $f(2a - x) = f(x)$, pour x donné ; on a d'abord ceci :





On aurait ainsi : $f(2a - x) = x^2 - (4a - 2{,}3)x + 4a^2 - 4{,}6a + 1$. L'égalité $f(2a - x) = f(x)$, soit

$$x^2 - (4a - 2{,}3)x + 4a^2 - 4{,}6a + 1 = x^2 - 2{,}3x + 1$$

se récrit donc : $(4a - 4{,}6)a = (4a - 4{,}6)x$. On voit que l'égalité est vraie pour tout x si, et seulement si, $4a - 4{,}6 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a = \dfrac{4{,}6}{4} = \dfrac{2{,}3}{2} = 1{,}15$.

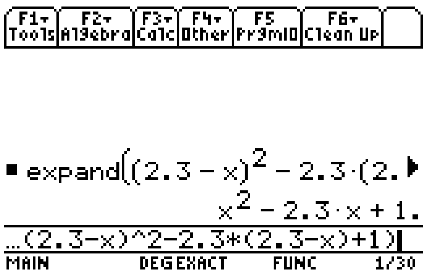
4) On arrive ainsi à une nouvelle conjecture que l'on devra vérifier soigneusement, en conduisant le calcul par exemple ainsi :

$$f(2{,}3 - x) = (2{,}3 - x)^2 - 2{,}3(2{,}3 - x) + 1 = (2{,}3 - x)[(2{,}3 - x) - 2{,}3] + 1$$
$$= (x - 2{,}3)x + 1 = x^2 - 2{,}3x + 1.$$

On peut multiplier les voies de calcul ; en posant $x' = 2{,}3 - x$ et en notant que $x + x' = 2{,}3$, on a par exemple :

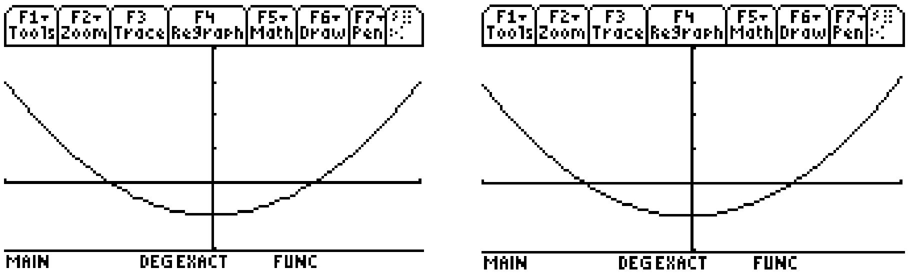
$$f(2{,}3 - x) - f(x) = f(x') - f(x) = x'^2 - x^2 - 2{,}3(x' - x)$$
$$= (x' - x)[(x' + x) - 2{,}3] = 0.$$

La conclusion semble sûre ; mais on la vérifiera tout de même à l'aide de la calculatrice.



5) Le type de problème posé ici à la profession engendre souvent la tentation de faire jouer une loi du tout ou rien : ***si*** la notion de parité n'est pas désignée comme « à enseigner » de façon explicite, ***alors*** cette notion doit être écartée, même si d'aucuns le regrettent ! Or ce que

dit le programme – un peu implicitement, sans doute –, c'est que cette notion ***pourra*** être évoquée, mais cela dans un contexte où elle apparaisse ***fonctionnelle***, comme poussée en avant par le cadre d'étude : sur l'intervalle [–1 ; 1], la courbe représentative de $x \mapsto g(x) = 4x^2 - 1$ (ci-dessous à gauche) de même que celle de $x \mapsto h(x) = 4x^2 + 0{,}1x - 1$ (ci-dessous à droite) semblent symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ; qu'en est-il au juste ?



Un raisonnement peut aider : si l'une est symétrique, l'autre ne peut pas l'être. Mais l'une des deux l'est-elle ? Laquelle ? Etc.

6) Ainsi le fait de ne pas « faire de cours » sur « la parité » n'entraîne-t-il nullement que cette question n'émerge pas – et ne soit pas étudiée – dans le travail de la classe. On notera qu'il en est de même de la notion de ***périodicité***. Par contraste avec les exemples qui précèdent, on soulignera surtout que le travail spontané des élèves sur la notion de parité, tel du moins que l'évoque la question posée, ressemble davantage à du ***recopiage culturel*** qu'à une activité de ***problématisation du réel mathématique***.

3.2. Former et se former

a) On s'arrête maintenant sur les questions que voici.

1. Un problème se pose avec les élèves qui prennent des cours particuliers. Il arrive que les auxiliaires qu'ils utilisent affirment des contrevérités du type : « Votre professeur est fou ! Ce qu'il vous fait faire n'est pas au programme ! » Et cela sans aucune lecture du programme ou bien du cours. Les diffusions que suscitent ce genre de propos gangrènent la classe. Quel type de réaction peut-on espérer ? (GB, OS, 2^de^, 12)

2. Pour les DM, certains élèves prennent des cours particuliers au cours desquels ils apprennent trop souvent des méthodes erronées. En plus certains élèves pensent que, sans cours particuliers, ils ne peuvent pas réussir, ce qui est entièrement *faux*. Comment réagir face à cette situation ? Par dessus le marché, les professeurs particuliers disent que mes DM sont hors programme et du niveau terminale, voire prépas. Bref, c'est du n'importe quoi ! (MK, OS, 2^de^, 12)

1) Les difficultés rencontrées ne doivent surtout pas être traitées par le mépris. Il est intéressant de noter d'abord que les fauteurs de troubles présumés ne sont pas, par exemple, des parents, mais des « aides à l'étude », officiant dans ce qu'on appellera des SDI, des systèmes didactiques ***induits*** (induits par le fonctionnement du SDP et des SDA : voir la notice *L'espace de l'étude*). À suivre les indications des questions examinées, surtout, leur premier tort est de se situer ***en rivaux imaginaires*** du professeur, alors même que, vraisemblablement, le contrat passé avec les parents leur assigne pour mission d'aider l'élève à tirer le meilleur profit de sa scolarité sous la responsabilité du professeur ! Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté, notons que la condamnation de leur comportement ne découle nullement du fait que, par exemple, ils seraient moins « titrés » que les professeurs dont ils mettent en cause (et en péril) l'enseignement : seraient-ils même plus titrés (si cela a un sens) qu'ils n'en

resteraient pas moins, en agissant ainsi, en situation d'imposture, car ce n'est pas à eux qu'est confiée la responsabilité en mathématiques de la classe dont est membre l'élève qu'ils aident.

2) Bien entendu, il n'y a aucune raison de ne pas réagir dès lors que l'action de ces « aides à l'étude » apparaît nuisible à la bonne marche de l'étude dans la classe ! C'est même une ardente obligation que de le faire, car ce type d'intervention « clandestine » fait du tort à l'ensemble des élèves et met en danger l'accomplissement par le professeur de sa mission propre. Comment réagir ? La première critique, semble-t-il, porte sur le respect du programme. L'accusation est *a priori* suspecte, car rares sont ceux qui peuvent être dits « connaître le programme », surtout parmi des personnes qui auraient tendance à tirer leur connaissance des programmes en vigueur de leurs seuls souvenirs. Mais il est important de s'assurer qu'une telle mise en cause ne comporte pas une parcelle de vérité : on consultera donc, pour s'en assurer, ses formateurs, PCP et autres (par le biais, par exemple, des questions de la semaine). Bien entendu, il existe presque toujours, dans un programme, une zone frontière mal délimitée : l'exemple développé plus haut à propos des symétries des courbes représentatives de fonctions est, par sa nature, à la frontière de ce que le programme requiert et de ce qu'il écarte, et la justification de conduire une telle étude dans une classe de seconde donnée tiendra donc davantage aux dynamiques concrètes qui « font » la classe qu'à un point de vue statique et extérieur à la vie de la classe.

3) Dans le but de prévenir et de désarmer de telles « attaques », on doit rappeler ici des recommandations faites dès le début de la formation. Dans la notice intitulée *Première rentrée des classes*, on pouvait ainsi lire ceci à propos de la première séance :

> Après distribution aux élèves d'au moins un ***tableau synoptique*** du programme (si ce dernier ne figure pas dans le manuel), le démarrage du travail se fera par la présentation et l'examen du ***programme de mathématiques de la classe***, dont on mettra notamment en évidence les « parties » déjà rencontrées dans les classes antérieures et les parties apparemment nouvelles.

Dans la notice *Le temps de l'étude*, le dispositif à mettre en place était précisé davantage encore :

> … il convient de faire droit à l'exigence démocratique de ***publicité des programmes d'études*** (annuel, hebdomadaire, etc.), qui, du même mouvement, allège la dépendance temporelle de l'élève et permet que se formule le pacte d'instruction rassemblant parents, professeurs, élèves dans un projet d'étude partagé. […] Dans cette perspective, l'une des premières tâches des équipes pédagogiques consiste à présenter aux élèves (et, du moins au collège, à leurs parents) le programme d'études de l'année […]. Cette présentation, qui gagne à être conduite collectivement pour ***l'ensemble des élèves d'un même niveau de classe***, peut comporter différents éléments : présentation, s'il existe, du ***livret de niveau*** de l'établissement (livret de Quatrième, etc.), des équipes pédagogiques, des objectifs de formation, des dispositifs où les élèves seront amenés à travailler au sein de l'établissement, ainsi que leurs fonctions didactiques principales ; présentation aussi du travail demandé hors de l'établissement, des modalités d'évaluation, des procédures d'orientation, et, bien sûr, des emplois du temps des différentes classes du niveau concerné […]. Dans tous les cas, le programme doit jouir d'une ***forte publicité au sein de la classe***, par affichage lorsque c'est possible, et, dans tous les cas, par diffusion aux élèves d'une version adaptée servant de support à ***un repérage collectif régulier*** de l'avancée de l'étude, repérage permettant à la classe de situer le ***travail accompli*** et ***celui qui reste à accomplir***, et contribuant par là à relancer dans la classe le pacte d'instruction.

Le fait que nombre de professeurs – qui forment une très large majorité encore sans doute – ignorent cette démarche est le fruit d'une situation historique antérieure de la profession face à la société (que la profession ne se sentait pas tenu d'informer de façon précise, fût-ce à travers les élèves) et de la société vis-à-vis de la profession (à laquelle la société abandonnait une part de sa souveraineté au nom de la « liberté pédagogique » de l'enseignant). Les questions examinées montrent que cette situation a évolué. Il est bon, en conséquence, que les professeurs informent leurs divers environnements de ce qu'est le programme, dans sa lettre comme dans son esprit, en commençant par les élèves et en touchant, à travers eux, les parents. Une fois mis en route le dispositif indiqué – cela devrait être fait sans plus attendre –, une fois le message qu'il délivre transmis aux élèves et aux parents, il pourra être nécessaire d'intervenir de façon plus ciblée auprès des parents de certains élèves réfractaires, à charge pour ces parents de se retourner, le cas échéant, vers la personne dont ils utilisent les services pour aider leur enfant.

4) Un second grief formulé plus haut a trait au fait que, *volens nolens*, les « aides à l'étude » enverraient – de façon plus ou moins fréquente et régulière – du *spam* mathématico-didactique dans la classe, en perturbant ainsi la formation donnée. Un premier barrage élevé contre cette forme de *spam* (qu'il ait la provenance indiquée ou une autre) a été précisé lors de la séance 9, au cours de laquelle un principe essentiel a été énoncé, que l'on reprend ici, et dont la mise en œuvre doit être rigoureuse.

> La construction des OM – et leur contenu même – *est une affaire collective*, qui se négocie avec la classe sous la direction du professeur. Libre à chacun d'agir à sa guise dans sa vie mathématique *privée*, et même de faire un usage *privé* (c'est-à-dire *non visible dans la classe*) de ce qu'il aura élaboré pour son propre compte (par exemple pour contrôler son utilisation de la technique institutionnalisée dans la classe). Mais gare à l'idionomie, surtout quand elle menace ce qui est le point d'appui principal du travail des élèves et du professeur – le groupe classe.

Concrètement, lors d'un contrôle en classe, le professeur ne saurait valider positivement la mise en œuvre même réussie d'une technique ***exogène*** même justifiable (voire justifiée), pour les raisons précédentes déjà, mais aussi pour une autre raison, soulignée également lors de la séance 9, qu'il convient de faire clairement connaître aux élèves et aux parents : parce que « ce n'est pas de cette technique que le professeur avait à contrôler la maîtrise par l'élève, mais d'une autre, et dont il sera alors incapable de s'assurer que l'élève est à même de la mettre en œuvre ! »

5) Le mot *spam* employé ici, aujourd'hui courant dans le domaine des TIC (et qu'on a proposé de traduire par *pourriel* ou *polluriel* : voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Spam), semble avoir l'origine suivante (voir http://en.wikipedia.org/wiki/Spam_(electronic)) :

> The term *spam* is derived from the Monty Python SPAM sketch, set in a cafe where everything on the menu includes SPAM luncheon meat. As the server recites the SPAM-filled menu, presently a chorus of Viking patrons drowns out all normal conversation with a song, repeating "SPAM, SPAM, SPAM, SPAM" and singing "lovely SPAM, wonderful SPAM" over and over again, stopping all conversation, hence SPAMming the dialogue.

6) Le problème soulevé ci-dessus est de ne pas laisser *spammer* la classe, ce qui est un problème de notre temps en nombre de disciplines enseignées – les mathématiques étant à cet égard relativement épargnées encore ! On va voir que d'autres dispositifs anti-*spam* que ceux déjà évoqués existent. Mais il est indispensable d'insister d'abord sur les principes – sur la « théorie » –, et notamment sur l'aspect suivant : une classe n'est pas un lieu où l'on apporte des produits trouvés ailleurs, pour se les échanger – pour les « mutualiser ». En d'autres termes, une salle de classe n'est pas une halle de marché. C'est une institution où, à partir sans doute de matériaux en partie rapportés, on élabore ***ensemble***, ici et maintenant, les

organisations de savoir, les praxéologies dont on s'assurera ensuite que chaque membre du groupe classe en dispose adéquatement. En outre, dans ce processus d'élaboration, la règle essentielle est celle qu'impose la ***dialectique des médias et des milieux*** : ce qui s'élabore et sera institutionnalisé doit subir un processus objectif et objectivant, à vrai dire jamais achevé, de justification et de validation, et non résulter d'un simple débat subjectif d'***opinions*** rapidement clos. Tenter d'importer un produit en le soustrayant à cette exigence de validation collective continuée est bien évidemment une violation de la règle fondamentale qui doit gouverner l'activité d'une classe. Cela vaut pour chacun, y compris – notons-le soigneusement – pour l'intervenant ponctuel, même choisi librement par le professeur (et non sous la pression de telle ou telle coterie), même reconnu dans son domaine d'intervention, qui tenterait de « faire passer » des affirmations ou des manières de faire sans les soumettre à une dialectique des médias et des milieux menée ***avec la classe*** : pour ne pas déroger à la règle fondamentale, une telle intervention devra d'abord être ***préparée*** et devra faire ensuite l'objet d'un ***suivi didactique*** attentif.

b) Pour avancer encore un peu, on prendra maintenant appui sur deux nouvelles questions, qui touchent à l'organisation didactique d'ensemble.

1. J'ai dit à mes élèves qu'ils pouvaient me poser des questions sur les DM en cours. Ils ont deux semaines pour le faire. Régulièrement, on prend un peu de temps en classe pour répondre aux questions. Parfois, certains semblent ne pas saisir ce qu'il faut faire malgré une courte explication. Alors on détaille un peu plus… Jusqu'à quel point faut-il « aiguiller » les élèves et combien de temps faut-il accorder à ces explications ? (JB, CR, 2de, 12)

2. Quel dispositif peut-on mettre en place pour réaliser un « forum des questions » avec la classe ? Faut-il trier les questions ou répondre obligatoirement à certaines d'entre elles ? (GC, MJ, 2de, 12)

1) La création d'une rubrique expressément consacrée au DM en cours est à l'évidence un moyen sans lequel on laisserait grande ouverte la possibilité d'un *spamming* chronique en provenance des cours particuliers que reçoit tel ou tel élève. Mais il s'agit là d'un dispositif relativement nouveau dans la culture scolaire : on ne s'étonnera donc pas que les élèves en soient des utilisateurs volontiers abusifs et les professeurs des pilotes trop souvent maladroits ! Le texte d'un devoir est, traditionnellement, une étude mathématique ***lacunaire***, chaque lacune ménagée dans le plein du texte étant à combler par l'élève dans sa contribution personnelle. Ce qui doit être commenté dans la rubrique « Le DM en cours », c'est d'abord ***le plein du texte*** – l'étude d'ensemble –, dans lequel se découpent les lacunes.

2) À titre d'exemple, on s'arrête sur la question suivante.

Lors d'une séance d'observation dans le cadre du SPA, la professeure stagiaire a proposé en 1re ES le TD suivant sur les pourcentages.

TD 2 Augmentations et baisses successives

<u>1 Une illustration</u>

De janvier à juin 2000, le prix d'un certain produit a augmenté de 2 % ; de juillet à décembre 2000, il subit une nouvelle augmentation de 3 %. Il ne faut pas en conclure que le prix de ce produit a augmenté de 5 % durant l'année 2000. Voici pourquoi.

1. Un exemple

a) Imaginons que ce produit coûte 100 € début 2000.
Quel est son prix après l'augmentation de 2 % ?
b) Quel est son prix, fin 2000, après l'augmentation de 3 % ?
c) Quel est le pourcentage d'augmentation de ce prix en 2000 ?

2. Plus généralement

Notons P le prix de ce produit au début 2000.
a) Expliquez pourquoi le prix de ce produit fin 2000 est $1{,}02 \times 1{,}03 \times P$.
b) Quel est le pourcentage d'augmentation de ce prix en 2000 ?

Suite à la question 1.c) comme le prix trouvé en b) est de 105,06 les élèves ont répondu instantanément 5,06 %. Mais la réponse n'étant pas assez justifiée pour la professeure stagiaire, celle-ci a tenté de justifier le résultat à partir des formules du type $1 + \frac{t}{100}$. N'est-elle pas allée à contresens de l'activité puisque la déconstruction du cas général est faite en 2 ? (MB, CR, 4e + 4e partagée, 11)

Imaginons un instant que l'on ait là le texte d'un DM (ou d'une partie d'un DM). Et imaginons alors que, lors d'un point de rendez sur ce DM, un ou des élèves soulèvent l'objection suivante : « Madame, pour le pourcentage d'augmentation, on peut pas conclure tout de suite quand on a fait la question c du 1 ?… » La réponse pourrait être à peu près la suivante.

P : « La question 2 a pour rôle de vous permettre de justifier cette affirmation que vous croyez pouvoir tirer de la réponse à la question 1. Si vous aviez par exemple trouvé, disons, 7,12 % d'augmentation pour un prix de 100 €, comment pouvez-vous garantir qu'un prix de, disons, 1278 € subira lui aussi une hausse de 7,12 % ? Tiens, Agathe, viens au tableau le faire s'il te plaît… Dans la première augmentation, ce prix passe à combien ? Comment fait-on ? » L'élève : « On multiplie par 1,02, et on obtient… » Un élève, calculatrice en main, lui souffle la réponse : « 1303,56. » Elle l'écrit. P : « Et après ? » L'élève : « On multiplie par 1,03. » P : « Oui. Ça fait combien ?… » Une élève : « 1342,6668. » L'élève le note au tableau. P : « Comment fait-on pour obtenir le pourcentage d'augmentation ? » L'élève : « L'augmentation est de… » Elle écrit :

$$\frac{1342{,}6668 - 1278}{1278}.$$

P intervient : « Tu n'as rien oublié ? » Des élèves : « Multiplié par 100 % ! » P : « Oui. » L'élève s'exécute :

$$\frac{1342{,}6668 - 1278}{1278} \times 100\ \%.$$

P : « Alors, on trouve ? » Un élève : « Madame, on trouve 5,06 %. » Des élèves : « Ouais ! » P, ironique : « Vous aviez trouvé ça ? C'est un miracle qu'on le retrouve, non ? » Des élèves : « Non ! » P : « Bon, alors, il faut l'expliquer que c'est pas un miracle !… Si au lieu de 1278 €, on avait pris un prix P quelconque, quel pourcentage on aurait ? C'est ça que la question 2 fait trouver. C'est ça qu'elle vous fait prouver. Vous comprenez ? » La classe approuve. P : « Bien, eh bien vous le ferez… On revient à l'AER commencée hier. »

3) On notera seulement, ici, que la rubrique « Le DM en cours » est l'occasion non seulement d'une « explication mathématique de texte », mais peut aussi conduire à modifier l'énoncé, soit par un correctif si la chose semble clarificatrice, soit même par un additif. Ici, par exemple, si l'on estime que la classe a reçu une aide par trop substantielle, il est possible d'ajouter à l'énoncé ceci, où le choix des valeurs est sans doute de nature à mieux mettre en valeur le phénomène mathématique visé.

3. Recommençons…
Durant le premier semestre de l'année 2005, la production d'un certain bien a augmenté de 10 % ; de juillet à décembre 2000, elle subit une nouvelle augmentation, de 20 % cette fois.

a) En notant Q le nombre d'unités du bien considéré produites durant le deuxième semestre 2004, expliquez pourquoi la production du deuxième semestre 2005 est $1{,}1 \times 1{,}2 \times Q$. Quel est le pourcentage d'augmentation de la production semestrielle en 2005 ?
b) Calculer directement le pourcentage d'augmentation de la production semestrielle entre le deuxième semestre 2004 et le deuxième semestre 2005 dans le cas où Q = 7200.

4) Un « forum des questions » suppose des questions – des « questions de la semaine », par exemple. C'est donc cela que l'on peut vouloir instituer – pour ne pas multiplier les dispositifs, on pourra alors y intégrer les questions sur le DM en cours. Faute d'une expérience réelle en la matière au collège ou au lycée, quelques principes doivent autant que possible éclairer et gouverner la création et le fonctionnement d'un forum des questions au collège ou au lycée :

FQ_1. Questions et réponses sont un ***trésor collectif de la classe*** : elles renvoient, de façon parfois singulière et subjective, à des ***problèmes objectifs du « métier d'élève »*** de seconde (ou de 4^e, etc.) ; quant au fait de se soucier des difficultés que rencontre autrui – garçon ou fille, « petit » ou « grand » –, outre qu'il contribue à la formation scolaire de l'élève, il participe de ***l'éducation à la citoyenneté*** dans ce cadre de socialisation qu'est une classe de mathématiques (tandis que, rappelons-le, le repliement sur ses seuls « problèmes » personnels conduit à l'« idiotie »).

FQ_2. Les questions sont formulées ***par écrit***, de préférence ***en classe entière*** (et non hors classe).

FQ_3. Sauf exception, les éléments de réponses ne sont proposés ***qu'une semaine plus tard au moins*** : comme il y a un travail des élèves, il y a un travail du professeur, et qui prend du temps.

FQ_4. Pour des raisons diverses (manque de temps, mais aussi dynamique de la classe rendant l'abord de telle question peu pertinent, voire impossible, etc.), le professeur ne propose d'éléments de réponses que pour ***certaines*** des questions formulées, leur choix entrant dans sa responsabilité de professeur en charge de la classe ; mais bien sûr une question peut être posée à nouveau, par exemple lorsqu'elle réapparaît dans un contexte neuf.

FQ_5. Les réponses, ou du moins un résumé des réponses, sont consignées ***par écrit*** au bout d'un temps fini.

FQ_6. Questions et réponses sont « publiques » ***au sein de la classe***, où elles constituent un outil de travail collectif ; elles ne sont pas communiquées à l'extérieur de la classe.

FQ_7. Toute difficulté ou toute interrogation relative au travail de la classe, à son travail propre ou aux conditions dans lesquelles ceux-ci doivent être accomplis peut faire, dans une formulation appropriée, l'objet d'une question de la semaine.

5) Bien entendu, l'apprentissage du bon usage d'un tel dispositif prend du temps, tant du côté du professeur ***que des élèves***. Il faudra donc gérer soigneusement sa mise en place et son fonctionnement, notamment du point de vue de son ***intégration effective*** dans le travail de la classe. Les questions posées et les réponses éventuellement proposées (ou dont la formulation est envisagée) pourront faire l'objet de questions de la semaine dans le cadre de ce Séminaire.

6) Du point de vue du problème du *spamming* de l'enseignement donné, le dispositif des questions de la semaine constituent un pare-feu loyal dans la mesure où tout ce qui y est énoncé prend *ipso facto* le statut de question à étudier et non de « vérité » non discutée que l'on fait passer comme en contrebande. Il n'est ainsi nullement équivalent qu'un élève fasse courir le bruit que le DM à rendre est « du niveau première ES » ou qu'un élève (en général, un autre…) pose par exemple la question suivante.

Le DM à rendre le 12 janvier comporte une question (la question 2 a du problème sur les augmentations successives) dont j'ai entendu dire qu'elle ne serait pas au programme de notre classe. Est-ce exact ? Pourquoi ?

De même, il n'est pas équivalent que, dans le DS qu'il a rendu, un élève utilise la technique de résolution qui conduit à écrire par exemple (voir la séance 9)

$$\text{si } \frac{2a}{a-b} = \frac{1}{2} \text{ alors les solutions de } 2a = 1 \text{ et } a - b = 2 \text{ sont solutions de l'équation } \frac{2a}{a-b} = \frac{1}{2}$$

ou qu'il ait préalablement formulé par écrit la question suivante :

Dans le DM à rendre, on doit résoudre l'équation $\frac{2a}{a-b} = \frac{1}{2}$. J'ai vu l'année dernière qu'on pouvait dans ce cas égaler les numérateurs d'un côté, les dénominateurs de l'autre, ce qui donne ici $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{3}{2}$. J'ai vérifié : ça marche. Mais d'autres élèves me disent qu'il est interdit de faire comme ça. J'aimerais y voir plus clair !

7) D'une façon générale, le dispositif des questions de la semaine ouvre un espace d'expression et de débat, qui permet d'exprimer des doutes, des interrogations, ou même des croyances, des opinions, sans pour cela que ces doutes ou croyances s'imposent ***comme telles*** au groupe qui en est le destinataire, parce qu'elles s'inscrivent dès lors automatiquement en un régime épistémologique qui n'est plus celui de l'***opinion***, mais celui de la dialectique des médias et des milieux. Il est ainsi très différent, au plan de la formation, de glisser – illégitimement – dans un exposé présenté dans le cadre du Séminaire ce qui n'est qu'une opinion fruit d'un point de vue tout personnel, ou de faire de cette opinion la matière d'une question ***prolongeant*** un exposé qui s'en serait tenu avec rigueur à informer les participants du contenu des archives du Séminaire. Dans le premier cas, il y a risque de *spam* – involontaire et souvent inconscient. Dans le second, il y a une interrogation ***légitime***, que l'on espère ***sincère***, c'est-à-dire participant de la pure recherche de la vérité, et non du goût de paraître, fût-ce pour n'exprimer guère plus que l'opinion commune – la *doxa* des Grecs.

3.3. À propos de l'analyse d'une séance

a) On examine les questions suivantes.

1. La description du *topos* de l'élève est-elle à « classer » dans l'organisation didactique ou dans la gestion de la séance ? (WB, JT, 4e, 12)

2. Pourrait-on reparler des moments de mise en commun de résultats (ou conjecture) après un temps de recherche en classe ? Ces moments me semblent délicats et importants pour la suite. En particulier, comment rebondir sur les différentes réponses des élèves (et faut-il rebondir sur toutes leurs réponses) ? Comment instaurer le débat ? (FEB, CR, 4e, 12)

b) Pour ébaucher une réponse, on analyse un passage de la vidéo d'une séance dans une classe de seconde observée en janvier 2004.

1) Dans une première partie de la séance, la classe a corrigé un exercice sur les fonctions. Puis elle passe à une activité. Le compte rendu d'observation disponible commence ainsi.

P renvoie à sa place l'élève qui était au tableau. Puis il annonce un autre exercice : « Ce sera une activité… » Il distribue l'énoncé (ci-après) et enjoint : « Vous commencez par lire l'énoncé. »

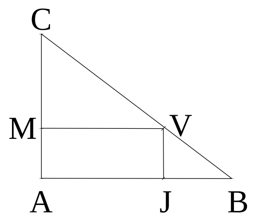
Un paysan possède un terrain qui a pour forme un triangle rectangle ABC, rectangle en A, avec AB = 4 km et AC = 3 km. Une nouvelle loi oblige notre paysan à travailler dans un champ de forme rectangulaire. Comme le paysan a construit sa grange contenant ses machines en A, il souhaite que A appartienne au champ. Enfin, pour des raisons économiques évidentes, notre paysan souhaite que son champ ait l'aire la plus grande possible. Pouvez-vous l'aider ?

Bruissements divers. P précise que le contrôle prévu n'aura pas lieu le lendemain, mais la semaine suivante. L'élève arrivée en retard demande si elle a été appelée en AI : réponse négative. Les élèves lisent l'énoncé, certains posent des questions à ce propos. P : « Est-ce que tout le monde a lu l'énoncé ? » Réponse positive ! Il est 15 h 23. P : « Donc… »

Une élève intervient : « M'sieur ! Ça a rien à voir avec les fonctions, ça ! » P réagit : « Ben si, justement, on va voir… »

2) La suite est observée sur la vidéo de la séance.

c) La vidéo ne porte que sur une phase de l'étude du problème proposé où l'on voit la classe s'efforcer de préciser la position du champ rectangulaire par rapport au terrain triangulaire s'engageant dans un travail qui aboutira que cette position est du type représenté ci-après.



1) L'observation montre une organisation de l'étude où les élèves cherchent collectivement sous la direction du professeur, lequel anime la recherche, reçoit les propositions des élèves, les fait examiner (parfois en demandant à un élève de venir au tableau exprimer graphiquement son idée), puis les fait valider ou invalider, avant de noter lui-même, une à une, les conclusions auxquelles la classe parvient.

2) Cette manière de faire n'apporte qu'une réponse décalée à la deuxième question ci-dessus : la mise en commun, ici, se fait en effet ***en continu***, et non après un temps de travail individuel ou par équipe (par exemple) clairement distinct du temps de mise en commun lui-même. Mais la technique employée peut être utilisée aussi dans ce dernier cas : le professeur reçoit les suggestions ou les conclusions amenées par le travail collectif ou individuel, organise un débat et une confrontation avec un ou des milieux, fait énoncer des conclusions validées ou des conjectures fortement vraisemblables qui sont alors mises par écrit au tableau et notées par les élèves dans le cahier d'AER (alors que leur travail écrit préalable pouvait être conduit dans un cahier de brouillon.

3. Le passage observé permet également d'évoquer certains éléments de réponse à la première question. Alors que l'organisation de l'étude du problème proposé aurait pu comporter un temps de recherche individuelle ou par équipe – recherche surveillée, encadrée mais pas véritablement dirigée par le professeur –, le « choix » d'organisation est ici différent : la classe tout entière devient une équipe que le professeur dirige. Les échanges ne se font pas au niveau des équipes d'élèves – de binômes par exemple – mais au niveau du groupe classe lui-même. La mise en œuvre de la technique didactique ainsi retenue appelle une gestion de la séance (ou du moins de l'épisode observé) très spécifique, difficile, que le professeur maîtrise avec un réel brio et une certaine facilité, sans toutefois parvenir à intégrer toute la classe dans la marche de l'étude, puisqu'il ne travaille en temps réel qu'avec quelques élèves seulement, ceux qui « se portent en avant ». En ce sens, on peut dire que l'organisation didactique rend difficile la gestion de la séance : elle se révèle – on pouvait le prévoir – très exigeante à ce niveau. Le *topos* de l'élève inscrit dans l'organisation didactique est, idéalement, celui que viennent occuper les élèves les plus visiblement actifs : il permet et appelle l'intervention en direct des élèves – et non, par exemple, un travail de chacun, silencieusement, à sa table, type de *topos* qu'un élève peu enclin à l'histrionisme peut toutefois plus facilement venir occuper. Quoiqu'il en soit, le fait que le *topos* ici prévu soit effectivement occupé par tels ou tels élèves

dépend assez fortement de la gestion de la séance – qui, dans le cas observé, demeure à cet égard imparfaite.

4. Forum des questions : exposés à venir

4.1. Trois exposés déjà prévus

MG **: l'axiome de Wallis**

Exposé 18. Qu'est-ce que l'« axiome » de Wallis ? Qu'implique-t-il à propos de l'expérimentation spatiale dans la construction d'une théorie géométrique de l'espace sensible, du moins si l'on suppose que cet espace est euclidien ?

DV **: les nombres rationnels au collège**

Exposé 22. Comment peut-on justifier, au collège, en respectant l'esprit des programmes, que l'on a $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$; $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$; etc. Comment situer la problématique correspondante par rapport à la problématique « moderne » de la « construction » du corps des rationnels ?

CM **: la nature de la « correction »**

Exposé 23. Comment peut-on donner sens à la correction d'un DS entendue comme *œuvre collective* ? En quoi cela modifie-t-il le travail de « correction » que le professeur doit penser, organiser et impulser dans la classe ?

4.2. Les questions génératrices de la statistique

a) Cet exposé examinera ce qu'apportent les archives du Séminaire à propos de la question suivante.

Exposé 24. Que sont les questions génératrices de la statistique enseignée en seconde ? En quoi cela fait-il apparaître la notion de médiane comme première et la notion de moyenne comme seconde ?

b) Cet exposé sera proposé et présenté par *ED*.

4.3. Calculs avec et sans unités

a) Cet exposé examinera ce que l'on peut apprendre, dans les archives du Séminaire, à propos du calcul sur les grandeurs.

Exposé 25. Jusqu'à quel point peut-on intégrer les unités dans les calculs ? Comment cela se justifie-t-il ? Quel est l'intérêt de le faire ?

b) Cet exposé sera proposé et présenté par *MH*.

6. Une nouvelle notice

Une notice intitulée ***L'espace de l'étude*** est diffusée aux participants.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 14 : mardi 10 janvier 2006

0. Le programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions : poursuites & anticipations // 2. Forum des questions : exposés du jour // 3. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques.

1. Forum des questions : poursuites & anticipations

1.1. Observer / analyser / évaluer / développer

a) ***Questions d'observation***

Par rapport au corpus B, je me demande quels critères doivent motiver le choix des cahiers d'élèves. (RD, OS, 4e, 13)

Matériaux pour une réponse

1) Le document intitulé *Formation et validation des PCL2 de mathématiques* indique ceci, qui n'est guère informatif.

… le ***corpus B*** […] doit comporter ***l'ensemble des documents écrits*** (activités, synthèses, exercices, etc.) témoignant de l'activité de la classe (observée à travers deux élèves adéquatement choisis par le professeur stagiaire) sur le thème d'études principal travaillé lors de la visite, et cela au long d'une séquence comportant de cinq à sept séances réparties autour de la séance observée *in situ*…

2) En revanche, dans les archives du Séminaire 2003-2004, on trouve ce passage, qui apporte quelques éclaircissements.

Quels élèves ?

Pour le corpus B, quels élèves doit-on choisir ? Un garçon et une fille ? Un bon et un mauvais ?… (2de, 17)

Matériaux pour une réponse

Les élèves choisis doivent avoir des résultats scolaires différents – un « moyen bon », un « moyen moyen » pourront convenir, par exemple – mais surtout ils doivent avoir en commun de disposer de traces écrites ***complètes ou quasi complètes***. Un élève éprouvant de trop grandes difficultés peut n'avoir constitué que des traces écrites très lacunaires, qui apporteront plus d'informations sur l'élève lui-même que sur l'activité de la classe proprement dite. On notera que, bien sûr, l'indigence des traces écrites est, chez un élève, un facteur qui accroît presque sûrement le désarroi scolaire qui l'a engendré : l'examen des cahiers et classeurs est donc, de la part du professeur, un geste didactique important, en dehors même de la constitution du corpus B. La pauvreté ou, plus largement, l'inadéquation des traces écrites en lesquelles se manifeste et se prolonge l'activité de la classe sont, de même, un facteur ***collectif*** de carence didactique, facteur sur lequel il conviendrait d'agir si, d'aventure, la constitution du corpus B les mettait en évidence !

b) ***Questions d'analyse***

1. Je me suis demandé quelle était la différence entre « pédagogie » et « didactique ». J'ai trouvé la réponse dans le séminaire 2000-2001. L'organisation didactique comporte plusieurs niveaux ; celui de plus haute généricité (niveau 0) est désigné comme le niveau de la pédagogie. Il correspond aux éléments d'organisation didactique qui conditionnent la mise en place de toute organisation de savoir dans un système scolaire. L'action du professeur à ce niveau est en général des plus limitées. Est-ce que l'on peut dire que l'organisation des programmes en domaines, secteurs, thèmes, sujets fait partie de ce niveau pédagogique ? De même pour la répartition horaire de chaque discipline ainsi que la mise en place de systèmes didactiques principaux et secondaires ? (NFG, MJ, 2de, 13)

2. Des questions subsistent encore sur les notions d'organisation mathématique locale et d'OM ponctuelle. L'exposé de DC n'étant pas encore en ligne, je ne parviens pas encore à bien distinguer les deux. (GB, OS, 2de, 13)

3. Pour le mémoire, lorsque les tâches sont très proches (par exemple additionner des nombres en écriture fractionnaire / soustraire des nombres en écriture fractionnaire), doit-on quand même les distinguer comme deux types de tâches différents ou les regrouper ? (FEB, CR, 4^{e}, 13)

4. Dans le cadre du TER, la séance observée a pour thème « repérage d'un point sur le cercle trigonométrique ». L'activité décrit « l'enroulement de $\mathbb{R}$ » sur le cercle trigonométrique (repérage de π, 2π, d'angles particuliers et passage à $\mathbb{R}$ tout entier). Nous avons longuement hésité sur la nature (tâche secondaire ou technique ?) à donner à « convertir un angle exprimé en radians en degrés » sachant que la tâche principale qui a émergé est : « *T*. Repérer un point sur le cercle trigonométrique ». Pouvez-vous nous aider ? (NA, JT, 4^{e}, 13

5. À quel point, dans le mémoire, faut-il détailler les types de tâches ? Notre mémoire concerne une séance de 4^{e} sur les additions de fractions. Lors de la première activité, les élèves ont à lire un tableau (simple) à double entrée. Ce type de tâches doit-il être pris en compte alors qu'il reste implicite lors de la séance ? (JB, CR, 2de, 13)

6. Considérons le type de tâches suivant :

T. Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$.

La technique associée, τ, repose sur le résultat technologique θ suivant :

Théorème. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions $f_k : x \mapsto kae^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$.

Dans une leçon qui a pour objectif de construire et justifier une technique relative à *T*, peut-on considérer comme sous-type de tâches de *T* un type de tâches nécessaire à la justification de θ tel que

T_2. Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle donnée ?

(CD, CR, 5^{e}, 13)

7. Lorsqu'on se trouve dans la situation du professeur de la vidéo vue le mardi 13 décembre 2005 – c'est-à-dire qu'une technique τ_i relative à un type de tâches T_i faisant partie de l'organisation praxéologique $[T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i]_{i\in I}$ n'est pas connu par les élèves alors qu'on attendait que ce soit un autre $[T_j/\tau_j]$ qui soit problématique –, doit-on donner une réponse « toute faite » aux élèves en leur proposant d'y revenir à un autre moment, ou doit-on élaborer collectivement une réponse et institutionnaliser, quitte à reporter à la séance d'après ce qu'on avait prévu de faire ? (FE, MJ, 5^{e}, 13)

8. Je souhaite faire une activité de découverte sur Géoplan pour aborder le thème du cosinus. Mes élèves ne connaissent pas le logiciel. Dois-je organiser une séance préalable de découverte du logiciel ou bien l'activité peut-elle constituer un double support (découverte du logiciel et découverte d'une grandeur, le cosinus d'un angle aigu) ? (LLL, JT, 4^{e}, 13)

9. Les élèves semblent éprouver des difficultés avec le calcul littéral. Comment aborder alors la résolution des équations ? (MT, OS, 4^{e}, 13)

10. Lorsque l'on analyse un compte rendu, doit-on toujours s'efforcer de déterminer la ou les théories rattachées à la séance étudiée, même si elles ne sont pas explicitement claires ? (MD, JT, 2de, 13)

11. Malgré les explications et exemples trouvés dans les séminaires (archives incluses), j'éprouve des difficultés à différencier les contenus de l'organisation didactique et de la gestion de la séance. (NFG, MJ, 2de, 13)

Matériaux pour une réponse

1) Sur la première question, on se contentera ici de préciser quelques points.

• Tout d'abord, la référence est à une échelle dite des *niveaux de détermination* (ou de co-détermination) *didactique* que l'on peut représenter ainsi.

Civilisation
↓↑
Société
↓↑
École
↓↑
Pédagogie
↓↑
Discipline d'études
↓↑
Domaine d'études
↓↑
Secteur d'études
↓↑
Thème d'études
↓↑
Sujet d'études

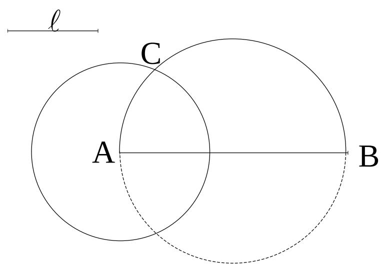
• Les niveaux inférieurs (sujet, thème, secteur, domaine) sont familiers ; les niveaux situés au-dessus du niveau de la discipline enseignée le sont moins. Chaque niveau est la « source » *de conditions et de contraintes* propres qui diffusent vers les autres niveaux. En pratique, l'usage essentiel de ce schéma est le suivant : lorsque professeur et élèves travaillent ensemble sur un certain *sujet*, ce qu'ils font et pensent, ce qu'ils peuvent faire et penser est déterminé en partie par des conditions et des contraintes *de multiples niveaux* – jusqu'au niveau de la civilisation !

• Le niveau de la *pédagogie* est une niveau de détermination propre qui impose des contraintes souvent regardées comme allant de soi par les acteurs « de base » du système éducatif. Pour ne prendre ici qu'un exemple simple, le fait que les séances de classe ne durent que 55 minutes est une condition pédagogique, que d'aucuns peuvent considérer comme neutre du point de vue didactique, en oubliant que son application généralisée interdit tant les séances d'une demi-journée (pour un travail de longue haleine, qui gagne à être mené *d'une traite* à un rythme approprié) que les « brèves rencontres » où un professeur ne travaille avec sa classe que pendant un quart d'heure, par exemple pour « mettre en place » un travail à faire hors classe. À l'inverse, à cause sans doute de ce sentiment erroné d'indifférence des contraintes de ce niveau, nombre de mouvements d'innovation « pédagogique » se sont fondés sur ce postulat – insuffisamment dialectique sans doute – qu'en modifiant les conditions et contraintes de ce niveau, des changements profonds seraient rendus possibles du point de vue didactique.

• S'il est vrai que, de même, « la mise en place de systèmes didactiques principaux et secondaires » relève bien du niveau des conditions et contraintes pédagogiques, en revanche il n'en va pas de même de « l'organisation des programmes en domaines, secteurs, thèmes, sujets » qui, elle, relève typiquement du niveau des contraintes imposées à l'activité didactique par le niveau de la *discipline*. Quant au nombre d'heures alloué à telle discipline donnée, elle relève du niveau de l'*école* : une société peut se donner une école où, par exemple, le temps dévolu à l'étude des arts plastiques est plus ou moins important, etc.

2) La deuxième question peut recevoir une réponse simple. On a précisé, lors de la séance 10, qu'« on note [$T/\tau/\theta/\Theta$] l'organisation mathématique ponctuelle (OMP) formée autour du type de tâches T ». Semblablement, dans la notice *Education mathématique & citoyenneté*, on a pu lire ceci : « On peut ainsi, pour chaque organisation mathématique déterminée, considérer les organisations ponctuelles (relatives à un type de tâches particulier) qu'il est possible d'en faire découler de manière relativement immédiate. » Une organisation mathématique *locale* (OML) s'écrit [$T_i/\tau_i/\theta/\Theta$] : elle est formée, autour d'une certaine technologie θ, par *plusieurs* types de tâches T_i – au moins deux. Supposons par exemple que l'on parte du type de tâches suivant :

T_1. Étant donné un segment [AB] et une longueur ℓ < AB, construire un point C tel que AC = ℓ et que le triangle ACB soit rectangle en C.



L'étude du problème – créer une technique τ_1 adéquate – montre d'abord que le point C cherché se trouve sur le cercle de centre A et de rayon ℓ. Elle met en évidence ensuite la propriété clé suivante :

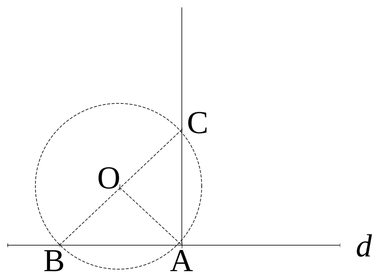
θ. Étant donné un segment [AB], l'ensemble des points C tel que le triangle ACB soit rectangle en C est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

Ultérieurement, la classe pourra travailler sur le problème de créer une technique τ_1 pour le type de tâches suivant :

T_2. Étant donné une droite d et un point A de d, construire à la règle et au compas la perpendiculaire à d en A.

On suppose que la technique élaborée est la suivante.

τ_2. O étant un point non situé sur d, on construit le cercle de centre O passant par A, qui recoupe d en B, puis on construit le point C où (BO) recoupe ce cercle, et enfin la droite (AC) demandée.



La technologie de τ_2 est essentiellement constituée de θ : à ce stade, l'organisation mathématique mise en place dans la classe s'écrit donc [$T_i/\tau_i/\theta/\Theta$]$_{1\le i\le 2}$. C'est une organisation *locale*, qui pourra s'étendre encore. Bien entendu, pour une OML qui s'écrirait [$T_i/\tau_i/\theta/\Theta$]$_{1\le i\le n}$

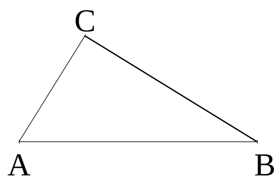
avec, par exemple, $n = 5$, la technologie notée ici θ sera en règle générale un *ensemble* de résultats technologiques, $\{ \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_p \}$, la justification et l'intelligibilité de τ_i, pour i donné, supposant un appel au résultat technologique principal θ_0 ainsi qu'à certains autres énoncés $\theta_j \in \theta$ regardés comme auxiliaires.

3) Les questions 3 à 9 soulèvent de différents points de vue des difficultés voisines.

• La question 3 – lorsque des types de tâches sont « très proches », doit-on les distinguer ou peut-on les confondre en un même type de tâches ? – est l'occasion de souligner que la *distinction* faite entre des objets (types de tâches ou autres) *n'est pas intrinsèque* : elle dépend de l'institution où l'on se trouve (ou que l'on observe). Ainsi, dans une classe de 4^e qui entame l'étude du thème d'études constitué autour du théorème de Pythagore, on pourra commencer par distinguer les deux types de tâches suivants.

T_1. Étant donné un triangle ABC rectangle en C, calculer AB connaissant AC et BC.

T_2. Étant donné un triangle ABC rectangle en C, calculer BC connaissant AB et AC.



Plus tard, ces deux types de tâches pourront être fusionnés en un unique type de tâches.

$\widetilde{T}$. Étant donné un triangle rectangle, calculer la mesure d'un côté connaissant la mesure des deux autres.

La structure d'une organisation mathématique mise en place dans une classe pourra ainsi évoluer dans la période qui suit – dans ce cas, vers une certaine simplification. Bien entendu, l'observateur d'une classe doit décrire les OM en place (ou, plus généralement, en cours de mise en place) telles qu'elles se présentent *hic et nunc* et non telles qu'elles pourront devenir ultérieurement.

• La question 4 appelle une réponse *a priori* simple : « convertir en degrés un angle exprimé en radians » est *évidemment* un type de tâches, et non une technique ! Mais la situation évoquée est en vérité un peu plus complexe que cela : pour accomplir les tâches d'un certain type T (ici, « repérer un point sur le cercle trigonométrique »), on utilise une technique τ qui conduit à accomplir une tâche d'un type T^* (ici, apparemment, « convertir en degrés un angle exprimé en radians »). Mais ce type de tâches, *motivé* par la technique τ, n'en reste pas moins un type de tâches. C'est là une situation déjà rencontrée et analysée, comme le montre l'extrait suivant des notes de la séance 12.

> On dira par exemple que T, ou plutôt la technique τ, ou plus exactement la praxéologie $[T / \tau / \theta / \Theta]$, *motive* le type de tâches T_3 ; ce qu'on peut écrire : $[T / \tau / \theta / \Theta]$ ➦ T_3. Pratiquement, telle personne pourra avoir appris à construire le projeté orthogonal à l'aide d'une équerre *uniquement* parce qu'elle avait besoin de savoir accomplir ce type de tâches afin de construire le milieu de segments par la technique ci-dessus. Dans l'univers « praxéologique » de cette personne, le type de tâches T, et plus exactement la praxéologie $[T / \tau / \theta / \Theta]$, apparaît alors comme la *raison d'être* du type de tâches T_3 ou, plus exactement, de la praxéologie correspondante $[T_3 / \tau_3 / \theta_3 / \Theta_3]$. Bien entendu, on pourra semblablement se demander ce que sont les raisons d'être du type de tâches T – pourquoi veut-on construire le milieu de segments ? – ou, plus exactement, de la praxéologie $[T / \tau / \theta / \Theta]$…

• Les questions 5, 6, 7, 8, 9 renvoient à une même difficulté. Une classe apprend à réaliser un certain type de tâches *T* par une certaine technique τ dont la mise en œuvre conduit à accomplir des tâches d'un type *T**. Les questions 5 et 6 posent le problème du point de vue de l'analyse : faut-il en ce cas mentionner *T** dans l'analyse didactique d'une séance observée, par exemple ? La réponse dépend du statut de *T** dans la culture mathématique de la classe. S'il s'agit d'un type de tâches *non problématique*, voire *routinisé*, et plus encore si l'accomplissement des tâches de ce type a été, parfois depuis longtemps, « automatisé », il n'est sans doute pas utile de le mentionner. Si, en revanche, ce type de tâches vient faire difficulté dans l'accomplissement de tâches $t \in T$, il convient de mentionner *T**, dont le « traitement didactique » appelle alors un développement propre.

• C'est cette difficulté que soulèvent les questions 7, 8, 9. La gestion des situations évoquées va en fait dépendre de plusieurs paramètres. Si le type de tâches *T** est regardé à la fois – souvent *à tort* – comme faiblement mathématique (et en tout cas comme n'étant pas un enjeu d'apprentissage décisif) et facile à maîtriser, son traitement se fera « à la marge », comme satisfaisant un besoin réel mais purement instrumental et que l'on peut « traiter » en l'ignorant en partie : c'est ce qui tend à se produire, en effet, lors de la séance observée en 4^{e}. Mais il arrive aussi que *T** vienne faire barrage dans l'activité prévue à propos du « véritable » enjeu didactique, *T*. Lorsque *T** se voit reconnu un statut mathématique et figure à ce titre dans le programme de la classe, comme il en va avec le calcul littéral, la programmation de l'étude prévoit en général l'étude de *T** *avant* celle de *T*. Ainsi en va-t-il avec l'étude du calcul algébrique (ou littéral) par rapport à l'un de ses usages principaux, le calcul « équationnel ». Il en est autrement lorsque *T** paraît relever d'un domaine proche des mathématiques, que l'on met au service des mathématiques. Dans ce dernier cas, tout particulièrement, deux tentations contraires doivent être évitées. La première est de négliger l'étude de *T**, comme s'il n'y avait rien à apprendre et qu'il suffisait de faire… La seconde est, au contraire, de se laisser aspirer dans une étude indéfinie, au lieu de viser la maîtrise de ce qu'il est utile de maîtriser seulement. En règle générale, on essaiera donc, comme l'évoque la question 8, d'aborder le problème des types de tâches « auxiliaires » de façon *fonctionnelle*, « au chevet » de ce qui motive qu'on s'intéresse à ces types de tâches. Et on développera alors, de façon en cela *motivée*, un travail d'étude de ces types de tâches qui se situe clairement *au service* de la satisfaction des besoins éprouvés. C'est ainsi que l'on s'empressera, après une éventuelle présentation « générale », de se concentrer sur les quelques « gestes » à maîtriser par exemple pour réaliser à l'écran de l'ordinateur une expérience graphique simple avec le logiciel Géoplan (ou tel autre que l'on aura choisi). On ne posera qu'ensuite, de façon alors dûment motivée, des problèmes plus particuliers (comme par exemple le problème d'obtenir une impression sur papier de la figure visible à l'écran qui soit en « vraie grandeur »), à l'étude desquels on pourra alors allouer explicitement un temps non négligeable, *si besoin est*. Il n'en va pas autrement à propos de l'apprentissage du calcul équationnel : même s'il est fort regrettable que des élèves y arrivent avec une maîtrise préalable fort limitée du calcul littéral, une fois rendus au calcul équationnel on proportionnera le travail sur cet auxiliaire mathématique qu'est le calcul littéral aux besoins effectivement rencontrés, qui sont souvent de complexité calculatoire plus réduite : résoudre l'équation $5x - 14 = 2x + 7$, ainsi, suppose par exemple que l'on ajoute aux deux membres 14 puis qu'on leur retranche le terme $2x$, gestes de calcul équationnel qui conduisent à l'égalité $5x - 2x = 2x + 7 + 14 - 2x$. C'est là qu'embraye le calcul littéral, qui conduit à écrire d'un côté que $5x - 2x \equiv 3x$, de l'autre que $2x + 7 + 14 - 2x \equiv \dots \equiv 21$, avant que le calcul équationnel ne reprenne ses droits ($3x = 21$ équivaut à $x = 21/7$, etc.). Un travail *auxiliaire* très proche des gestes de calcul littéral réellement nécessaires pourra alors être proposé par exemple en soutien. Mais il serait absurde de reprendre *ab ovo* l'étude du calcul littéral.

4) La question 10 pose le problème de l'explicitation, dans l'analyse didactique d'une séance observée, des éléments *théoriques* qui s'y trouveraient présents ou, du moins, actifs, explicitement ou souterrainement. Là encore, la pertinence d'une telle mention dépend du rôle que ces éléments théoriques jouent dans la dynamique de la séance. Si par exemple on voit une classe de 3^e s'interroger sur l'égalité $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, on pourra observer en passant que l'existence du quotient de $\sqrt{2}$ par 2 va de soi pour cette classe et que, sans doute, cela découle d'un principe théorique non explicité selon lequel il serait licite d'écrire, avec des radicaux, les mêmes expressions que celles que l'on écrivait jusque-là avec des entiers. Mais une telle notation doit être mise en relation avec certains aspects au moins de la vie de la classe – par exemple le fait que cela ne semble soulever aucun difficulté !

5) La question 11 – la distinction entre organisation didactique et gestion de la séance – a fait l'objet d'un développement complémentaire lors de la séance 13 : on se reportera aux notes correspondantes.

c) ***Questions d'évaluation***

Dans la partie « Évaluation » du mémoire, doit-on « refaire » la séance à notre façon ? Juger la séance faite ? S'appuyer sur les documents officiels (programme, document d'accompagnement) ? (LN, JT, 4^e, 13)

Matériaux pour une réponse

1) La partie « Évaluation » est là pour… évaluer, c'est-à-dire pour apprécier la *valeur* des solutions mises en œuvre dans la séance observée. Une telle valeur, soulignons-le, n'est déterminée que dans la perspective d'un certain *projet*, par exemple celui de développer un enseignement *fonctionnel* (plutôt que formel), ou encore un enseignement qui fasse leur juste place à l'étude des types de tâches auxiliaires (voir ci-dessus), etc.

2) C'est ensuite, dans la partie « Développement », que l'on « refera » (en partie) la séance observée, pour arriver à un scénario didactique donnant davantage de garanties quant à sa capacité de se réaliser de façon conforme au projet invoqué.

d) ***Questions de développement***

1. Est-il possible de faire un test d'entrée oral ? Si un tel dispositif est mis en place, fait-il vraiment gagner du temps d'horloge ? Peut-on se fier aux réponses de quelques élèves ? (DP, OS, 5^e, 13)

2. Si la construction d'une culture mathématique de classe doit constituer la préoccupation majeure de l'enseignant et l'essentiel du travail de la classe, des « à-côtés » sont-ils souhaitables ? Par exemple, des recherches, tâtonnements ou travaux individuels (ou par petits groupes) portant sur des problèmes que se posent les élèves et dont l'avancée ou l'aboutissement (une impasse éventuellement) sont présentés au groupe classe (avec référencement dans les portfolios individuels) sont-ils souhaitables ? Cela pourrait-il renforcer la culture mathématique de la classe ? (JNM, MJ, 4^e, 13)

3. Nous sommes deux professeurs de mathématiques à faire du soutien *dans le cadre des IDD* en 5^e. Le principal de l'établissement exige que l'on note les élèves de soutien car il leur faut obligatoirement une note d'IDD au même titre que les autres élèves. Ma collègue et moi avons décidé de leur faire une petite interrogation écrite (pour ma part, contenant des exercices déjà faits et corrigés lors des séances de soutien précédentes) complétée par une note de comportement. Le problème est que les élèves « rejettent » cette idée de notation en soutien et ont complètement bâclé cette interrogation ; les notes

sont catastrophiques. Faut-il que je mette les notes obtenus ou que je revoie mon système d'évaluation ? (SPM, CR, 5e, 13)

Matériaux pour une réponse

1) L'idée d'une prise d'information par échange oral avec la classe n'est pas dénuée de sens : c'est même à cela, bien souvent, que se réduit la prise d'information par le professeur concernant les connaissances « des élèves » sur tel thème dont il projette de faire démarrer l'étude sous peu. Mais on ne peut guère alors parler de « test oral ». Par contraste, il faut rappeler à cet égard tout l'intérêt d'un travail *écrit*, qui permet à *chacun* de s'éprouver, alors que l'échange oral est fréquemment sous l'emprise de quelques élèves, qu'ils interviennent *motu proprio* ou qu'ils soient interrogés préférentiellement par le professeur – phénomène qui peut, en outre, donner une image quelque peu distordue des connaissances effectivement et massivement mobilisables dans la classe.

2) La question 2 soulève plusieurs problèmes d'organisation de l'étude. Le travail de la classe peut tout à fait se nourrir de travaux individuels ou par groupes. Dans le cas – inhabituel – où les « équipes » ainsi constituées travaillent sur des sujets distincts, quoique voisins, il convient alors que les résultats obtenus, aux plans technique et technologique notamment, par les différentes équipes soient mis en commun et intégrés dans une culture mathématique commune et bien partagée. Il en va autrement si on intègre dans l'organisation de l'étude une partie de recherche individuelle *propre* et *libre*, dont les productions remplissent un « portfolio » aux sens de ce mot vus lors de la séance 7 – qu'il constitue un « dossier d'apprentissage » ou un « dossier de présentation » (lequel « se rapproche du portfolio de l'artiste »). On bute en ce cas sur deux obstacles solidaires : tout d'abord, un tel dispositif didactique n'est pas actuellement établi dans le curriculum français et il conviendrait donc d'en négocier – au moins localement – la création ; ensuite, et en conséquence, ce dispositif viendrait actuellement *en plus* de tous les autres, sans que le temps d'horloge alloué soit augmenté, ce qui apparaît comme une condition dirimante.

3) Des exceptions peuvent toutefois être imaginées, dont le problème soulevé dans la question 3 fournit un exemple. Puisque l'évaluation du travail de soutien évoqué est imposée administrativement par son identification avec des IDD (ce que les élèves concernés *devraient* faire, soulignons-le en passant), le travail à évaluer gagnera à se rapprocher d'un travail d'IDD, c'est-à-dire, plus exactement, d'une *petite étude mathématique* sur un sujet proche des questions mathématiques travaillées *au titre du soutien*. Supposons par exemple que l'un des sujets abordés soit le produit de deux nombres en écriture fractionnaire : les élèves de 5e doivent apprendre, en effet, à effectuer des produits comme $\frac{7}{8}\times\frac{5}{3}$, $6\times\frac{22}{7}$, $\frac{5{,}24}{2{,}1}\times\frac{2}{3}$, etc. Un binôme d'élèves peut ainsi produire, *dans le cadre du soutien*, une petite étude semblable à celle ébauchée ci-après.

Collège Georges Bouligand

5e4 – Mathématiques | IDD – Soutien

Produit de nombres en écriture fractionnaire

Testez vos compétences !

par Jessie Goulart & Karim Ojimbé

Problème 1. On part d'une bande de papier de 20 cm de long. On y découpe une bande ayant pour longueur les 3/5 de la bande de départ. Puis on découpe dans cette deuxième bande une troisième bande dont la longueur soit les 7/8 de la longueur de la deuxième bande. Montrer que la bande obtenue est les 21/40 de la bande dont on était parti.
Solution (cliquez)

Problème 2. Les 3/4 des 4/5 d'un nombre valent 108. Quel est ce nombre ?
Solution (cliquez)

Problème 3. …
Solution (cliquez)

1.2. Vie et travail de la classe

a) *Interventions urgentes ou critiques*

1. Dans mon établissement, une élève a été prise d'une crise d'épilepsie en plein cours. Que peut et que doit faire un professeur dans ce genre de cas ? (GB, OS, 2de, 13)

2. J'ai dans ma classe un élève qui se plante le compas dans la main, ou se coupe avec ses ciseaux, etc. De quelle façon suis-je responsable (au point de vue juridique) de ce qu'il s'inflige ? (CM, MJ, 5^{e}, 13)

3. Lors de la réunion parents-professeur du mardi 13 décembre 2005, un père est venu me dire que son fils était victime d'un racket de la part de trois autres élèves de la classe (ils sont les seuls à venir du collège Pont-de-Vivaux), sous la forme de prêts d'argent (non rendu) et de copiage de devoirs et exercices faits à la maison. Il m'a dit que son fils avait tenté de réagir mais se faisait traiter de « radin », etc., pour finalement être l'objet d'un harcèlement psychologique (ils sonnaient chez lui jusqu'à ce qu'il ouvre…). L'élève persécuté ne voulait pas que son père en parle (par peur de représailles éventuelles) et celui-ci ne se sentait pas capable de faire quoi que ce soit sans qu'il y ait violence sur son fils. J'en ai discuté avec l'élève deux jours après en fin de séance en le mettant en garde contre une évolution négative qu'entraînerait son attitude (la peur de réagir) et en l'encourageant à ne pas se laisser faire. Il ne se met plus à côté d'eux et a progressé dans les résultats (les quatre élèves avaient eu un avertissement de travail au conseil du premier trimestre). Mais je perçois toujours un harcèlement « déguisé » dans les paroles et l'attitude des trois autres élèves. Ma PCP m'a conseillé d'en parler au CPE (ce que j'ai fait ce matin), mais je ne sais pas si je peux faire autre chose : quoi ? (CG, OS, 2de, 13)

Matériaux pour une réponse

1) La question 1 soulève un problème – ou plutôt un ensemble de problèmes – à travailler dans le cadre d'une *formation aux premiers secours* (donnant lieu à l'AFPS, l'attestation de formation aux premiers secours). Sur le problème des crises convulsives, on pourra se reporter par exemple au *Manuel des premiers secours* publié par la Croix-Rouge française (Médecine-Sciences, Flammarion, Paris, 2^{e} édition 1998), p. 116-117. Pour une vue générale des problèmes de santé, on consultera le site du ministère de l'Éducation nationale, à l'adresse suivante www.education.gouv.fr/prat/sante.htm. On a reproduit ci-après un passage du document correspondant.

Soins et urgences au collège et au lycée

Un protocole national sur l'organisation des soins et des urgences dans les écoles et les établissements publics locaux d'enseignement a été publié le 6 janvier 2000. Il apporte des informations générales pour une harmonisation des pratiques professionnelles et une clarification des modalités d'organisation des soins et des urgences dans les écoles et les établissements publics locaux d'enseignement.

Des consignes précises sur la conduite à tenir en cas d'urgence doivent être affichées.

Une ligne téléphonique permettant de contacter les services d'urgence doit être accessible en permanence. L'infirmière ou la personne désignée dispose alors, en quelques secondes, d'un avis médical et, en cas de besoin, d'une assistance totale :

– aide à l'évaluation d'urgence

– mobilisation des moyens adaptés

En cas de scolarisation d'élèves atteints d'une maladie chronique ou de handicap, bénéficiant d'un projet d'accueil individualisé (PAI) ou d'une convention d'intégration, les médicaments prescrits doivent être à disposition du personnel de santé ou de l'adulte responsable et tous les matériels nécessaires doivent être disponibles dans l'infirmerie. Les médicaments inscrits sur le protocole d'urgence doivent être à l'infirmerie et dans la trousse de secours de l'enfant.

Tous les établissements s'assurent le concours d'un service d'hospitalisation proche, susceptible d'accueillir les élèves en cas d'urgence.

Les lycées et collèges avec internat ou ateliers disposent souvent d'une infirmière à temps plein.

Dans tous les cas graves, la famille est prévenue ainsi que le chef d'établissement.

2) La question 2 soulève plusieurs problèmes. La responsabilité de l'enseignant ne saurait être engagée s'il appert que le geste de l'élève contre lui-même était inattendu et imprévisible. Mais, instruit de la propension de l'élève à l'auto-agression, le professeur pourrait se voir reproché de n'avoir pas anticipé une pratique habituelle et dommageable en écartant de l'élève les objets qu'il est porté à retourner contre lui : ciseaux, compas, cutter, etc. Au plan psychologique, pour commencer à prévenir de tels comportements, il convient de saisir ce qui peut y conduire l'élève. Dans ce but, on a reproduit ci-après un court passage de l'ouvrage de Philippe Jeammet, *L'adolescence* (Solar, Paris, 2002), p. 33.

… la violence se présente (en l'occurrence celle de l'autodestruction) comme l'ultime moyen de maîtriser quoi que ce soit face à une situation qui dépasse l'adolescent. Le choix de la vie, du succès, du plaisir est toujours aléatoire et dépend beaucoup de facteurs que l'on ne maîtrise pas, l'opinion et les sentiments des autres, par exemple. De plus, le plaisir a toujours une fin et confronte les anxieux aux angoisses de perte et de séparation, alors qu'ils peuvent toujours être maîtres de leurs échecs, du refus d'utiliser leurs potentialités, de leur comportement d'autosabotage et d'autodestruction.

Une véritable fascination pour le négatif est donc le danger qui guette nombre d'adolescents peu sûrs d'eux-mêmes. Paradoxalement, le renoncement leur confère un pouvoir que la recherche de la réussite ne leur donnerait pas. Le plaisir qu'ils ressentent est lié à l'emprise qu'ils ont sur leurs désirs et non à la satisfaction de ces derniers. C'est le prix à payer par l'adolescent pour se rassurer et se prouver qu'il a les moyens de contrôler et ses désirs et leurs objets, qu'il n'est pas sous leur dépendance. On comprend alors l'effet de soulagement des comportements autodestructeurs, l'apaisement qui peut accompagner la décision de se suicider ou l'effet anxiolytique que peuvent avoir brûlures et scarifications du corps.

3) Le professeur peut certainement, à son niveau, aider l'élève à sortir de cette problématique autodestructrice. Mais il doit le faire de façon concertée, d'abord avec l'ensemble des professeurs de la classe : il ne servirait pas à grand-chose de montrer à l'élève qu'il peut avoir prise – de façon circonscrite mais effective – sur certaines situations de vie et de travail dans la classe de mathématiques, afin de l'aider à cheminer vers « le choix de la vie, du succès, du plaisir », si d'autres professeurs le confortent même involontairement dans une représentation de lui-même comme incapable de rien comprendre et de rien maîtriser.

4) L'action collective concertée est de mise encore dans le cas du racket, évoqué dans la question 3, à propos de quoi on prend connaissance d'abord d'une fiche du *Manuel lycéen contre la violence* (voir http://www.education.gouv.fr/presse/2002/violence/manueldp.htm).

FICHE TECHNIQUE N° 4

Le racket

"Petit frère rêve de bagnoles, de fringues, de tunes/ Des réputations de dur, pour tout ça il volerait la lune/ Il collectionne les méfaits sans se soucier/ Du mal qu'il fait, tout en demandant du respect/Peu lui importe de quoi demain sera fait."

"Petit frère" - IAM

Qu'est ce que c'est ?

Le racket, c'est le fait d'obtenir par la violence, par des menaces de violences ou la contrainte, soit une signature, un engagement ou une renonciation, soit la remise de fonds, de valeurs ou d'un bien quelconque. *(Art.312.1 du nouveau Code Pénal).* À la différence du vol, c'est la victime elle-même qui remet, sous la contrainte, un bien à l'auteur du délit. Pour prendre un exemple concret, on parle de racket lorsqu'un lycéen doit remettre un bien sous la forme d'argent ou d'objet à quelqu'un sous contrainte ou menace.

Ce que dit la loi

• Le racket se rapproche de l'extorsion, c'est une véritable infraction passible de poursuites judiciaires. Elle est constituée dès lors que la violence, la menace ou la contrainte ont été utilisées pour faire pression sur une personne dans le but d'en obtenir quelque chose. L'extorsion est passible *(Article 312-1 du Code Pénal)* de 7 ans d'emprisonnement et 700 000 francs d'amende. Si elle s'accompagne de violences sur autrui entraînant une Interruption Temporaire de Travail supérieur à 8 jours *(Article 312-2 du Code Pénal)* ou si la victime est particulièrement vulnérable en raison par exemple de son jeune âge, l'agresseur encourt une peine de 10 ans d'emprisonnement et un million de francs d'amendes.

• La tentative d'extorsion constitue également un délit.

Le racket peut aussi être incriminé sous la qualification de « vol avec violence ». *(article 311.4 du Code pénal)*

• Si le jeune a moins de 18 ans, il encourt des peines diminuées au moins de moitié par rapport aux personnes majeures *(ordonnance de février 1945)*. Le tribunal pour enfants ne peut prononcer une peine d'emprisonnement, avec ou sans sursis qu'après avoir spécialement motivé cette peine. Par contre le juge pour enfants peut commander une enquête sociale, un examen médical ou médico-psychologique. Le jeune mineur peut être admonesté par le juge des enfants. En fonction de la gravité des faits, le mineur peut être mis sous protection judiciaire pour une durée n'excédant pas 5 ans, placé dans un établissement spécialisé ou sous liberté surveillée jusqu'à sa majorité.

À qui en parler ? Que faire ?

• Il est très important d'en parler. D'abord à un ami, mais surtout à ses parents ou à un proche qui, de toute façon, va remarquer un changement dans notre comportement si on est victime de racket.

• Si cela se passe au lycée, ton CPE et le proviseur doivent être informés.

• Tu peux appeler anonymement Jeunes Violences Ecoute, les juristes et psychologues de cette ligne ont une grande expérience des problèmes de racket.

• Tu dois aussi te rendre au commissariat pour porter plainte *(si tu as moins de 18 ans, fais-toi accompagner d'un parent).*

Une lycéenne témoigne

Hélène, lycéenne à Paris :

"À la sortie du lycée, je me suis fait racketter. Deux mecs du lycée ont commencé par me taxer des clopes. Je venais juste d'arriver et je ne connaissais personne. J'ai un peu sympathisé avec eux et puis tout s'est empiré. Des clopes on est passé au blouson, puis mon lecteur mini-disque. D'emprunts, c'est devenu des cadeaux. Je ne voulais en parler à personne, j'avais trop honte de moi, d'avoir cru qu'en leur cédant, ils me lâcheraient. J'ai bien fini par en parler à ma mère, qui a très bien réagi, elle a prévenu mon proviseur et m'a accompagnée au commissariat. Du coup ça s'est arrêté et ils ne m'ont plus embêtée."

5) Une note d'information du ministère intitulée *Les actes de violence à l'école recensés dans SIGNA en 2004-2005* (ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/dpd/ni/ni2005/ni0530.pd) apporte des éléments d'information sur lesquels il n'est pas inutile de s'arrêter.

• Le racket apparaît d'abord comme relativement peu fréquent, comme le montre le tableau reproduit ci-après.

Tableau 2 – Types d'actes signalés dans le second degré en 2004-2005

N° d'ordre	Type d'acte	Nombre total	%
1	Violences physiques sans arme	23 094	28,9
2	Insultes ou menaces graves	20 732	25,9
3	Vol ou tentative	8 051	10,1
4	Autres faits graves	4 736	5,9
5	Dommages aux locaux	3 049	3,8
6	Jet de pierres ou autres projectiles	2 214	2,8
7	Intrusion de personnes étrangères à l'établissement	1 840	2,3
8	Tags	1 769	2,2
9	Consommation de stupéfiants	1 698	2,1
10	Violences physiques avec arme ou arme par destination	1 651	2,1
11	Racket ou tentative	1 557	1,9
12	Fausse alarme	1 488	1,9
13	Dommages au matériel autre que le matériel de sécurité	1 349	1,7
14	Dommages aux véhicules	1 276	1,6
15	Violences physiques à caractère sexuel	1 156	1,4
16	Dommages au matériel de sécurité	958	1,2
17	Trafic de stupéfiants	614	0,8
18	Port d'arme autre qu'arme à feu	590	0,7
19	Tentative d'incendie	546	0,7
20	Tentative de suicide	429	0,5
21	Dommages aux biens personnels autres que véhicules	415	0,5
22	Bizutage	295	0,4
23	Trafic divers autre que de stupéfiants	229	0,3
24	Incendies	192	0,2
25	Port d'arme à feu	40	0,1
26	Suicide	19	0,0
	Total	79 987	

• En revanche, les actes de racket ne restent pas sans suite au sein même de l'établissement.

Tableau 4 – Pourcentage d'actes donnant lieu à une suite interne selon le type de l'acte

Type d'acte	Pourcentage d'actes ayant donné lieu à une suite interne
Port d'arme à feu	100
Port d'arme autre qu'arme à feu	89
Violences physiques à caractère sexuel	86
Insultes ou menaces graves	85
Violences physiques avec arme ou arme par destination	83
Consommation de stupéfiants	83
Bizutage	83
Trafic de stupéfiants	82
Autres faits graves	82
Racket ou tentative	82
Trafic divers autre que de stupéfiants	82
Violences physiques sans arme	81
Jet de pierres ou autres projectiles	75
Tentative d'incendie	73
Vol ou tentative	69
Dommages au matériel autre que le matériel de sécurité	68
Dommages aux biens personnels autres que véhicules	66
Dommages aux locaux	62
Dommages au matériel de sécurité	61
Dommages aux véhicules	58
Incendies	57
Tags	50
Fausse alarme	49
Total	79

Lecture : 86 % des violences physiques à caractère sexuel ayant pour auteur un élève ont fait l'objet de suites internes (champ : ensemble du second degré public, année scolaire 2004-2005).

• Et ce sont eux qui donnent lieu au plus grand nombre de dépôts de plaintes de la part des familles.

Tableau 6 – Taux de plaintes déposées par l'élève ou sa famille selon le type d'acte		
Type d'incident	Pourcentage d'incidents ayant donné lieu à une plainte de l'élève ou de sa famille	Nombre d'incidents avec un élève victime
Racket ou tentative	42	1 504
Dommages aux véhicules	38	197
Violences physiques à caractère sexuel	34	1 118
Violences physiques avec arme ou arme par destination	32	1 363
Vol ou tentative	27	5 606
Violences physiques sans arme	20	20 803
Dommages aux biens personnels autres que véhicules	17	265
Bizutage	15	294
Insultes ou menaces graves	15	4 353
Total	23	35 503

N.B. Les actes retenus sont l'ensemble des atteintes à autrui et les atteintes aux biens les plus fréquentes : dommages aux biens personnels autres que véhicules, dommages aux véhicules ainsi que vols ou tentatives de vol.

6) Par contraste, l'institution intervient autrement qu'à travers une procédure interne, comme le note l'auteur – Rodolphe Houllé – de la note d'information citée.

> L'institution porte très peu plainte : dans 6 % des cas. Ici encore ce taux surprend par son faible niveau. Il est tout à fait net que les dépôts de plaintes sont beaucoup plus fréquents lorsqu'il s'agit d'atteintes à la sécurité ou aux biens : les six actes pour lesquels elle porte le plus souvent plainte appartiennent en effet à l'une ou l'autre de ces catégories. En revanche, les atteintes à la personne d'autrui, même lorsqu'il s'agit d'actes aussi graves que des violences physiques avec arme, des violences physiques à caractère sexuel ou des rackets déclenchent très rarement un dépôt de plainte : respectivement, dans 11 %, 5 % et 6 % des cas.

Il n'en reste pas moins que, comme en d'autres cas, le professeur mis au courant de telles pratiques devra réagir de façon rapide, en cherchant à provoquer un *agir collectif concerté*.

7) Au reste, d'autres observateurs estiment que l'institution est aujourd'hui moins encline à la retenue. C'est ce qu'indiquent les auteurs – Yann Buttner, André Maurin et Blaise Thouveny – d'un ouvrage intitulé *Le droit de la vie scolaire* (Dalloz, Paris, 2002), où on lit notamment ceci (*op. cit.*, p. 249).

> La réaction de l'institution face à trois types de comportement délictueux – parfois criminels – semble marquer la fin de la langue de bois à l'École. Le **racket** consiste à obliger un élève, sous la menace ou l'intimidation, à remettre de l'argent ou des effets personnels, encore à exécuter une tâche ingrate (porter le cartable) ou des devoirs supplémentaires. L'article 312-1 du Code pénal punit l'extorsion de sept ans d'emprisonnement et de 100 000 euros d'amende. L'article suivant aggrave ces sanctions, en particulier lorsque l'infraction atteint une personne vulnérable. Mais le racket peut aussi recevoir la qualification de vol, défini comme *« la soustraction frauduleuse de la chose d'autrui »* (article 311-1 du Code pénal). La victime présente un profil solitaire « au visage d'ange » ; oscillant entre culpabilisation et honte, elle n'ose pas dénoncer son agresseur. La confidentialité, voire le secret de ces affaires qui se produisent aux abords du collège ou du lycée, parfois à l'extérieur, complique la tâche de la police de proximité, en particulier des îlotiers, ainsi que celle des établissements.

b) ***Programmes***

Lors du cours sur le calcul littéral en 4^{e}, peut-on utiliser l'identité $k(a + b) = ka + kb$ dans le sens inverse, c'est-à-dire $ka + kb = k(a + b)$, bien que les factorisations dans leur généralité ne soient pas au programme ? (MD, MJ, 4^{e}, 13)

Matériaux pour une réponse

1) Avec cette question, on retrouve un problème de la profession déjà souligné lors de la séance 12 (à propos de la classe de 2de et de la parité des fonctions) : celui des situations « intermédiaires », à la frontière entre ce qui est requis et ce qui est prohibé.

2) Un commentaire du programme indique en effet ceci : « La factorisation d'expressions analogues à $x(3x + 4) – 5(3x + 4)$ n'est pas au programme. » Mais, en 5^{e} déjà, à propos de l'identité $k(a + b) = ka + kb$, un autre commentaire précise :

La distributivité est à connaître sous forme générale d'identité. […] Les applications donnent lieu à deux types d'activités bien distinctes : le développement qui correspond au sens de lecture de l'identité indiquée, et la factorisation qui correspond à la lecture « inverse » $ka + kb = k(a + b)$. Cette réversibilité se retrouve dans l'initiation à la résolution d'équations.

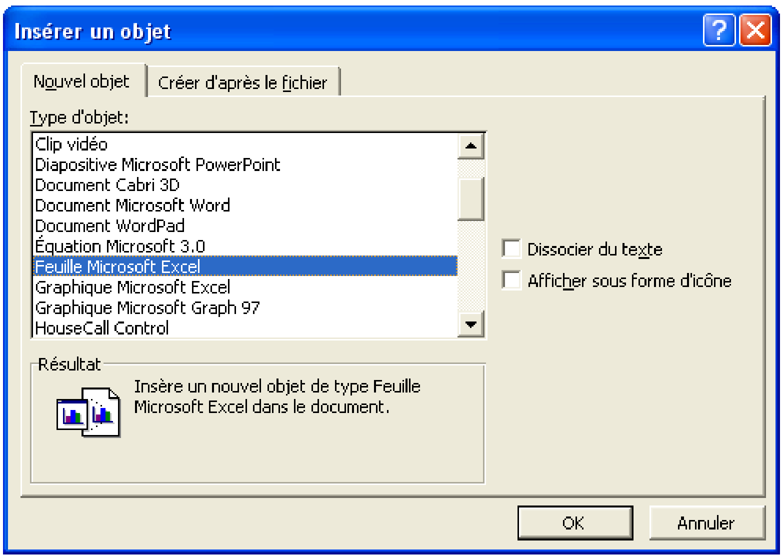
À nouveau, le programme n'est pas aussi prohibitionniste qu'on pourrait le croire : il est même, sur le point soumis à examen, clairement injonctif !

c) ***Intégration didactique des TICE***

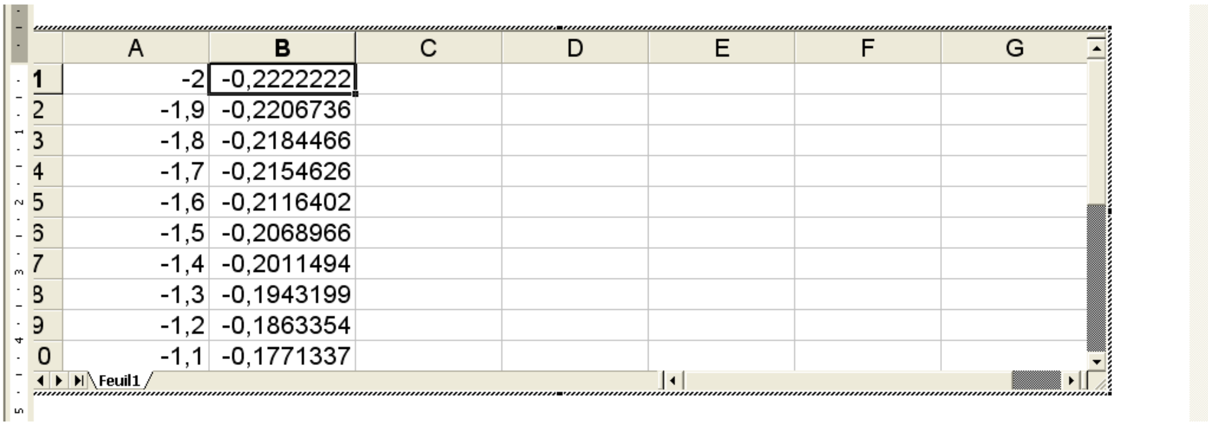
Comment tracer dans Word la courbe représentative d'une fonction ? (SP, MJ, 2de, 13)

Matériaux pour une réponse

1) On sélectionne **Insertion** puis **Objet…** On choisit alors **Feuille Microsoft Excel**.

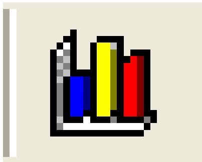


2) Il apparaît alors une feuille de calcul. Supposons qu'on veuille la représentation graphique d'une fonction f sur l'intervalle [–2 ; 1]. Dans la colonne A on saisit les valeurs de 0,1 en 0,1 (par exemple) de –2 à 1. Dans la cellule B1, on entre la valeur de f en $x = 2$, puis on engendre les valeurs de $f(x)$ pour x prenant les autres valeurs de la colonne 1.

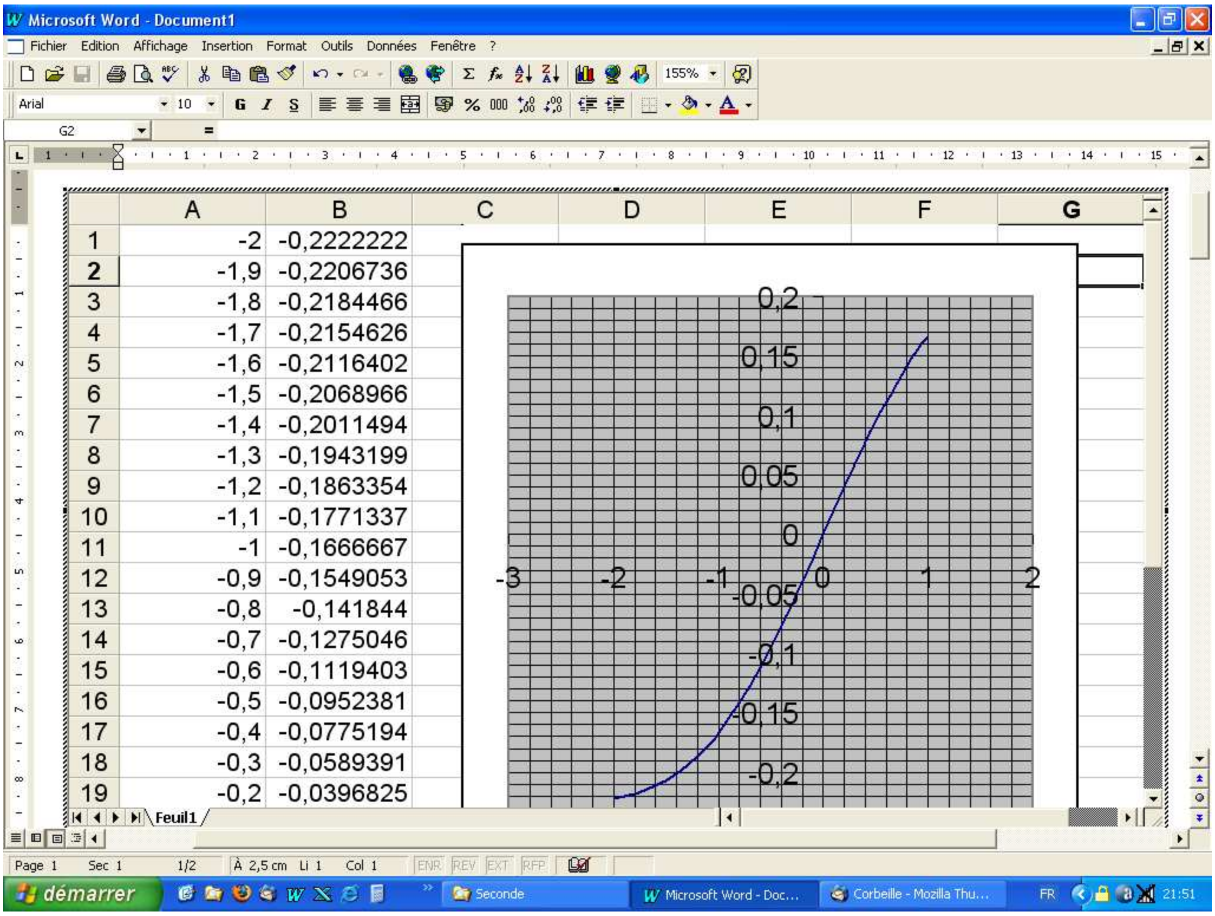


	A	B	C	D	E	F	G
1	-2	-0,2222222					
2	-1,9	-0,2206736					
3	-1,8	-0,2184466					
4	-1,7	-0,2154626					
5	-1,6	-0,2116402					
6	-1,5	-0,2068966					
7	-1,4	-0,2011494					
8	-1,3	-0,1943199					
9	-1,2	-0,1863354					
0	-1,1	-0,1771337					

3) L'***assistant graphique*** repéré par l'icône ci-après



permet alors d'obtenir – on découvrira comment – la courbe représentative de f sur [–2 ; 1], ainsi que le montre la copie d'écran ci-après (on a ici $f(x) = x/(x^2+5)$).



	A	B
1	-2	-0,2222222
2	-1,9	-0,2206736
3	-1,8	-0,2184466
4	-1,7	-0,2154626
5	-1,6	-0,2116402
6	-1,5	-0,2068966
7	-1,4	-0,2011494
8	-1,3	-0,1943199
9	-1,2	-0,1863354
10	-1,1	-0,1771337
11	-1	-0,1666667
12	-0,9	-0,1549053
13	-0,8	-0,141844
14	-0,7	-0,1275046
15	-0,6	-0,1119403
16	-0,5	-0,0952381
17	-0,4	-0,0775194
18	-0,3	-0,0589391
19	-0,2	-0,0396825

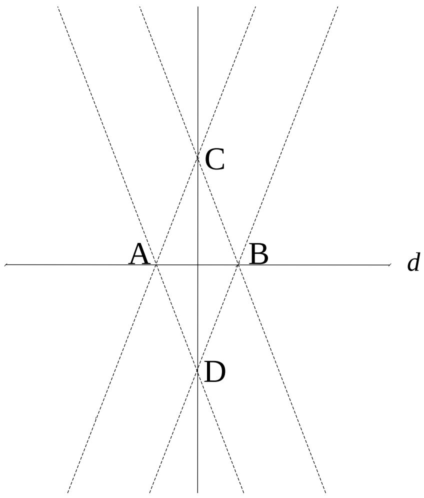
d) ***Géométries***

1. On a vu qu’avec une règle à deux bords parallèles on pouvait faire (*d* et P étant donnés) une parallèle à *d* passant par P. Est-ce possible de faire la même chose pour une perpendiculaire ? (BR, JT, 4^{e}, 13)

2. Pour le TER, la séance que nous avons choisie porte sur la construction d’une figure. Lors de l’analyse, dans la partie « organisation mathématique », j’ai rencontré un problème de vocabulaire : faut-il distinguer les verbes « construire » et « tracer », l’un décrivant un type de tâches purement mathématique, l’autre un type de tâche graphico-mathématique ? Cela peut-il influer sur la technique ? (DB, JT, 4^{e}, 13

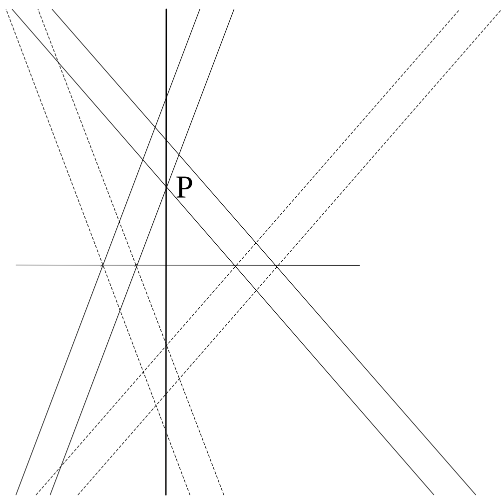
Matériaux pour une réponse

1) Soit donné une droite *d* et un point P. Avec une règle à deux bords, il est facile de construire une perpendiculaire $d_\perp$ à *d*, comme le montre la figure ci-après.



Il *suffit* alors de construire la parallèle à $d_\perp$ passant par P.

2) La distinction indiquée entre « construire » et « tracer » est utile. Ce qui précède démontre par exemple que la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné est *constructible* avec une règle à deux bords. Il s’agit là d’un résultat de technologie mathématique. On en déduit aisément une technique mathématique *de construction*. Mais le procédé de tracé graphique qui met en œuvre cette technique peut n’être pas le meilleur – par exemple parce qu’il serait trop complexe pour être graphiquement précis. On peut alors être conduit à rechercher une autre technique mathématique de construction qui donne lieu à une exécution graphique plus simple et précise. Ici, on pourra procéder plus économiquement ainsi (voir la figure ci-contre). Par P on fait passer un bord de la règle de façon à ce que les deux bords coupent *d* ; puis on change la position de la règle et on recommence l’opération précédente. On prenant alors respectivement les positions de la règle symétriques par rapport à *d*, on obtient le symétrique de P par rapport à *d*, ce qui donne la perpendiculaire à *d* passant par P.



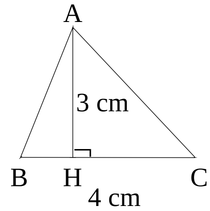
e) ***Grandeurs et mesures***.

En 5^e, concernant le calcul d'aire, quelle est la meilleure rédaction ?

1) Aire du triangle ABC :
$\frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$
L'aire du triangle ABC est de 6 cm^2.

2) Aire du triangle ABC :
$\frac{3\ cm \times 4\ cm}{2} = \frac{12\ cm^2}{2} = 6\ cm^2$.

(AG, JT, 5^e, 12)



Matériaux pour une réponse

1) La première manière de faire – en omettant les symboles des unités – est incontestablement la manière encore dominante aujourd'hui. Elle se justifie, mais elle ne doit sous aucun prétexte conduire à des écritures du type $\frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{2} = 6\ cm^2$ dans lesquelles on égale des « grandeurs scalaires », ici $\frac{3 \times 4}{2}$ et $\frac{12}{2}$, à une « grandeur vectorielle », ici 6 cm^2. Les aires, c'est-à-dire les grandeurs de l'espèce « aire », forment en effet une droite vectorielle – une demi-droite si l'on ne considère que les aires positives –, dont les éléments sont ici décomposés dans la base { cm^2 }. On a par changement de base dans cet espace vectoriel de dimension 1 : $6\ cm^2 = 6\ (10^{-2}\ dm^2) = 0{,}06\ dm^2$.

2) Il existe une « algèbre des grandeurs » qui conduit notamment à écrire ceci (par exemple) : $6\ cm^2 = 6\ (10^{-1}\ dm)^2 = 6\ (10^{-2}\ dm^2) = \ldots$ Cela correspond à la deuxième manière de faire relevée dans la question examinée. Bien qu'elle soit encore largement étrangère à la profession, sans doute, c'est cette manière de faire qui est poussée en avant par les nouveaux programmes du collège.

• Le texte intitulé *Mathématiques. Introduction générale pour le collège* précise ainsi les objectifs de l'étude des différents domaines que les programmes distinguent. À propos du domaine intitulé « Grandeurs et mesure », ces objectifs sont les suivants.

■ **grandeurs et mesure**

– se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aires, volumes, durées) ;

– connaître et utiliser les périmètres, aires et volumes des figures planes et des solides étudiés ;

– calculer avec les unités relatives aux grandeurs étudiées et avec les unités de quelques grandeurs quotients et grandeurs produits.

Ces programmes sont construits de manière à permettre une acquisition et un approfondissement progressifs des notions sur toute la durée du collège. Leur mise en œuvre est enrichie par l'emploi des instruments actuels de calcul, de dessin et de traitement (calculatrices, ordinateurs).

• Le calcul avec les unités doit être mis en œuvre dès la sixième, comme le montre ce commentaire du domaine d'études *Nombres et calculs* relatif au secteur d'études « Nombres entiers et décimaux ».

Les activités proposées doivent permettre une reprise de l'étude des nombres décimaux, sans refaire tout le travail réalisé à l'école élémentaire, l'objectif principal étant d'assurer une bonne compréhension de la valeur des chiffres en fonction du rang qu'ils occupent dans l'écriture à virgule.

Pour cela, diverses mises en relation sont utilisées. Par exemple, 23,042 est mis en relation avec […] l'expression de mesures, une unité étant choisie : 23,042 m, c'est 23 mètres plus 4 centièmes de mètre (4 cm) et 2 millièmes de mètre (2 mm) ou 23 mètres plus 42 millièmes de mètre (42 mm), ce qui permet d'écrire : 23,042 m = 23 m + 4 cm + 2 mm = 23 m + 42 mm.

• Le programme de 4^e^ actuel (de même que celui qui entrera en vigueur en septembre 2007) comporte ce commentaire :

Les situations où interviennent des vitesses moyennes constituent des exemples riches où le traitement mathématique s'avère particulièrement pertinent, comme l'étude de la vitesse moyenne d'un trajet sur un parcours de 60 km, où l'aller se parcourt à 20 km·h^{-1} et le retour à 30 km·h^{-1}.

Pour déterminer la vitesse moyenne, on utilise simplement la formule $v = \frac{d}{t}$. Ici, on a d = 60 km + 60 km = 120 km. Pour la durée t, en usant cette fois de la formule $t = \frac{d}{v}$, on a alors : $t = t_A + t_R = \frac{60\text{ km}}{20\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}} + \frac{60\text{ km}}{30\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}} = 3\text{ h} + 2\text{ h} = 5\text{ h}$, en sorte que $v = \frac{120\text{ km}}{5\text{ h}} = 24\text{ km/h} = 24\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. On aurait pu écrire d'un seul coup :

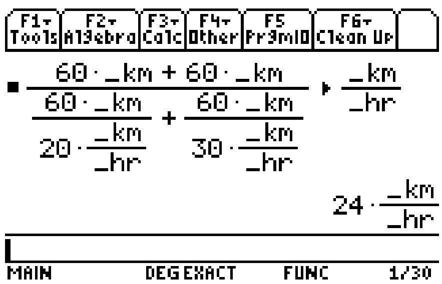
$$v = \frac{60\text{ km} + 60\text{ km}}{\frac{60\text{ km}}{20\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}} + \frac{60\text{ km}}{30\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}}}.$$

En ce cas, la conduite du calcul pourrait alors être celle-ci :

$$v = \frac{60\text{ km} + 60\text{ km}}{\frac{60\text{ km}}{20\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}} + \frac{60\text{ km}}{30\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}}} = \frac{1+1}{\frac{1}{20\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}} + \frac{1}{30\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}}} = \frac{2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}}\text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = \frac{12}{0{,}3+0{,}2}\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$$

$$= \frac{12}{0{,}5}\text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = 24\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}.$$

• On notera que certaines calculatrices permettent le calcul avec les unités, comme on le voit ci-dessous.



2. Forum des questions : exposés du jour

a) On écoute un exposé de *DV* sur la question suivante :

Exposé 22. Comment peut-on justifier, au collège, en respectant l'esprit des programmes, que l'on a $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$; $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$; etc. Comment situer la problématique correspondante par rapport à la problématique « moderne » de la « construction » du corps des rationnels ?

b) Remarques et commentaires

3. L’Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques

Lecture commentée de la notice *Questions & réponses* (section 5 & sous-section 6.1).

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 15 : mardi 17 janvier 2006

0. Le programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. Vers une nomenclature commentée des questions professionnelles // 2. Forum des questions : exposés du jour.

1. Vers une nomenclature commentée de questions professionnelles

1.1. Une première ébauche

Les questions évoquées ici se rapportent aux situations professionnelles que peut être appelé à vivre un professeur de mathématiques intervenant en collège ou en lycée, dans les différentes positions qu'il peut y occuper ès qualités. La nomenclature ébauchée ci-après fait apparaître les questions présentées au lieu où elles surgissent (et non pas au lieu où elles seront étudiées).

1. La formation et la profession

Cette section a trait aux questions (et aux outils de toute nature dont le besoin se fait sentir au moment de leur apporter réponse) qui concernent tout à la fois, et dialectiquement, la formation du professeur, ou plutôt la formation coopérative des professeurs, et l'évolution de la profession vers une plus grande qualification professionnelle. La mise en œuvre du schéma Observer / Analyser / Évaluer / Développer / Diffuser & défendre (O/A/E/D/DD), ubiquitaire dans ce qui suit, appelle des connaissances de tous ordres, notamment mathématiques, qui constituent idéalement la culture professionnelle en construction des professeurs de mathématiques.

1.1. Questionner

Il s'agit ici d'interroger les manières de questionner, individuellement ou collectivement, les situations vécues professionnellement par le professeur de mathématiques.

1. Pour une question d'organisation : quand a lieu la prochaine séance d'explicitation ? (DC, OS, 2^{de}, 14) R

2. Pourra-t-on aborder en séminaire la question de l'orientation des élèves à la fin de la seconde (même si c'est une partie de la FGC) ? (JG, OS, 2^{de}, 14) R

1.2. Observer

L'observation porte sur les réponses $R^{\lozenge}$ existant dans la culture ou dans les pratiques professionnelles, aujourd'hui et hier, aux questions professionnelles Q que l'on se pose. Les questions de cette rubrique ont trait aux manières d'observer, travaillées selon le schéma O/A/E/D/DD.

3. Le thème du calcul littéral est-il pertinent pour la constitution du corpus B ? Il me semble que la principale motivation de ce chapitre est la résolution d’équations du premier degré, mais celle-ci constitue le chapitre d’algèbre suivant et ne figurera pas dans le corpus B. (MD, MJ, 4^{e}, 14) R

4. Peut-il être intéressant de faire apparaître dans le corpus B, en plus du cours, DM, DS, exercices, etc., les brouillons que pourraient produire les élèves choisis ? (ED, MJ, 2^{de}, 14) R

5. Pour la deuxième visite, j’ai entendu dire de la part d’un ancien élève qu’il fallait remettre une fiche au visiteur, avant la séance, comportant la chronologie de la séance toutes les dix minutes, les types de tâches étudiés ainsi que les techniques et les technologies vers lesquelles ils doivent amener… Mais je n’en ai pas entendu parler explicitement à l’IUFM jusqu’à présent. Qu’en est-il ? (BR, JT, 4^{e}, 14) R

1.3. Analyser

On peut reprendre ici, mutatis mutandis, *les notations ci-dessus relatives à l’observation. L’analyse demandée est une analyse didactique des réponses $R^{\lozenge}$, qui se déploie idéalement dans les registres théorique, clinique et expérimental : elle requiert des manières de faire et des connaissances idoines.*

6. Même si les expressions ont déjà été rencontrées en séminaire, je ne comprends pas le sens exact de « système didactique auxiliaire » et « système didactique principal ». (RD, OS, 4^{e}, 14) R

7. Dans un triangle rectangle, les longueurs des côtés sont liées par une relation (celle du théorème de Pythagore). Ce résultat se situe à quel niveau de l’OM du théorème de Pythagore et sa réciproque ? (GF, MJ, 2^{de}, 14) R

8. J’ai du mal à définir les moments de l’étude auxquels se rattache la séance que nous avons à analyser. En effet, celle-ci commence par des exercices sur la proportionnalité et les pourcentages (niveau de classe : 1^{re} ES). Doit-on considérer ceci comme un moment de recherche car c’est la première fois que les élèves rencontrent ces notions cette année ou comme un moment de travail car ces notions ont déjà été rencontrées les années précédentes ? (NP, CR, 3^{e}, 14) R

1.4. Évaluer

L’objet à évaluer, ce sont les réponses $R^{\lozenge}$ observées et analysées. Leur évaluation dépend du projet de développement dans lequel on se place.

9. Dans la partie « Évaluation » du TER, doit-on reprendre tous les points abordés dans la partie « Analyse didactique » pour y indiquer la valeur qu’on leur attribue ? (CD, CR, 5^{e}, 14) R

1.5. Développer

Il s’agit de produire une réponse propre $R^{\heartsuit}$.

10. Comme base du mémoire, on a choisi une observation faite en classe de T^{le} S portant sur la résolution des équations différentielles $y' = ay$. Durant la séance, le professeur n’a pas travaillé sur la modélisation. Peut-on quand même choisir comme thème de développement la modélisation ? (EB, CR, 4^{e} + 6^{e} partagée, 14) R

11. Dans le TER, pour le développement, doit-on s’appuyer sur ce que le professeur observé a fait, ou peut-on proposer quelque chose de totalement différent (en restant dans le même thème, bien sûr) ? (FE, MJ, 5^{e}, 14) R

12. Que faut-il faire pour le développement ? Doit-on refaire l’AER tout entière ou bien ne reprendre que quelques points ? (EMTY, MJ, 2^{de}, 14) R

13. Dans le mémoire, sur quels critères doit-on choisir ce qui est appelé le « sujet de développement » ? Et de quoi s’agit-il exactement ? (CR, CR, 3^{e}, 14) R

14. Quel travail faut-il entreprendre pour trouver la motivation de certains savoirs étudiés ? (MEK, MJ, 5e, 14) R

15. J'ai beaucoup de mal à mettre en place des situations du monde suscitant, dans leur résolution, l'utilisation de la nouvelle notion à étudier sans que cela semble complètement artificiel (surtout en numérique). Exemple pour faire émerger la formule littérale $k(a + b) = ka + kb$:

> Monsieur X dispose d'un terrain de k mètres de large. Il veut construire une piscine de k mètres de large et un petit bassin de a mètres de long, le grand bassin étant de b mètres de long. Calculer de deux manières différentes l'aire du terrain nécessaire.

(MT, OS, 4e, 14) R

16. Pour le cours sur les valeurs absolues, j'ai préparé une AER. En la faisant avec mes élèves je me suis rendue compte qu'elle se rapprochait plus d'un PER.

> Mathias et Armel se déplacent l'un vers l'autre. Mathias est au point d'abscisse –4 et marche à une vitesse de 3 km/h. Armel est au départ au point d'abscisse 3 et marche à une vitesse de 2 km/h. Il y a du brouillard et ils ne peuvent se voir que si la distance qui les séparent est inférieure à 500 m. Au bout de combien de temps peuvent-ils se voir et pendant combien de temps ?

En AER, je leur ai fait modéliser le problème et résoudre deux inégalités distinctes. Des élèves ont proposé des méthodes graphiques qui donnaient des résultats approximatifs. Puis j'ai motivé le cours en leur disant que ça serait plus simple de résoudre une seule inégalité avec des valeurs absolues. Bref, j'aimerais savoir si mon AER n'est pas en fait un PER. (MK, OS, 2de, 14) R

1.6. Diffuser et défendre

Il s'agit de diffuser et – subséquemment – de défendre la réponse R♥ produite.

17. J'ai entendu parler d'une note donnée par le principal (ou le proviseur) à tous les professeurs de l'établissement. Comment est-elle établie ? A-t-elle des répercussions sur notre avenir professionnel ? (SPM, CR, 5e, 14) R

2. La société

Les questions rangées sous cette rubrique ont trait aux situations dans lesquelles, hors du système éducatif même, le professeur de mathématiques est interpellé en tant que tel au sein de la société.

3. L'École

3.1. Le système d'enseignement

18. Jusqu'à présent, je m'étais établi un schéma de hiérarchie administrative assez simpliste : le chef d'établissement est le supérieur hiérarchique gérant le côté administratif (papiers, retard, présence) ; l'inspection académique est le référent pédagogique (contenu du cours, gestion des séances). Suite à l'événement d'Étampes et aux propos tenus par les membres du rectorat concerné, je me demande si nous, professeurs, nous nous situons dans l'appareil éducatif et quels sont les rôles de chacun. (LLL, JT, 4e, 14)

19. Si les responsables de l'établissement dans lequel nous sommes amenés à travailler ne remplissent pas leur rôle lors d'événements graves (violences physiques, insultes, etc.), que pouvons-nous faire ? Vers qui nous retourner ? Rectorat, syndicats, Justice ? De tels comportements ne peuvent, à mon avis, qu'engendrer de nouveaux débordements et, peu à peu, ceux-ci étant « normalisés », ils seront donc plus difficiles à remettre en cause. (WB, JT, 4e, 14)

3.2. L'établissement

Les questions touchent ici aux situations dans lesquelles le professeur de mathématiques intervient, non dans sa mission de base au sein de la classe – pour instruire, éduquer, former les élèves – mais hors de la classe, en tant qu'agent de l'établissement, notamment pour observer, analyser, évaluer, développer les classes – et leurs élèves.

a) Conseil de classe

b) Orientation

20. Comment faire comprendre à un élève, dont le niveau est trop faible, que son souhait d'aller en 1re S ne pourra être satisfait, sans lui enlever, par ailleurs, sa motivation, son envie de travailler ? (MH, CR, 2de, 14)

21. Lors d'une réunion avec un IPR, il nous a conseillé d'éviter de mettre des notes inférieures à 6 pour éviter le découragement et la désertification des filières scientifiques. Est-ce honnête envers les élèves ? (DR, OS, 2de, 14)

4. La classe de mathématiques : aspects génériques

4.1. Le temps de l'étude

22. Faut-il s'acharner lorsqu'on constate que la moitié de la classe n'a pas compris certaines notions ? J'ai une classe de faible niveau et par ma volonté de bien faire j'ai pris du retard dans ma progression. Que me conseillez-vous ? (AS, JT, 5e, 14)

4.2. L'espace de l'étude

23. Quelles sorties pédagogiques peut-on envisager dans notre discipline ? (PL, OS, 2de, 14)

24. Une de mes élèves me demande de lui donner des cours particuliers en dehors de l'école. Ai-je le droit de lui en donner ? (GD, JT, 2de, 14)

4.3. Les collectifs d'étude

a) Le travail en équipe

25. Au sujet de la question de JNM, la mise en place de séances de « travail en groupe » par des stagiaires dans leur classe sert de « notation » (mathématique, « thèmes de visite », Nîmes), et les professeurs sont encouragés à organiser de telles séances dont le but est d'apprendre aux élèves à chercher en groupe, débattre, présenter les résultats obtenus… Ce n'est pas le cas dans l'académie d'Aix-Marseille. Pourquoi ? (AC, OS, 2de, 14)

26. Je compte remodeler mes groupes de module en un groupe qui ferait plutôt des mathématiques appliquées (MPI) et un groupe qui serait plus proche du cours. J'ai la crainte que cette organisation ne soit précoce. Qu'en pensez-vous ? (GB, OS, 2de, 14)

b) Gestion de la diversité

27. Une nouvelle élève est arrivée dans ma classe la semaine dernière. Elle m'a dit qu'elle venait d'un lycée de Marseille, que sa professeure de mathématiques a été absente pendant deux mois et donc qu'elle a étudié seulement le chapitre « Les nombres ». Elle envisage, de plus, de faire une 1re S. Comment me comporter avec elle pour qu'elle puisse suivre correctement ? (SP, MJ, 2de, 14)

c) Gestion des situations critiques

28. Comment réagir si un ou une élève, en plein milieu du cours, se lève et part en courant sans aucune raison apparente ? Un professeur de mon collège, à qui cela est arrivé, est allé récupérer l'élève dans le couloir pour la ramener en classe. Est-ce une attitude à adopter ? (RR, OS, 4^e, 14)

4.4. Les ressources de l'étude

On recense dans ce qui suit les questions relatives aux outils didactiques de différentes natures : langagiers, mathématiques, informatiques, etc. La disponibilité de ces ressources dans le travail de la classe peut demander au professeur et aux élèves un effort d'étude spécifique.

a) Outils langagiers et logiques

Les « outils langagiers » sont les outils relatifs à la langue orale et écrite, et donc les ressources lexicales, syntaxiques, etc., mais aussi orthographiques et orthotypographiques.

29. Comment gérer les difficultés des élèves en français ? (CM, MJ, 5^e, 14)

Attention ! Ici s'arrête la partie de la nomenclature examinée en séance ; ce qui suit est laissé à l'examen des participants.

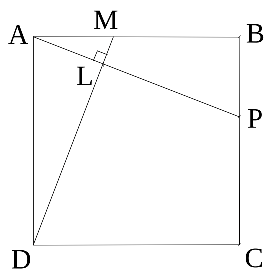
b) Outils mathématiques

Les mathématiques sont le premier outil d'étude de questions mathématiques : les questions recensées ici ont trait à ce rôle des mathématiques « mobilisables » dans l'étude de mathématiques.

30. Un « triangle plat » est-il un triangle ? (DV, CR, 2de, 14) R

31. Question d'un élève : « Monsieur, comment définir une droite ? » En vérité, je n'ai pas encore rencontré cet élève, mais je le redoute déjà. (WB, JT, 4^e, 14) R

32. Étant donné un carré ABCD et M un point du segment [AB], on considère le point P, intersection de la perpendiculaire à (DM) passant par A et de (BC) et le point L intersection de (DM) et (AP). Il s'agit de montrer à l'aide de triangles isométriques que MD = AP et que $\widehat{ADM} = \widehat{BAP}$.

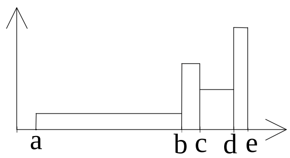


Peut-on montrer facilement que AM = BP ? (J'ai trouvé une solution à l'aide de la rotation r de centre O d'angle 90º dans le sens des aiguilles d'une montre, mais cela me semble bien compliqué pour une classe de seconde : r(A) = B, r(D) = A et donc r((DA)) = (AB) ; or r((DM)) = (AP) car (DM) ⊥ (AP) et r(D) = A ; donc r(M) = P et AM = BP. On a alors l'isométrie de AMD et BPA car AM = BP, AD = AB, $\widehat{DAM} = \widehat{ABP}$; d'où MD = AP et $\widehat{ADM} = \widehat{BAP}$.) (FL, CR, 2de, 14) R

33. En 2de, comment justifier l'utilisation des angles en radians, son utilité et ses avantages par rapport aux angles en degrés ? (CC, JT, 2de, 14) R

34. Dans la construction de mon cours en statistique, je vois qu'il est conseillé un « résumé numérique par une ou plusieurs mesures de tendance centrale », dont la classe modale. Et là, surprise ! Dans mon

manuel (Transmath 2de), je vois une définition de la classe modale alors que dans le Déclic 1re ES, la définition est différente. Par exemple, soit le diagramme suivant.



Dans le Transmath 2de, la classe modale est [*a*, *b*], la classe de plus grande aire. Dans le Déclic 1re ES, la classe modale est [*d*, *e*], la classe la plus haute. Qu'en est-il ? Je ne souhaite pas introduire une notion erronée ! (GB, OS, 2de, 14) R

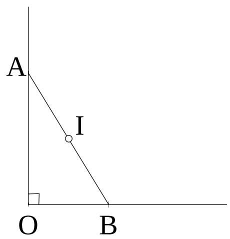
c) Outils informatiques

35. Comment fait-on pour numéroter les lignes d'un document Word ? (NA, JT, 4e, 14) R

36. Dans le cadre d'une AER sur triangle rectangle et cercle, mon PCP m'a proposé de faire une activité sous Géoplan :

Échelle posée contre un mur :

L'échelle [AB] a pour centre I.
On se propose d'étudier la trajectoire de I lorsque l'échelle glisse contre le mur



Le problème est que, lorsqu'on déplace le point A ou le point B, l'échelle s'allonge. Je n'arrive pas à imposer au logiciel le fait que la longueur de l'échelle soit fixe. (Une solution se trouve sur le site de l'IREM de Marseille, rubrique ordinateur portable classe de 4e ; mais elle me semble assez complexe à mettre en œuvre par les élèves.) (MB, CR, 4e + 4e partagée, 14) R

37. Certains de mes élèves n'ont jamais travaillé sur ordinateur (d'après eux). Je ne sais pas comment attaquer le problème : les prendre en aide pour les familiariser avec le tableur ou un logiciel de géométrie, avec des exercices simples ? Ou alors faire une séance normale en les plaçant avec des élèves qui ont le B2i ? (DC, OS, 2de, 14)

38. Quel logiciel simple d'utilisation peut-on acquérir pour tracer les courbes représentatives des fonctions ? (GC, MJ, 2de, 14)

39. J'aimerais organiser une séance informatique portant sur « l'enroulement de la droite réelle » sur le cercle trigonométrique. Cependant, je n'ai que 9 postes à ma disposition dans une salle *très* petite et une classe de 35 élèves. Dois-je quand même essayer de faire cette séance ou vaut-il mieux utiliser un ordinateur portable muni d'un rétroprojecteur ? (AC, OS, 2de, 14)

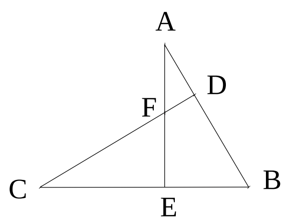
40. À propos du chapitre « Généralités sur les fonctions », peut-on donner lors d'un DS *un* exercice (court) portant uniquement sur l'utilisation de la calculatrice, alors que certains ne l'ont toujours pas acheté, malgré mes nombreux rappels. Les parents d'une de mes élèves ne seraient pas d'accord pour en acheter une. J'imagine que c'est une question financière. (AI (JT, 2de), 14)

41. Je vais obtenir (enfin ?) l'ordinateur portable d'Ordina 13. Mon ATI m'a dit que le conseil général y est fortement opposé puisque je suis stagiaire, même s'il m'en confie un. Pourquoi ? Bien que je n'aie qu'une classe, cela n'empêche pas d'avoir des projets informatiques et d'avoir des difficultés à les mettre en place… (MT, OS, 4e, 14)

4.5. L'évaluation de l'étude

42. Après un DS, une dizaine d'élèves m'ont dit qu'ils n'avaient pas réussi et m'ont demandé s'il était possible de le refaire. Je suis partagée entre le fait qu'ils n'ont certainement pas assez travaillé (le DS comportait des applications directes du cours déjà travaillées en classe) et qu'il est important qu'ils assument les conséquences de leur travail et le fait de leur permettre de retravailler ce DS et ainsi d'améliorer leur apprentissage. Que me conseillez-vous ? (NFG, MJ, 2de, 14)

43. Lors du dernier contrôle sur les droites remarquables j'avais demandé une petite démonstration qui avait été vue en DM.



1) Que représente F pour le triangle ABC ?

2) En déduire que (BF) est perpendiculaire à (AC) ?

Le problème est que j'ai du mal au niveau de la correction. Faut-il noter en ajoutant les points pour les mots ou idées clés ou en supprimant des points pour une idée confuse ou manquante, une rédaction approximative ? Faut-il dès le départ faire un barème très détaillé ou un barème plus flexible ? (CM, OS, 4^{e}, 14)

44. Comment exploiter un DS d'une heure rendu un mois plus tard (à cause de l'administration) ? Comment exploiter un DS commun rendu (programme du DS : ce qui a été fait depuis le début de l'année) ? (DP, OS, 5^{e}, 14)

45. À la fin du mois, mes élèves ont un devoir commun. Doit-on ou peut-on faire des révisions ? (MG, MJ, 2de, 14)

5. La classe de mathématiques : aspects spécifiques

Les questions rangées sous cette section touchent aux aspects de l'enseignement des mathématiques plus spécifiques du contenu à enseigner : elles concernent les domaines, les secteurs, les thèmes, les sujets à étudier.

5.1. Géométries

46. En classe de 5^{e}, peut-on introduire l'inégalité triangulaire pour savoir si un triangle dont on connaît les dimensions existe avant d'étudier la construction d'un tel triangle ? (AG, JT, 5^{e}, 14)

47. Est-il plus judicieux de placer un exercice sur la droite des tiers (puis, éventuellement, des quarts) en fin de chapitre sur le théorème des milieux, comme exercices d'approfondissement, ou plutôt en début de chapitre sur le théorème de Thalès, en activité à la fois de réinvestissement du théorème des milieux et de mise en route vers une conjecture (précédant, par exemple, une activité sur logiciel pour conjecturer le théorème de Thalès) ? (FEB, CR, 4^{e}, 14)

48. Sur les vecteurs en seconde, le document d'accompagnement du programme dit : « … on a voulu assurer à l'ensemble des élèves, quelle que soit leur orientation ultérieure, la maîtrise indispensable en ce domaine qu'exigent aussi bien l'interprétation de plans et de cartes que l'utilisation de tableurs ou la compréhension des représentations graphiques. » Je ne vois pas le rapport entre les vecteurs et le tableur. (DC, OS, 2de, 14)

5.2. Nombres, calculs, fonctions

49. Dans le programme de 4^{e}, on trouve les termes « quotient », « écriture fractionnaire » mais rarement le terme « fraction ». Y a-t-il une raison à cela ? (DB, JT, 4^{e}, 14)

50. Concernant les puissances, le programme dit ceci :

Compétences exigibles. Utiliser sur des exemples numériques, pour des exposants très simples des égalités telles que $a^2 \times a^3 = a^5$; $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$; $(ab)^2 = a^2b^2$, où a et b sont des nombres relatifs non nuls.

Commentaires. Cette rubrique ne doit pas donner lieu à des calculs artificiels sur les puissances entières d'un nombre relatif.

On ne peut donc pas donner d'exercices de la forme suivante :

Écrire le résultat sous forme d'une seule puissance : $\frac{4^2}{4^{-2}}$; $5^2 \times 5^3$; $4^2 \times 3^2$.

Quels exercices peut-on alors donner aux élèves pour qu'ils puissent utiliser ces formules ? (SP, CR, 4e, 14)

51. Lorsque l'on explicite une méthode pour résoudre les systèmes linéaires à deux inconnues par combinaison, certains ouvrages font la chose suivante : après avoir, par combinaison, éliminé l'une des deux inconnues (on est dans le cas où le système admet une unique solution), on a alors une des deux valeurs cherchées. Au lieu de remplacer cette valeur dans l'équation comportant deux inconnues, certains repartent du système original et recherchent une deuxième combinaison pour expliciter la valeur de la deuxième inconnue. Pourquoi expliciter une telle méthode puisque, en pratique, on remplace, c'est-à-dire que l'on effectue une substitution / combinaison ? (DV, JT, 2de, 14)

52. Il a été dit en GFP que, en ce qui concerne la résolution d'équations et inéquations avec les valeurs absolues, cela doit se faire graphiquement à l'aide de la droite graduée, au regard du fait que la valeur absolue doit être vue comme une distance. Néanmoins certains élèves m'ont demandé s'ils pouvaient faire la résolution algébrique (cas positif, cas négatif, résolution classique). Je leur ai répondu par la négative en argumentant que c'est hors programme. Ma PCP m'a dit par ailleurs que ce serait bien qu'ils la voient quand même (« pour les bons élèves »). Je pense leur montrer juste une fois avec les valeurs approchées en module, ceci étant à rapprocher des limites de suites, ce à quoi se prête mieux une résolution algébrique (je pense…). Est-ce une bonne initiative ? (CG, OS, 2de, 14)

5.3. Statistique

53. En 3e, on doit étudier l'étendue d'une série statistique. En préparant ce sujet, j'ai trouvé l'expression « on a élagué la série », qui consiste à supprimer un caractère négligeable devant les autres. Doit-on en parler, sachant que le verbe « élaguer » n'apparaît pas dans le programme ? (GB, MJ, 3e, 14)

54. Dans les séries statistiques, doit-on parler de la technique qui consiste à déterminer l'étendue d'une série rangée en classes ? (CO, MJ, 2de, 14)

5.4. Grandeurs et mesures.

5.5. Thèmes transversaux

a) Citoyenneté

b) …

Ici s'interrompt la partie de ce résumé non examinée en séance.

1.2. Éléments de réponse

On trouvera ci-après, pour *certaines* des questions illustrant l'esquisse de nomenclature ci-dessus, quelques éléments de réponse

1. La prochaine séance aura lieu – sauf imprévu ! – le 31 janvier. Q

2. Cela n'est pas impossible. Q

3. Le thème d'études du calcul littéral est commenté en ces termes par le programme de la classe de 4e :

> Le travail proposé s'articule sur deux axes :
> – utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques
> – utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes divers.

Le corpus B évoqué comporterait donc le premier axe, non le deuxième. Ce choix peut délimiter une matière mathématique suffisamment riche pour permettre le type d'observation à réaliser (par le professeur stagiaire pour sa formation, par le visiteur pour l'évaluation à laquelle il doit procéder), à condition bien sûr que l'on ait donné à cet axe thématique une place adéquate. Sur cette question, un exposé sera proposé. Q

4. Le document de présentation de la formation et de sa validation indique que le corpus B doit comprendre « *l'ensemble des documents écrits* (activités, synthèses, exercices, etc.) témoignant de l'activité de la classe (observée à travers deux élèves adéquatement choisis par le professeur stagiaire) sur le thème d'études principal travaillé lors de la visite, et cela au long d'une séquence comportant de cinq à sept séances réparties autour de la séance observée *in situ* (par exemple 2 ou 3 séances avant et 2 ou 3 séances après la visite, ou, si l'étude du thème a été inaugurée lors de la visite, 4 séances après la visite, etc. », à quoi s'ajoutent, « lorsqu'ils ne sont pas inclus dans l'ensemble précédent, les *devoirs en classe* ou *à la maison* rédigés par les deux élèves choisis et relatifs en tout ou partie au thème d'études retenu, ainsi éventuellement que les corrigés correspondants ». Une formule plus ancienne et plus resserrée précisait que le corpus B doit contenir toutes les traces écrites qui restent « entre les mains de l'élève » une fois l'étude terminée. Les brouillons, en principe éphémères, sont donc exclus du corpus B, à moins que les traces écrites des AER n'aient été artificiellement « nettoyées » de ce qui concrétise essais et hésitations dans l'avancement de l'étude. Q

5. S'il ne s'agit pas d'une erreur de mémoire de l'ancien élève évoqué ou d'une erreur d'interprétation de l'auteur de la question, une telle exigence, inconnue des formateurs et quelque peu dissonante par rapport à la formation donnée, n'a pu être le fait que d'un visiteur agissant *motu proprio*. Des consignes seront données pour que, si elle a jamais existé, une telle pratique cesse. Q

6. La question est reprise et développée dans la notice *L'espace de l'étude*, à laquelle on se reportera en attendant une lecture collective commentée. Q

7. *A priori* la propriété de Pythagore θ_0 se situe dans la *technologie* de l'OM en question, qui s'écrira donc $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ avec $\theta = \{ \theta_0 \} \cup \{ \theta_j \}_{j\in J}$, où les θ_j sont des énoncés technologiques *auxiliaires*, parmi lesquels figure la réciproque de la propriété de Pythagore (voir la séance 14 du Séminaire). Il est important – mais délicat – de bien distinguer, ici, technologie et technique. Par définition de l'OM étudiée, la propriété technologique de Pythagore permet de créer – en association avec des résultats auxiliaires – des techniques τ_i relatives à des types de tâches T_i et notamment au type de tâches T_0 suivant : connaissant la longueur des côtés de l'angle droit, calculer la longueur de l'hypoténuse. Mais l'OM construite pourra contenir aussi le type de tâches T_j suivant : connaissant les dimensions d'un parallélépipède rectangle, calculer la longueur de ses diagonales. En ce cas, la technologie se différencie plus clairement de la technique qu'on en fait naître. Q

8. Ce qu'on appelle les *moments de l'étude* a été mentionné dans l'exposé 13 dû à SPM. Pour un complément d'information, on reproduit ci-après un extrait des notes du Séminaire 2004-2005 : on y désigne par ∂O l'organisation de l'étude relative à une organisation mathématique O.

> ❷ En dépit de sa complexité, on peut aborder la description et l'analyse d'une OD ∂O donnée, où $O = [T_i / \tau_i / \theta / \Theta]_{i\in I}$, en examinant la manière dont elle prend en charge certaines ***fonctions didactiques clés*** appelées ***moments de l'étude*** (ou moments ***didactiques***). Le mot de « moment » par lequel on désigne ces fonctions se justifie par le fait que, quelle que soit la manière d'opérer du professeur, ***il arrive forcément***

un moment où… – où, par exemple, la classe, sous la direction du professeur, ***rencontre*** pour la première fois le type de tâches T_i.

❸ De manière précise, étant donné une organisation mathématique ***ponctuelle*** $O_i = [T_i / \tau_i / \theta_i / \Theta_i] \subset O$, où θ_i et Θ_i sont les parties de θ et Θ permettant de justifier le bloc $[T_i / \tau_i]$, on distingue 6 moments :

➔ le moment ***de la première rencontre*** avec T_i ;

➔ le moment ***exploratoire***, qui voit ***l'exploration*** du type de tâches T_i et ***l'émergence de la technique*** τ_i ;

➔ le moment ***technologico-théorique***, qui voit ***la création du bloc*** $[\theta_i / \Theta_i]$;

➔ le moment ***du travail*** de l'organisation mathématique créée, et en particulier ***du travail de la technique***, où ***l'on fait travailler*** les éléments de l'OMP élaborée pour s'assurer qu'ils « résistent » (et, le cas échéant, pour les améliorer), et où, en même temps, on ***travaille sa maîtrise*** de l'OMP considérée, et en particulier de la technique τ_i ;

➔ le moment ***de l'institutionnalisation***, où l'on ***met en forme*** l'organisation mathématique construite $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$, en précisant chacun de ses composants, et en l'amalgamant à l'organisation mathématique déjà institutionnalisée – que l'on peut noter, pour plus de clarté, $\oplus_{j<i}[T_j / \tau_j / \theta_j / \Theta_j]_{j\in I, j<i} = [T_j / \tau_j / \oplus_{j<i}\theta_j / \oplus_{j<i}\Theta_j]_{j<i}$;

➔ le moment ***de l'évaluation***, où l'on évalue sa ***maîtrise*** de l'organisation mathématique créée, mais aussi où l'on évalue ***cette organisation mathématique elle-même***.

Cette explicitation ne résout pas le problème soulevé. Pour cela, l'extrait ci-après des notes du Séminaire de l'année 2001-2002 sera utile.

Le ***premier moment*** de l'étude est celui ***de la première rencontre*** avec le type de tâches T_i, par exemple à propos d'une tâche ✓ qui « recèle » une tâche $t \in T_i$. Cette « première rencontre » avec T_i peut elle-même avoir lieu ***en plusieurs fois***, en fonction des environnements mathématiques et didactiques dans lesquels elle se produit : on peut ***redécouvrir*** un type de tâches comme on redécouvre une personne que l'on croyait connaître.

Il convient, bien entendu, d'être prudent : toute nouvelle rencontre avec un type de tâches T ne relève pas pour autant du moment de la *première* rencontre avec T ! Encore faut-il que les conditions de cette rencontre, et surtout son issue – l'OMP qui se (re)bâtit autour de T – soient suffisamment différentes de ce qui était connu jusque-là, faute de quoi il s'agirait de la simple reprise de l'étude d'une certaine OMP plus ou moins bien connue, reprise amorcée par un moment de travail de cette OMP, et notamment de travail de la technique τ antérieurement construite. À cet égard, le professeur peut avoir cru viser une nouvelle *première* rencontre et ne parvenir en réalité qu'à une reprise du travail de l'organisation mathématique connue. À titre d'illustration, considérons le type de tâches suivant :

T. Connaissant le prix P de n exemplaires d'un certain objet, calculer le prix de m exemplaires de cet objet (où $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{D}\{ € \}$).

Supposons que la technique τ qui émerge d'une nouvelle rencontre avec T est la suivante :

τ. Le prix de n exemplaires étant P, on obtient le prix P' de m exemplaires, c'est-à-dire de $\frac{m}{n}$ fois plus d'exemplaires, en prenant P' $\frac{m}{n}$ fois plus grand que P, c'est-à-dire $\frac{m}{n} \times P$.

Si 7 cahiers d'un certain modèle ont coûté 8,89 €, ainsi, 11 cahiers du même modèle coûteront

$$\frac{11}{7} \times 8{,}89 \text{ €} = \frac{11 \times 8{,}89}{7} \text{ €} = \frac{97{,}79}{7} \text{ €} = 13{,}97 \text{ €}.$$

Il est hautement vraisemblable que, pour des élèves d'aujourd'hui (mais non de demain, en principe), il s'agirait là, de la 6^e^ à la 2^de^, d'une nouvelle première rencontre avec T. La réponse à la question examinée doit donc se fonder sur une enquête particulière au(x) type(s) de tâches (ré)étudiés lors de la séance observé et sur les techniques vraisemblablement connues des élèves avant cette séance. Q

9. Le document de présentation de la formation et de sa validation indique :

> La ***seconde partie*** du mémoire, d'une vingtaine de pages au plus, présente d'abord une courte ***évaluation*** de la séance ainsi observée et analysée, suivie d'un travail de ***développement*** relatif à ***l'une*** des insuffisances ou à ***l'un*** des problèmes mis en évidence par l'analyse et l'évaluation de la séance observée.

Le travail d'évaluation demandé ne saurait donc s'attacher à une évaluation détaillée des organisations mathématiques et didactiques observées et (plus ou moins profondément) analysées : il doit s'attacher à justifier rapidement la valeur des « composants » que l'on décide de conserver et à mettre en évidence de façon argumentée *le* point que l'on se propose d'amender. Q

10. La réponse est relativement simple : le choix évoqué est légitime si l'on a mis en évidence de façon convaincante – à travers l'*analyse* et l'*évaluation* de la séance observée – que l'absence de situation de modélisation (ou de référence à l'activité de modélisation : on peut supposer qu'il s'agit d'une situation du monde dans lequel figure un système dont l'état serait modélisé par une équation du type $y' = ay$) en constitue un important point faible. Q

11. « Proposer quelque chose de totalement différent », même « en restant dans le même thème », est exclu. Il se peut toutefois que le travail de développement portant sur un point bien déterminé conduise en quelque sorte par contiguïté à modifier d'autres aspects de la séance observée ; mais la chose doit être justifiée de façon minutieuse. Q

12. Voir les réponses aux questions précédentes. On notera que le « point faible » objet du travail de développement ne concerne pas nécessairement une AER : il peut toucher par exemple à la synthèse réalisée ou non, au travail de l'organisation mathématique supposée mise en place, aux travaux personnels notés, etc. Dans tous les cas, si elles ont un caractère un tant soit peu génériques, les modifications envisagées doivent être spécifiées à propos des contenus mathématiques de la séance. Q

13. Voir ce qui précède. Q

14. D'une façon générale, le problème posé est typiquement un *problème de la profession*, qui doit être pris en charge collectivement – dans ce Séminaire, comme partout ailleurs dans l'espace professionnel.

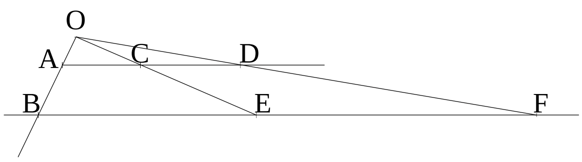
a) Étant donné une entité mathématique (de quelque nature qu'elle soit : type de tâches, technique, composant technologique, principe théorique), l'interrogation évoquée doit d'abord être clarifiée : les raisons de sa création *historique* ne s'identifient pas forcément à ses raisons d'être *actuelles*, et, parmi ces dernières, les motifs de mobiliser cette entité – c'est-à-dire de la « recréer » – pourront différer selon l'institution à laquelle on se réfère – selon par exemple que la question est posée au collège ou à l'université, etc. Cela souligné, le travail à entreprendre appelle le concours de chacun des membres de la profession. Ce travail suppose que l'on se situe dans une culture mathématique qui excède *a priori* largement le monde déjà vaste et divers des « mathématiques à enseigner ».

b) Le démarrage de l'enquête doit s'appuyer sur un réexamen personnel de son expérience vécue des mathématiques, par un effort d'*anamnèse* mathématique, c'est-à-dire de levée de l'amnésie sur les motifs effectivement rencontrés d'employer telle ou telle entité – en mathématiques ou en d'autres disciplines. Notons en passant que cette amnésie a partie liée avec la pratique scolaire-universitaire de proposer à l'élève-étudiant des travaux mathématiques consistant à combler les lacunes d'une étude mathématique toute faire (aux lacunes près !), sans avoir à connaître l'*objet*, ni à plus forte raison l'*organisation* – la logique et la dynamique – de cette étude, toutes choses qui restent dans le *topos* du proposant (professeur, auteur de manuel, auteur de l'épreuve d'examen, etc.) ; inversement, le travail de recherche par *questions cruciales* (dont le professeur doit s'efforcer d'impulser la pratique dans la classe) constitue une ascèse efficace susceptible d'aider à lever l'amnésie qui frappe les raisons d'être des entités mathématiques à enseigner. Ce travail d'anamnèse trouve une aide dans l'étude des programmes et doit porter aussi sur les manuels et autres ouvrages traitant des contenus mathématiques à enseigner. L'enquête gagne en outre à s'appuyer sur l'examen de textes mathématiques – tels des manuels anciens – qui aient moins subi que les manuels d'aujourd'hui le refoulement des raisons d'être, parce qu'ils déploient explicitement une logique davantage fonctionnelle et s'éloignent donc, en cela, de la tentation de l'exhibition mathématique formelle.

c) L'obstacle fondamental à vaincre est celui de la *naturalisation* des entités mathématiques, c'est-à-dire de l'illusion de naturalité, qui pousse à penser que si, par exemple, existent en mathématiques les notions de droite, de demi-droite, de segment, ou d'angle aigu, d'angle obtus, d'angle saillant, d'angle rentrant, c'est tout simplement *parce qu'il y aurait* – en quelque sorte *dans la « nature »* – des droites, des demi-droites, des segments, des angles aigus, des angles obtus, des angles saillants, des angles rentrants, etc. C'est oublier que ces entités sont des constructions humaines, et sont donc le fruit d'une intention, où ils trouvent leur motivation. Il y avait autrefois la notion d'angle *corniculaire*. Pourquoi ? Et pourquoi cette notion n'a-t-elle pas été conservée dans la culture mathématique scolaire ? Plus simplement, tout cruciverbiste connaît la notion de triangle *scalène*, que, à côté des dictionnaires généraux de la langue française, certains textes mathématiques mentionnent encore : ainsi lit-on dans l'« encyclopédie libre » Wikipédia (http://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle) qu'un triangle scalène est un triangle « ne présentant pas de symétrie particulière », tandis que le site Mathworld, qui se présente comme *« the web's most complete mathematical resource »* indique que *« a scalene triangle is a triangle that has three unequal sides »* (http://mathworld.wolfram.com/ScaleneTriangle.html). Mais pourquoi cette notion n'est-elle pas aujourd'hui présente dans la culture mathématique scolaire ? Et pourquoi parle-t-on moins qu'on ne le faisait autrefois, dans les manuels, de triangle *acutangle*, *obtusangle*, alors qu'on parle toujours de triangles *rectangles* ? Il s'agit là de types de questions qu'il convient de constamment ruminer… Q

15. Il faut souligner d'abord – ainsi que la chose a été remarquée lors de la séance 14 – que l'identité $k(a + b) = ka + kb$ a été mise en place en 5^{e} : on n'a donc pas, en principe, à la faire « émerger » en 4^{e}.

a) Cela rappelé, le problème mathématique proposé est en effet… problématique (au plan didactique), et cela pour deux ou trois raisons au moins. Première raison : la question posée n'est pas *motivée* – pourquoi calculerait-on l'aire du terrain « de deux manières différentes » et quelles différences éventuelles dans les modes de calcul sont-elles acceptables ? Deuxième raison : ce problème ne fait pas « émerger » la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, au sens où, pour résoudre le problème, on serait conduit presque sûrement à utiliser cette propriété. En réalité, il montre seulement que l'on peut *déduire* la propriété de distributivité des rudiments de la *théorie des aires du plan* ; mais il ne dit rien sur les raisons qui rendrait cette propriété *utile*, intéressante, voire précieuse. Notons en outre que la démonstration ainsi obtenue ne vaut que pour des nombres a, b, k (strictement) *positifs*. À cet égard, on peut la comparer à celle qu'évoque la figure ci-après, sur laquelle on verra que la propriété de distributivité se déduit aussi bien du théorème de Thalès : si OA = 1 et k = OB, et si AC = a et CD = b, alors BE = ka, EF = kb et BF = $k(a + b)$, en sorte que, puisque BF = BE + EF, on a $k(a + b) = ka + kb$.



b) L'identité $k(a + b) = ka + kb$ est si fondamentale que les mathématiciens l'ont retenue comme l'un des quelques axiomes de la structure d'*anneau*, qui exprime la quintessence (à l'intégrité près) de la notion de systèmes de nombres. (D'après le site de Jeff Miller – voir http://members.aol.com/jeff570/c.html –, la première définition axiomatique de la notion d'anneau a été proposée par Abraham Fraenkel (1891-1965) dans un article paru dans le *Journal* de Crelle en 1914.) L'adjectif « distributif » dans son emploi moderne apparaît pour la première fois semble-t-il (d'après la même source) dans un mémoire publié dans les *Annales* de Gergonne en 1814 par le mathématicien français François Joseph Servois (1768-1847), qui écrit notamment (p. 98-99) :

Soit

$$f(x + y + ...) = fx + fy + ...$$

Les fonctions qui, comme f, sont telles que la fonction de la *somme* (algébrique) d'un nombre quelconque de quantités est égale à la somme des fonctions pareilles de chacune de ces quantités, seront appelées *distributives*.

Ainsi, parce que

$$a(x + y + ...) = ax + ay + ... \,;\; E(x + y + ...) = Ex + Ey + ... \,;\; ...$$

le facteur a, l'état varié E, ... sont des fonctions distributives ; mais, comme on n'a pas

$$\text{Sin.}(x + y + ...) = \text{Sin.}x + \text{Sin.}y + ... \,;\; L(x + y + ...) = Lx + Ly + ... \,;\; ...$$

les sinus, les logarithmes naturels, ... ne sont point des fonctions distributives.

(Signalons que Servois introduisait de même, à la suite, l'adjectif « commutatif » : voir le document cité.) Faire redécouvrir aux élèves qu'une propriété de calcul essentielle est la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, c'est-à-dire parvenir à leur faire « extraire » du magma mal analysé des propriétés familières de calcul cette propriété-là comme *cruciale*, ne va certes pas de soi !

c) On donne ici, néanmoins, l'argument d'une AER possible.

1) On part du problème suivant : comment calculer rapidement « *de tête* » le produit de deux nombres entiers compris entre 10 et 20, par exemple 17×14, 12×18, 13×19 ?

2) Une réponse est apportée *toute faite* – c'est-à-dire est empruntée à la culture – sous la forme de la *règle* suivante, que l'on illustre ici par le cas de 17×14 : on additionne les deux nombres à multiplier et on soustrait 10 à la somme trouvée (21) ; puis on multiplie le nombre obtenu par 10 (210) ; on calcule alors le produit des nombres donnés diminués l'un et l'autre de 10 (28), et on ajoute ce terme au résultat déjà trouvé (238). Pour 12×18, on obtient successivement 20, 200, 16, 216. Pour 13×19, on obtient de même 22, 220, 27, 247.

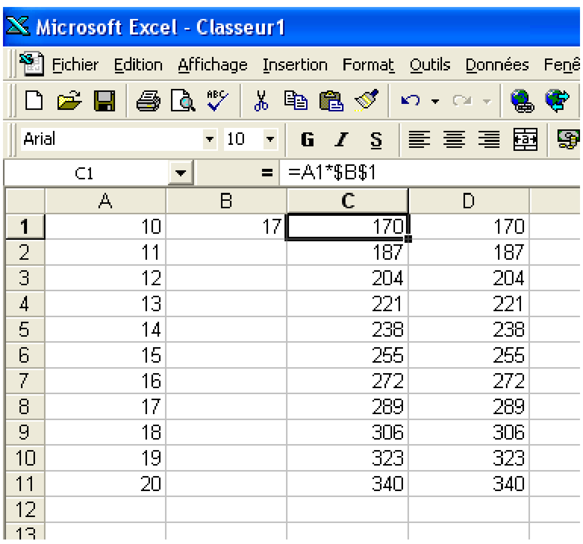
3) On *exprime algébriquement* le *programme de calcul* donnée par la règle ci-dessus : celle-ci conduit à calculer successivement

$$x + y - 10,\ 10(x + y - 10),\ (x - 10)(y - 10),\ 10(x + y - 10) + (x - 10)(y - 10).$$

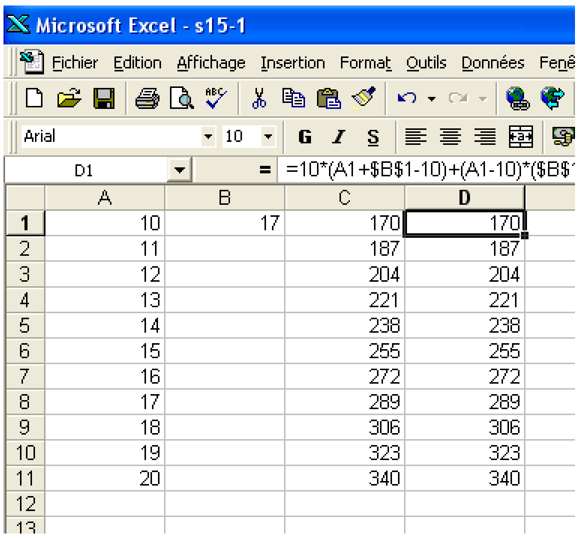
4) On étudie expérimentalement la conjecture qui découle de ce qui précède, à savoir que l'on aurait :

$$10(x + y - 10) + (x - 10)(y - 10) \equiv xy.$$

En 5^e, ce travail peut être fait, pour le membre de gauche de tête, pour le membre de droite à l'aide de la calculatrice. Le tableur, connu des élèves en technologie (et dont le programme de mathématiques qui entrera en vigueur en 5^e à la rentrée prochaine pousse en avant l'usage) peut être mis en œuvre avec profit, manipulé par le professeur en interaction avec le travail des élèves visant à créer les colonnes A, B, C, D visibles ci-dessous (d'autres organisations de calcul sont évidemment envisageables).



	A	B	C	D
1	10	17	170	170
2	11		187	187
3	12		204	204
4	13		221	221
5	14		238	238
6	15		255	255
7	16		272	272
8	17		289	289
9	18		306	306
10	19		323	323
11	20		340	340
12				
13				



	A	B	C	D
1	10	17	170	170
2	11		187	187
3	12		204	204
4	13		221	221
5	14		238	238
6	15		255	255
7	16		272	272
8	17		289	289
9	18		306	306
10	19		323	323
11	20		340	340
12				
13				

5) L'étude numérique ainsi amorcée peut être étendue à des nombres quelconques (ci-après). On conjecture alors que l'égalité proposée est *vraie* quels que soient les nombres x et y (bien que son *intérêt* ne soit évident que dans le cas pour lequel on l'a introduite : x et y entiers entre 10 et 20).

	A	B	C	D
1	54,1	23,5	1271,35	1271,35
2	54,2		1273,7	1273,7
3	54,3		1276,05	1276,05
4	54,4		1278,4	1278,4
5	54,5		1280,75	1280,75
6	54,6		1283,1	1283,1
7	54,7		1285,45	1285,45
8	54,8		1287,8	1287,8
9	54,9		1290,15	1290,15
10	55		1292,5	1292,5
11	55,1		1294,85	1294,85
12	55,2		1297,2	1297,2

6) Comment expliquer cela ? Comment déduire de la théorie du calcul disponible le fait que les programmes de calcul dont l'expression algébrique est respectivement $10(x + y - 10) + (x - 10)(y - 10)$ et xy sont *équivalents*, c'est-à-dire retournent l'un et l'autre la même valeur pour tout couple de valeurs (x, y) donné ? La recherche, ici, peut aboutir à des propositions spontanées de calcul, que l'on vérifiera chaque fois par expérimentation numérique (de tête, à la main, à la calculatrice, au tableur, selon les cas). En cas d'improductivité, on pourra se livrer à une exploration numérique, en commençant par l'expression $10(x + y - 10)$, ce qui donne ceci par exemple.

D1 = =10*A1+10*B1-10

	A	B	C	D
1	10	14	140	230
2	11		150	240
3	12		160	250
4	13		170	260
5	14		180	270
6	15		190	280
7	16		200	290
8	17		210	300
9	18		220	310
10	19		230	320
11	20		240	330
12				
13				

D1 = =10*A1+10*B1-100

	A	B	C	D
1	10	14	140	140
2	11		150	150
3	12		160	160
4	13		170	170
5	14		180	180
6	15		190	190
7	16		200	200
8	17		210	210
9	18		220	220
10	19		230	230
11	20		240	240
12				
13				

7) On pourra identifier de même qu'on a certainement :

$$(x - 10)(y - 10) \equiv xy - 10x - 10y + 100.$$

L'idée est alors de dégager un ou des schémas de calcul *de base* qui permettraient d'aller d'un programme à l'autre. Si le schéma $k(a \pm b) \equiv ka \pm kb$ apparaît, on pourra ainsi établir que

$$10(x + y - 10) \equiv 10x + 10(y - 10),\ 10x + 10(y - 10) \equiv 10x + 10y - 100$$

et que, de même,

$$(x - 10)(y - 10) \equiv (x - 10)y - (x - 10) \times 10,\ (x - 10)y - (x - 10) \times 10 \equiv xy - 10y - (10x - 100),$$
$$xy - 10y - (10x - 100) \equiv xy - 10y - 10x + 100,$$

en sorte que, finalement,

$$10x + 10(y - 10) + (x - 10)(y - 10) \equiv 10x + 10y - 100 + xy - 10y - 10x + 100,$$
$$10x + 10y - 100 + xy - 10y - 10x + 100 \equiv xy.$$

Ainsi peut-on déduire l'identité de départ des identités $k(a \pm b) \equiv ka \pm kb$ (et de quelques autres « axiomes » qu'on ne cherchera pas à expliciter tant qu'ils sont mobilisés adéquatement et correctement, comme il en va pour la commutation et l'association de termes dans une somme, par exemple).

d) L’AER esquissée dans ce qui précède peut être jugée trop brutale pour l’état de développement mathématique de telle classe de 5[e]. On pourra alors reprendre le scénario ébauché jusqu’ici en partant par exemple de la question suivante : comment calculer rapidement *« de tête »* le produit d’un nombre entier compris entre 10 et 20 par un nombre entier inférieur à 10, par exemple 17×4, 12×8, 13×9 ? Une fois le schéma de calcul $k(a \pm b) \equiv ka \pm kb$ mis en évidence, on pourra se mesurer à la situation d’où l’on a fait surgir, ci-dessus, l’identité $10(x + y - 10) + (x - 10)(y - 10) \equiv xy$. Q

16. Sans référence à la classe, on commence par étudier le problème indiqué.

a) La distance séparant Mathias et Armel au temps t est donnée par :

$$\delta_t = |(-4 \text{ km} + v_M t) - (3 \text{ km} - v_A t)| = |-4 \text{ km} + 3 \frac{\text{km}}{\text{h}} t - 3 \text{ km} + 2 \frac{\text{km}}{\text{h}} t| = |5 \frac{t}{\text{h}} - 7| \text{ km}.$$

1) Les deux marcheurs se voient lorsque $\delta_t \leq 0{,}5$ km, c’est-à-dire lorsque

$$|5 \frac{t}{\text{h}} - 7| \text{ km} \leq 0{,}5 \text{ km ou } |5 \frac{t}{\text{h}} - 7| \leq 0{,}5.$$

2) L’inéquation obtenue est équivalente à celle que l’on obtient en divisant par $\frac{5}{\text{h}}$ c’est-à-dire en multipliant par $\frac{\text{h}}{5}$, soit $|t - \frac{7}{5} \text{h}| \leq 0{,}1$ h, ou $|t - 1{,}4 \text{ h}| \leq 0{,}1$ h. Cette dernière inéquation équivaut alors à

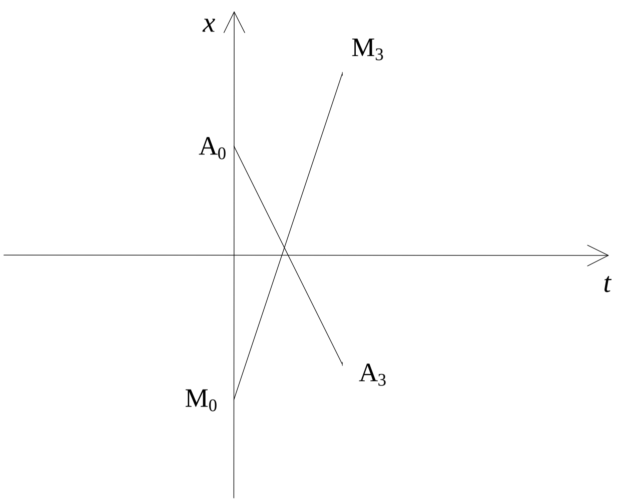
$$1{,}4 \text{ h} - 0{,}1 \text{ h} \leq t \leq 1{,}4 \text{ h} + 0{,}1 \text{ h ou } 1{,}3 \text{ h} \leq t \leq 1{,}5 \text{ h}$$

soit donc : 1 h 18 min $\leq t \leq$ 1 h 30 min. Les deux marcheurs, qui sont au départ distants de 7 km, se voient au bout d’une heure et vingt minutes, et restent visibles l’un de l’autre pendant douze minutes.

3) Bien entendu, on aurait pu *raisonner* plutôt que *calculer* : les marcheurs se voient au bout du temps t_0 nécessaire pour parcourir 6,5 km à 5 km/h, soit $t_0 = \frac{6{,}5 \text{ km}}{5 \text{ km/h}} = 1{,}3$ h ; ils cessent de se voir au bout du temps t_1 nécessaire pour parcourir 7,5 km à 5 km/h, soit $t_1 = \frac{7{,}5 \text{ km}}{5 \text{ km/h}} = 1{,}5$ h. La durée pendant laquelle ils sont visibles l’un de l’autre est donc 1,5 h – 1,3 h = 0,2 h = 0,2 (60 min) = 12 min.

b) Cela noté, venons-en à la question soulevée. Le problème proposé aux élèves est indubitablement générateur d’une activité d’étude et de recherche. Ce qui peut gêner l’auteure de la question est (peut-être) que cette activité suive des voies non prévues entièrement à l’avance, du fait notamment de la pression des élèves – qui sont là pour chercher, trouver, proposer. Mais il s’agit là d’un fait *normal*, dont l’absence jetterait un doute sur la nature du travail de la classe, et notamment sur la richesse du *topos* occupé par les élèves.

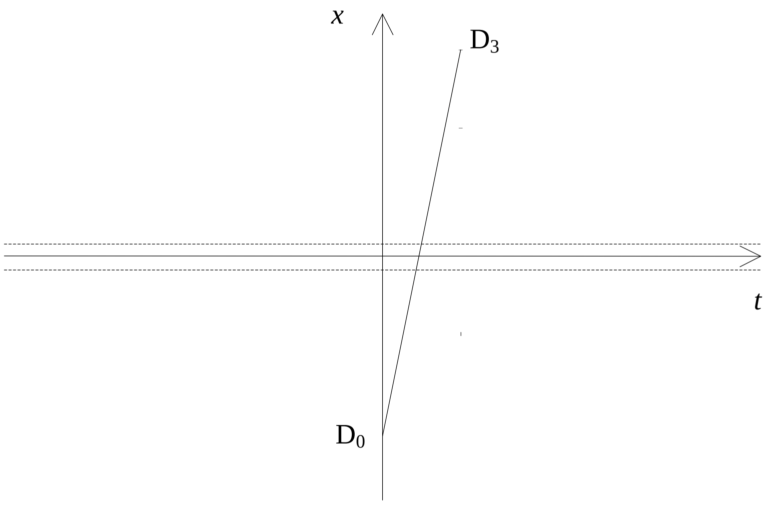
1) La culture des élèves peut bien sûr les amener à proposer par exemple de calculer (sans les unités !) l’abscisse de Mathias et celle d’Armel au temps t (on a $x_M = -4 + 3t$ et $x_A = 3 - 2t$) puis à les représenter graphiquement « pour voir » (ci-contre) : en ce cas, le graphique ne donne pas grand-chose ! On peut alors chercher (par exemple) déterminer l’instant auquel les deux marcheurs se croisent, ce qui conduit à résoudre l’équation $-4 + 3t = 3 - 2t$, qui donne $t = 1{,}4$: le croisement intervient au bout de 1,4 h, soit 1 h + 0,4 (60 min) = 1 h 24 min. Mais cela ne résout pas le problème !



2) Ce qui peut surgir d'une analyse de la situation est que ce qui nous intéresse n'est pas la *position* des marcheurs mais la *distance* qui les sépare (laquelle est nulle, on le sait maintenant, lorsque $t = 1{,}4$). Cela peut alors conduite à considérer la quantité $x_M - x_A$, dont on voit graphiquement qu'elle vaut –7 au temps $t = 0$, augmente en restant négative jusqu'à $t = 1{,}4$, où elle s'annule, puis continue de croître en étant positive. On peut alors se tourner vers la représentation graphique de $y = x_M - x_A = 5\,t - 7$ (ci-après). On arrive ainsi à l'idée de résoudre la double inéquation $-0{,}5 \leq y \leq 0{,}5$, ce qu'on peut faire graphiquement (à l'aide de la calculatrice par exemple) ou analytiquement, ce qui donne

$$-0{,}5 \leq y \leq 0{,}5 \Leftrightarrow -0{,}5 \leq 5\,t - 7 \leq 0{,}5 \Leftrightarrow -0{,}1 \leq t - 1{,}4 \leq 0{,}1$$

et conduit donc à $1{,}3 \leq t \leq 1{,}5$, etc.



3) Ce cheminement n'est pas le plus rapide, certes. Mais il traduit le fait que la classe vit là une *première* rencontre avec un certain type de problèmes. Du reste, si le professeur compte par ce moyen pousser en avant la notion de valeur absolue, il n'est pas au bout de ses peines ! Pour modéliser la situation problématique envisagée, on peut certes considérer la distance entre les positions x_M et x_A, qu'on peut noter *a priori* $d(x_M, x_A)$; mais il restera alors à résoudre par rapport à t l'inéquation unique

$$d(x_M, x_A) \leq 0{,}5.$$

Comment résoudre une telle équation ? Il faudrait connaître les propriétés de ce qu'on a noté ici d. Que faire pour cela ? On peut tenter d'exprimer d à l'aide de notions familières, ce qui permettrait d'identifier et d'établir les propriétés utiles de d.

• Soit deux nombres a et b, et considérons $d(a, b)$; si l'on connaît – à titre de connaissance « folklorique », peut-être pour l'avoir rencontrer *ailleurs* que dans la classe de mathématiques *stricto sensu* – la notion de valeur absolue d'un nombre, qu'on note ici provisoirement $\underline{\mathrm{val}}$ (en sorte que $\underline{\mathrm{val}}(-3) = \underline{\mathrm{val}}(3) = 3$, $\underline{\mathrm{val}}(1{,}4) = \underline{\mathrm{val}}(-1{,}4) = 1{,}4$, etc.), on peut observer que $\underline{\mathrm{val}}(u) = d(u, 0)$. En remarquant alors – ce qui est évident géométriquement – l'invariance de d par translation, c'est-à-dire le fait que $d(a, b) = d(a + c, b + c)$ pour tout c, on peut, en prenant $c = -b$, conclure que $d(a, b) = d(a - b, 0) = \underline{\mathrm{val}}(a - b)$. Cette égalité permet à son tour de retrouver la symétrie de d, également évidente géométriquement : $d(a, b) = \underline{\mathrm{val}}(a - b) = \underline{\mathrm{val}}(b - a) = d(b, a)$.

• On a donc $d(x_M, x_A) = \underline{\mathrm{val}}(x_M - x_A) = \underline{\mathrm{val}}(5\,t - 7)$. Parvenus là, que faire pour résoudre l'inéquation $\underline{\mathrm{val}}(5\,t - 7) \leq 0{,}5$? Il devrait être clair – c'est là une deuxième propriété utile de d ou de $\underline{\mathrm{val}}$, après la propriété selon laquelle $\underline{\mathrm{val}}(u) = \underline{\mathrm{val}}(-u)$ ou $d(a, b) = d(b, a)$ – que, si $k \geq 0$, alors $\underline{\mathrm{val}}(ku) = k\underline{\mathrm{val}}(u)$. On a donc $\underline{\mathrm{val}}(5\,t - 7) = 5\underline{\mathrm{val}}(t - 1{,}4)$, si bien que l'équation à résoudre équivaut à $\underline{\mathrm{val}}(t - 1{,}4) \leq 0{,}1$, c'est-à-dire à $d(t, 1{,}4) \leq 0{,}1$. Les solutions de cette dernière inéquation sont géométriquement évidentes : ce sont les nombres $t \in [1{,}4-0{,}1 ; 1{,}4+0{,}1] = [1{,}3 ; 1{,}5]$.

• D'autres cheminements sont possibles : des élèves pourraient ainsi penser à exprimer d ainsi : $d(a, b) = \sqrt{(a-b)^2}$. Cela conduit de même à écrire : $d(x_M, x_A) = \sqrt{(x_M - x_A)^2} = \sqrt{(5\,t-7)^2} = \sqrt{25(t-1{,}4)^2} = 5\sqrt{(t-1{,}4)^2} = 5d(t, 1{,}4)$. De la sorte, l'inéquation à résoudre se récrit $d(t, 1{,}4) \leq 0{,}1$, ce qui se résout comme on l'a vu. On voit que les propriétés de d utiles sont la symétrie ($d(a, b) = d(b, a)$), l'invariance par translation, toutes deux évidentes, et, moins évidente, le fait que, pour $k \geq 0$, $d(ka, kb) = k\,d(a, b)$.

Pour faciliter le maniement de ces propriétés, il est sage d'exprimer d à l'aide de la fonction valeur absolue, comme le prévoit le programme dans ce commentaire : « La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres. » Cela permet surtout de faire découler les propriétés utiles de d des propriétés correspondantes de $\underline{\text{val}}$ (à savoir $\underline{\text{val}}(-u) = \underline{\text{val}}(u)$ et $\underline{\text{val}}(ku) = k\underline{\text{val}}(u)$ pour $k \geq 0$). Pour cela, on écrira la distance de a à b non pas $d(a, b)$, mais $\underline{\text{val}}(a - b)$, ou plutôt $|a - b|$.

• On notera en passant que la propriété d'inégalité triangulaire ($d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$) n'est pas à compter, ici, parmi les propriétés utiles : son utilité est ailleurs. Cette propriété ne figure d'ailleurs pas, actuellement, au programme de 2^de^.

d) Le travail évoqué jusqu'ici est-il trop substantiel pour être regardé comme constitutif d'une AER ? Dans la conception et l'élaboration d'une AER, il est important de tenir compte de deux critères : celui des apprentissages réalisés (ou réalisables), celui du temps didactique créé (ou qui aurait pu l'être). Une AER qui donne peu d'occasions de travailler certaines organisations mathématiques antécédentes et ne permet guère d'avancer dans la création d'une organisation encore inédite est certes à éviter ! Mais il arrive qu'une AER consomme du temps d'horloge d'une manière très bénéfique – sans être pour autant un PER.

1) Sans sortir du cadre d'une AER (ou d'un enchaînement d'AER), on peut complexifier le problème étudié afin de renforcer la maîtrise de la technique qui a commencé de se dégager. Supposons par exemple que Lynda soit partie de la position d'abscisse –0,6 et marche à la vitesse de 2,5 km/h dans la direction d'Armel. Y a-t-il un laps de temps pendant lequel Mathias, Armel et Lynda verront chacun des deux autres ? On sait déjà que Mathias et Armel se verront entre 1 h 18 min et 1 h 30 min. Pour Lynda et Armel, on a $d(x_L, x_A) = |x_L - x_A| = |(-0{,}6 + 2{,}5\,t) - (3 - 2\,t)| = |4{,}5\,t - 3{,}6| = 4{,}5|t - 0{,}8|$. L'inéquation $d(x_L, x_A) \leq 0{,}5$ s'écrit donc $|t - 0{,}8| \leq 1/9$. Lynda et Armel ne se verront plus après (0,8 + 1/9) h de marche. Or cette durée est inférieure à 1 h puisque $1/9 < 2/10 = 0{,}2$: la rencontre des trois marcheurs n'aura donc pas lieu.

2) Par contraste, un PER devrait être engendré par une question d'un pouvoir générateur supérieur, par exemple par la question suivante : « Comment déterminer la durée d'un événement et quel intérêt cela peut-il avoir ? » Sous une telle question génératrice on pourra par exemple loger le problème suivant : « sur un tronçon de route où, à cause du relief, un spectateur du Tour de France ne peut les voir que pendant 220 mètres de chaussée environ, passent quatre coureurs détachés roulant à la vitesse de 55 km/h ; pendant combien de temps les voit-il ? » Le problème est facile : on a

$$t = \frac{220 \text{ m}}{55 \text{ km/h}} = \frac{0{,}22 \text{ km}}{55 \text{ km/h}} = \frac{1}{250}\text{ h} = \frac{1}{250} \times 3600 \text{ s} = 14{,}4 \text{ s}.$$

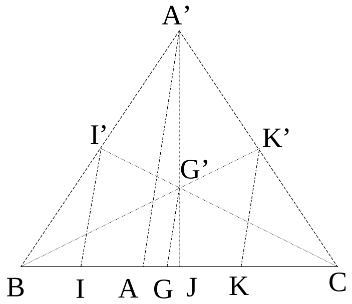
Il est plus difficile de répondre à la question suivante : « deux automobilistes, Mathias et Armel, se déplacent en sens inverse l'un de l'autre sur une route où la visibilité se limite à 120 mètres, le premier à la vitesse de 80 km/h, le second à la vitesse de 90 km/h ; lorsqu'ils deviennent visibles l'un pour l'autre, combien de temps reste-t-il avant qu'ils se croisent (ou n'entrent en collision) ? » Ou encore à celle-ci : lorsque Mathias est assis dans un TGV filant de Marseille à Paris à 280 km/h et qu'il croise un TGV roulant en sens inverse à 290 km/h, pendant combien de temps Mathias peut-il voir ce TGV ? Etc. Q

17. Sur cette question, on peut se référer à des sites syndicaux : voir par exemple les adresses http://www.lille.snes.edu/Spip/article.php3?id_article=169 et http://snfolc29.free.fr/IUFM/iufm_m11.html, etc. Q

Attention ! Ici s'arrête la suite des réponses examinées en séance ; ce qui suit est laissé à l'examen des participants.

30. En principe un triangle est formé de trois points *non alignés*. Pour user de notions de niveau supérieur, un triangle est l'ensemble de trois points *affinement indépendants*. D'une façon générale, dans un espace affine de dimension n, on appelle *simplexe* un ensemble de $n + 1$ points affinement indépendants : lorsque $n = 2$, un simplexe s'appelle un triangle ; lorsque $n = 3$, un simplexe s'appelle un tétraèdre. Le fait d'appeler triangle un ensemble de trois points *non alignés* est fondamental pour l'énoncé de certains théorèmes : dans un « triangle aplati », ainsi, on peut toujours définir les médiatrices, mais elles ne sont plus concourantes (puisqu'elles sont parallèles). D'une manière

générale, certaines propriétés supposent le non-alignement, d'autres s'en passent, tout en se transformant sensiblement : ainsi le point G situé sur une médiane aux deux tiers de sa longueur à partir du sommet est-il toujours situé sur les deux autres médianes (voir la figure ci-après).



Pour plus de sûreté, on pourra parler dans certains cas de triangle *non aplati*, ce qui est bien sûr pléonastique ; et parler dans d'autres cas de triangle *aplati* (ou plat), tout en sachant qu'un « triangle aplati »… n'est pas un triangle. Q

31. La question proposée fera prochainement l'objet d'un exposé. Q

32. La question posée est laissée provisoirement à la sagacité des participants. Q

33. La question proposée fera prochainement l'objet d'un exposé. Q

34. Notons d'abord que la classe modale est un indicateur relativement grossier et peu stable : il est connu par exemple que, lorsqu'on regroupe en classes une série statistique donnée, selon le choix fait la classe modale peut varier sensiblement. Considérons ainsi le tableau suivant de notes sur 20 :

Note X sur 20	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Effectifs	0	1	0	5	4	3	2	5	2	3	0

Le mode, ici, est la note 6. Regroupons en classes ainsi :

Note X sur 20	$0 \leq X < 3$	$3 \leq X < 7$	$7 \leq X < 11$	$11 \leq X < 15$	$15 \leq X < 20$
Effectifs	1	5	7	7	5

On a alors deux classes modales (on verra dans un instant que l'inégalité d'amplitude ne pose pas problème en ce cas). Considérons maintenant le regroupement suivant :

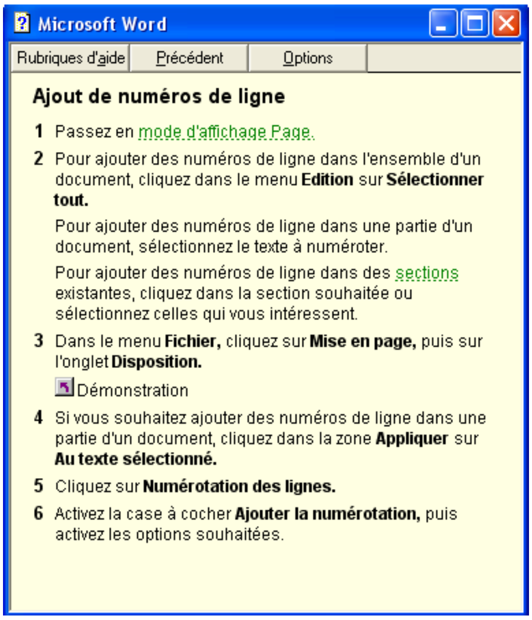
Note X sur 20	$0 \leq X < 5$	$5 \leq X < 9$	$9 \leq X < 13$	$13 \leq X < 17$	$17 \leq X < 20$
Effectifs	1	9	5	7	3

Cette fois, la classe modale est unique ! Mais venons-en au problème proposé. Considérons le tableau suivant (emprunté à André Massoni, *Initiation aux statistiques descriptives avec Excel*, Vuibert, Paris, 2001, p. 63).

Tranche horaire (en heure)	Nombre d'accidents effectifs	Fréquences	Effectifs rectifiés	Fréquences rectifiées
[0 ; 9[	29 697	0,21	9 899	0,07
[9 ; 15[	**41 709**	**0,29**	20 855	0,15
[15 ; 18[	29 759	0,21	**29 759**	**0,21**
[18 ; 24[	**42 194**	**0,29**	21 097	0,15
total	143 359			

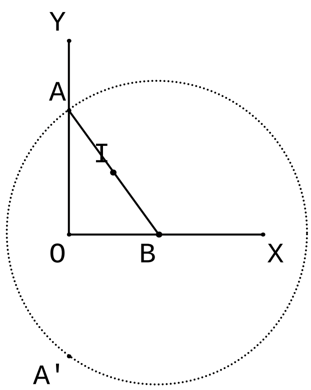
L'auteur cité fait ce commentaire : « Si l'on regarde les effectifs ou les fréquences, il semble qu'il y ait deux classes modales, [9 ; 15[et [18 ; 24[; il n'en est rien car il faut employer les effectifs ou les fréquences rectifiées. » Les effectifs *rectifiés* s'obtiennent ainsi (*op. cit.*, p. 47) : on choisit l'amplitude minimale, qui vaut ici 3 (c'est l'amplitude de la classe [15 ; 18[) ; on calcule l'effectif rectifié d'une classe en divisant l'effectif de cette classe par le quotient k de l'amplitude de la classe par l'amplitude minimale. Pour la classe [0 ; 9[, on a $k = 3$ et l'effectif rectifié est donc 29 697/3 = 9 899 ; pour la classe [9 ; 15[, on a $k = 2$ et l'effectif rectifié vaut donc 41 709/2 = 20 854,5 ≈ 20 855 ; etc. Q

35. Word fournit les indications ci-après, qu'il suffit de suivre. Q

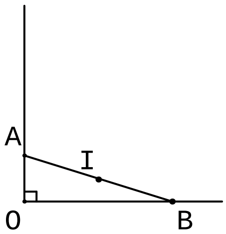


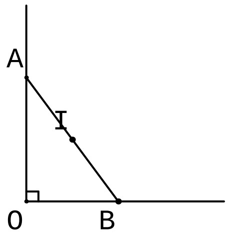
36. Il suffit de créer A comme point à une distance fixe de B. Pour la construction représentée ci-dessous, on a créé successivement les objets indiqués ci-après.

----- OBJETS CRÉÉS -----
O point libre
X point libre
Segment [OX]
Y image de X par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (radian)
Segment [OY]
B point libre sur le segment [OX]
B cercle de centre B et de rayon 4 (unités U_{oxy})
A point d'intersection 1 de la droite (OY) et du cercle b
A' point d'intersection 2 de la droite (OY) et du cercle b
Segment [AB]
I milieu du segment [AB]



En déplaçant B sur [OX], on obtient ainsi, par exemple, les figures ci-après. Q





Ici reprend la partie de ce résumé correspondant au travail réalisé en séance.

2. Forum des questions : exposés

2.1. Exposés du jour

a) On écoute un exposé de *MG* sur la question suivante :

Exposé 18. Qu’est-ce que l’« axiome » de Wallis ? Qu’implique-t-il à propos de l’expérimentation spatiale dans la construction d’une théorie géométrique de l’espace sensible, du moins si l’on suppose que cet espace est euclidien ?

b) Remarques et commentaires

c) On entend ensuite un exposé de *CM* sur la question que voici :

Exposé 23. Comment peut-on donner sens à la correction d’un DS entendue comme *œuvre collective* ? En quoi cela modifie-t-il le travail de « correction » que le professeur doit penser, organiser et impulser dans la classe ?

d) Remarques et commentaires

2.2. Exposés déjà prévus

~~***ED* : la statistique**~~

Exposé 24. Que sont les questions génératrices de la statistique enseignée en seconde ? En quoi cela fait-il apparaître la notion de médiane comme première et la notion de moyenne comme seconde ?

~~***MH* : calculs avec unités**~~

Exposé 25. Jusqu’à quel point peut-on intégrer les unités dans les calculs ? Comment cela se justifie-t-il ? Quel est l’intérêt de le faire ?

2.3. Programmes de calcul et calcul algébrique

a) Cet exposé examinera ce qu’apportent les archives du Séminaire à propos de la question suivante.

Exposé 26. Qu’est-ce que l’expression algébrique d’un programme de calcul ? Pourquoi peut-on dire que le calcul algébrique est un calcul sur les programmes de calcul ?

b) L’exposé sera proposé et présenté par *AI*.

2.4. La notion de droite, entre physique et mathématiques

a) Cet exposé fera parler les archives du Séminaire sur le sujet suivant.

Exposé 27. En quoi peut-on dire que la notion de droite n’est pas complètement mathématisable ?

b) L’exposé sera proposé et présenté par *JNM*.

2.5. Pourquoi le radian ?

a) Cet exposé interrogera les archives du Séminaire sur le « mystère » suivant.

Exposé 28. Pourquoi utilise-t-on le radian en mathématiques ?

b) L’exposé sera proposé et présenté par *JB*.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 16 : mardi 24 janvier 2006

0. Le programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions : exposés du jour // 2. Forum des questions : poursuites & anticipations // 3. Forum des questions : exposés à venir

1. Forum des questions : exposés du jour

1.1. Questions génératrices de la statistique

a) On écoute un exposé *d'ED* sur la question suivante :

Exposé 24. Que sont les questions génératrices de la statistique enseignée en seconde ? En quoi cela fait-il apparaître la notion de médiane comme première et la notion de moyenne comme seconde ?

b) Remarques et commentaires

1.2. Calculer en conservant les unités

a) On entend ensuite un exposé de *MH* sur la question que voici :

Exposé 25. Jusqu'à quel point peut-on intégrer les unités dans les calculs ? Comment cela se justifie-t-il ? Quel est l'intérêt de le faire ?

b) Remarques et commentaires

2. Forum des questions : poursuites & anticipations

2.1. Questions saillantes

a) On a reproduit ci-dessous le tableau des scores attribués par les participants aux questions passées en revue lors de la séance précédente du Séminaire. Chaque ligne correspond à un participant ; chaque colonne à une question : on se reportera aux notes de cette séance pour y retrouver les 13 questions, numérotées de 18 à 30.

N°	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1	2	3	4	2	1	2	1	2	3	3	1	1
2	0	0	4	0	2	0	3	0	0	4	0	0	0
3	2	3	1	1	2	1	3	1	1	3	2	3	3

5	2	3	2	3	1	1	0	1	2	1	0	2	0
6	2	3	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0
7	4	4	2	3	4	2	0	1	1	2	3	2	1
8	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0	3
9	1	0	2	3	3	0	0	0	4	0	0	2	0
10	0	1	2	1	4	0	0	0	0	1	2	3	0
11	0	0	0	2	2	1	0	0	0	0	0	3	0
12	4	4	2	1	3	4	1	1	2	2	2	2	1
13	0	3	0	0	2	3	0	0	0	0	1	3	2
14	1	3	0	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0
15	3	1	2	0	2	1	3	0	1	3	4	1	1
16	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
17	0	0	2	0	2	0	3	0	0	2	0	0	1
18	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
19	1	4	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	0
20	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
21	1	1	1	1	3	2	2	0	0	2	3	1	1
22	3	4	2	2	4	2	1	0	1	3	2	4	4
23	2	3	1	1	2	3	1	2	1	1	1	1	1
24	3	2	2	3	4	3	1	1	2	3	2	3	2
25	1	2	3	2	2	3	1	1	2	2	2	3	3
26	2	3	1	1	4	1	2	1	0	1	0	1	2
27	1	2	1	0	1	1	2	0	2	1	2	0	1
28	2	3	2	2	3	0	1	0	1	2	2	2	0
29	1	1	4	3	1	0	3	0	4	4	0	4	0
30	1	2	3	4	3	4	1	1	1	2	1	1	1
31	0	3	4	2	0	4	0	1	1	2	2	4	2
32	4	4	0	1	2	0	0	0	0	1	0	2	0
33	2	3	2	2	2	3	1	2	2	2	2	2	1
34	1	1	4	3	4	2	1	3	2	1	2	3	2
35	2	4	2	1	2	3	1	3	3	2	2	1	1
36	1	3	2	2	2	1	1	0	1	2	4	4	3
37	2	3	0	1	0	3	0	0	0	0	3	0	0
38	2	4	3	1	3	0	2	0	2	1	2	0	3
39	2	2	2	3	3	1	2	1	1	1	0	0	1
40	1	3	3	3	1	1	2	0	2	1	4	3	4
41	1	4	1	2	3	0	0	0	0	3	0	0	0
42	2	2	0	0	3	0	0	0	0	3	0	2	0
43	3	4	4	3	4	3	4	0	3	3	4	0	4
44	2	2	3	0	2	0	2	0	0	4	0	2	0
45	1	2	1	1	2	1	0	0	1	4	3	2	0
46	3	4	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
47	0	0	1	4	3	0	0	0	0	2	4	0	0
48	1	2	3	3	4	4	1	1	2	2	4	4	20
49	4	4	3	3	2	1	2	0	1	2	3	2	3
50	2	2	2	1	3	1	3	1	1	3	3	3	1
51	1	3	2	3	1	1	1	1	2	3	2	4	2
52	0	1	2	1	1	0	1	0	0	2	0	2	0
53	3	3	0	0	4	0	0	0	0	0	1	4	0
Σ	78	118	89	84	112	63	56	27	52	90	81	88	77
N°	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**

Le palmarès que l'on peut retenir est le suivant : 19, 22 ; 27, 20, 29.

b) On peut examiner encore le nombre de fois où une question donnée est classée en tête (ex æquo avec d'autres éventuellement) ; on obtient ceci :

4	22	7	7	14	9	5	0	3	9	11	13	8
18	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**

Cette fois, le palmarès est le suivant : 19 ; 22, 29, 28.

c) Les questions qui suscitent la plus forte demande sont incontestablement les questions 19 et 22, que l'on reproduit ici :

19. Si les responsables de l'établissement dans lequel nous sommes amenés à travailler ne remplissent pas leur rôle lors d'événements graves (violences physiques, insultes, etc.), que pouvons-nous faire ? Vers qui nous retourner ? Rectorat, syndicats, Justice ? De tels comportements ne peuvent, à mon avis, qu'engendrer de nouveaux débordements et, peu à peu, ceux-ci étant « normalisés », ils seront donc plus difficiles à remettre en cause. (WB, JT, 4^{e}, 14)

22. Faut-il s'acharner lorsqu'on constate que la moitié de la classe n'a pas compris certaines notions ? J'ai une classe de faible niveau et par ma volonté de bien faire j'ai pris du retard dans ma progression. Que me conseillez-vous ? (AS, JT, 5^{e}, 14)

d) Pour mémoire, on reproduit également les questions 20, 27, 28, 29 :

20. Comment faire comprendre à un élève, dont le niveau est trop faible, que son souhait d'aller en 1re S ne pourra être satisfait, sans lui enlever, par ailleurs, sa motivation, son envie de travailler ? (MH, CR, 2de, 14)

27. Une nouvelle élève est arrivée dans ma classe la semaine dernière. Elle m'a dit qu'elle venait d'un lycée de Marseille, que sa professeure de mathématiques a été absente pendant deux mois et donc qu'elle a étudié seulement le chapitre « Les nombres ». Elle envisage, de plus, de faire une 1re S. Comment me comporter avec elle pour qu'elle puisse suivre correctement ? (SP, MJ, 2de, 14)

28. Comment réagir si un ou une élève, en plein milieu du cours, se lève et part en courant sans aucune raison apparente ? Un professeur de mon collège, à qui cela est arrivé, est allé récupérer l'élève dans le couloir pour la ramener en classe. Est-ce une attitude à adopter ? (RR, OS, 4^{e}, 14)

29. Comment gérer les difficultés des élèves en français ? (CM, MJ, 5^{e}, 14)

2.2. Quelques remarques pour commencer

a) Les questions retenues touchent à des problèmes de la profession qui ne semblent pas *spécifiques* du contenu mathématique enseigné – encore que !… Toutes ont en elles quelque chose de l'ordre de la *plainte*. Ou plutôt, on peut *entendre* chacune d'elles – même si leurs auteurs ne les ont pas entendues ainsi – comme une *protestation*, comme si elles disaient : « Ces choses-là ne devraient pas se produire ! » Si une agression survient dans le collège ou le lycée, on ne devrait pas voir les responsables de l'établissement fuir leurs responsabilités. Lorsqu'on a eu le souci de bien faire en prenant le temps nécessaire pour faire comprendre une notion à la classe, on ne devrait pas voir une moitié de cette classe stagner dans son incompréhension. On ne devrait pas avoir à convaincre un élève dont il est évident qu'il n'a pas le niveau pour aller en 1re S qu'il devra renoncer à son projet sans renoncer à travailler ! On ne devrait pas voir « débarquer », sans plus de façon, une élève qui, à cette époque de l'année, a étudié en tout et pour tout un chapitre du programme de 2de. On ne devrait pas voir une ou un élève s'enfuir à toutes jambes de la classe, sans mot dire. On ne devrait pas voir d'élève ayant en français des difficultés rédhibitoires pour suivre le travail de la classe en mathématiques.

b) Une telle réception – et, le cas échéant, une telle formulation – de ces questions est légitime et compréhensible. Mais il est aussi un temps pour observer plus froidement ces questions, et tenter de les analyser. On s'arrêtera ici, d'abord, sur l'immense, l'intense, le difficile problème de la *violence*, sur lequel une foule de travaux existent.

1) Voici d'abord un extrait d'un article de Catherine Rollot paru dans *Le Monde* du 14 janvier 2006 sous le titre *La solitude des enseignants face aux violences des élèves*.

> Enseigner la peur au ventre. Le témoignage de Karine Montet-Toutain, la professeur d'arts appliqués agressée par un de ses élèves à Étampes (*Le Monde* du 12 janvier), a révélé un désarroi que beaucoup de professeurs partagent. Le sujet est tabou. L'éducation nationale a du mal à s'avouer que ceux qu'elle forme à transmettre les savoirs peuvent se sentir désarmés et seuls face à des classes difficiles.
> Pourtant, arriver à « tenir ses élèves » ne s'improvise pas et constitue même le principal souci des enseignants entrant dans le métier. Laurence Janot, maître de conférences à l'institut de formation des maîtres (IUFM) d'Aquitaine, s'est intéressée aux appréhensions des jeunes professeurs stagiaires dans des établissements situés en zone d'éducation prioritaire (ZEP). Elle a présenté ses travaux à l'occasion de la troisième conférence mondiale sur la violence à l'école, qui s'est tenue du 12 au 14 janvier à Bordeaux. Son constat est sans appel. 53 % des interrogés craignent de manquer de compétences relationnelles, 27 % de ne pas être soutenus par leurs collègues ou leur direction, 14 % d'être victimes de violences et seulement 6 % de ne pas maîtriser leur matière.

2) Le même article se termine par les lignes suivantes.

> Pour [Laurence Janot], tout ne doit pas reposer sur les enseignants. Les stratégies d'adaptation individuelle et de gestion de la violence que ceux-ci peuvent apprendre doivent être soutenues par une organisation du travail collective. *« Il faut arrêter de stigmatiser l'enseignant et de personnaliser les problèmes. Les difficultés que peut rencontrer un professeur doivent être prises en tant que difficultés de l'établissement et concerner l'ensemble de son personnel. »* L'environnement, et notamment le soutien de l'équipe de direction en cas de problèmes professionnels, est décisif. *« Aussi doué, aussi compétent, aussi bien formé soit-il, le professeur verra ses risques de perdre pied face à la violence augmenter selon le mode de management de sa direction. Le manque de confiance, l'incohérence, l'autoritarisme ou encore l'inertie sont, de ce point de vue, dévastateurs car ils augmentent le stress et rendent plus vulnérables à toute agression. »*

c) On se limitera, dans ce qui suit, à un petit nombre de notations. Tout d'abord, la violence la plus brutale, parfois irréversible dans ses effets *ne peut pas être entièrement écartée*. Elle demeure indéfiniment à l'horizon de la « vie bonne ». Car elle semble consubstantielle aux sociétés humaines, à tel point que – on va le voir – la constitution de l'idée moderne de *population*, telle que l'emploie la statistique, est liée à ce critère cruel : *quiconque est capable de tuer quiconque, n'importe qui peut être tué par n'importe qui* – et c'est cela qui fait les hommes « égaux » !

1) Longtemps la notion – communément acceptée aujourd'hui – de « population d'un territoire » comme *l'ensemble* des personnes présentes à un moment donné sur ce territoire est demeuré absente de l'outillage mental. La *Bible* évoque par exemple des recensements ; mais ils concernent les hommes « tirant l'épée », non *l'ensemble* de la population. De même, remarque le démographe Hervé Le Bras (dans *L'adieu aux masses : démocratie et politique*, Éditions de l'Aube, 2002, p. 12), « on estime par exemple que le nombre des habitants de l'Attique au temps de Périclès était dix fois plus élevé que celui des citoyens (de l'ordre de

30 000) car, outre les esclaves, une multitude de statuts ne bénéficiaient pas de la citoyenneté (femmes, périèques, métèques, artisans, etc.) ».

2) Le passage de la forme ancienne de recensement à la notion moderne est contemporain d'un changement civilisationnel profond. Le mot de *population* lui-même apparaît pour la première fois à la fin des *Political Discourses* (discours politiques) publiés en 1752 par David Hume (1711-1776).

• C'est là l'aboutissement lexical d'un travail conceptuel dont l'un des temps forts se trouve dans le *Léviathan* (1660) de Thomas Hobbes (1588-1679), au début du chapitre XIII, où on lit ceci (reproduit dans l'original anglais, puis donné en traduction française).

> *Nature hath made men so equal in the faculties of body and mind as that, though there be found one man sometimes manifestly stronger in body or of quicker mind than another, yet when all is reckoned together the difference between man and man is not so considerable as that one man can thereupon claim to himself any benefit to which another may not pretend as well as he. For as to the strength of body, the weakest has strength enough to kill the strongest, either by secret machination or by confederacy with others that are in the same danger with himself.*
>
> La nature a fait les hommes si égaux quant aux facultés de leur corps et de leur esprit que, bien qu'on puisse parfois trouver un homme manifestement plus fort corporellement, ou d'un esprit plus prompt qu'un autre, néanmoins, tout bien considéré, la différence d'un homme à un autre n'est pas si considérable qu'un homme puisse de ce chef réclamer pour lui-même un avantage auquel un autre ne puisse prétendre aussi bien que lui. En effet, pour ce qui est de la force corporelle, l'homme le plus faible en a assez pour tuer l'homme le plus fort, soit par une machination secrète, soit en s'alliant à d'autres qui courent le même danger que lui.

• Hervé Le Bras commente dans les termes suivants ce passage décisif.

> Paragraphe remarquable et terrible car il fonde négativement l'égalité sur l'égale possibilité de nuire à son prochain dont dispose chaque homme dans l'état de nature. À partir du moment où les hommes sont égaux, ils peuvent être additionnés et l'on peut parler de leur nombre. L'obstacle qui empêchait de concevoir une population dans l'Antiquité est levé par cette nouvelle conception de l'égalité originelle. Insistons sur la nécessité d'une définition de l'égalité des hommes pour les compter et pas seulement sur leur regroupement selon un caractère commun. Le fait que les hommes marchent et parlent par exemple ne suffit pas à les compter ensemble dans *la Politique* d'Aristote ou dans *la République* et *les Lois* de Platon.

• La « mise à égalité » de *tous* les hommes est fondamentale pour qu'on puisse parler de la population des hommes. Le Bras le souligne par cet exemple simple mais très suggestif.

> Si l'on décide de compter dans son panier le nombre de légumes que l'on a achetés au marché, on ne dira jamais que l'on dispose de 2340 légumes dont 1 chou-fleur, 3 concombres, 18 pommes de terre et 2318 petits pois. Chaque objet a la qualité de légume, mais les relations d'égalité ne sont possible qu'à l'intérieur de chaque catégorie de légumes : il existe un nombre de petits pois, un nombre de concombres, de pommes de terre, mais pas un nombre de légumes. De même, dans l'Antiquité, on pouvait donner un nombre d'esclaves, un nombre de métèques ou de citoyens, mais pas un nombre d'hommes.

• Notons que c'est sur l'innovation conceptuelle qu'apporte Hobbes que William Petty (1623-1687), qui fut d'ailleurs un temps le secrétaire particulier du philosophe, va construire son *arithmétique politique*. Ancêtre de notre statistique, celle-ci installera dans la culture des « puissants » l'idée de calcul politique et social, qui triomphera au siècle des Lumières et sera à l'origine des développements ultérieurs de la « statistique » – un mot qui, dès la troisième édition de l'*Encyclopædia Britannica* (1797), se substituera à l'ancienne appellation d'arithmétique politique.

d) Après ce qui est une « borne supérieure » de la réflexion (et de l'action), la violence absolue telle qu'on la voit se déchaîner de loin en loin, quoique trop souvent, un deuxième élément, beaucoup plus proche du quotidien des relations humaines, peut être envisagé : il concerne le fait de généraliser et de renforcer ou, au contraire, de chercher à spécifier et à préciser, la *différence* entre élèves et professeurs. Contrairement à une tradition de la profession qui tend à instituer une différence quasi infranchissable, manifestée par des détails emblématiques (comme par exemple le soin mis à ne pas révéler son… prénom à ses élèves en se présentant invariablement à eux comme Monsieur Untel ou Madame Unetelle), il semble important de signifier dans la culture de l'établissement et de la classe *que la seule différence qui vaille*, la seule différence essentielle, est celle qui fait du professeur celui qui aide l'élève à… s'élever par la connaissance.

1) Les élèves sont souvent enfermés dans un monde limité à leurs « semblables », un monde d'où l'on aperçoit, certes, le reste du monde – celui des professeurs, notamment –, mais qui ne permet pas de le connaître véritablement, et dont, surtout, on pense *n'être pas connu*, sauf peut-être à travers des reproches qui construisent une réputation négative. Il y a là un fait structurel, qui perdure au-delà du lycée même : un sentiment d'une sorte d'invisibilité, d'inconnaissance de la part des « autres » – des professeurs, mais pas seulement. Il semble que cette description puisse *aussi bien* être appliquée au monde également enserré des professeurs, qui pensent parfois être invisibles et passer incognito.

2) Un tel dualisme – « eux » et « nous » – est sans doute à l'origine de bien des propos agressifs qui peuvent aller des uns aux autres, dans un sens comme dans l'autre. La lutte *contre* les incivilités – qui sont l'humus sur lequel croît la violence – et, positivement, la construction d'une *nouvelle civilité* bien partagée concernent *chacun* au sein du *collectif* de vie et de travail. Le sociologue Pierre Merle a publié récemment un ouvrage intitulé *L'élève humilié. L'école, un espace de non-droit ?* (PUF, 2005). On pourrait évidemment écrire un livre ayant pour titre *Le* professeur *humilié. L'école, un espace de non-droit ?* Le livre de Pierre Merle, qui enseigne à l'IUFM de Bretagne, tire parti d'une enquête effectuée auprès de quelque 500 élèves professeurs de cet IUFM, qui devaient répondre à la consigne suivante : « Donner un exemple tiré de votre scolarité d'un droit respecté ou non respecté. » La communication de cette consigne était commentée oralement ainsi : « Il faut donner un exemple qui vous est arrivé personnellement ou, si vous n'avez pas ce type de souvenir pour le moment, un exemple dont vous avez été un témoin direct. Si vous le souhaitez, vous pouvez donner deux exemples : un de droit respecté, un de droit non respecté. » Citons deux exemples que l'auteur présente comme des erreurs légères de l'enseignant, mais dont, dix ans plus tard, l'élève se souvient encore douloureusement.

• Une enquêtée déclare : « Mes droits ne sont pas respectés quand le professeur utilise sa position sociale de prof pour rabaisser avec des phrases du genre : "Cela n'est pas digne de toi". »

• Une autre raconte cet épisode survenu peu après le décès de sa grand-mère : « Je donne au professeur le papier du CPE stipulant le motif de mon absence et elle me dit alors : "Ah ! c'était ta grand-mère, elle avait quel âge, etc." J'étais à ce moment-là sur l'estrade avec elle et je m'apprêtais à fondre en larmes. Elle m'a blessée profondément en déclarant ouvertement, deux jours après le décès de ma grand-mère, la cause de mon absence. »

3) Les études empiriques montrent à cet égard – nous y reviendrons le cas échéant – que les propos mordants, voire insultants, qui certes n'usent pas des mêmes images et des mêmes mots, sont, au niveau *global* (pas à celui de tel professeur ou de tel élève), suffisamment nourris pour alimenter un climat collectif de tensions et de méconnaissance. En sens inverse, le travail collectif et coopératif qu'il échoit à tous et à chacun de réaliser au sein des « communautés éducatives » doit tendre d'un même mouvement à dissocier et à libérer deux aspects distincts des relations entre élèves et professeurs. Le premier aspect a trait à l'inter-(re)connaissance des membres de la communauté éducative. Être (re)connu au sein de la communauté éducative, quand on est élève, ne doit pas découler du fait que l'on s'est fait remarquer, positivement ou, plus souvent, négativement, de certains professeurs. La (re)connaissance de la personne de l'élève, de l'élève *en tant que personne* ne doit pas dépendre de ses « performances » : *elle est une exigence première et imprescriptible de son être-là*. Et, bien entendu, la même assertion exactement peut être faite en échangeant les termes « élève » et « professeur ».

4) Le second aspect est le fait même qui fonde la co-présence dans l'établissement des élèves et des professeurs : *l'étude*, l'acquisition de connaissances et de savoirs, pour comprendre et agir dans les situations du monde d'aujourd'hui et de demain. Là encore, il est souhaitable que la profession ait la force morale de se détacher de schémas qui semblent aujourd'hui encore aller de soi pour nombre de professeurs, alors qu'ils sont aux antipodes de ce qu'on peut nommer – sans référence ici à des croyances de type religieux – un enseignement véritablement *laïc*. Pour expliciter ce problème, on a reproduit ci-après la fin d'un texte intitulé *Sur la laïcité* que l'on trouve sur le site de l'IUFM (dans la partie relative à la FGC).

Question 6. – L'École « totale » évoquée ici – qui accueillerait le « fait social » et en particulier le « fait religieux » – ne risque-t-elle pas d'être entraînée malgré elle loin de l'exigence traditionnelle de neutralité et de devenir ainsi le champ d'affrontements sans fin entre « conceptions de la vie bonne » ?

☞ Le problème que soulève la perspective (et la réalité) d'un enseignement *laïque* du « fait religieux » n'est pas, du point de vue proprement didactique, essentiellement différent de celui, disons, de l'enseignement laïque du… « fait mathématique » ou de l'enseignement laïque du « fait *laïque* » – un enseignement dont, au reste, la pertinence ne serait pas moindre. Sans doute la question religieuse diffère-t-elle par l'intensité des débats et des combats qu'elle a suscités (entre croyants de différentes confessions, entre croyants et non-croyants athées ou agnostiques, etc.), ce que l'histoire conduit à regarder, sinon comme une donnée anthropologique indépassable, du moins comme un trait non caduc de nombre de cultures qui se sont succédé ou se côtoient sur la planète, comme si le rapport de l'homme à l'idée de transcendance était voué à être le lieu d'une exaltation indéfiniment renaissante. Poser la question de l'enseignement laïque du fait religieux a pourtant le mérite de souligner une exigence essentielle, apparemment quelque peu oubliée, sans laquelle il n'est pas d'école laïque au sens précisé plus haut : c'est l'enseignement de ***toutes*** les matières scolaires en tant qu'elles paraîtraient valider (même partiellement) telle ou telle conception de la vie bonne (dans ses aspects spirituels ou dans ses aspects matériels, techniques ou conceptuels) qu'il convient en effet de soumettre à l'exigence de laïcité. Ajoutons qu'il semble bien peu réaliste de prétendre cultiver cette exigence en matière d'enseignement du fait religieux tout en l'ignorant, parfois avec superbe, en d'autres matières.

☞ Pour y voir plus clair, on recourra ici à un petit schéma formel. Regardons l'École comme le lieu où l'on étudie certaines questions Q en vue d'aider chacun à construire, dès maintenant ou plus tard, mais *a priori* pour son propre compte et en association avec qui il ou elle voudra, des réponses $R^{\heartsuit}$ élaborées dans les conditions et sous les contraintes de la vie sociale non scolaire qu'il ou elle aura à assumer. Pour cela, on étudie à l'École – on y fait connaître à l'élève – une ou plusieurs réponses $R^{\Diamond}$ produites au fil des siècles dans la société et inscrites en diverses institutions d'icelle. L'étude de ces réponses, leur analyse, leur déconstruction puis leur reconstruction, enfin leur mise à l'essai critique – dans des conditions scolairement construites, qui libèrent l'élève des conséquences sociales ordinaires de leur mise en jeu – sont ce que l'École laïque peut légitimement demander à l'élève. En revanche elle ne saurait lui demander de reprendre à son compte sans plus de façon de telles réponses, c'est-à-dire de prendre pour réponse $R^{\heartsuit}$ telle ou telle réponse $R^{\lozenge}$ – même si, bien entendu, l'élève est, de son côté, entièrement *libre* de le faire ! Inversement, si l'élève est fondé à refuser, le cas échéant, d'*adhérer* à telle réponse $R^{\lozenge}$, il ne saurait refuser de l'*étudier* en vue de la connaître au sens spécifique que l'École aura en ce cas donné à ce mot, et notamment de la mettre à l'essai dans les formes prévues par l'institution scolaire, sans jamais bien entendu que cette mise à l'essai – qui, fréquemment, est un critère essentiel d'une connaissance scolairement adéquate de $R^{\lozenge}$ – ne s'égale à une quelconque adhésion *personnelle* de l'élève (non plus d'ailleurs que du professeur) à cette réponse.

☞ Dans le cadre précédent, l'exigence d'un enseignement laïque peut être bafouée en plusieurs façons génétiquement solidaires. La première consiste à imposer une ou des réponses $R^{\lozenge}$ à titre d'éléments d'une conception déterminée de la vie bonne, à exiger donc de l'élève, non de montrer qu'il connaît $R^{\lozenge}$, mais qu'il fasse l'aveu de son adhésion à $R^{\lozenge}$ – ce qui, à la limite, ne suppose même plus qu'il « connaisse » $R^{\lozenge}$… Cette première forme dogmatique et non laïque d'enseignement apparaît souvent labile : elle cède bientôt la place à un enseignement où, faisant l'économie des questions Q, on enseigne directement les réponses $R^{\lozenge}$, auxquelles l'élève est alors sommé de faire allégeance. L'enseignement n'est plus dès lors un enseignement de ***questions*** : il dégénère en un enseignement d'***œuvres*** dont les raisons d'être ont été peu ou prou oubliées et qu'il convient seulement d'admirer, voire d'***aimer***, pour elles-mêmes et non pour leur valeur de réponses à des questions peut-être vitales.

☞ Ce processus de déchéance va de pair avec l'émergence d'une axiologie *sui generis*, presque toujours antinomique de l'exigence laïque. Pris dans ce mouvement d'histoire, les enseignants sont ainsi portés à mettre en avant leur ambition de ***faire aimer*** « leur » discipline, alors même que le fait d'adhérer et plus encore d'aimer relève de la sphère privée de la vie de l'élève, dans laquelle ils devraient s'interdire de pénétrer. Tous leurs élèves ont à connaître la discipline qu'ils ont reçu mission de leur enseigner. Quelques-uns de ces élèves l'aimeront, d'autres non, tandis que d'autres encore, simplement dociles, resteront à peu près indifférents. Inversement, un professeur ne saurait être interrogé (par ses élèves ou par quiconque) sur son « amour » de la discipline qu'il enseigne, non plus que sur sa capacité à la faire aimer, mais seulement sur sa capacité ***à la faire connaître***. Le fait qu'il aime la matière qu'il enseigne, le fait même qu'il aime la faire connaître ressortissent à sa vie privée et n'ont à être pris en compte que dans leurs conséquences éventuelles sur sa capacité à la faire connaître. Ajoutons que se donner pour objectif de faire aimer n'est pas seulement illégitime : c'est aussi prendre le risque de ne pas faire adéquatement connaître, en substituant à la chose à enseigner quelque autre chose jugée plus spontanément aimable.

☞ Résumons. L'École laïque n'impose aucune conception de la vie bonne mais fait travailler l'élève sur différentes conceptions existantes, dès lors du moins qu'une ***question sensible*** se pose à leur propos. Les enseignements scolaires correspondants fournissent à ce travail ***ouvert*** ses objets et ses outils, et cela dans une perspective laïque : en particulier, le professeur n'a pas à ***faire aimer*** sa matière (ce qui relève de l'autonomie individuelle et n'a pas à être imposé), mais à la ***faire connaître*** (en tant qu'objet et en tant qu'outil), en vue de concourir au travail sur les différentes conceptions de la vie bonne. Une école qui ne respecterait pas ces exigences ne saurait être dite laïque au sens fort. Ainsi en va-t-il de beaucoup d'écoles privées à cause déjà du rapport qui y prévaut à telle ou telle conception religieuse de la vie bonne ; ainsi en va-t-il aussi de beaucoup d'écoles publiques, et pour des motifs semblables, même lorsque les conditions d'une laïcité au sens restreint (relative au fait religieux) y sont scrupuleusement vérifiées.

Question 7. – L'apparent désengagement de l'École ainsi conçue face au problème des choix personnels des élèves n'ouvre-t-il pas la porte au risque d'un relativisme pour lequel toute réponse est, sinon bonne, du moins possible à l'égal de toute autre ? Que devient alors la vocation de l'École à répandre les lumières de la raison en prenant à partie tous les obscurantismes ?

☞ Si l'École s'interdit d'édicter les « bonnes réponses » et de dicter à l'élève « sa » réponse $R^{\heartsuit}$, elle s'autorise en revanche pleinement – tel est son devoir devant la République – à imposer à l'étude des élèves les réponses $R^{\Diamond}$ qui, dans l'enseignement qu'elle propose, seront mises à l'épreuve de la raison et des outils intellectuels et matériels en lesquels elle prend forme concrète. Or, sous le feu de cette exigence critique, les réponses $R^{\Diamond}$ étudiées cessent en règle générale de s'équivaloir : elles se distingueront notamment sous l'angle de la force probante des éléments de *preuve* que l'on pourra réunir pour fonder leur prétention à se proposer comme réponses adéquates aux questions posées. Parmi les réponses étudiées, certaines seront prouvées fausses ou, du moins, se révèleront périmées. D'autres apparaîtront difficilement falsifiables, et resteront donc en quelque sorte indécidables, du moins dans les conditions et sous les contraintes que l'enseignement donné ne parviendra pas à déplacer : on retrouve là le problème crucial, toujours vif, de la disponibilité (ou de la création) d'un « milieu » – le terme appartient plus proprement à la didactique –, c'est-à-dire d'un fragment de « nature », donc dénué d'intention, qui soit susceptible, si l'on sait l'interroger, de dire le vrai (ou une partie du vrai) sur la réponse mise en cause. D'autres réponses résisteront à un vaste ensemble d'épreuves effectives et se distingueront ainsi par une solidité qui leur vaudra, provisoirement, une validation au moins pragmatique. Tout cela rejoint ce que Condorcet écrivait dans le premier de ses *Cinq mémoires sur l'instruction publique* :

> La puissance publique ne peut même, sur aucun objet, avoir le droit de faire enseigner des opinions comme des vérités ; elle ne doit imposer aucune croyance. Si quelques opinions lui paraissent des erreurs dangereuses, ce n'est pas en faisant enseigner les opinions contraires qu'elle doit les combattre ou les prévenir ; c'est en les écartant de l'instruction publique, non par des lois, mais par le choix des maîtres et des méthodes ; c'est surtout en assurant aux bons esprits les moyens de se soustraire à ces erreurs, et d'en connaître tous les dangers.
>
> Son devoir est d'armer contre l'erreur, qui est toujours un mal public, toute la force de la vérité ; mais elle n'a pas droit de décider où réside la vérité, où se trouve l'erreur.

Soulignons que, comme on l'a suggéré avec d'autres mots dans ce qui précède, une opinion (ou une vérité) n'est pas intrinsèquement telle : une vérité qu'on peut prouver en telle institution savante, par exemple, peut devenir une opinion en telle autre institution, par exemple à l'École. Personne, ajoute Condorcet à ce propos, n'a le droit de dire : *Voilà ce que je vous ordonne de croire, et ce que je ne puis vous prouver.*

☞ Armer contre l'erreur, aider au triomphe du plus tenacement vrai suppose un choix adéquat de réponses $R^{\Diamond}$. Dans son cinquième mémoire, Condorcet note : « Il faut oser tout examiner, tout discuter, tout enseigner même. » Il faut ainsi, en particulier, discuter ces réponses $R^{\Diamond}$ avec lesquelles l'élève entrera le plus sûrement en contact, maintenant ou demain, et à partir desquelles, dans les institutions et au sein des « collèges invisibles » dont il deviendra membre il se trouvera porté à construire sa propre réponse $R^{\heartsuit}$. Ajoutons que, de ce point de vue, l'École a souvent marqué une réserve qui confine au pusillanime et conduit, en son sein, au dogmatisme de réponses uniques vécues comme seules orthodoxes. Hors d'elle et après elle, le citoyen qu'elle forme se trouvera en outre d'autant plus démuni que, par l'effet d'une certaine indifférence scolaire à la question de la *réception* sociale des réponses scolairement validées, ces dernières se révèleront peu robustes et donc sans grande effectivité dans les conditions et sous les contraintes où il s'agirait de les mobiliser – ce qui réduit d'autant le rôle de l'École au service du *laos*. Ce n'est donc pas de moins mais bien de *plus* de laïcité que l'École a aujourd'hui besoin.

2.3. Collectifs de travail

a) Une des questions parmi les treize données à « étoiler » était la suivante :

> Je compte remodeler mes groupes de module en un groupe qui ferait plutôt des mathématiques appliquées (MPI) et un groupe qui serait plus proche du cours. J'ai la crainte que cette organisation ne soit précoce. Qu'en pensez-vous ? (GB, OS, 2de, 14)

De cette question on peut rapprocher la question suivante :

Je compte organiser une séance de travail par groupe, en formant trois groupes et en donnant un exercice commun aux trois groupes avec un énoncé plus ou moins détaillé selon le groupe. Est-ce une bonne méthode ? Si je poursuis cette organisation dans l'année, je comptais faire un système de « groupes évolutifs », où les élèves eux-mêmes pourraient choisir de passer dans le groupe supérieur (avec mon accord, bien sûr). Cette démarche est-elle conseillée ? (LN, JT, 4^e^, 15)

b) Ces questions appellent quelques remarques assez générales.

1) Rappelons d'abord l'échelle des niveaux de détermination didactique de la séance 14 :

Civilisation ↔ Société ↔ École ↔ Pédagogie ↔ Discipline ↔ Domaine ↔ Secteur ↔ Thème ↔ Sujet

Le principe est que chaque niveau est le siège de conditions et de contraintes qui peuvent être ressenties à tous les niveaux, y compris au niveau le plus fin, celui du travail de la classe sur tel sujet mathématique, sur tel thème, etc.

2) Les niveaux d'intervention préférentiels du professeur sont ordinairement ceux du *thème* et du *sujet*, plus rarement celui du *secteur* ou du *domaine*. Mais il est vrai que les autres niveaux sont « actifs » et que la profession, sinon le professeur individuel, gagne à ne pas rester inerte à leur endroit ! Le professeur peut ainsi être conduit à intervenir au niveau pédagogique, pour modifier les conditions pédagogiques du travail de la classe, et cela, bien sûr, dans un sens souhaité plus favorable à l'étude et aux apprentissages visés.

3) Plusieurs dangers guettent pourtant. Le premier, classique, consiste à croire – de façon consciente ou non – que l'intervention au niveau pédagogique permettrait de régler l'essentiel des difficultés didactiques. Il n'en est rien : l'intervention au niveau pédagogique, qui doit toujours viser des effets d'organisation de l'étude (et non être adopté pour des raisons formelles, de conformisme aux modes pédagogiques par exemple), est souvent nécessaire ; *elle n'est jamais suffisante*. Un deuxième danger est de « manipuler » des variables pédagogiques sans avoir reconnu les effets de cette manipulation – qui peuvent se révéler toxiques, alors qu'on les espérait bénéfiques.

• C'est dans ce cas que l'on se trouve avec la « mode » aujourd'hui surannée des groupes de niveau. Pour ne prendre qu'un seul exemple, on a reproduit ci-après un passage de l'ouvrage de Pierre Merle cité plus haut, passage qui vient après un développement hautement critique intitulé « Humiliation et classes de niveau » (*op. cit.*, p. 41) :

Cette analyse vaut aussi pour les « groupes de niveau », parfois prônés comme remède à l'échec scolaire dans certains ouvrages pédagogiques, voire même dans les instituts universitaires de formation des maîtres, alors que leurs effets sont pourtant des plus incertains, voire négatifs (Crahay, 2000).

• Le problème tient évidemment à la stigmatisation et aux phénomènes de « prophéties auto-réalisatrices, sur lequel un exposé nous éclairera prochainement : on n'en dira pas davantage ici. On se contentera, en attendant, d'insister sur l'importance de travailler *avec la classe tout entière*, ce qui n'est pas plus antinomique du travail en équipe que du travail individuel.

2.4. Les angles et leur mesure

a) Plusieurs questions ont évoqué *en passant* ce que le programme de 2^de^ mentionne dans le commentaire suivant.

La définition de $\sin x$ et $\cos x$ pour un réel x quelconque se fera en « enroulant ℝ » sur le cercle trigonométrique. On fera le lien avec les sinus et cosinus de 30°, 45° et 60°.

1) Ainsi en va-t-il des questions ci-après.

1. Dans le cadre du TER, la séance observée a pour thème « repérage d'un point sur le cercle trigonométrique ». L'activité décrit « l'enroulement de ℝ » sur le cercle trigonométrique (repérage de π, 2π, d'angles particuliers et passage à ℝ tout entier). Nous avons longuement hésité sur la nature (tâche secondaire ou technique ?) à donner à « convertir un angle exprimé en radians en degrés » sachant que la tâche principale qui a émergé est : « *T*. Repérer un point sur le cercle trigonométrique ». Pouvez-vous nous aider ? (NA, JT, 4^{e}, 13)

2. J'aimerais organiser une séance informatique portant sur « l'enroulement de la droite réelle » sur le cercle trigonométrique. Cependant, je n'ai que 9 postes à ma disposition dans une salle *très* petite et une classe de 35 élèves. Dois-je quand même essayer de faire cette séance ou vaut-il mieux utiliser un ordinateur portable muni d'un rétroprojecteur ? (AC, OS, 2de, 14)

2) Deux autres questions se rapprochent davantage – sans encore le désigner clairement – de l'aspect le plus problématique, au plan strictement mathématique, du sujet évoqué.

1. En 2de, comment justifier l'utilisation des angles en radians, son utilité et ses avantages par rapport aux angles en degrés ? (CC, JT, 2de, 14)

2. Dans le programme de 2de, à propos des fonctions sinus et cosinus, il est écrit en commentaire : « La définition de $\sin x$ et $\cos x$ pour un réel x quelconque se fera en "enroulant" ℝ sur le cercle trigonométrique. » Par rapport au programme de cette classe, peut-on dire que c'est là la motivation de l'écriture des angles sous forme de radians ? (DV, CR, 2de, 15)

b) Pour répondre, il convient de s'arrêter d'abord sur la définition des *angles* du plan, question distincte (on le verra) de celle de leur *mesure*. Dans ce qui suit, on se situe dans un plan $\prod$ dont la structure euclidienne est supposée définie par une axiomatique non précisée, mais qui permet de développer les notions affines et métriques usuelles, et notamment la théorie des isométries du plan. On suppose donc qu'on dispose d'une organisation géométrique qui est, en gros, celle disponible à la fin de la 3^{e}, mais d'où on aurait écarté les notions d'angle et de mesure d'un angle. À cet égard, on notera le passage suivant du document d'accompagnement de l'actuel programme de 3^{e}.

Les activités sur la rotation en 3^{e} sont conduites dans le même esprit que celui qui a présidé à l'étude des symétries et de la translation les années précédentes. Elles serviront aussi de point d'appui, dans la poursuite des études, au travail sur le cercle trigonométrique et les angles orientés. On pourra remarquer qu'on obtient le même point en tournant de 300º dans un sens ou de 60º dans l'autre sens.

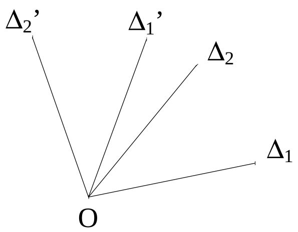
1) Comment définir alors l'angle de demi-droites Δ_1 et Δ_2 d'origine O (soit l'angle « que fait Δ_2 avec Δ_1 ») ? L'idée à mathématiser est que l'angle formé par les demi-droites Δ_1 et Δ_2 d'origine O et l'angle formé par les demi-droites Δ_1' et Δ_2' de même origine O est *le même angle*, ce qu'on pourra noter $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \widehat{(\Delta_1', \Delta_2')}$, si la rotation ρ qui transforme Δ_1 en Δ_2 transforme aussi Δ_1' en Δ_2'. On peut alors définir l'*angle* du couple de demi-droites (Δ_1, Δ_2) comme étant l'*ensemble* des couples de demi-droites (Δ_1', Δ_2') d'origine O telles que, si $\Delta_2 = \rho(\Delta_1)$, alors $\Delta_2' = \rho(\Delta_1')$, où ρ est une rotation de centre O. Plus généralement, on définira l'angle formé par les demi-droites Δ_1 et Δ_2 d'origine O comme l'ensemble des couples de

demi-droites (Δ_1', Δ_2') d'origine O' quelconque dans Π tels que, si $\Delta_2 = \rho(\Delta_1)$, alors $\Delta_2' = t_{OO'}\circ\rho\circ t_{OO'}^{-1}(\Delta_1')$.

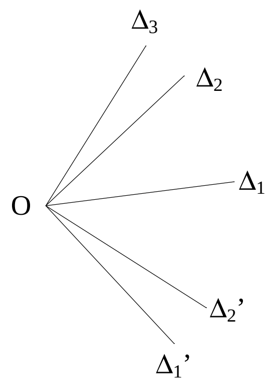
2) Inversant alors le point de vue adopté jusqu'ici, on dira que $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ est l'angle de la rotation de centre O qui transforme Δ_1 en Δ_2. C'est encore l'angle de la rotation $\rho = t_{OO'}\circ\rho\circ t_{OO'}^{-1}$ de centre O' qui transforme Δ_1' en Δ_2'. On parlera, tout court, de l'angle $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ et de l'ensemble $\mathcal{A}$ des angles *du plan*. Notons que, si les demi-droites Δ_1, Δ_2, Δ_1', Δ_2' ont la même origine O, et si r est la rotation qui transforme Δ_1 en Δ_1', on a :

$$r(\Delta_2) = r(\rho(\Delta_1)) = r\circ\rho(\Delta_1) = \rho\circ r(\Delta_1) = \rho(r(\Delta_1)) = \rho(\Delta_1') = \Delta_2'.$$

La rotation r qui transforme Δ_1 en Δ_1', transforme Δ_2 en Δ_2'. D'une manière générale, si r est une rotation de centre O, on a : $\widehat{(r(\Delta_1), r(\Delta_2))} = \widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$.



3) Les rotations de centre O forment un groupe commutatif. On peut donc munir l'ensemble $\mathcal{A}$ des angles du plan d'une structure de groupe additif de la façon suivante. Étant donné $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, soit des demi-droites Δ_1 et Δ_2 d'origine O telle que $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \alpha$ et des demi-droites Δ_1' et Δ_2' d'origine O telles que $\widehat{(\Delta_1', \Delta_2')} = \beta$. Soit r la rotation d'origine O qui transforme Δ_1' en Δ_2, et soit alors $\Delta_3 = r(\Delta_2')$.



Si ρ est la rotation de centre O et d'angle α et σ la rotation de centre O et d'angle β, on a :

$$\sigma\circ\rho(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2) = \sigma(r(\Delta_1')) = r(\sigma(\Delta_1')) = r(\Delta_2') = \Delta_3.$$

L'angle de la rotation $\sigma\circ\rho$ est donc l'angle du couple de droites (Δ_1, Δ_3). On pose :

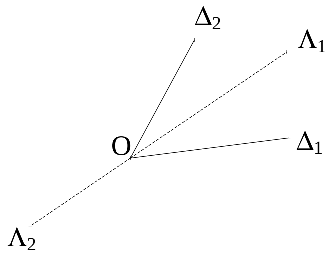
$$\alpha + \beta = \text{angle de } \sigma\circ\rho \ (= \text{angle } \rho\circ\sigma).$$

Si Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont des demi-droites d'origine O, on a donc : $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} + \widehat{(\Delta_2, \Delta_3)} = \widehat{(\Delta_1, \Delta_3)}$. C'est la relation de Chasles.

4) L'angle de la rotation qu'est l'identité du plan est l'angle *nul* : on a $\widehat{(\Delta, \Delta)} = 0$ quelle que soit la demi-droite Δ. Si Δ_2 est symétrique de Δ_1 par rapport à O, l'angle $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ est l'angle

plat, qu'on notera ϖ. L'angle $\varpi + \varpi = 2\varpi$ est celui de la rotation composée d'une rotation qui transforme Δ_1 en Δ_2 et d'une rotation qui transforme Δ_2 en Δ_1, en sorte que $2\varpi = \widehat{(\Delta_1, \Delta_1)} = 0$. Il en résulte en particulier que, dans le groupe des angles $\mathcal{A}$, on a $-\varpi = \varpi$. On a, d'une façon plus générale, $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} + \widehat{(\Delta_2, \Delta_1)} = \widehat{(\Delta_1, \Delta_1)} = 0$ et donc $\widehat{(\Delta_2, \Delta_1)} = -\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$.

5) Étant donné $\alpha \in \mathcal{A}$, soit Δ_1 et Δ_2 des demi-droites d'origine O telle que $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \alpha$. Soit alors les demi-droites Λ_1 et Λ_2 d'origine O portées par l'axe de la symétrie qui échange Δ_1 et Δ_2.



On a : $\widehat{(\Delta_1, \Lambda_1)} + \widehat{(\Delta_1, \Lambda_1)} = \widehat{(\Delta_1, \Lambda_1)} + \widehat{(\Lambda_1, \Delta_2)} = \widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$; et, de même, $\widehat{(\Delta_1, \delta_2)} + \widehat{(\Delta_1, \delta_2)} = \widehat{(\Delta_1, \delta_2)} + \widehat{(\delta_2, \Delta_2)} = \widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$. L'équation $x + x = \alpha$ a donc dans $\mathcal{A}$ deux solutions, $x_1 = \widehat{(\Delta_1, \delta_1)}$ et $x_2 = \widehat{(\Delta_1, \delta_2)}$, qui vérifient

$$x_2 - x_1 = \widehat{(\Delta_1, \delta_2)} - \widehat{(\Delta_1, \delta_1)} = \widehat{(\Delta_1, \delta_2)} + \widehat{(\delta_1, \Delta_1)} = \widehat{(\delta_1, \Delta_1)} + \widehat{(\Delta_1, \delta_2)} = \widehat{(\delta_1, \delta_2)} = \varpi.$$

L'équation $2x = \varpi$ a ainsi deux solutions : l'une est l'angle *droit* positif, notée δ, l'autre l'angle droit *négatif* $\delta - \varpi = \delta - (\delta + \delta) = -\delta$.

c) On suppose maintenant que, en accord avec le travail réalisé au collège, la construction « théorique » du plan $\prod$ a mis en évidence un corps de nombres $\mathcal{K}$, sous-corps de $\mathbb{R}$ qui, dans la suite, pourra être $\mathbb{R}$ ou un sous-corps strict de $\mathbb{R}$. Si l'on s'en tenait à $\mathcal{K} = \mathbb{Q}$, on ne pourrait pas même, en général, mesurer par exemple l'hypoténuse d'un triangle rectangle ; et l'intersection d'une droite et d'un cercle n'aurait pas souvent lieu ! On prendra donc, ici, *au moins*, $\mathcal{K} = \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est le corps des nombres *constructibles*, qui est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant des racines carrées de ses éléments positifs et qui, en pratique, permet de faire beaucoup de ce qu'il est usuel de faire au collège (sauf, on va le voir, la mesure des angles !). On suppose que le plan $\prod$ est muni d'un repère orthonormal (O, I, J), en sorte qu'on identifiera $\prod$ et $\mathcal{K}^2$.

1) Le premier résultat utile est le suivant. Toute *isométrie* f qui laisse (0, 0) fixe est une application *linéaire* de $\mathcal{K}^2$ dans $\mathcal{K}^2$. On en rappelle ci-après une démonstration simple.

Tout d'abord, soit M(x, y) un point de $\mathcal{K}^2$ et soit $\lambda \in \mathcal{K}$; on note N le point de coordonnées (λx, λy) ; on doit montrer que N' = λM', où N' = f(N) et M' = f(M). Supposons $\lambda > 0$; on a ON = OM + MN. Comme f est une isométrie, on a ON' = ON, OM' = OM, M'N' = MN en sorte qu'on a aussi ON' = OM' + M'N' : cette égalité indique que O, M', N' sont alignés, avec M' entre O et N'. On a en outre ON' = ON = λOM = λOM', et donc N' = λM'. Le cas $\lambda < 0$ se traite de manière analogue. Ensuite, soit M et N deux points de $\mathcal{K}^2$; la technique déjà mise en œuvre permet de montrer que le milieu de [MN] est transformé par toute isométrie en le milieu de [M'N'], où N' = f(N) et M' = f(M). On a donc $f\left(\frac{\text{M + N}}{2}\right)$

$= \dfrac{M' + N'}{2}$. Il vient ainsi : $f(M + N) = f\left(2\,\dfrac{M + N}{2}\right) = 2f\left(\dfrac{M + N}{2}\right) = 2\dfrac{M' + N'}{2} = M' + N'$. L'application f est donc bien linéaire.

2) Soit alors une rotation r et soit $I' = (a, b)$ l'image de I par r. Soit par ailleurs φ la rotation de centre O qui transforme I en J ; la rotation φ^2 est la symétrie de centre O. Comme on a $r(I) = I' = aI + bJ$ il vient : $r(J) = r(\varphi(I)) = \varphi(r(I)) = \varphi(aI + bJ)$. La rotation φ étant linéaire, on a : $r(J) = a\varphi(I) + b\varphi(J) = aJ - bI = -bI + aI$. La matrice de r est donc $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

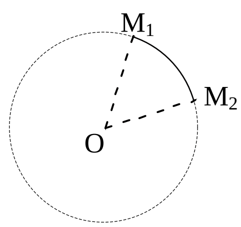
3) On peut alors, si l'on veut – c'est ce qu'on fait traditionnellement, et c'est ce qu'on fait au collège aujourd'hui encore –, introduire le *cosinus* et le *sinus* d'un *angle*. Si α est l'angle de la rotation r, c'est-à-dire aussi l'angle des demi-droites [OI) et (OI'), on pose $\mathrm{Cos}\,\alpha = a$, $\mathrm{Sin}\,\alpha = b$. On prendra garde à ce fait que les applications

$$\alpha \mapsto \mathrm{Cos}\,\alpha,\ \alpha \mapsto \mathrm{Sin}\,\alpha$$

ne sont pas, alors, des applications de $\mathcal{K}$ dans $[-1, 1]$, mais des applications du *groupe des angles* $\mathcal{A}$ dans $[-1, 1]$. On doit donc les distinguer des applications $t \mapsto \cos t$ et $t \mapsto \sin t$ de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$, dont on va voir plus loin la définition. Cette distinction a été marquée autrefois (durant les années de la réforme des « mathématiques modernes ») par le fait d'adopter – comme on le fera ici – les notations Cos et Sin pour les fonctions *d'un angle*, et cos et sin pour les fonctions *d'un nombre* (les élèves parlaient du « grand cosinus » et du « petit cosinus », etc.). Avec ces notations, la matrice d'une rotation d'angle $\alpha = \widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\,\alpha & -\mathrm{Sin}\,\alpha \\ \mathrm{Sin}\,\alpha & \mathrm{Cos}\,\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} & -\mathrm{Sin}\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} \\ \mathrm{Sin}\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} & \mathrm{Cos}\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} \end{bmatrix}.$$

d) Comment « mesurer » un angle ? L'idée à mathématiser est ici la suivante. Soit $\alpha = \widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ l'angle de deux demi-droites Δ_1 et Δ_2 d'origine O ; pour mesurer α, on peut vouloir *mesurer la longueur de l'arc* que les demi-droites Δ_1 et Δ_2 interceptent sur un cercle centré en son sommet, de rayon de longueur R.



1) Cette mesure est *a priori* non définie, puisqu'elle dépend de la longueur R du rayon. Pour cette raison, on choisit, pour la mesure *des arcs*, une unité de longueur u qui soit *proportionnelle* à R.

• Si l'on prend pour unité u la longueur d'un arc égal à la n-ième partie du cercle, on a $u = \dfrac{1}{n}(2\pi R) = \dfrac{2\pi}{n} R$. L'angle correspondant est dit alors de 1 *degré* si $n = 360$, de 1 *grade* si $n = 400$. Ainsi, pour $n = 360$, un angle interceptant un arc dont la longueur vaut $\dfrac{3}{8}$ de la longueur du cercle, soit un arc de longueur $\dfrac{3}{8} \times 360\,u = 135\,u$, est alors un angle de 135 degrés (noté 135º).

• Si l'on prend pour unité u la longueur du cercle, c'est-à-dire si $n = 1$, on a $u = 2\pi R$. L'angle correspondant est dit alors de 1 *tour* (et noté 1 tr). Ainsi un angle interceptant un arc dont la longueur vaut $\frac{3}{8}$ de la longueur du cercle, soit un arc de longueur $\frac{3}{8}u = 0{,}375\,u$, est alors un angle de 0,375 tour (ou de trois huitièmes de tour), noté 0,375 tr.

• Si l'on prend pour unité u la longueur d'un arc ayant même longueur que le rayon R du cercle, on a $u = R$. L'angle correspondant est dit alors de 1 *radian* (du latin *radius*, rayon). Ainsi un angle interceptant un arc dont la longueur vaut les $\frac{3}{8}$ de la longueur du cercle, soit un arc de longueur $\frac{3}{8}(2\pi\, u) = 0{,}75\pi\, u$, est alors un angle de $0{,}75\pi$ radians, ou $\frac{3\pi}{4}$ radians, ce qu'on note $0{,}75\pi$ rad, ou $\frac{3\pi}{4}$ rad.

• Les conversions de mesures peuvent se faire – par un calcul *qui rend inutile tout tableau de proportionnalité* – à partir des égalités de base : $180^{\mathrm{o}} = \pi$ rad, 1 tr $= 2\pi$ rad, etc. On a ainsi $\frac{3\pi}{4}$ rad $= \frac{3}{4}(\pi \text{ rad}) = \frac{3}{4} \times 180^{\mathrm{o}} = 135^{\mathrm{o}}$. Inversement, $135^{\mathrm{o}} = \frac{135}{180} \times 180^{\mathrm{o}} = \frac{135}{180} \times \pi \text{ rad} = \frac{3}{4} \times \pi \text{ rad} = \frac{3\pi}{4}$ rad. De même, $\frac{3\pi}{4}$ rad $= \frac{3}{8}(2\pi \text{ rad}) = \frac{3}{8}$ tr $= 0{,}375$ tr.

2) Pour une unité d'angle donnée, u, soit a le réel tel que

$$a\,u = 180° = \pi \text{ rad} = \dots$$

Soit $\cos_a$ et $\sin_a$ les applications de $\left[0, \frac{a}{2}\right[$ définie par

$$\cos_a(x) = \mathrm{Cos}(x\,u) \text{ et } \sin_a(x) = \mathrm{Sin}(x\,u)$$

où Cos et Sin sont les notions définies au collège. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a ainsi :

$$\cos_\pi(x) = \mathrm{Cos}(x \text{ rad}) = \mathrm{Cos}\left(\left(\frac{180x}{\pi}\right)^{\mathrm{o}}\right).$$

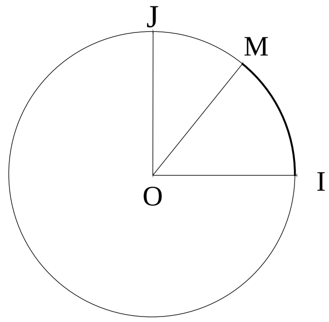
On aura par exemple :

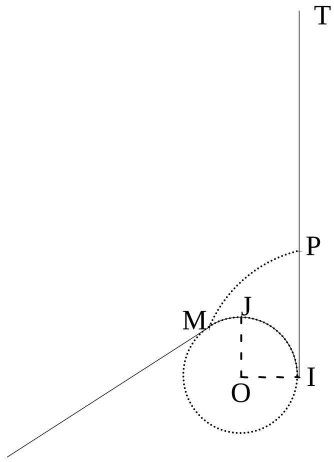
$$\cos_\pi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right) = \mathrm{Cos}\ 45^{\mathrm{o}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \cos_\pi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right) = \mathrm{Cos}\ 30^{\mathrm{o}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.5. La mesure des angles

a) La « mesure des angles » évoquée ci-dessus – à l'aide de la mesure des longueurs d'arcs de cercle – pose problème. Considérons par exemple l'angle droit δ ; la longueur de l'arc correspondant, sur un cercle de rayon 1, est mesurée par le nombre $\frac{\pi}{2}$. Or $\frac{\pi}{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$, ni même à $\mathcal{C}$: les nombres constructibles sont en effet des nombres algébriques particuliers ; or π, et donc $\frac{\pi}{2}$, n'est pas algébrique (il est transcendant : Lindemann, 1882). En d’autres termes, si l’on prend $\mathcal{K} = \mathcal{C}$, le quart de cercle de rayon 1 *n’a pas de longueur*, de la même façon que, si l’on prend $\mathcal{K} = \mathbb{Q}$, l’hypoténuse d’un triangle rectangle n’a, en général, pas de longueur.

b) On va donc, en 2de, poser à nouveaux frais la question de la mesure des angles. Pour cela, on travaille avec un cercle de rayon 1, de centre l’origine du repère qui permet d’identifier Π à $\mathcal{K}^2$. Ce cercle est, on le sait, appelé « cercle trigonométrique ». On pourrait aussi bien le nommer « cercle des angles du plan » : tout angle $\alpha \in \mathcal{A}$ peut être représenté de façon unique sous la forme $\widehat{(\Delta_{\mathrm{I}}, \Delta)}$, où Δ_{I} = [OI) et où Δ = [OM) est une demi-droite d’origine O (voir la figure ci-dessous à gauche). « Mesurer » l’angle α revient alors à mesurer l’arc $\overset{\frown}{\mathrm{IM}}$. Pour cela, l’idée est d’enrouler sur le cercle une « ficelle » [IT], puis de mesurer la longueur IP du morceau de ficelle enroulé.

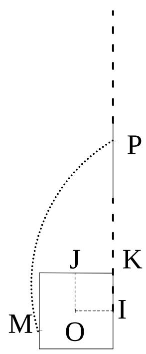




c) Le problème est bien sûr de mathématiser cet enroulement. La chose est-elle possible ? On a vu qu’elle ne l’est pas si $\mathcal{K} = \mathcal{C}$. Afin d’un peu mieux percevoir la difficulté, on va d’abord examiner un problème analogue, mais dont la solution est élémentaire : l’enroulement d’une ficelle sur un *carré* de centre O et de côté 2.

1) On utilise le repère (O, I, J) du plan. Sur la droite d’équation $x = 1$, on prend le repère (I, K), et on pose alors $\overline{\mathrm{IP}} = t$, en sorte que P a, dans le plan, pour coordonnées $(1, t)$. L’application d’enroulement $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{M}$ a alors pour expression analytique :

$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow x_{\mathrm{M}} = 1, y_{\mathrm{M}} = t$
$1 \leq t \leq 3 \Rightarrow x_{\mathrm{M}} = 2 - t, y_{\mathrm{M}} = 1$
$3 \leq t \leq 5 \Rightarrow x_{\mathrm{M}} = -1, y_{\mathrm{M}} = 4 - t$
$5 \leq t \leq 7 \Rightarrow x_{\mathrm{M}} = t - 6, y_{\mathrm{M}} = -1$
$7 \leq t \leq 8 \Rightarrow x_{\mathrm{M}} = 1, y_{\mathrm{M}} = t - 8$



On voit ici que, quel que soit le choix du sous-corps $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}$, on peut enrouler la droite $\mathcal{K}$-numérique sur le $\mathcal{K}^2$-carré considéré, en ce sens que la transformation est *bien définie* (aucun point de la $\mathcal{K}$-ficelle ne tombe sur un « trou » du $\mathcal{K}^2$-carré), et qu’elle est *surjective* (tout point du carré est touché).

2) Si l'on remplace le carré par le cercle trigonométrique, la situation devient très différente : *on l'examinera la prochaine fois*.

3. Forum des questions : exposés à venir

3.1. Programmes de calcul et calcul algébrique

a) Cet exposé examinera ce qu'apportent les archives du Séminaire à propos de la question suivante.

Exposé 26. Qu'est-ce que l'expression algébrique d'un programme de calcul ? Pourquoi peut-on dire que le calcul algébrique est un calcul sur les programmes de calcul ?

b) L'exposé sera proposé et présenté par *AI*.

3.2. La notion de droite, entre physique et mathématiques

a) Cet exposé fera parler les archives du Séminaire sur le sujet suivant.

Exposé 27. En quoi peut-on dire que la notion de droite n'est pas complètement mathématisable ?

b) L'exposé sera proposé et présenté par *JNM*.

3.3. Pourquoi le radian ?

a) Cet exposé interrogera les archives du Séminaire sur le « mystère » suivant.

Exposé 28. Pourquoi utilise-t-on le radian en mathématiques ?

b) L'exposé sera proposé et présenté par *JB*.

3.4. Effet Pygmalion et effets de contexte

a) Cet exposé présentera ce que livrent les archives du Séminaire sur le sujet que voici.

Exposé 29. En quoi les attentes formulées à l'endroit des élèves influent-elles sur leurs performances scolaires ?

b) L'exposé sera proposé et présenté par *PL*.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 17 : mardi 31 janvier 2006

0. Le programme de la séance

➔ Matin : 0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions : poursuites & anticipations.

➔ Après-midi (explicitation) : 2. Questions & formation // 3. Forum des questions : exposés à venir.

Matin

1. Forum des questions : poursuites & anticipations

1.1. Questions saillantes, questions choisies

a) On revient brièvement à la question des violences à l'école avec la question suivante.

> Un incident est survenu dans mon cours le jeudi 19 janvier. Alors que nous étions en cours, en milieu de deuxième heure, la porte de ma classe s'est légèrement entrouverte et une personne a jeté un pétard allumé dans la salle. Six élèves se sont alors jetés en arrière. Avec la règle du tableau, j'ai « expulsé » l'explosif dehors et celui-ci a explosé dans le couloir. Je n'ai malheureusement pas vu l'identité du perturbateur, mais ce n'était pas quelqu'un de la classe. J'ai ensuite continué le cours jusqu'à la sonnerie finale. Puis je suis allé faire un rapport à la vie scolaire. Mes questions sont les suivantes :
>
> – aurais-je dû arrêter le cours et envoyer tout le monde en étude ?
>
> – que dois-je faire suite au rapport que j'ai rédigé ?
>
> De toute façon, je ne compte pas en rester là car je considère que c'est une agression envers l'intégrité physique des élèves et du professeur. (DV, JT, 2de, 16)

1) La réaction du professeur a sans doute été la bonne – si l'on en croit le récit qui est fait ici. Après la préservation de l'intégrité physique des personnes concernées (professeur, élèves, etc.), c'est l'accomplissement de la mission impartie à l'école qu'il s'agit de privilégier. Dans la mesure donc où les effets de l'agression ont été heureusement des plus limités, tant physiquement que psychologiquement (ce qu'on imagine sans en être sûr), l'important est que la séance de travail continue jusqu'à son terme. Dans une autre configuration, notamment si le pétard avait explosé dans la classe, la décision d'interrompre la séance aurait vraisemblablement été inévitable.

2) Le règlement intérieur proscrit fréquemment l'introduction dans l'établissement de multiples objets, dont les pétards. C'est ainsi que, dans le règlement intérieur d'un collège de l'académie de Versailles – le collège George Sand de Magnanville –, on peut lire ceci (voir http://www.ac-versailles.fr/etabliss/clg-sand-magnanville/reglemt.htm).

L'introduction et/ou le port dans le collège de toute arme et/ou objet pouvant présenter un caractère dangereux sont strictement interdits (liste non limitative = couteaux divers, briquets, bouteilles, allumettes, vaporisateurs, pétards, lasers…).

Il en va souvent ainsi s'agissant des collèges ; les formulations adoptées peuvent être plus vagues s'agissant des lycées. Dans tous les cas, et particulièrement si un tel incident – l'importation et l'usage de pétards dans l'établissement – n'est pas un cas strictement isolé, on peut envisager une réaction collective consistant à faire lire par un membre du service de la vie scolaire (ou de la direction de l'établissement) un court texte de rappel au règlement et de mise en garde. Mais une telle démarche doit prendre en compte la situation analysée lors de la séance précédente du Séminaire – celle d'une organisation de la « société scolaire » marquée par un fort *dualisme* au plan des personnes –, dualisme qui ne peut manquer d'avoir des conséquences parfois dévastatrices.

3) Le premier effet du dualisme peut être de provoquer, chez les professeurs, des réactions non *proportionnées* à l'acte commis. D'un côté, on pourra se porter aux extrêmes en faisant jouer son *droit de retrait* (dont l'usage n'est certes pas à écarter, mais à apprécier de façon idoine). D'un autre côté, et c'est cela que l'on peut craindre ici, la tendance débonnaire, voire laxiste l'emportera, les élèves étant regardés comme des « gamins », ce qui leur vaudrait absolution au nom de l'incommensurabilité de ces « gamins » avec « nous ». En pratique, la mise en garde évoquée ci-dessus sera alors reçue avec des sourires entendus par certains des professeurs, qui marqueront ainsi leur connivence muette mais non moins complaisante avec « leurs » élèves. Bien entendu, une telle reculade devant la situation créée pourra se produire *en amont*, la direction de l'établissement se refusant à réagir à ce qu'elle voudra regarder peut-être comme de simples espiègleries.

4) Une autre difficulté du dualisme invoqué tient à la méconnaissance que ce dualisme engendre quant aux significations possibles de l'acte commis aux yeux de qui le commet ou de ses « pairs ». L'usage de pétards – catégorie dite K1 des « artifices de divertissement », qui peuvent être « cédés » à des mineurs à partir de 8 ans et qui ne donnent pas lieu à des « des projections perforantes à une distance supérieure ou égale à 0,50 mètre » (on pourra là-dessus consulter le site de l'Association Nationale et Européenne d'Instruction Pyrotechnique : http://www.aneip.com/moteur.htm) – semble être actuellement très prisé des enfants et adolescents. C'est en tout cas un moyen sûr de perturber agressivement l'« ordre adulte », ne serait-ce que par le bruit provoqué. Une rapide recherche sur Internet livre à ce sujet une moisson significative. On trouve par exemple (http://www.chez.com/mrluje/classe.html), sur une page intitulée « Les gags pour ne pas s'ennuyer en classe », « gags » qui tous visent en priorité le professeur, l'item suivant.

The Bombe

Le gag le + suicidaire : allez acheter des mammouths (LES + gros PETARDs) et scotché les comme un bloc de dynamite. BALANCEZ-LE dans la salle style passe à 10 (je sais c débile mais ça fout la frousse).

Sur le site d'un Guillaume de treize ans (http://www.chez.com/simpsonsfamily/page3.html) consacré à la famille Simpson, on lit cette présentation de Bart Simpson (les dates indiquées – on serait en 1992 – semblent incompatibles avec l'histoire de l'Internet : mais les connaisseurs savent que Bart est un être à part).

Bart est l'aîné des enfants chez la famille Simpson. Il est né en 1982, donc il a 10 ans. Il est en 4e primaire. Il mesure 1 m 25. Il a aussi quelques passe-temps : lancer des pétards, rouler en skate, ne pas étudier, déranger la classe durant les cours, faire des graffitis (souvent « El Barto »), regarder Itchy et Scratchy… Bref ! La liste est encore longue.

On trouvera une description beaucoup plus complète de ce personnage célèbre à l'adresse suivante : http://en.wikipedia.org/wiki/Bart_Simpson ; on y cherchera en vain la référence à l'usage de pétards, que le jeune Guillaume a pourtant sélectionné dans une liste de « gags » en effet fort longue, où l'on voit Bart – « El Barto » – commettre des tours beaucoup plus pendables. Le choix n'est donc sans doute pas fortuit : lancer des pétards a, si l'on peut dire, le vent en poupe ! Le reconnaître, savoir que ce geste est doté d'une certaine valeur transgressive dans une certaine culture juvénile, permet de mieux cerner le noyau de ce qui est à reprocher à l'auteur de l'acte : non pas, en soi, de faire exploser des pétards, mais d'en avoir introduit dans l'enceinte de l'établissement et surtout d'en avoir fait un usage inspiré par la volonté de nuire à des élèves et à leur professeur, ce qui est éminemment répréhensible, que ce soit *au lycée ou ailleurs*. Si la transgression est parfois structurante chez l'adolescent, elle ne l'est qu'à la condition de se heurter à la réalité humaine et institutionnelle, fonction qui n'est plus assumée dès lors que la réalité en question se dérobe, ce que le maintien du dualisme « Eux et Nous » ne peut que favoriser.

b) On s'arrête maintenant sur une question choisie lors de la consultation réalisée dans les GFP le mardi 24 janvier après-midi.

Jusqu'à quel point doit-on rester « sourd » aux insultes proférées à voix basse par les élèves ? (CM, MJ, 5e, 15)

1) L'évolution prônée lors de la séance précédente et encore dans ce qui précède est loin d'être réalisée ! Il s'agit seulement d'y travailler autant qu'il est possible.

2) À titre d'entrée en matière, voici un échange – dont on a conservé l'hétérographie – sur un forum Internet à propos du renvoi de trois élèves accusés d'avoir insulté certains de leurs professeurs sur leurs blogs (http://www.virtualife.fr/forum/lofiversion/index.php/t921.html).

boredom killeuse Jeudi 17 Mars 2005 à 17h26
Trois élèves du collège Henri Matisse de Garges-lès-Gonesse ont été exclus pour avoir insulté des professeurs et diffusé leurs photos sur des blogs.
Des photos de professeurs du collège « prises à leur insu » et accompagnées de « commentaires calomnieux » et d'« insultes » étaient diffusées sur les blogs des trois adolescents, a indiqué le principal du collège.
Sur un des blogs, une enseignante était notamment qualifiée de « folle », a précisé Martine Vaugel. Etaient également diffusées des photos d'élèves légendées de « commentaires salaces ».
Aujourd'hui effacés, ces blogs avaient été découverts par hasard par un professeur de l'établissement sur le site www.skyblog.com, géré par la radio Skyrock.
Jack Jeudi 17 Mars 2005 à 17h28
Ridicule et pathétique de la part de l'établissement.
« Folle » quelle injure... on parle de la violence des jeunes par rapport aux professeurs de nos jours et on pénalise trois internautes d'avoir traité leur prof de folle sur un blog ?
Où va le monde
PeLuChE Jeudi 17 Mars 2005 à 19h25
Je suis d'accord, Punképeik va pouvoir en dire long...
Et moi aussi mais un peu moin.

J'ai mis dans mon blog, des photos prisent dans l'enceinte du collège, donc la principal a convoqué tous les élèves du collège dans la même circonstance que oi,et elle nous aconvoqué, et je me suis tapée un blaam dans mon bulletin.
Et puis il y en a d'autre (c'st pasr ça que çça à commencé dailleurs) qui ont aussi insulté et mis des phoos de professeur. Mais par contre grâce a ça me suis disputé avec mon amie trop génial, enfin je vais pas raconter ma vie
Mais jusqu'a renvoyer les élèves de l' école c'est vraiment dégueulasse, un blaam ça aurait « suffit ».
Johaann Jeudi 17 Mars 2005 à 20h56
Simplement renvoyés ?
J'espère que les profs ont porté plainte.
Jack Jeudi 17 Mars 2005 à 21h21
QUOTE(Johaann @ Mar 17 2005, 07:56 PM)
Simplement renvoyés?
J'espère que les profs ont porté plainte.
N'as-tu donc aucune conscience ?
Porter plainte contre des gamins puérils de 14 ans ?
PeLuChE Jeudi 17 Mars 2005 à 21h33
Et alors, ils peuvent porter plainte, je ne vois pas ce que ça changed'avoir 14 ans
Jack Jeudi 17 Mars 2005 à 21h48
A 14 ans on ne réfléchit pas forcément lorsque l'on parle....
Porter plainte contre eux c'est immoral, tout le monde a déjà dit du mal de ses profs, la différence c'est que maintenant les jeunes ont internet et s'expriment sur des blogs.
PeLuChE Jeudi 17 Mars 2005 à 21h55
Ah d'accor j'avais mal compris dsl
Je croyais que tu voulais que l'on porte plainte contre eux.
Jack Jeudi17 Mars 2005 à 22h03
QUOTE(PeLuChE @ Mar 17 2005, 08:55 PM)
Ah d'accor j'avais mal compris dsl
Je croyais que tu voulais que l'on porte plainte contre eux.
Non c'est johaaann qui défend cette idée.
Cynthia Vendredi 18 Mars 2005 à 15h57
Je suis d'accord avec toi Jack, c'est vraiment poussé de les virer, surtout que quand on fait prof, on doit s'attendre à ce que les élèves disent du mal, ça a toujours été comme ça!
Mais il y a un trcu que je ne comprends pas, comme ce qu'on fait les gamins c'était en dehors des heures de cours, donc, logiquement les profs n'ont aucun droit sur eux non?
Jack Vendredi 18 Mars 2005 à 18h33
Avec noms et photos ça peut être considéré comme de la diffamation mais tu as raison normalement ça n'a aucun rapport avec l'école, à la limite les profs pourraient porter plainte...
PeLuChE Vendredi 18 Mars 2005 à 20h57
Ils peuvent porter pliante surotut parce que ils ont été mis sur un site , et on ne leur a pas demander, et puis en plus ac des propos diffamatoire ... Mais jusqu'a les renvoyer je trouve ça injuste, les adultes pourraient les pardonner, enfin on peut appeler ça une erreur de jeunesse nan?
Busty Samedi 19 Mars 2005 à 13h06
QUOTE(PeLuChE @ Mar 18 2005, 07:57 PM)
Ils peuvent porter pliante surotut parce que ils ont été mis sur un site , et on ne leur a pas demander, et puis en plus ac des propos diffamatoire ... Mais jusqu'a les renvoyer je trouve ça injuste, les adultes pourraient les pardonner, enfin on peut appeler ça une erreur de jeunesse nan?
c'est clair

3) Plusieurs traits méritent d'être notés dans l'échange précédent :

– tout d'abord le *« "Eux" et "Nous" »*, très net, qui s'exprime notamment par la croyance (ou l'affirmation) que, hors de la classe, et *a fortiori* hors de l'établissement, les professeurs n'auraient rien à redire aux agissements de leurs élèves, ce qui est oublier typiquement la *personne*, ici *non reconnue*, qui assume la fonction de professeur ;

– ensuite, ce qui souligne le trait précédent auquel il sert de repoussoir, la tentative (opérée par « Johaann ») de rompre ce dualisme exacerbé, en rappelant de manière simplifiée *l'égalité de dignité des personnes*, qu'elles soient « élèves » ou « professeurs » ;

– enfin, la revendication d'une certaine *impunité*, justifiée en s'appuyant sur le « postulat dualiste », pour les méfaits juvéniles.

4) Voici maintenant, à propos de la même affaire et d'affaires analogues, une présentation de points de vue *moins dualistes* dans un article de l'hebdomadaire *Le Nouvel Observateur* (http://archquo.nouvelobs.com/cgi/articles?ad=multimedia/20050324.OBS2044.html&host=http://permanent.nouvelobs.com/).

L'exclusion d'élèves critiquée

Huit collégiens ont été exclus ces derniers jours pour avoir critiqué des professeurs sur leurs journaux sur internet, mesures jugées « disproportionnées » par les parents d'élèves et un syndicat lycéen.

Huit collégiens ont été exclus ces derniers jours pour avoir critiqué des professeurs sur leurs blogs (journaux intimes sur internet), mesures jugées « disproportionnées » mercredi 23 mars par les parents d'élèves et un syndicat lycéen, et peu représentatives pour l'Education nationale.
À chaque fois, les collégiens, venant notamment du Val-d'Oise, du Puy de Dôme et de la Somme et considérés comme de « bons élèves », s'étaient moqués de leurs professeurs par le biais de dessins, de photos ou d'insultes parfois colorées.
« Ce genre de choses doit être sanctionné mais pas comme ça, par le dialogue, il faut faire comprendre aux élèves que la vie en société ne marche pas comme ça », a estimé une représentante du syndicat lycéen Fidl. Selon elle, l'exclusion définitive est « disproportionnée ».

« Les jeunes… »

« On est dans un contexte où les jeunes croient qu'on peut dire tout, qu'il n'y a pas de limite et les jeunes se jettent dessus, c'est à l'Éducation nationale de remplir son rôle et d'apprendre aux jeunes à distinguer public et privé », a ajouté Georges Dupon-Lahitte, président de la FCPE, principale fédération de parents d'élèves.
Selon lui, « ces exclusions sont disproportionnées », d'autant plus qu'il s'agit « d'un acte extérieur à l'École sanctionné par le règlement intérieur des établissements ».
Le délégué interministériel aux usages d'internet Benoît Sillard a assuré que le gouvernement n'entendait pas « interdire les blogs ». « Dans 99 % des cas, les problèmes « ont été réglés en interne par des discussions entre enseignants et élèves », a-t-il assuré.
Très en vogue – un élève sur deux en anime ou y participe selon le ministère –, les blogs sont des sites internet personnels consultables par tous et ouverts aux commentaires des internautes. Parfois thématiques, ils se concentrent sur le hobby de l'adolescent ou sur des questions d'actualité. Ils peuvent aussi rassembler des récits de la vie quotidienne, des photos et des réflexions, à l'image d'un journal intime.

« Par dix personnes »

« La portée d'un blog est très limitée, potentiellement, ça peut être lu par tout le monde mais, en réalité, c'est lu par dix personnes », a estimé la Fidl.
Le ministère de l'Éducation nationale a « une action systématique de formation et de sensibilisation en amont » aux droits et devoirs des internautes, une charte figurant même depuis la rentrée dans le règlement intérieur des établissements scolaires, a précisé M. Sillard.
Un des collégiens exclus, scolarisé au collège Teilhard-de-Chardin de Chamalières (Puy-de-Dôme), avait rédigé sur son blog – détruit depuis – des propos insultants concernant plusieurs professeurs, qualifiés de « petits péteux », de « brochettes de boulets » ou d'« imbécile heureuse », selon le principal.
Trois élèves du collège Henri-Matisse de Garges-lès-Gonesse (Val d'Oise) ont été exclus parce que des photos de professeurs du collège « prises à leur insu » et accompagnées de « commentaires calomnieux » et d'« insultes » étaient diffusées sur leur blog.

À Amiens (Somme), deux élèves de 3e du collège privé Saint-Martin avaient dessiné des caricatures, écrit des insultes et porté des « diffamations assez graves » à l'encontre de plusieurs professeurs, selon le directeur.
Un des chefs d'établissement a justifié sa décision par la difficulté que l'élève aurait désormais à se retrouver en présence des professeurs insultés, un autre a relevé que de tels comportements étaient « la porte ouverte à tout ».

5) L'usage insultant de blogs par des élèves a suscité une vive réaction de la part des professeurs comme des administrations. Dans le type de cas évoqué par la question examinée ici, l'insulte lancée « discrètement » constitue un type de faits dont d'aucuns tendent à s'accommoder comme allant *presque* de soi, dans la mesure où il s'agit de propos quasi « intimes » (tenus à voix basse, souvent peu audibles), et non de déclarations « extimes », quasi publiques ; et cela parce que la chose serait « traditionnelle », inévitable, proprement incoercible !

• Ce qui a été dit jusqu'ici permet cependant de formuler les choses ainsi. L'élève insulteur (de même que le professeur insulteur) use de son statut d'*élève* (respectivement, de professeur) alors que c'est la *personne* de l'élève (resp. du professeur) qui insulte *une autre personne* (le professeur, resp. l'élève). Or ce qui doit être visé, c'est le refus de cet usage abusif d'un système de statuts qui fonderait la légitimité de l'insulteur, et cela en rappelant à l'élève offenseur que c'est en lui la *personne* qui, en se cachant derrière l'élève, *insulte*, et que cette « personne insultante » offense la *personne* du professeur par delà le professeur.

• Il peut arriver que des insultes à professeur, lancées par des élèves majeurs, fassent l'objet d'une décision de justice sévère, comme l'indique le *Café pédagogique* dans une brève de février 2003 reproduite ci-après (http://www.cafepedagogique.net/disci/actu/31.php).

Selon une dépêche AFP, deux lycéens majeurs de Villefranche-sur-Saône ont été condamnés à trois mois de prison avec sursis et une amende de 1000 euros de dommage et intérêts pour « outrage en réunion à une personne chargée d'une mission de service public ». Ils avaient insulté leur professeur de mécanique pendant son cours.

Mais il s'agit là de cas qu'on peut espérer rares. Dans le cas évoqué par la question, avec des élèves mineurs, le premier niveau de réaction est le *relevé* des insultes incontestables, ce relevé étant porté aussitôt à la connaissance de l'élève insulteur (à l'instar des cartons jaunes et rouges utilisés par les arbitres de football). À un deuxième puis à un troisième niveau, ce relevé prélude à un *rapport* adressé par le professeur aux autorités de l'établissement puis à une information faite par écrit aux parents (par le truchement du carnet de liaison). La réparation peut se réaliser, comme dans la société des humains, par le moyen d'excuses orales ou écrites dont la sincérité soit aussi incontestable que l'était l'injure proférée.

6) Rappelons ici ce passage de la circulaire n° 2000-105 du 11 juillet 2000 (BO Spécial n° 8 du 13 juillet 2000 : http://www.education.gouv.fr/bo/2000/special8/default.htm).

2.2. Les punitions scolaires

Considérées comme des mesures d'ordre intérieur, elles peuvent être prononcées par les personnels de direction, d'éducation, de surveillance et par les enseignants ; elles pourront également être prononcées, sur proposition d'un autre membre de la communauté éducative, par les personnels de direction et d'éducation.

La liste indicative ci-après peut servir de base à l'élaboration des règlements intérieurs des établissements :

– inscription sur le carnet de correspondance ;

– excuse orale ou écrite ;

– devoir supplémentaire assorti ou non d'une retenue ;

– exclusion ponctuelle d'un cours. Elle s'accompagne d'une prise en charge de l'élève dans le cadre d'un dispositif prévu à cet effet. Justifiée par un manquement grave, elle doit demeurer tout à fait exceptionnelle et donner lieu systématiquement à une information écrite au conseiller principal d'éducation et au chef d'établissement ;

– retenue pour faire un devoir ou un exercice non fait.

Toute retenue doit faire l'objet d'une information écrite au chef d'établissement.

Les devoirs supplémentaires effectués dans l'établissement doivent être rédigés sous surveillance.

Les punitions infligées doivent respecter la personne de l'élève et sa dignité : sont proscrites en conséquence toutes les formes de violence physique ou verbale, toute attitude humiliante, vexatoire ou dégradante à l'égard des élèves.

Il convient également de distinguer soigneusement les punitions relatives au comportement des élèves de l'évaluation de leur travail personnel. Ainsi n'est-il pas permis de baisser la note d'un devoir en raison du comportement d'un élève ou d'une absence injustifiée. Les lignes et les zéros doivent également être proscrits.

2.3. Les sanctions disciplinaires

Les sanctions sont fixées dans le respect du principe de légalité et doivent figurer dans le règlement intérieur de l'établissement.

L'échelle des sanctions est celle prévue par le décret du 30 août 1985 modifié :

– avertissement,

– blâme,

– exclusion temporaire de l'établissement qui ne peut excéder la durée d'un mois, assortie ou non d'un sursis total ou partiel,

– exclusion définitive de l'établissement assortie ou non d'un sursis.

Le blâme constitue une réprimande, un rappel à l'ordre verbal et solennel, qui explicite la faute et met l'élève en mesure de la comprendre et de s'en excuser. Adressé à l'élève en présence ou non de son ou ses représentants légaux par le chef d'établissement, il peut être suivi d'une mesure d'accompagnement d'ordre éducatif.

Lorsque le sursis est accordé, la sanction est prononcée, mais elle n'est pas mise en exécution, dans la limite de la durée du sursis, en cas de sursis partiel. Il est précisé que la récidive n'annule pas le sursis. Elle doit donner lieu à l'engagement d'une nouvelle procédure disciplinaire.

Le chef d'établissement transmettra au recteur d'académie, sous couvert de l'inspecteur d'académie, directeur des services départementaux de l'éducation nationale, les procès verbaux des conseils de discipline et un état trimestriel des exclusions éventuellement prononcées avec leurs motifs.

Dès lors que les punitions et les sanctions qui peuvent être prononcées dans l'établissement scolaire sont clairement définies, toute mesure qui a pour effet d'écarter durablement un élève de l'accès au cours et qui serait prise par un membre des équipes pédagogique et éducative en dehors des procédures réglementaires décrites dans la présente circulaire, est assimilable à une voie de fait susceptible d'engager la responsabilité de l'administration.

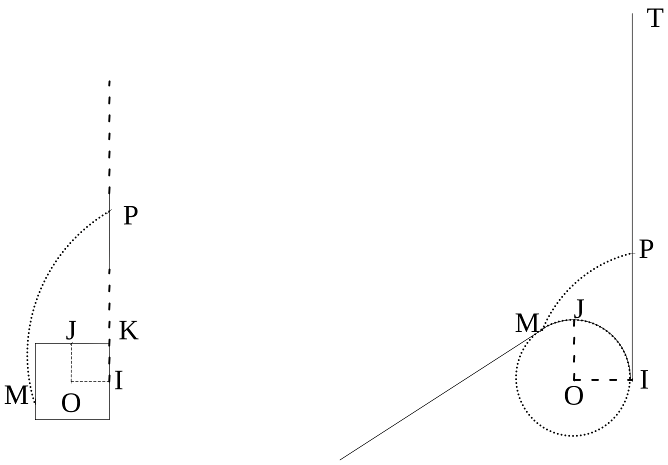
• Dans la perspective d'évolution esquissée et défendue ici, on s'abstiendra, ainsi que cela a été souligné lors d'un premier travail sur les sanctions et les punitions, de recourir à un « devoir supplémentaire assorti ou non d'une retenue », ce qui reviendrait du même coup, d'une part à instrumentaliser sa discipline, d'autre part à interpeller la personne de l'insulteur en tant qu'élève et non en tant que personne. (Bien entendu, il en va tout autrement de la « retenue pour faire un devoir ou un exercice non fait », qui, visant seulement à créer des conditions idoines au déroulement de l'étude, est à cet égard parfaitement légitime.)

• Du point de vue élaboré jusqu'ici, on devra rejeter des suggestions telle que celle-ci (Élisabeth Maheu, *Sanctionner sans punir*, Chronique sociale, Lyon, 2005, p. 221) : « Face à l'enfant qui injurie l'animateur… la sanction s'impose : ce pourrait être chercher la définition de l'injure dans le dictionnaire des synonymes, puis chercher d'autres qualificatifs qu'il aimerait entendre pour lui-même… » Un travail sur les injures est bien entendu possible ; mais il ne saurait être regardé comme une punition (ou une « sanction ») : il peut adéquatement participer de l'instruction qui permet à chacun de retravailler ses praxéologies relationnelles, lesquelles ne sont pas moins à faire évoluer – dans un cadre approprié – que les praxéologies mathématiques dès lors qu'elles apparaissent inadéquates, voire dangereuses. De la même façon, dans le cadre par exemple du thème de convergence « Sécurité » (voir la notice *L'espace de l'étude*), au collège, ou dans le cadre des TPE, au lycée, on pourra étudier les dangers de l'usage des « artifices de divertissement », la législation qui l'encadre, etc. Non pour punir, mais pour éclairer et pour prévenir.

1.2. La mesure des angles, *suite*

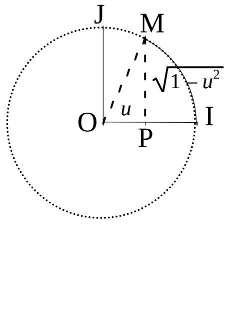
a) On poursuit ici l'étude de la « mesure des angles », en commençant par un bref rappel.

1) On a vu que l'enroulement d'une $\mathcal{K}$-ficelle autour d'un $\mathcal{K}^2$-carré (figure ci-dessous, à gauche) ne pose pas de problème, quel que soit le sous-corps $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}$: l'application correspondante est bien définie sur $\mathcal{K}$ et est *surjective*, c'est-à-dire qu'elle permet de mesurer tout « arc » du carré.



2) En revanche, si l'on remplace le carré par un cercle (figure ci-dessus, à droite), on a vu aussi que l'arc de cercle $\overset{\frown}{IJ}$ n'est pas mesurable dès lors que $\pi \notin \mathcal{K}$ – ce qui est le cas lorsque $\mathcal{K}$ est un sous-corps du corps des nombres algébriques, et donc en particulier si $\mathcal{K} = \mathcal{C}$.

3) On notera que les points I (1 ; 0) et J (0 ; 1) sont bien des points de Π, quel que soit $\mathcal{K}$. L'application $\gamma : u \mapsto M(u, \sqrt{1-u^2})$ de [0 ; 1] dans le $\mathcal{K}^2$-arc de cercle $\overset{\frown}{IJ}$ permet de se demander si celui-ci est $\mathcal{K}$-rectifiable, c'est-à-dire si l'ensemble des nombres



$$\ell_{(u_i)} = IM_1 + M_1M_2 + \ldots + M_{n-1}J$$

où $M_i = \gamma(u_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $0 < u_1 < \ldots < u_n < 1$, admet une borne supérieure dans $\mathcal{K}$. Or on sait que $\sup \ell_{(u_i)} = \frac{\pi}{2}$, en sorte que si l'on travaille avec un corps $\mathcal{K}$ de nombres algébriques, l'arc considéré *n'est pas rectifiable* : on retrouve que la $\mathcal{K}$-ficelle ne peut être enroulée correctement autour du $\mathcal{K}^2$-cercle trigonométrique.

b) On va maintenant étudier, en plusieurs étapes, le problème de l'enroulement de la $\mathbb{R}$-ficelle autour du $\mathbb{R}^2$-cercle trigonométrique, que l'on identifie à l'ensemble des nombres complexes de module unité, $\mathbf{U} = \{\, x + \mathrm{i}y \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 = 1 \,\}$.

1) Rappelons que, muni de la multiplication des complexes, **U** est un groupe commutatif : on a en effet

$$(x + \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y')^{-1} = (x + \mathrm{i}y)(x' - \mathrm{i}y') = xx' + yy' + \mathrm{i}(-xy' + yx')$$

avec $$(xx' + yy')^2 + (-xy' + yx')^2 = x^2(x'^2 + y'^2) + y^2(y'^2 + x'^2) = x^2 + y^2 = 1.$$

2) On étudie alors les applications φ, s'il en existe, de $\mathbb{R}$ dans **U** qui « enroulent $\mathbb{R}$ sur **U** ». Étant donné une telle application φ, *une* « mesure » de l'angle $\alpha \in \mathcal{A}$ sera alors le réel t tel que : $\varphi(t) = \mathrm{Cos}\,\alpha + \mathrm{i}\,\mathrm{Sin}\,\alpha \in \mathbf{U}$.

• Que doit vérifier φ pour qu'on puisse parler d'enroulement de $\mathbb{R}$ sur **U** ? Il faut bien sûr que φ soit défini sur $\mathbb{R}$, « sans trous » : φ doit donc être une application de $\mathbb{R}$ dans **U**.

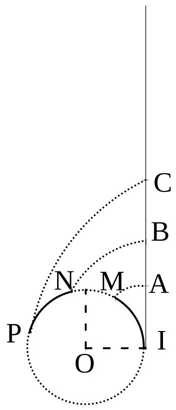
• Une autre condition a été mise en avant par ce qu'on a vu jusqu'ici : il faut que tout point de **U** soit atteint par φ. En d'autres termes, φ doit être *surjectif*.

• L'enroulement peut, physiquement, être caractérisé ainsi : si A, B, C sont des points de la « ficelle » tels que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IA}$, et M, N, P sont les points du cercle que recouvrent A, B, C respectivement lors de l'enroulement, on doit avoir (avec des notations évidentes)

$$\widehat{(\Delta_I, \Delta_M)} = \widehat{(\Delta_N, \Delta_P)} \text{ ou } \widehat{IOM} = \widehat{NOP}.$$

On doit donc avoir l'implication

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IA} \Rightarrow \widehat{IOM} = \widehat{NOP}.$$



Supposons maintenant que les points A, B, C vérifient $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$; cette égalité est équivalente à : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. La condition nécessaire précédente peut donc être reformulée ainsi :

$$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} \Rightarrow \widehat{(\Delta_I, \Delta_P)} = \widehat{(\Delta_I, \Delta_M)} + \widehat{(\Delta_I, \Delta_N)}.$$

Si l'on note t et t' les abscisses de A et B sur la ficelle munie du repère $(I, \overrightarrow{IJ})$, l'abscisse t_C de C vérifie $t_C = t + t'$; l'implication ci-dessus s'écrit alors

$$t_C = t + t' \Rightarrow \varphi(t_C) = \varphi(t)\varphi(t')$$

soit encore $\varphi(t + t') = \varphi(t)\varphi(t')$ pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$. En d'autres termes, φ doit être un *homomorphisme* du groupe additif de $\mathbb{R}$ dans le groupe multiplicatif **U**.

• Une troisième condition *a priori* nécessaire est que l'application φ soit *continue*, c'est-à-dire que si (t_n) tend vers t dans $\mathbb{R}$, alors $(\varphi(t_n))$ tend vers $\varphi(t)$ dans $\mathbf{U}$: il s'agit là d'une condition théorique, qui évite les solutions mathématiques « tératologiques ».

c) Le problème posé est alors celui de l'existence d'une application φ et de son unicité éventuelle. On se place ici dans l'hypothèse de l'existence d'une telle application φ. Dans ce cas, on peut noter tout de suite que, alors, toutes les applications de la forme $t \mapsto \varphi(kt)$, où k est un réel non nul, *conviennent aussi*. On verra qu'en fait ce sont les seules.

1) Le noyau $\varphi^{-1}(1)$ d'une telle application est un sous-groupe additif fermé de $\mathbb{R}$ différent de $\mathbb{R}$ puisque, φ étant supposé surjectif, il existe t ($\neq 0$) tel que $\varphi(t) = -1$. Comme on a alors $\varphi(2t) = \varphi(t)^2 = 1$, $\varphi^{-1}(1)$ est un sous-groupe *discret* de $\mathbb{R}$ distinct de $\{ 0 \}$: il est donc de la forme $\{ n(2\ell) \ / \ n \in \mathbb{Z} \}$, avec $\ell > 0$. On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$: $\varphi(t + 2n\ell) = \varphi(t)\varphi(2n\ell) = \varphi(t)$.

• On a de plus : $\varphi(\ell)^2 = \varphi(2\ell) = 1$ et donc $\varphi(\ell) = -1$. Par suite, $\varphi(\ell/2)^2 = \varphi(\ell) = -1$; on a donc $\varphi(\ell/2) = \mathrm{i}$ ou $-\mathrm{i}$: on dira que φ est positive si $\varphi(\ell/2) = \mathrm{i}$, négative si $\varphi(\ell/2) = -\mathrm{i}$.

• Soit $\chi : \mathcal{A} \to \mathbf{U}$ l'isomorphisme permettant d'identifier le groupe additif des angles $\mathcal{A}$ au groupe multiplicatif $\mathbf{U}$; posons $\psi = \chi^{-1}\circ\varphi$. Dans tout ce qui suit, on appelle « mesure » une telle application ψ. On a : pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$: $\psi(t + 2n\ell) = \psi(t) + \psi(2n\ell) = \psi(t)$; $\psi(\ell) = \varpi$; $\psi(\ell/2) = \delta$ ou $-\delta$.

• Soit ψ une mesure de période 2ℓ. Pour tout réel $m > 0$, il existe une mesure ξ de période $2m$, à savoir

$$t \mapsto \xi(t) = \psi\left(\frac{\ell}{m}\,t\right).$$

Si l'on admet que, pour $\ell > 0$ donné, il existe une *unique* mesure ψ de période 2ℓ, on dira que la mesure ψ est faite en *degrés* si $\ell = 180$, en *grades* si $\ell = 200$, en *radians* si $\ell = \pi$ (mais on se souviendra que le nombre π n'a pas encore été défini à ce stade de l'étude !).

• Soit la mesure ψ de période 2ℓ ; étant donné $\alpha \in \mathcal{A}$, puisque $\psi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ est surjectif, il existe t tel que $\psi(t) = \alpha$. L'équation $\psi(x) = \alpha$ a pour ensemble de solutions $S = \{ t + 2n\ell \ / \ n \in \mathbb{Z} \}$: chacun des réels $t + 2n\ell$ est appelé une mesure de α ; celui d'entre eux qui appartient à $[0 ; 2\ell[$ est appelé la mesure *principale* (par ψ).

• À partir du moment on l'on dispose d'une mesure des angles ψ (de période 2ℓ), on peut diviser un angle α quelconque par n'importe quel entier naturel n (alors que si l'on travaille dans le plan $\prod$ associé au corps $\mathcal{C}$ des nombres constructibles, la trisection d'un angle n'est pas toujours possible par exemple). En effet, puisque $\psi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ est surjectif, il existe t tel que $\psi(t) = \alpha$; on a alors, en posant $\beta = \psi(t/n)$, $n\beta = n\psi(t/n) = \psi(t) = \alpha$.

2) Pour avancer dans l'étude des homomorphismes continus $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbf{U}$, considérons l'application Φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u)\mathrm{d}u$.

• La continuité de φ implique que Φ est dérivable et que $\Phi' = \varphi$. Il en résulte que Φ n'est pas constante et en particulier qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(t_0) \neq 0$.

• Soit $t, t' \in \mathbb{R}$. On a : $\Phi(t + t') = \int_0^{t+t'} \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_0^{t} \varphi(u)\mathrm{d}u + \int_t^{t+t'} \varphi(u)\mathrm{d}u = \Phi(t) + \int_0^{t'} \varphi(v + t)\mathrm{d}v =$ $\Phi(t) + \int_0^{t'} \varphi(v)\varphi(t)\mathrm{d}v = \Phi(t) + \varphi(t)\Phi(t')$. Prenons $t' = t_0$; il vient, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(t) = \frac{\Phi(t + t_0) - \Phi(t)}{\Phi(t_0)}.$$

Cette expression montre que φ est dérivable (puisque Φ l'est) et que l'on a

$$\varphi'(t) = \frac{\varphi(t + t_0) - \varphi(t)}{\Phi(t_0)} = \frac{\varphi(t)\varphi(t_0) - \varphi(t)}{\Phi(t_0)} = \frac{\varphi(t_0) - 1}{\Phi(t_0)}\,\varphi(t) = \lambda\varphi(t)$$

où $\lambda = \dfrac{\varphi(t_0) - 1}{\Phi(t_0)}$ $(\in \mathbb{C})$.

• En dérivant l'égalité $\varphi\bar{\varphi} = 1$, on obtient $\varphi'\bar{\varphi} + \varphi\bar{\varphi}' = 0$, soit $\varphi'\bar{\varphi} + \overline{\varphi'\bar{\varphi}} = 0$ ou encore $2\mathrm{Re}(\varphi'\bar{\varphi}) = 0$. Comme $\varphi'\bar{\varphi} = \lambda\varphi\bar{\varphi} = \lambda$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = k\mathrm{i}$. On a ainsi $\varphi' = k\mathrm{i}\varphi$. Posons $c = \mathrm{Re}(\varphi)$, $s = \mathrm{Im}(\varphi)$, en sorte que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = c(t) + \mathrm{i}s(t)$. L'égalité $\varphi' = k\mathrm{i}\varphi$ s'écrit donc $c' + \mathrm{i}s' = k\mathrm{i}(c + \mathrm{i}s) = k(-s + \mathrm{i}c)$ et par suite équivaut au système différentiel

$$\begin{cases} c' = -ks \\ s' = kc \end{cases}$$

avec $c(0) = 1$ et $s(0) = 0$.

3) Si $\varphi = c + \mathrm{i}s$, existe, c et s vérifient nécessairement le système précédent.

• Prenons $k = 1$. On a alors $c^{(2n)} = (-1)^n\, c$, $c^{(2n+1)} = (-1)^{n+1}s$, et, de même, $s^{(2n)} = (-1)^n\, s$, $s^{(2n+1)} = (-1)^n c$. Il en résulte que les séries de Taylor de c et s, s'écrivent respectivement

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots$$

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots$$

• Les séries entières précédentes ont un rayon de convergence *infini*. Sans utiliser de résultat plus avancé, on peut ici *poser*

$$c_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n} \text{ et } s_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}$$

ce qui conduit à poser

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} + \mathrm{i}\,\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(\mathrm{i}t)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!}.$$

En vertu de théorèmes classiques, on a bien : $\varphi_1'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}\,\frac{(\mathrm{i}t)^{n-1}}{(n-1)!} = \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!} = \mathrm{i}\varphi(t)$.

• Vérifions que φ_1 est bien un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbf{U}, \times)$. On a :

$$\varphi_1(t)\varphi_1(t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t')^n}{n!}.$$

Avec des notations évidentes, le terme de rang n de la série produit s'écrit :

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}t)^p}{p!} \frac{(\mathrm{i}t')^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{\mathrm{i}^n}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} t^p\, t'^{n-p} = \frac{(\mathrm{i}(t+t'))^n}{n!}.$$

On a donc : $\varphi_1(t)\varphi_1(t') = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}(t+t'))^n}{n!} = \varphi_1(t + t')$. Il résulte de là que, en particulier, on a $\varphi_1(t)\varphi_1(-t) = \varphi_1(0) = 1$, soit $\frac{1}{\varphi_1(t)} = \varphi_1(-t)$. Il vient en conséquence $\overline{\varphi_1(t)} = \varphi_1(-t) = \frac{1}{\varphi_1(t)}$, en sorte que $|\varphi_1(t)|^2 = \varphi_1(t)\overline{\varphi_1(t)} = 1$. L'application φ_1 est bien un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbf{U}, \times)$.

• Soit φ une application satisfaisant au « portrait robot » tracé plus haut ; on sait que φ est dérivable et qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi' = k\mathrm{i}\varphi$. Posons alors $\zeta(t) = \varphi(t)\varphi_1(-kt)$; ζ est dérivable et l'on a : $\zeta'(t) = \varphi'(t)\varphi_1(-kt) - k\mathrm{i}\varphi(t)\varphi_1(-kt) = 0$. Par suite, ζ est constante sur $\mathbb{R}$; comme $\zeta(0) = \varphi(0)\varphi_1(0) = 1$, on a donc $\varphi(t)\varphi_1(-kt) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donc

$$\varphi(t) = \frac{1}{\varphi_1(-kt)} = \varphi_1(kt), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Les seules applications φ possibles sont donc les applications $t \mapsto \varphi_1(kt)$, où $k \in \mathbb{R}$, à condition bien sûr que φ_1 convienne – *ce que l'on examinera la prochaine fois*.

1.3. À propos de statistique

a) On a rassemblé ci-après les questions formulées à propos de la statistique.

Séance 10

Dans le programme de 4[e], la partie sur la statistique est assez peu détaillée. On y précise seulement les notions à aborder : moyenne pondérée, effectifs et fréquences cumulées, etc. Il n'est donc pas dit si l'on doit donner la formule générale d'une moyenne pondérée, à savoir

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i}$$

qu'on peut écrire pour des collégiens $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + \ldots + n_px_p}{n_1 + \ldots + n_p}$. N'est-il pas ambitieux de leur donner cette formule ? Peut-on se permettre de présenter cette notion dans la synthèse sur un exemple ? (RR, OS, 4^{e}, 10)

Séance 11

Dans la partie *Statistique* du programme de Seconde, lorsque le programme cite comme capacités attendues l'utilisation des propriétés de linéarité de la moyenne, est-ce que la propriété selon laquelle on a moyenne ($a_1 + k$, …, $a_n + k$) = moyenne (a_1, …, a_n) + k fait partie de ces propriétés ? Ce n'est pas vraiment la linéarité d'une fonction qui est ici en jeu ? (DV, CR, 2^{de}, 11)

Séance 13

1. En géométrie dans l'espace, je vais faire réaliser aux élèves le patron d'un « cuboctaèdre » puis le leur faire fabriquer. Je compte le leur faire utiliser ensuite en statistique pour la fluctuation d'échantillonnage. Lorsqu'on lance le cuboctaèdre, sur 5 lancers il tombe 2 fois sur une face formée par un triangle équilatéral et 3 fois sur une face formée par un carré (environ, bien sûr !). Comment justifier en théorie ce résultat ? (CC, JT, 2^{de}, 13)

2. Les fiches de statistique accompagnant le programme de 2^{de} sont basées, pour la plupart, sur des théories mathématiques (probabilités, théorèmes de statistique…) qui sont à « cacher » aux élèves. Quelles réponses peut-on donner aux élèves à des questions sur cette théorie cachée ? Peut-on leur apporter des éléments de réponse, ou doit-on les laisser attendre les classes supérieures ? (AC, OS, 2^{de}, 13)

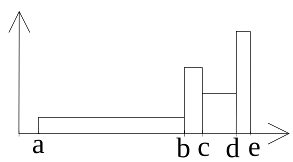
3. Doit-on parler de probabilités (et *a fortiori* de théorie des ensembles) à l'occasion du travail sur les fluctuations d'échantillonnage comme cela est suggéré dans les fiches de statistique ? (JG, OS, 2^{de}, 13)

4. Les documents d'accompagnement de statistique en 2^{de} incitent à parler de probabilité alors que ce n'est pas demandé dans le programme. Quel est alors le but des activités proposées ? (DV, CR, 2^{de}, 13)

Séance 14

1. En 3^{e}, on doit étudier l'étendue d'une série statistique. En préparant ce sujet, j'ai trouvé l'expression « on a élagué la série », qui consiste à supprimer un caractère négligeable devant les autres. Doit-on en parler, sachant que le verbe « élaguer » n'apparaît pas dans le programme ? (GB, MJ, 3^{e}, 14)

2. Dans la construction de mon cours en statistique, je vois qu'il est conseillé un « résumé numérique par une ou plusieurs mesures de tendance centrale », dont la classe modale. Et là, surprise ! Dans mon manuel (Transmath 2^{de}), je vois une définition de la classe modale alors que dans le Déclic 1^{re} ES, la définition est différente. Par exemple, soit le diagramme suivant.



Dans le Transmath 2^{de}, la classe modale est [a, b], la classe de plus grande aire. Dans le Déclic 1^{re} ES, la classe modale est [d, e], la classe la plus haute. Qu'en est-il ? Je ne souhaite pas introduire une notion erronée ! (GB, OS, 2^{de}, 14)

3. Dans les séries statistiques, doit-on parler de la technique qui consiste à déterminer l'étendue d'une série rangée en classes ? (CO, MJ, 2^{de}, 14)

Séance 15

1. Si, dans une séance, aucune *connaissance* nouvelle n'est abordée, peut-il quand même y avoir une *avancée* du temps didactique ? Un nouveau type de tâches peut tout de même être envisagé lors d'une telle séance, par exemple « Comparer deux séries statistiques » : le vocabulaire de la statistique et un résumé numérique (moyenne, moyenne élaguée, mode, médiane, étendue) étant déjà connu à ce stade du cours, peut-on quand même parler d'une avancée du temps didactique ? (JB, CR, 2de, 15)

2. La détermination de la médiane d'une série statistique à partir du graphique des fréquences cumulées est-elle au programme de 2de ? À quoi sert une telle détermination étant donné qu'un tel graphique nécessite de considérer une répartition uniforme par classe, de sorte que le résultat trouvé n'est alors qu'approximatif. Pourquoi ne pas se contenter de la classe dans laquelle se trouve la médiane ? (DR, OS, 2de, 15)

Séance 16

1. En statistique, on utilise la notation $\overline{x}$ pour la moyenne. D'où vient cette écriture ? (JB, CR, 2de, 16)

2. Les démonstrations sur les propriétés des moyennes en statistique sont-elles intéressantes à traiter ? (DR, OS, 2de, 16)

1) On voit d'abord qu'il y a eu une pression croissante sur le sujet au cours des séances passées – pression venant essentiellement des participants ayant à enseigner la statistique en *seconde*.

2) Une de ces questions a reçu une réponse formelle dans les notes du Séminaire – il s'agit de la question 2 de la séance 14 (sur la définition de la classe modale). Une autre fera l'objet d'une réponse cet après-midi. L'exposé d'ED, lors de la séance précédente du Séminaire, a apporté des matériaux de réponse à diverses questions. Dans ce qui suit, on commence par l'ébauche d'une synthèse relativement à la statistique et à son enseignement, en prenant en compte également les classes du *collège*.

b) Le point de départ absolu d'une *étude statistique*, c'est-à-dire d'une AER de statistique, consiste en une question Q à propos d'un *caractère* que possèdent (ou non) les *individus* d'une certaine *population*.

1) Soit par exemple les questions suivantes :

> Il est gros, cet éléphant, non ?
>
> C'est quoi un gros éléphant ? C'est gros comment ?

Le caractère X est ici la « grosseur » de l'éléphant, et la population Ω est celle des « éléphants ». On voit tout de suite que se pose un sévère problème de définition tant du caractère X que de la population Ω. La « grosseur » évoquée, est-ce la *hauteur* mesurée en un certain point du corps, ou bien est-ce le *poids*, ou autre chose encore ? La population des éléphants reste elle-même à définir : pense-t-on aux éléphants d'Afrique ou aux éléphants d'Asie ? Dans chacune de ces espèces, à quelle sous-espèce se réfère-t-on ? S'agit-il des mâles ou des femelles, et de quel âge ?

2) Définir la population Ω et le caractère X est donc la première difficulté dans l'étude de la question Q : ce choix affecte la réponse R à Q parce qu'elle affecte *le sens même* de Q, même s'il est vrai que, en plusieurs cas, la sensibilité de Q (et de R) à la définition de Ω et de X reste limitée. Si, par exemple, on veut connaître la population Ω des élèves de seconde de tel lycée

tel jour de l'année en cours du point de vue de leur taille X, il importe peu, *a priori*, de tenir compte ou non, dans la définition de Ω, des élèves faisant l'objet ce jour-là d'une mesure d'exclusion partielle.

3) L'attention ne semble guère attirée, dans les textes officiels relatifs à la statistique, sur la difficulté précédemment évoquée. Mais cette difficulté surgit de façon naturelle dans ce qui est une part essentielle de l'étude de la statistique. Dès la 6^e, en effet, ces programmes font apparaître une dualité dans l'initiation à la pensée statistique : si se trouve visé le développement de « la capacité à recueillir des données et à les présenter sous forme de tableau » (programme de 6^e) et sous d'autres formes encore, on demande aux élèves, et cela en principe depuis l'école primaire, de se rendre capables de « lire et interpréter des informations à partir d'une représentation graphique (diagrammes en bâtons, diagrammes circulaires ou demi-circulaires, graphiques cartésiens) ». On retrouve cette exigence dans les classes suivantes. Dans le programme de 5^e qui entrera en vigueur en septembre 2006, ainsi, les « compétences » visées comportent deux grands types de tâches :

– Lire et interpréter des informations à partir d'un tableau, ou d'une représentation graphique (diagrammes divers, histogramme).

– Présenter des données sous la forme d'un tableau, les représenter sous la forme d'un diagramme ou d'un histogramme.

Le document d'accompagnement de l'actuel programme du cycle central (5^e & 4^e) indique, de même, ceci.

L'essentiel de l'activité des élèves consiste à exploiter, de façon raisonnée, des documents adaptés à chaque classe, afin de développer leur autonomie dans ce domaine ; ces documents gagnent à être choisis en concertation avec d'autres disciplines.

L'identification – et la « discussion », si succincte soit-elle – de la population et du caractère en jeu est chaque fois de mise, même s'il n'est pas question d'entrer dans de difficiles problèmes de nomenclature. Mais ces problèmes étant souvent au cœur des sujets « socialement sensibles » – qu'est-ce qu'un acte de violence, par exemple ? –, il est bon de ne pas les perdre de vue. Pour cela, on pourra se familiariser par exemple avec le site de l'association Pénombre (http://www2.unil.ch/penombre/), et, pour commencer, lire certaines analyses des « Pénombriens » sur ce site (voir ainsi http://www2.unil.ch/penombre/01/02.htm, entre autres petites études).

c) On notera que ce qui importe est de connaître la *population* Ω sous l'angle du caractère X. Le cas « idéal », si l'on peut dire, est celui où l'on peut connaître exhaustivement X sur Ω, c'est-à-dire où l'on peut dresser un *tableau de données ponctuelles* comportant N lignes, où N, de l'ordre de plusieurs dizaines, de plusieurs centaines, de plusieurs milliers, de plusieurs millions peut-être, est l'*effectif* de la population Ω : pour chaque $\omega_i \in \Omega$, $1 \leq i \leq N$, ce tableau fait apparaître la valeur $x_i = X(\omega_i)$, comme ci-après.

Individus	Valeurs
ω_1	x_1 $(= v_1)$
ω_2	x_2 $(= v_2)$
ω_3	x_3 $(= v_3)$
ω_4	x_4 $(= v_4)$
ω_5	x_5 $(= v_3)$
	…

… ω_N	x_N (= v_k)

1) De tels tableaux « bruts » sont rarement disponibles, sauf quand on les constitue soi-même. Si, par exemple, Ω est la population d'une classe de 3e, le caractère X qu'est la note trimestrielle en mathématiques peut donner lieu au tableau de données ponctuelles suivant, que détient le professeur.

Individus	Valeurs	Individus	Valeurs	Individus	Valeurs	Individus	Valeurs	Individus	Valeurs
ω_1	8,9	ω_7	12,3	ω_{13}	14,1	ω_{19}	10,0	ω_{25}	8,5
ω_2	10	ω_8	16,9	ω_{14}	7,4	ω_{20}	7,3	ω_{26}	15
ω_3	8,5	ω_9	8,7	ω_{15}	15,7	ω_{21}	14,6	ω_{27}	14,6
ω_4	13,7	ω_{10}	8,2	ω_{16}	11,1	ω_{22}	10,4	ω_{28}	9,3
ω_5	15,6	ω_{11}	15,3	ω_{17}	9,5	ω_{23}	7,7		
ω_6	6,9	ω_{12}	13,3	ω_{18}	17,0	ω_{24}	18,9		

2) L'information communiquée par l'institution détenant – en général, mais pas toujours, parce qu'elle les a « fabriquées » – les données ponctuelles est en général réduite de plusieurs façons. Il est habituel, par exemple, de réduire les données primaires en une *série statistique* qui « oublie » l'identité de l'individu $\omega_i \in \Omega$ (on ne sait plus qui est au juste ω_i) et en ne retenant plus, dès lors, que le rang i et la valeur x_i que prend sur le i-ième individu (désormais inconnu) le caractère X. Cette opération est conforme au fait que, en statistique, on ne s'intéresse pas *aux individus* en tant que tels, mais *à la distribution* des valeurs de X sur Ω. Formellement, on peut présenter la série statistique en un tableau du type

Rang	Valeurs
1	x_1
2	x_2
3	x_3
4	x_4
5	x_5
…	…
N	x_N

ou, plus simplement, sous la forme d'une liste : x_1, x_2, x_3, x_4, …, x_N. C'est ainsi que, pour les notes trimestrielles d'une classe de 3e examinées plus haut, on aurait :

8,9 ; 10 ; 8,5 ; 13,7 ; 15,6 ; 6,9 ; … ; 8,5 ; 15 ; 14,6 ; 9,3.

3) L'étape suivante conduit à *perdre le rang* de chacune des valeurs observées lors du recueil des données : à partir de la *série statistique*, on établit en effet la *distribution des effectifs* (ou *fréquences absolues*), n_j ($1 \leq j \leq p$), des valeurs v_1, …, v_p prises par X sur Ω.

Valeurs	Effectifs
v_1	n_1
v_2	n_2
v_3	n_3
v_4	n_4
…	…
v_p	n_p

4) Dans une étape ultérieure, on perd aussi les effectifs, en dressant le tableau de la *distribution des fréquences* (ou *fréquences relatives*) $f_j = n_j/N$. Cette distribution, souvent présentée sous forme de *pourcentages*, permet théoriquement, si on connaît $N = \sum_{j=1}^{p} n_j$, de reconstituer la distribution des effectifs ($n_j = N \times f_j$).

Valeurs	Fréquences
v_1	f_1
v_2	f_2
v_3	f_3
v_4	f_4
…	…
v_p	f_p

5) Enfin, il est d'usage d'exprimer la même information à l'aide de la *fonction de répartition* de X, définie par

$$F_X(x) = \frac{1}{N}\,\mathrm{Card}\ \{\ i \,/\, x_i \le x\ \} = \frac{1}{N} \sum_{v_j \le x} n_j.$$

La connaissance de F_X suffit pour, inversement, connaître la distribution des fréquences de X : si on suppose que l'on a $v_1 < \ldots < v_p$, il vient en effet $n_1 = F_X(v_1)$, $n_j = F_X(v_j) - F_X(v_{j-1})$ pour $j = 2, \ldots, p$. Mais F_X a surtout l'intérêt de condenser tout ce qu'on veut savoir à propos de X sur Ω : en un sens, la connaissance statistique (univariée) du monde consiste, pour chaque couple (Ω, X), à connaître la distribution des fréquences de X sur Ω, et donc, de façon équivalente, la fonction de répartition correspondante.

• Supposons qu'on veuille répondre à la première des deux questions proposées plus haut : « Il est gros, cet éléphant, non ? » Si l'éléphant en question a un poids p tel que, disons, $F_X(p) = 0{,}32$, on pourra répondre par la négative : car 68 % des éléphants sont alors *plus « gros »* que l'éléphant considéré, qui ne peut donc être dit parmi les plus gros.

• Supposons maintenant que l'on veuille répondre à la seconde des deux questions : « C'est quoi un gros éléphant ? C'est gros comment ? » La réponse n'est bien sûr pas univoque ; si par exemple, pour un certain poids p, $F_X(p) = 0{,}49$, on pourra répondre qu'un gros éléphant est certainement un éléphant dont le poids est supérieur à p. Si l'on décide qu'un éléphant sera dit « gros » s'il appartient à l'ensemble des 20 % les plus lourds, et si l'on sait que l'on a $F_X(p^*) = 0{,}80$, alors on dira qu'un gros éléphant est un éléphant de poids supérieur à p^*.

• Considérons les notes trimestrielles de la classe de 3[e] vues plus haut. La note de 14,1 sur 20 obtenue par l'un des élèves est-elle une note « élevée » dans cette classe et pour ce trimestre ? On peut dire d'abord que ce n'est pas une note basse : elle est la plus faible des 10 plus fortes notes (à savoir 14,1 ; 14,6, 14,6 ; 15 ; 15,3 ; 15,6 ; 15,7 ; 16,9 ; 17,0 ; 18,9), c'est-à-dire qu'elle fait partie des $\frac{10}{28}$ % ≈ 36 % des notes les plus élevées. Mais pour faire partie des 20 % de notes les plus élevées, il faudrait ici qu'elle soit supérieure ou égale à 15,6 – ce qui n'est pas le cas.

6) Les considérations qui précèdent sont à l'origine de l'introduction de la fonction *quantile* : celle-ci, qui « répond » aux questions des types « au-dessus de quelle valeur x du caractère X

ne trouve-t-on plus que 20 % de la population ? » ou « au-dessous de quelle valeur n'y a-t-il plus que 15 % de la population ? », est en quelque sorte la fonction « inverse » de la fonction de répartition : *nous y reviendrons*.

Après-midi

2. Questions & formation

2.1. La formation & le métier

a) On commence par cette question.

> Pour proposer à ses élèves une AER efficace qui puisse faire émerger l'ensemble des outils technologiques d'un thème du programme, ne faut-il pas avoir un recul sur les programmes (et notamment sur l'ensemble des fonctionnalités des différentes technologies) que ne peut pas réellement avoir un professeur stagiaire ? (JB, OS, 4e, 16)

1) L'observation prouve que la condition invoquée – avoir le recul de quelques années d'enseignement – n'est ni nécessaire, ni, surtout, suffisante ! La puissance d'imposition des normes établies, dès lors qu'on ne possède pas des points d'appui solides pour résister à cette pression, est au-delà de ce qu'on peut imaginer : plus tard, c'est en général *trop tard !*

2) C'est donc *en formation initiale* que l'on doit acquérir de vive force ces moyens qui permettront non seulement de résister aux conformismes du métier-tel-qu'il-est, mais qui permettront *et qui permettent d'ores et déjà*, si peu que ce soit, *de faire évoluer le métier* en même temps que l'on se forme à ce métier en devenir. Par contraste, en formation continue – lorsque celle-ci existe : elle existe fort peu, et de moins en moins dans la période actuelle –, il est souvent déjà trop tard. Les actions de formation continue ne touchent guère, traditionnellement, et sauf exception, que quelque 10 % de la population des professeurs, dont un noyau toujours le même au fil du temps. La formation continue est donc largement dépourvue des moyens et de *former les professeurs* et de *transformer leur métier*. C'est sans attendre qu'il faut agir !

b) Changer le métier, a-t-on noté, n'est pas chose simple, tant la force d'attraction des usages installés est tyrannique ; c'est ce que montrera la sous-section suivante de ce forum, en soulignant, en l'espèce, combien le geste d'aller rechercher dans les archives du Séminaire des éléments de réponse aux questions que l'on rencontre reste imparfaitement intégré.

2.2. Deux sources : les programmes & les archives du Séminaire

a) On commence par une question fréquemment posée.

> Peut-on introduire le deuxième théorème des milieux par sa démonstration (celle-ci faisant appel au premier théorème des milieux ce serait également l'occasion de réinvestir celui-ci), ou est-ce déconseillé, et préférable de bâtir une AER pour l'approcher ? (FEB, CR, 4e, 16)

1) S'efforcer de montrer qu'un certain énoncé se déduit d'autres énoncés est une activité d'étude et de recherche des plus authentiques. Mais une fois que l'énoncé est devenu un théorème, on n'est pas en général plus avancé quant à son « utilité » !

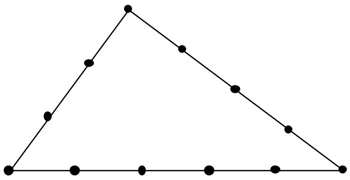
2) Les archives du Séminaire de l'année 2003-2004 apportent, à ce propos, un éclairage utile : on a reproduit ci-après le passage correspondant.

Réciproque ?

Que serait une activité possible pour amener la réciproque du théorème de Pythagore ? Je n'en ai pas trouvé de satisfaisante pour le moment. (4^e, 15)

Matériaux pour une réponse

1. Les emplois du théorème de Pythagore sont d'une grande richesse : ce théorème est en effet essentiel pour calculer des longueurs dans le plan ou dans l'espace. Le théorème ***réciproque*** est moins utilisé : il fournit une condition suffisante pour qu'un angle soit droit, mais cet emploi n'est pas fréquent. Classiquement, toutefois, la réciproque est (ou était) employée (implicitement) pour tracer des angles droits dans l'espace ambiant (celui du jardinier, de l'architecte), à partir de la remarque selon laquelle $3^2 + 4^2 = 5^2$. De là découle par exemple le ***cordeau égyptien*** portant 12 nœuds, qui constitue une sorte d'équerre flexible.



On verra sur la reproduction ci-après que la réciproque de Pythagore demeure aujourd'hui encore sollicitée à travers les « trucs » de bricoleur pour obtenir des angles droits. Dans le cas présenté, en effet, pour obtenir un angle droit, on trace un triangle dont les mesures des côtés sont 60, 80, 100, c'est-à-dire 20×3, 20×4, 20×5.

Tracer un angle droit au mètre

Pour tracer un grand angle droit, en particulier lorsqu'on a besoin de deux axes perpendiculaires pour la pose de revêtements en dalles au sol ou au mur, on peut utiliser un mètre :

1/ Tracer une ligne droite qui sera l'un des côtés de l'angle droit et, sur cette droite, un point A d'où partira l'autre côté.

2/ A 80 cm de A tracer le point B.

3/ A partir de A tracer un arc de cercle de 60 cm de rayon.

4/ A partir de B tracer un arc de cercle de 100 cm de rayon.

5/ Ces deux arcs se coupent en un point C. L'angle formé par les lignes AC et AB est un angle droit.

2. La situation précédente permet à elle seule de ***motiver*** le fait de s'interroger sur la ***réciproque*** du théorème de Pythagore, au moins dans le cas de triangles dont les mesures s'écrivant sous la forme $3k$, $4k$, $5k$ ($k \in \mathbb{Q}$, $k > 0$) : de tels triangles sont-ils approximativement rectangles (de manière suffisante pour les besoins de la pratique jardinière, etc.), ou sont-ils, du point de vue de la géométrie, exactement rectangles ?

① Cette interrogation peut avantageusement prendre sa place dans un ***PER*** englobant qui pourrait s'intituler ***« La réciproque est-elle vraie ? »***. Un tel PER, qui se développera à travers ***tous les domaines*** du programme d'études de la classe, donnera ainsi une place contrôlée, dans la culture didactico-mathématique de la classe, au type de situations dans lesquelles on est amené à établir, ***pour***

des raisons formelles – « la réciproque est-elle vraie ? » –, des énoncés technologiques dont plusieurs pourront demeurer ***en attente d'utilisation***. Ce parcours sera amorcé à l'aide de questions relativement « simples », telles par exemple les suivantes :

♣ Si l'entier n est pair, alors l'entier n^2 est-il pair ? La réciproque est-elle vraie ?

♦ Si le triangle ABC est isocèle en A, alors la hauteur et la médiane issues de A coïncident ; la réciproque est-elle vraie ?

♥ Si un rectangle est un carré, alors les diagonales ont même longueur ; la réciproque est-elle vraie ?

♠ Si $a = b$, est-il vrai que l'on ait $(a + b)^2 = 4ab$? La réciproque est-elle vraie ?

….

3) La recherche de ce qui peut faire l'utilité de tel résultat technologique « potentiel » – par exemple le deuxième théorème des milieux – et qui motive l'intérêt que nous lui portons *reste indéfiniment à l'ordre du jour*. Même si un énoncé se présente d'emblée comme un théorème (par exemple parce qu'il apparaît comme un corollaire « évident », bien que non recherché, d'un résultat visé, lui, pour son utilité), et même quant il s'est introduit comme ingrédient technologique essentiel permettant de produire une certaine technique relative à un certain type de tâches, il convient de rechercher quels (autres) usages précieux il pourrait encore avoir.

• Rappelons ici les trois « théorèmes des milieux » tels que les énonce le programme de 4^{e}.

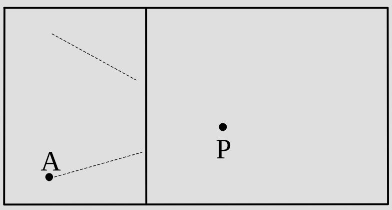
Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, elle est parallèle au troisième.

Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, elle coupe le troisième en son milieu.

Dans un triangle la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de celle du troisième côté.

• Supposons alors que le deuxième énoncé soit considéré pour des raisons formelles dans le cadre d'un PER du type « La réciproque est-elle vraie ? », et qu'il soit d'abord prouvé *vrai* dans l'espace sensible, puis que l'on établisse qu'il se déduit des théorèmes déjà rangés dans la TGD. On se posera alors la question : à quoi ce théorème peut-il bien être utile ? Dans un certains nombres de cas, la question pourra être *proposée aux élèves comme un problème à l'instar des autres*. Une classe suffisamment « avancée » peut fort bien trouver des réponses exploitables, comme celle-ci : « Cela permet d'obtenir le milieu d'un segment, connaissant le milieu d'un segment auxiliaire, en traçant une droite parallèle. » Dans quel cas cette technique peut-elle être utile ? On pourra par exemple considérer la situation suivante.

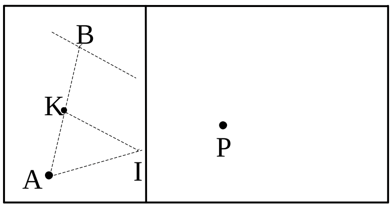
On veut mesurer la distance du point A situé dans un jardin à un point P du jardin d'à côté, visible depuis A. Pour cela, on marche à partir de A en visant P et en laissant des marques sur le sol ; on fait de même à partir d'un autre point du jardin.



Comment peut-on parvenir alors à déterminer la distance AP ?

On peut imaginer la technique suivante : on marche à partir de A en visant P et en marquant au sol sa trajectoire ; puis on recommence à partir d'un autre point B ; on détermine le milieu

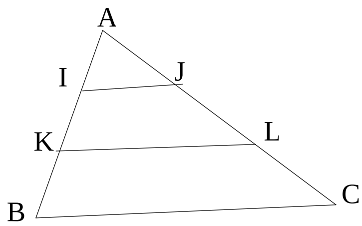
K de [AB] ; on trace la parallèle à (BP) passant par K, qui coupe [AP] en son milieu I. Cette technique ne réussit que si le milieu I de [AP] se trouve dans le jardin contenant A : en ce cas, on mesure AI, et l'on calcule AP = 2AI. Si I tombe dans le jardin d'à côté, on répète le procédé : on détermine le milieu J de [AI] ; s'il tombe dans le jardin contenant A, on mesure AJ et calcule AP = 4AJ. Etc.



• Bien évidemment, l'AER correspondante (dont on ne donne ici, encore une fois, que l'argument mathématique) se concevra et se travaillera plus aisément si on a pris la précaution de lancer un PER autour de la question « Comment déterminer des grandeurs géométriques “inaccessibles” » – PER auquel on revient régulièrement, au fur et à mesure qu'avance l'étude de la géométrie.

4) La recherche dans les archives du Séminaire avec pour expression clé « théorème des milieux » ne saurait manquer en outre d'attirer l'attention sur ce passage du document d'accompagnement du programme du cycle central, qui fournira d'autres emplois du *deuxième* théorème des milieux.

On a coupé un des côtés d'un triangle ABC en trois segments de même longueur : AI = IK = KB. Par I et K, on a mené les parallèles au côté [BC], qui coupent [AC] en J et L respectivement.



À l'aide des résultats sur les milieux de deux côtés d'un triangle, on souhaite établir que le côté [AC] se trouve lui aussi coupé en trois régulièrement : AJ = JL = LC.
On pourra remarquer que, contrairement aux deux cas évoqués pour la classe de 5^{e}, l'évidence « visuelle » du résultat ne fait ici guère de doute ; la question qui se pose est donc celle de l'établir au moyen des résultats déjà acquis.
La première des deux égalités ci-dessus est simple à établir dès que l'on a remarqué que I est le milieu de [AK]. Le second (dans l'ordre des programmes) théorème des milieux appliqué au triangle AKL permet alors de conclure. La seconde égalité est autrement plus difficile et il se peut très bien que, dans une classe, l'idée du tracé d'un segment auxiliaire convenable, par exemple celui du segment [BJ], ne surgisse pas d'elle-même et doive être indiquée par le professeur. La mise en forme de la démonstration a tout son intérêt dans un cas comme dans l'autre. Notons M le point d'intersection des droites (BJ) et (KL). Le second (dans l'ordre des programmes) théorème des milieux appliqué au triangle BIJ permet de conclure que le point M est le milieu de [BJ]. Ce résultat acquis devient alors une hypothèse, qui permet à nouveau l'application du second théorème des milieux, cette fois au triangle JBC, pour conclure que L est le milieu de [IC]. Ainsi, deux pas de démonstration enchaînés ont conduit à la conclusion : JL = LC.
Si l'on considère la même figure, mais maintenant avec les hypothèses que les côtés du triangle sont coupés en trois segments de même longueur : AI = IK = KB et AJ = JL = LC, la démonstration du parallélisme des droites (IJ), (KL) et (BC) repose sur la même idée de tracé d'un segment auxiliaire. Mais on s'aperçoit que la démonstration suppose ici l'utilisation des deux théorèmes des milieux.

b) La question ci-après a trait à une anomalie de gestions des ressources didactiques au niveau de l'établissement plutôt que de la classe de mathématiques.

En tant que professeur, a-t-on le droit d'exiger que les élèves aient une calculatrice graphique ? (DV, CR, 2^de^, 16)

On reproduit ci-après un extrait des archives qui répond à la question.

7) La calculatrice

En seconde, doit-on obliger les élèves à acheter une calculatrice programmable ? (…)

Matériaux pour une réponse

1. ***L'ancien programme de seconde*** précisait déjà : « En seconde, ***les élèves doivent être entraînés à utiliser une calculatrice programmable comportant les fonctions statistiques*** pour effectuer des calculs numériques, pour calculer une moyenne ou un écart-type, et pour programmer, sur quelques exemples simples, le calcul de valeurs numériques d'une fonction d'une variable ».

2. Le document d'accompagnement du ***nouveau programme de seconde*** indique :

« Le programme demande d'intégrer les calculatrices dans l'enseignement des mathématiques. Il est donc indispensable que chaque élève puisse disposer de la sienne. Un modèle relativement modeste suffit en classe de seconde (calculatrice programmable scientifique à écran graphique et mode statistique).
Chaque enseignant doit pouvoir mettre à la disposition des élèves et intégrer judicieusement tableurs ou logiciels de géométrie dynamique (voire logiciel de calcul formel).

3. Toutefois, certains principes juridiques et politiques ***généraux*** qui gouvernent l'éducation nationale ne permettent pas de conclure que le professeur peut « obliger à acheter » une calculatrice programmable (Guide juridique du MEN, fiche 1) :

« Dans la mesure où les parents ont l'obligation de scolariser leurs enfants les obstacles d'ordre financier qu'ils peuvent rencontrer doivent être levés. La gratuité apparaît alors comme un corollaire du principe d'égalité.
La gratuité de l'enseignement scolaire public initialement limitée à l'enseignement primaire a été progressivement étendue à l'enseignement du second degré.
Le Préambule de la Constitution du 27 octobre 1946 la range au nombre des principes politiques, économiques et sociaux particulièrement nécessaires à notre temps : “L'organisation de l'enseignement public gratuit et laïque à tous les degrés est un devoir de l'État”.
Ainsi, s'il est admis de mettre à la charge des familles l'achat d'un carnet de liaison ou de correspondance et la fourniture d'enveloppes timbrées pour l'envoi des relevés de notes mensuels ou trimestriels, en revanche, il ne doit pas être fait appel à la participation des familles pour les dépenses pédagogiques (cf. circulaire n^o^°92-270 du 10 septembre 1992, RLR 554-3).
De fait, un proviseur peut proposer aux parents d'élèves de participer au financement de prestations facultatives, mais il ne peut l'imposer, en raison du principe de gratuité de l'enseignement qui fait obstacle à ce qu'un établissement scolaire exige de ses usagers le paiement de dépenses nécessaires à l'exercice de sa mission d'éducation. »

4. En pratique, une réelle confusion règne. On suppose généralement que chaque élève possède ***sa*** calculatrice, ce qui n'est pas loin d'être vrai dans la plupart des cas. Mais, contrairement à ce qui se passe depuis fort longtemps s'agissant des manuels, ***on n'ose pas imposer le modèle de calculatrice*** dont les élèves doivent disposer, en sorte que, dans une même classe, le professeur s'épuise – quand il n'y renonce pas – à gérer l'emploi (et la maîtrise de l'emploi) ***d'une multiplicité de modèles***. On se récrirait d'avoir à gérer une classe dont les élèves seraient munis chacun d'un manuel différent, en sorte que le professeur devrait indiquer aux élèves disposant du Hachette de faire pour la prochaine fois l'exercice n^o^ 49, p. 112, tandis que ceux disposant du Bordas auraient à faire l'exercice n^o^ 37, p. 205. Mais on accepte – dans le principe – qu'il en aille ainsi s'agissant des calculatrices ! L'argument selon lequel on ne souhaite favoriser aucun constructeur (Casio, HP, TI, etc.) ***ne tient pas*** : il y a belle lurette

qu'on ne se gêne pas pour « favoriser » Hachette ou Bordas en matière de manuels. Tout cela noté, la meilleure solution, compatible et avec le principe de gratuité, et avec une gestion didactique optimale, paraît être la suivante : le lycée acquiert des calculatrices d'un même modèle (et donc d'une même marque), où il peut faire figurer son logo, et qu'il met (contre une caution) à la disposition des élèves entrant au lycée pour la durée de leurs études (de la seconde à la terminale, en principe), le lot de calculatrices étant changé tous les trois ans (par tranches) – en changeant de modèle et de marque, pour parer à l'obsolescence des matériels et pour… l'équité commerciale (!). L'octroi, pratiqué par certaines collectivités territoriales, d'une calculatrice à chacun des élèves d'un même niveau de classe (6e au collège, 2de au lycée) n'a pas plus de sens que si, au lieu d'équiper les établissements, on octroyait à chacun de leurs élèves, à titre personnel, une chaise et une table ! Ce qui importe, ce n'est pas que l'élève ***possède*** quoi que ce soit, mais que les matériels utiles ***puissent être mis à sa disposition***.

c) La question suivante est également classique.

Dans le cadre de l'étude de la distance d'un point à une droite en classe de 4e, il est dit dans les commentaires du programme : « L'inégalité triangulaire et la symétrie axiale, vues en classe de 5e, permettent de démontrer le résultat relatif à la distance d'un point à une droite, lequel peut aussi être relié au théorème de Pythagore. » Cela implique-t-il que ce résultat est obligatoirement à démontrer ? (NA, JT, 4e, 16)

1) Des éléments de réponse se trouvent dans cet extrait des archives.

3) Que démontrer, et comment ?

Quel type de résultat fait l'objet de démonstrations ? (2de, 1)

Matériaux pour une réponse

1. En principe, tout résultat doit faire l'objet d'une démonstration. Si un résultat n'est pas démontré, la chose – toujours en principe – doit être signalée aux élèves, comme le souligne le programme du cycle central :

« … pour tout résultat mathématique énoncé, on précisera explicitement qu'il est admis lorsqu'il n'a pas été démontré. »

2. Dans un certain nombre de cas, les programmes précisent les résultats ***qu'il convient d'admettre***. Le programme de 5e précise par exemple :

« On rencontrera à ce propos l'inégalité triangulaire, AB + BC ≥ AC dont l'énoncé sera admis. »

De même, en 4e, on considère le théorème suivant :

« Dans un triangle ABC, si M est un point du côté [AB], N un point du côté [AC] et si [MN] est parallèle à [BC], alors $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$. »

Le programme indique alors :

« L'égalité des trois rapports sera admise après d'éventuelles études dans des cas particuliers. »

Dans le programme de seconde, de même, on lit :

« D'autres fonctions telles que $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto |x|$… pourront être découvertes à l'occasion de problèmes. Les résultats les concernant pourront être admis. Les positions relatives des diverses courbes ainsi découvertes seront observées et admises. »

Le document d'accompagnement du programme de seconde précise encore ceci :

« L'étude […] amène à dégager quelques énoncés concernant les positions relatives de droites et de plans de l'espace (règles usuelles dites d'incidence, qui seront admises) : on pourra se limiter aux seules propriétés effectivement utilisées. »

3. En dehors des théorèmes dont les textes officiels imposent qu'ils soient admis (ou au contraire dont ils exigent qu'ils soient démontrés), il revient au professeur de choisir, responsabilité à propos de laquelle le document d'accompagnement des programmes du cycle central du collège note :

« Pour tout le cycle central, il est de la responsabilité du professeur, en fonction de ses élèves, de décider de l'opportunité de démontrer certains résultats du cours (<u>leur statut, admis sur conjecture ou établi, doit cependant être clair</u>) et d'organiser des étapes de recherche et de rédaction. »

Le document d'accompagnement du programme de seconde précise de son côté :

« Il faut souligner ici l'effort important entrepris au collège pour différencier le résultat *observé* du résultat *démontré* et <u>pour annoncer clairement le statut des divers énoncés</u> : définition, résultat ou théorème admis sur conjecture, résultat ou théorème établi, etc. (cf. document d'accompagnement des programmes de 5^e-4^e). Il importe de garder cet esprit dans le travail conduit en 2de, en particulier dans ce paragraphe de géométrie. Ainsi, <u>l'enseignant décidera, en fonction de ses élèves et du temps dont il dispose</u>, du caractère *admis* ou *démontré* des trois cas d'isométrie des triangles. »

4. Ce qui est encore plus important, toutefois, c'est que les démonstrations soient ***le fait des élèves sous la conduite du professeur***. Tel est le point de vue adopté par les programmes […]

2) Les indications précédentes ne permettent pas d'affirmer que le programme requiert ici absolument une démonstration : même s'il insiste dans ce sens, il appartient au professeur de décider, en tenant compte toutefois que la *normalité*, dans la classe de *mathématiques*, est d'organiser les résultats établis en une théorie déductive. Dans cette perspective, l'extrait suivant apportera des éclaircissements sur la déduction envisageable.

Le théorème de Pythagore permet de montrer que, dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus long des trois côtés. Un triangle ABC étant rectangle en A, on a, d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$; puisque $AB^2 > 0$ et $AC^2 > 0$, on en déduit $BC^2 > AC^2$ et $BC^2 > AB^2$, soit, puisque les nombres BC, AC et AB sont positifs, BC > AC et BC > AB. Ce résultat est à la base du thème « Distance d'un point à une autre », et je souhaite le démontrer, mais certaines propriétés utilisées dans la démonstration précédente (deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leur carré, et inversement) ne sont pas, me semble-t-il, à la disposition d'élèves de 4^e. Comment démontrer ce résultat ? (4^e, 18)

① Le programme de 4^e comporte les éléments suivants :

Capacités exigibles

Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ab et ac sont rangés dans le même ordre que b et c si a est strictement positif.

Commentaires

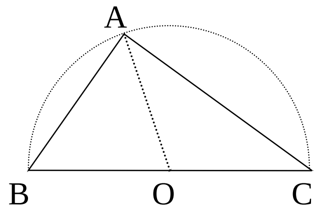
Aucune connaissance n'est exigible lorsque a est négatif, mais ce cas sera évoqué pour montrer la nécessité de la condition $a > 0$ dans l'énoncé de la propriété envisagée.

Soit des nombres a et $b > 0$ telles que $a < b$; en multipliant par a l'inégalité précédente, on obtient $a^2 < ab$, tandis que, en la multipliant par b, on a $ab < b^2$. Par transitivité, il vient donc $a^2 < b^2$. Inversement, supposons que l'on ait $a^2 < b^2$, avec, bien entendu, a et $b > 0$. Deux voies s'offrent.

❶ En 4^e on peut raisonner par l'absurde : si l'on avait $a > b$, on aurait $a^2 > b^2$, ce qui n'est pas le cas ; de même, si l'on avait $a = b$, etc.

❷ En 3^e on pourra tirer profit du fait que, par exemple parce qu'on a $(b-a)^2 = \frac{(b^2-a^2)^2}{(b+a)^2}$, on a $(b-a)^2 > 0$ et donc $2ab < a^2 + b^2$. Comme $a^2 < b^2$ il vient alors $a^2 < \frac{a^2+b^2}{2} < b^2$ et donc : $ab < \frac{a^2+b^2}{2} < b^2$. En multipliant par b^{-1} l'inégalité $ab < b^2$ ainsi obtenue on trouve que $a < b$.

② Il est possible cependant de se passer, dans le cadre du programme actuel de 4^e, de l'emploi indiqué du théorème de Pythagore. Dans un triangle ABC rectangle en A, où O est le milieu de l'hypoténuse [BC], on apprend en 4^e que le cercle de centre O passant par A passe aussi par B et C.

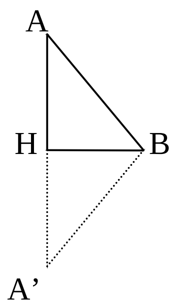


En vertu de l'inégalité triangulaire dans le triangle BOA, il vient alors : BC = 2BO = BO + OA > BA. On montre de même que BC > CA.

③ On notera de plus que, s'agissant de la démonstration du théorème évoqué, pour lequel le résultat précédent serait un outil, le programme de 4^e précise :

L'inégalité triangulaire et la symétrie axiale, vues en classe de 5^e, permettent de démontrer le résultat relatif à la distance d'un point à une droite, lequel peut aussi être relié au théorème de Pythagore.

Sur la figure ci-après, H est le projeté orthogonal de A, et A' est le symétrique de A par rapport à (HB). On a alors AB + BA' > AA' soit encore 2AB > 2AH ou AB > AH. Cette démonstration n'utilise que des résultats des classes antérieures, au contraire des deux démonstrations précédentes.



d) La question ci-après n'est pas davantage inédite.

Concernant le cours sur les puissances, le titre est « Puissances d'exposant entier relatif ». On en a déduit avec ma PCP que 2^5 était la puissance et que 5 est l'exposant, et que donc il fallait dire « 2 exposant 5 » et non pas « 2 puissance 5 ». On a cherché dans plusieurs ouvrages mais nous n'avons pas trouvé la bonne réponse. Qu'en est-il ? (CM, OS, 4^e, 16)

1) Un extrait des archives apporte un début de réponse.

Puissances et exposants

Quelle est la différence entre « puissance » et « exposant » ? Peut-on dire indifféremment « *a* puissance *b* » et « *a* exposant *b* » ? (4^e, 11)

Matériaux pour une réponse

1. Partons de la définition suivante (Lucien Chambadal, *Dictionnaire de mathématiques*, Hachette, 1978) :

Soient a un élément d'un monoïde multiplicatif E et n un entier naturel non nul. On appelle puissance n-ième de a et on note a^n (lire : a puissance n) le composé d'une suite de n éléments égaux à a. Les éléments a^2 et a^3 s'appellent respectivement *carré* et *cube* de a. On convient que a^0 est l'élément unité de E. L'application $n \mapsto a^n$ est un morphisme du monoïde additif $\mathbb{N}$ dans E ; lorsque E est un groupe, cette application se prolonge d'une manière et d'une seule en un morphisme du groupe additif $\mathbb{Z}$ dans E.

2. Les programmes du collège suivent implicitement la définition précédente, au demeurant traditionnelle, lorsqu'ils parlent (dès la 6^e) de ***puissances de 10***, ou lorsque le programme du cycle central parle, s'agissant de la 4^e, de ***puissances d'exposant entier relatif***, c'est-à-dire de nombres de la forme a^n avec $n \in \mathbb{Z}$ (et, en fait, $a \in \mathbb{Z}$). D'une manière générale, a^n est une puissance (de a), et plus exactement la puissance n-ième de a, ou puissance de a ***d'exposant n***.

3. L'ouvrage *Mathématiques lycée* d'André Deledicq (Éditions de la Cité, Paris, 1999) propose la définition suivante du mot « exposant » :

Un exposant est placé en haut à droite d'un nombre.
• Soient les nombres a et b. a^b se lit « a exposant b » et désigne a élevé à la puissance b.

En fait, on rencontre ainsi constamment la double dénomination évoquée dans la question examinée. Les auteurs d'un manuel de 5^e publié en 1958 écrivent par exemple ceci :

Puissance d'un nombre. – Considérons le produit de 4 facteurs égaux à 7 : $7 \times 7 \times 7 \times 7$.
Nous conviendrons de l'écrire 7^4, ce qui se lit « 7 *puissance* 4 ». Le nombre entier 4 écrit à droite et au-dessus de 7 s'appelle exposant.
On appelle puissance d'un nombre le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre. – L'exposant de la puissance indique le nombre de ces facteurs.
…
$a \times a$ s'écrit a^2 et se lit « a puissance 2 » ou « a ***au carré*** » ;
$a \times a \times a$ s'écrit a^3 et se lit « a puissance 3 » ou « a ***au cube*** » ;
$a \times a \times a \times a$ s'écrit a^4 et se lit « a puissance 4 », etc.
On convient que $a^1 = a$.

4. Pour comprendre l'origine de cette « dualité » d'appellation (puissance / exposant), on doit revenir aux premiers essais de dénomination des nombres de la forme a^n (en suivant sur ce point la description donnée par D. E. Smith, dans le vol. II, p. 394, de son *History of Mathematics*). Les anciens Grecs désignaient x^2 par le mot de ***puissance*** (*dy'namis*). Diophante, vers 250, appelait

– « cube » (*kubos*) la puissance 3^e ;
– « puissance-puissance » (*dynamody'namis*), la puissance 4^e ;
– « puissance-cube » (*dynamo'kubos*) la puissance 5^e ;
– « cube-cube » (*kubo'kubos*) la puissance 6^e.

On voit qu'ainsi l'entier n du nombre a^n considéré n'apparaissait guère… D'où le problème de parvenir à un formalisme et une terminologie qui fassent apparaître – qui « exposent » – cet entier. L'origine de la notation se trouve chez Descartes (1637). Entre les notations archaïques et la notation moderne, bien des intermédiaires furent proposés, comme par exemple la pratique (déjà évoluée) de noter $A(4) + B(4) + 4A(3)$ *in* $B + 6A(2)$ *in* $B(2) + 4A$ *in* $B(3)$ ce que nous noterions $A^4 + B^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3$. L'écriture « exponentielle » (avec un exposant) fut longtemps mêlée à d'autres formes d'expressions des puissances. Fort avant dans le XVIII^e siècle, ainsi, on écrivit $a^5 + a^4 + aaa + aa + 1$ ou même $a^5 + aaaa + aaa + aa + 1$ au lieu de $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + 1$. Dans son *Cursus mathematicus* (1634-1637), Hérigone notait $a\,2$, $a\,3$, $a\,4$ ce que nous notons a^2, a^3, a^4. Gauss continuera d'écrire aa pour a^2, arguant du fait que cette seconde écriture, en ce cas, ne faisait pas réaliser d'économie de notation…

5. On observera que, dans la pratique mathématique, l'exposant ne sert pas seulement à ***identifier*** telle puissance donnée : ce n'est pas là sa seule raison d'être. Dans le prolongement de cette fonction, il permet en outre ***d'énoncer les lois du calcul sur les puissances***, comme dans l'énoncé ci-après, extrait d'un ancien manuel de 5^e déjà cité :

Le produit de deux puissances d'un même nombre est la puissance de ce nombre qui a pour exposant la somme des exposants des deux facteurs.

2) Un second extrait précise les choses complètement.

Racines & radicaux

1. Radical / racine carré : quelle différence ? (3^e, 8)

2. …

Matériaux pour une réponse

1. L'***écriture*** $\sqrt{3}$ désigne la ***racine carrée*** de 3, que les mathématiciens désignent aussi par l'***écriture*** $3^{1/2}$.

① Les deux écritures se lisent donc, en principe, « racine carrée de 3 », oralisation qui renvoie à l'***objet mathématique*** que désigne aussi bien l'écriture $\sqrt{3}$ que l'écriture $3^{1/2}$ (ou $3^{0,5}$).

② L'oralisation « radical de 3 » décrit, quant à elle, l'***écriture*** $\sqrt{3}$ où ***« radical »*** désigne le symbole $\sqrt{\ }$.

2. On rencontre fréquemment ce phénomène, qui consiste à désigner un ***objet*** par une certaine oralisation de la ***notation*** par laquelle on le désigne.

① Si, par exemple, on associait à tout nombre réel x un certain objet appelé ***bidule de x***, et si l'usage prévalait de noter cet objet $[x]$, gageons qu'on pourrait bientôt entendre d'aucuns désigner le bidule de x par l'expression « crochet de x », etc.

② C'est ainsi, de même, que l'écriture 3^5, qui désigne la puissance 5^e de 3, se lit en principe « 3 [à la] puissance 5 ». Mais comme, dans la notation 3^5, 5 est appelé l'exposant, une « oralisation » littérale de 3^5 est possible, à savoir « 3 exposant 5 », expression qui, là encore, décrit ***l'écriture*** plutôt que ce que l'écriture désigne (à savoir la 5^e puissance de 3, soit 243).

3. On notera que, en 3^e, les élèves apprennent à calculer ***« sur les radicaux »*** et par exemple à obtenir l'égalité $\sqrt{4,2}\sqrt{5} = \sqrt{21}$ qui montre que « le produit des racines carrées de 4,2 et de 5 est égal à la racine carrée de 21 ».

① Le jeu entre ***radicaux*** et ***racines carrées*** est inscrit dans l'intitulé même du thèmes d'études que découpe le programme : ***Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées)***. Significativement, ce thème est scindé en deux sujets d'étude que le programme nomment, l'un, la « ***racine carrée*** d'un nombre positif », l'autre, le produit et le quotient « de deux ***radicaux*** ». C'est en effet par leur écriture à l'aide de radicaux que l'on apprend à « manipuler » en 3^e des racines carrées et à écrire par exemple $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, $\sqrt{4/3} = 2/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{5} = \sqrt{5}/5$.

② En notation exponentielle, les mêmes égalités donneraient $45^{1/2} = 35^{1/2}$, $(4/3)^{1/2} = 2/3^{1/2}$, $1/5^{1/2} = 5^{1/2}/5$, ce qui est autre chose… Cette même écriture permettrait d'obtenir aisément les égalités $(2^{1/2})^3 = 2^{3/2} = (2^3)^{1/2} = 8^{1/2}$ alors qu'on aurait plus difficilement, avec des radicaux : $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{8}$. On saisit mieux ici la distinction entre les objets mathématiques et les formalismes qui permettent d'en parler et de les « calculer ».

e) Voici une question encore dont la réponse se trouve dans les archives du Séminaire.

En statistique, on utilise la notation $\bar{x}$ pour la moyenne. D'où vient cette écriture ? (JB, CR, 2^{de}, 16)

À nouveau, les archives parlent…

Notation de la moyenne

Pourquoi utilise-t-on la notation $\overline{x}$ pour désigner la moyenne d'une série statistique ? (2de, 17)

Matériaux pour une réponse

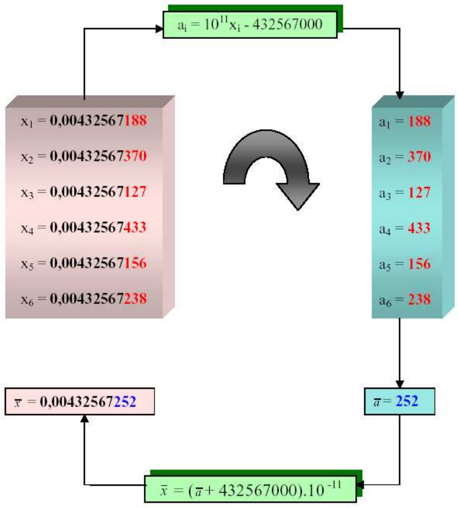
1. On a utilisé plusieurs fois, dans ce Séminaire, la notation $\overline{x}$ pour désigner la moyenne arithmétique d'une série statistique (voir par exemple la séance 5). Il s'agit là, en fait, de la notation ***recommandée par les textes officiels***. C'est ainsi que, dans le complément au document d'accompagnement du programme de 2de intitulé ***Onze fiches de statistique*** (voir le fichier GTD - Onze fiche de statistique.pdf), la fiche consacrée à la linéarité de la moyenne propose le schéma ci-après, où la notation indiquée apparaît clairement.
2. Commentant la notion de loi de probabilité, le document d'accompagnement du programme de 1re S présente le tableau suivant et précise que, s'agissant de séries statistiques (empiriques) – et non de lois de probabilité (théoriques) – on note respectivement $\overline{x}$ et s la moyenne et l'écart type :

…

Moyenne empirique : $\overline{x} = \sum f_i x_i$	Espérance d'une loi P : $\mu = \sum p_i x_i$
Variance empirique : $s^2 = \sum f_i (x_i - \overline{x})^2$	Variance d'une loi P : $\sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2$
Écart type empirique : $s = \sqrt{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}$	Écart type d'une loi P : $\sigma = \sqrt{\sum p_i (x_i - \mu)^2}$

…

Les élèves devront bien distinguer ce qui est empirique (du domaine de l'expérience) de ce qui est théorique ; en particulier, on réservera la lettre grecque σ à l'écart type d'une loi et on évitera de noter avec cette même lettre un écart type empirique (il s'agit là de règles de notations internationales).



3. Quelle est l'origine de la notation internationale $\overline{x}$? Elle trouve son origine dans des usages anglo-américains qui remontent au XIXe siècle et au début du XXe siècle en matière de mathématiques appliquées et de statistique, comme en témoigne les témoignages suivants (http://www.pballew.net/arithme1.html) :

In response to a question about the use of the **x-bar** symbol, for average (mean) value of a sample, John Harper of Victoria University in New Zealand sent a response including the following information:

« Does anyone know who introduced the notation 'X-bar' (i.e. 'X' with a horizontal line above it) for the average of a sample 'X'? (…) »

R.A. Fisher used that notation, in "On an absolute criterion for fitting frequency curves," *Messenger of Mathematics*, v. 41: 155-160 (1912) on p.157. (…) I don't know if he was the first. (…)

Jeff Miller's web page provides some additional material:

$\overline{X}$ for the sample mean. This usage derives from the practice of applied mathematicians of representing any kind of average by a bar. J. Clerk Maxwell's "On the Dynamical Theory of Gases (*Philosophical Transactions of the Royal Society*, 157, (1867), p. 64) uses v-bar for the "mean velocity" of molecules while W. Thomson & P. G. Tait's *Treatise on Natural Philosophy* (1879) uses $\overline{X}$ for the centre of inertia, wx / x. Karl Pearson, the leading statistician of the early 20th century, was from such a physics background. Pearson and his contemporaries used the bar for sample averages and for expected values but eventually E replaced it in the latter role. The survival of $\bar{X}$ for the sample mean is probably due to the influential example of R. A. Fisher who used it in all his works from the first, "On an Absolute Criterion for Fitting Frequency Curves," (1912).

On a reproduit ci-après un passage de l'article de 1912 de R. A. Fisher où apparaît clairement la notation $\bar{x}$.

4. For example, let us take the normal curve of frequency of errors

$$f = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-m)^2},$$

where h and m are to be determined to fit a set of n observations. Our criterion gives, neglecting a constant term,

$$\log P = n \log h - h^2 \Sigma (x-m)^2$$
$$= n \log h - h^2 n (m - \bar{x})^2 - h^2 \Sigma (x - \bar{x})^2,$$

where $n\bar{x} = \Sigma x$.

2.2. Une question fondamentale !

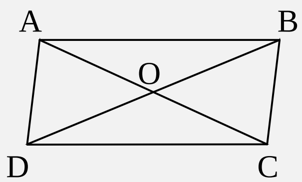
a) L'étude des archives peut aussi faire surgir des questions. Ici, il s'agit plutôt de *relancer* l'examen d'un sujet essentiel mais déjà (bien) travaillé.

Lors d'une recherche dans les archives (séminaire 2000-2001, p. 479-481), je n'ai pas compris pourquoi on doit distinguer deux conjectures : une conjecture relative à l'espace sensible $\mathcal{E}$, et une conjecture relative à la théorie mathématique, en cours de construction, de l'espace $\mathcal{E}$. (FE, MJ, 5^{e}, 16)

b) Le passage mentionné est le suivant.

Conjectures ?

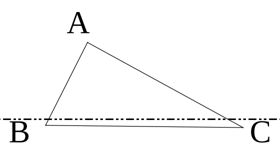
En classe de 4^{e}, l'accent est mis sur l'acquisition de techniques de démonstration. Quelle est alors la définition mathématique exacte des « conjectures » ? Faut-il énoncer les hypothèses et la conclusion ? Exemple : imaginons que les élèves, en 5^{e}, découvrent les caractérisations du parallélogramme. Une activité va les amener à émettre la conjecture : « Il semble que le quadrilatère ABCD [ci-contre] est un parallélogramme ».



Ou bien « Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, il semble que ce quadrilatère soit un parallélogramme ». Laquelle de ces deux assertions correspond le mieux au concept de conjecture ? (4^{e}, 23)

Matériaux pour une réponse

1. Une conjecture ne saurait porter sur un énoncé du type « Le triangle ABC ci-après est rectangle en A ».



À propos de ce tracé, on peut seulement se demander si l’angle en A est, par exemple, compris entre 89 et 91°.

2. En revanche, une conjecture peut porter sur l’énoncé $\mathcal{C}$ ci-après :

« Un triangle ABC dont les côtés [AB], [BC], [CA] ont des mesures proportionnelles à 4, 9, 8 est rectangle en A. »

La conjecture correspondante est alors, non pas l’énoncé $\mathcal{C}$ lui-même, mais l’assertion

« l’énoncé $\mathcal{C}$ est vrai dans l’espace E »

soit, en utilisant le symbolisme introduit lors de la séance 7 du séminaire (le mardi 24 octobre),

$$\models_E \mathcal{C}.$$

3. Pour déterminer si cette conjecture est vraie, c’est-à-dire si

$$\models_E \mathcal{C}$$

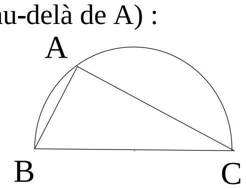
on peut se livrer à une ***expérience*** dans E. Pour cela on peut tracer des triangles ABC satisfaisant à la condition indiquée dans $\mathcal{C}$ et mesurer les angles en A ainsi obtenus.

4. Le triangle ABC tracé ci-dessus a été obtenu ainsi : ses côtés ont (en principe) des mesures proportionnelles à 4, 8 et 9. On ne se demandera pas, alors, si ABC ***est*** rectangle en A (ce qui n’a pas grand sens), ***mais s’il concourt à « falsifier » ou à vérifier la conjecture***

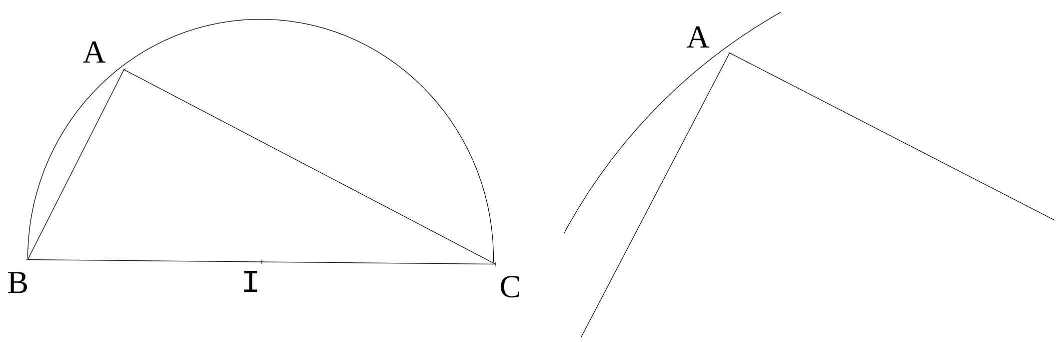
$$\models_E \mathcal{C}.$$

En l’espèce, il ne semble pas sérieusement possible de conclure que l’énoncé $\mathcal{C}$ serait faux : l’examen de $\widehat{A}$ montre en effet que cet angle est un peu supérieur à 90°, sans qu’on puisse dire s’il s’agit là ou non d’un effet de l’imprécision du tracé.

5. On ne peut davantage conclure en examinant si le cercle de diamètre [BC] passe bien par A, geste expérimental qui ne fait que montrer autrement que l’angle effectivement tracé est ici très légèrement supérieur à 90 ° (le cercle passe un peu au-delà de A) :



Toutefois, ce nouveau critère permet de faire jouer une technique cruciale de l’expérimentation graphique : la technique ***de l’agrandissement***. Si l’on trace un triangle ABC *n* fois plus grand, la distance de A au demi-cercle, mesurée par exemple sur la droite (AB), augmente-t-elle dans une proportion voisine de *n*, ou au contraire reste-t-elle à peu près inchangée ? Les figures ci-après conduisent, cette fois, à rejeter la conjecture $\mathcal{C}$.



6. Ayant résolu un problème d'un type proposé lors de la séance 8 du séminaire (mardi 7 novembre), nous savons maintenant qu'il est ***faux*** qu'un triangle ABC dont les côtés [AB], [BC], [CA] ont des mesures proportionnelles à 4, 9, 8 est rectangle en A :

$$\not\models_E \mathcal{C}.$$

Nous sommes alors devant une nouvelle conjecture : l'énoncé $\neg\mathcal{C}$ ci-après

« Un triangle ABC dont les côtés [AB], [BC], [CA] ont des mesures proportionnelles à 4, 9, 8 n'est pas rectangle en A »

est-il déductible dans la TGD – dans la théorie géométrique disponible ? En d'autres termes, il s'agit alors d'examiner la conjecture

$$\vdash_{TGD} \neg\mathcal{C}.$$

On sait que, en 4^e, la réponse à la question précédente est positive : il est ***vrai*** que $\neg\mathcal{C}$. est ***déductible*** dans la TGD. Plus précisément, on peut établir que l'on a :

$$\vdash_{TGD} \text{Théorème de Pythagore} \Rightarrow \neg\mathcal{C}.$$

7. À la question posée, on peut donc répondre ainsi. Des deux assertions proposées, celle qui « correspond le mieux au concept de conjecture » est clairement la seconde, à savoir l'énoncé $\mathcal{D}$ ci-après :

« Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, ~~il semble que~~ ce quadrilatère ~~soit~~ [est] un parallélogramme ».

En vérité, toutefois, on devra distinguer ***deux*** conjectures : une conjecture relative à ***l'espace sensible*** E, à savoir $\models_E \mathcal{D}$, et une conjecture relative à la ***théorie mathématique***, en cours de construction, de l'espace E :

$$\vdash_{TGD} \mathcal{D}.$$

c) La compréhension de la distinction faite est fondamentale et doit être transmise aux élèves ! On examine ci-dessous un exemple simple où ce qui est *vrai* n'est pas (encore) *déductible*.

1) On étudie le plan Π usuel, avec ses points A, B…, ses droites *d*, *d*'…, sa distance δ entre points : $\delta(A, B) = AB$. On peut procéder à des expérience sur Π, mais les assertions vraies que l'on considère ci-après seront regardées comme décrivant des faits spatiaux « bien connus » et n'appelant pas de confirmation expérimentale supplémentaire. On veut en revanche construire une *théorie déductive* de la géométrie de Π.

2) Pour cela, on retient pour axiomes les énoncés suivants :

Π_1. Étant donné des points A, B distincts, il existe une droite *d* unique qui passe par A et B.

Π_2. Il existe trois points non alignés.

Π_3. $\delta : \Pi \times \Pi \to \mathbb{R}_+$ est telle que, pour toute droite d, il existe une bijection f de d sur $\mathbb{R}$ telle que $\delta(A, B) = AB = |f(B) - f(A)|$, pour tous $A, B \in d$ (f est un *système de coordonnée* de d).

3) On examine alors les assertions suivantes, vraies dans le plan usuel, pour savoir si elles se laissent déduire de { Π_1, Π_2, Π_3 } :

θ_1. Pour tous A, B, AB = 0 si et seulement si A = B.

☞ $\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash \theta_1$. Si en effet AB = 0 alors $|f(B) - f(A)| = 0$ et donc $f(B) = f(A)$; f étant une bijection, il vient B = A. Réciproquement on a : $AA = |f(A) - f(A)| = 0$.

θ_2. Pour tous A, B, AB = BA.

☞ $\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash \theta_2$. On a en effet $AB = |f(B) - f(A)| = |f(A) - f(B)| = BA$.

θ_3. Pour tous A, B, C, AB + BC ≥ AC.

☛ $\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash \theta_3$?…

θ_4. Deux droites distinctes ont au plus un point commun.

☞ $\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash \theta_4$. Deux droites distinctes ont en effet au plus un point commun : car si elles en avaient (au moins) deux, elles seraient identiques (d'après Π_1).

θ_5. Si $d//d'$ alors $d'//d$ (d et d' sont dites parallèles si, ou bien $d = d'$, ou bien $d \cap d' = \varnothing$).

☞ $\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash \theta_5$. On a en effet $d//d'$ ssi $d = d'$ ou $d \cap d' = \varnothing$, c'est-à-dire ssi $d' = d$ ou $d' \cap d = \varnothing$, et donc ssi $d'//d$.

θ_6. Si $d//d'$ et $d'//d''$ alors $d//d''$.

☛ $\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash \theta_6$?…

θ_7. Si $O \in d$, et $x \in \mathbb{R}_+$, l'équation (en M) OM = x a exactement deux solutions dans d.

☞ $\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash \theta_7$. On a en effet : $OM = x \Leftrightarrow |f(M)-f(O)| = x \Leftrightarrow f(M)-f(O) = \pm x \Leftrightarrow f(M) = f(O) \pm x \Leftrightarrow M = f^{-1}(f(O) \pm x)$.

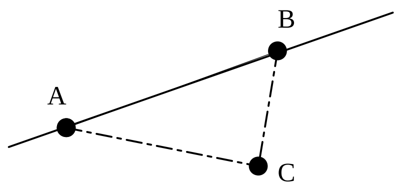
4) On reprend le problème relatif à θ_3 : a-t-on

$$\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash \forall A\ \forall B\ \forall C\ AB + BC \geq AC\ ?$$

• Dans le plan usuel $\prod$, δ étant la distance usuelle (en cm par exemple), on choisit une droite d et $k \in \mathbb{R}_+^*$ et on pose :

$$\delta_k(A, B) = \begin{cases} k\delta(A, B) \text{ si } A, B \in d \\ \delta(A, B) \text{ sinon} \end{cases}.$$

• Il est clair que $\prod$ muni de δ_k vérifie les axiomes Π_1, Π_2, Π_3. Montrons, en examinant le système $(\prod, \delta_k)$, que l'inégalité triangulaire θ_3 n'est pas déductible de $\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \}$. Soit en effet $A, B \in d$ et $C \in \prod$, avec $C \notin (AB)$ et AC > BC.

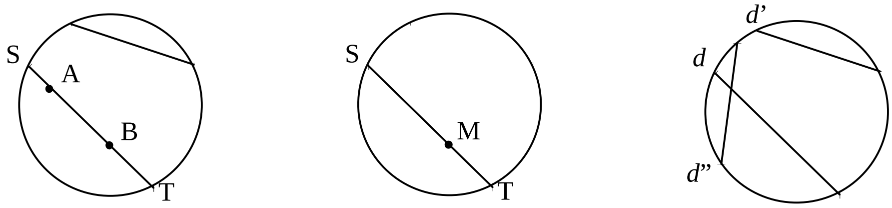


On a : $\delta_k(A, B)+\delta_k(B, C) = kAB + BC$. Pour k assez petit, on a donc : $\delta_k(A, B)+\delta_k(B, C) = kAB + BC < AC = \delta_k(A, C)$.

5) On reprend maintenant le problème relatif à θ_6 : a-t-on

$$\{ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \} \vdash (d//d' \wedge d'//d'') \Rightarrow d//d''\ ?$$

• On prend pour modèle de la théorie un disque ouvert, pour droites les cordes ouvertes (figure de gauche, ci-dessous). Ce système (dit de Cayley-Klein) vérifie clairement les axiomes Π_1 et Π_2.



• Pour toute corde]ST[et tout M $\in$]ST[, on pose $f_{]ST[}(M) = \ln \dfrac{MT}{MS}$ puis $\delta(A, B) = |f_{]ST[}(B) - f_{]ST[}(A)|$. Pour s'assurer que l'axiome Π_3 est vérifié, il suffit de vérifier que f est une bijection de]ST[sur $\mathbb{R}$. Posons ST = u et MT = $x \in$]0, u[; on a $f_{]ST[}(M) = \ln \dfrac{x}{u-x}$, ce qui permet de conclure (figure du centre, ci-dessus).

• Montrons alors que le système proposé ne vérifie pas θ_6. Sur la figure ci-dessus à droite, on a *d*//*d'*, *d'*//*d*", mais *d* et *d*" sécants : θ_6 n'est donc pas vérifié.

2.3. Questions saillantes, *suite*

a) On considère ici les trois questions suivantes, qui peuvent paraître à première vue quelque peu disparates.

1. Faut-il s'acharner lorsqu'on constate que la moitié de la classe n'a pas compris certaines notions ? J'ai une classe de faible niveau et par ma volonté de bien faire j'ai pris du retard dans ma progression. Que me conseillez-vous ? (AS, JT, 5^e, 14)

2. Une nouvelle élève est arrivée dans ma classe la semaine dernière. Elle m'a dit qu'elle venait d'un lycée de Marseille, que sa professeure de mathématiques a été absente pendant deux mois et donc qu'elle a étudié seulement le chapitre « Les nombres ». Elle envisage, de plus, de faire une 1re S. Comment me comporter avec elle pour qu'elle puisse suivre correctement ? (SP, MJ, 2de, 14)

3. Comment gérer les difficultés des élèves en français ? (CM, MJ, 5^e, 14)

b) Chacune de ces questions appelle bien sûr une réponse particulière, mais avec un noyau commun.

1) La première question a trait à la gestion du temps, et plus particulièrement à la « course » entre le temps *scolaire* – les heures et les semaines ouvrables qui passent… – et le temps *didactique*. Faute de plus d'informations sur les mécanismes du retard accumulé, on peut, d'une façon générale, mettre en garde contre un *leurre* qui ne concerne peut-être pas l'auteure de la question : celui auquel on cède quand on tente de se régler sur *les performances les plus basses* des élèves, voire de certains d'entre eux seulement, en ne prêtant d'attention qu'à ce qui ne va pas et en ignorant le meilleur de ce que la classe est capable de faire. Il y a là un piège dont certains élèves peuvent jouer pour ralentir l'avancée du temps didactique – quitte à reprocher ensuite au professeur qu'avec lui ou elle on n'avance pas ! L'observation de classes montre qu'il s'agit là d'un danger très réel, celui d'exigences trop basses, de contenus mathématiques parfois évanescents, *même pour des élèves faibles*. On se gardera donc d'une compassion didactique mal placée.

2) À l’inverse, on s’efforcera :

– de faire le point régulièrement avec la classe sur l’avancement de l’étude du programme (dispositif présenté et re-présenté dans ce Séminaire depuis le début de l’année) ;

– de désigner à la classe, par le biais des synthèses et des préparations de contrôles, le « point moyen » que chacun doit s’efforcer de rallier *personnellement* ;

– de rappeler à chacun sa *responsabilité didactique*, en soulignant sans se lasser qu’étudier, avancer dans la matière enseignée *est un acte collectif*, et donc relève de la responsabilité de chacun ; que cela ne concerne pas que lui ou elle (et ses enfants et petits-enfants à venir, etc., problème déjà évoqué), mais, *hic et nunc*, la classe tout entière, qui pâtirait – la question examinée s’en fait l’écho – des résultats trop faibles ou trop volatils obtenus par tels de ses membres alors même qu’ils ou elles ne sont pas affligés de handicaps dirimants ;

– d’avancer dans l’étude d’un pas tranquille, en mettant en évidence la *fonctionnalité* des connaissances et savoirs déjà mis en place, non pas seulement parce que leur maîtrise peut faire l’objet de contrôles *ad hoc*, mais parce que leur emploi est utile, voire *indispensable*, pour mener à bien les travaux mathématiques permettant d’avancer dans l’étude des questions au programme de la classe.

3) On notera encore la remarque essentielle suivante. Pour appréhender les difficultés réelles d’une classe, il convient d’*objectiver* ces difficultés, non de les subjectiver en interrogeant complaisamment les élèves sur ce qui, selon eux, les tiendrait en échec – un tel interrogatoire ne devant être conduit qu’avec beaucoup de circonspection, au risque d’entrer dans la spirale du misérabilisme didactique. Dans le cas où l’on use d’un dispositif du type « Les questions de la semaine », par exemple, il convient de se tenir au plus près des difficultés effectivement rencontrées telles qu’elles sont mentionnées sans apprêt par les élèves, en évitant de susciter des déclarations distanciées, « réfléchies » sur ce qu’ils *imaginent* être leurs difficultés – ce qui recouvre une autre réalité. De là le dispositif rigoureux décrit lors de la séance 13.

4) La deuxième question pose un problème dont il faut d’abord souligner la difficulté : si ce type de problèmes était aisément résolu, on ne voit guère pourquoi il serait nécessaire qu’il existe des enseignants, des enseignements, des établissements scolaires, etc. L’objectif essentiel est d’intégrer *mathématiquement* cette élève au groupe-classe en l’aidant à se centrer strictement sur les contenus mathématiques *en cours d’étude* et sur les *outils mathématiques* indispensables pour conduire cette étude – le travail personnel guidé de l’élève sur ces outils étant d’abord strictement assujetti à l’emploi que la classe a à en faire *hic et nunc*. Ce n’est que peu à peu qu’une mise à jour moins strictement liée aux besoins actuels pourra être envisagée, hors de tout fantasme prométhéen.

5) La troisième question appelle une problématique déjà évoquée : il n’y a pas « le français » mais *des usages* – toujours peu ou prou spécifiques – *du français*, et ce sont les usages propres aux travaux mathématiques conduits en classe qu’il convient de maîtriser. Il n’y a pas, à cet égard, à mettre *d’abord* en avant un travail particulier, qui se ferait *en marge* de l’activité de la classe : le travail sur la langue, orale et écrite, *est constant* dans une classe de mathématiques où ce sont les élèves guidés par le professeur qui construisent les formulations constitutives des bilans d’AER puis des synthèses et des corrigés exercices ainsi que des divers travaux notés. C’est à ce propos que le *topos* du professeur et celui des élèves *doivent « bouger »* : si le professeur garde le monopole exclusif de la production des formulations de tous types, il est concevable que les élèves restent de simples spectateurs, éventuellement

« croyants », mais en tout cas pas « pratiquants », des jeux de langage réservés au professeur ! On notera ici que la pratique de la rédaction de *questions de la semaine* permet vaille que vaille des progrès réels dans l'usage de la langue : on ne négligera pas cet aspect-là.

3. Forum des questions : exposés à venir

3.1. Exposés prévus

***AI :* programmes de calcul et calcul algébrique**

Exposé 26. Qu'est-ce que l'expression algébrique d'un programme de calcul ? Pourquoi peut-on dire que le calcul algébrique est un calcul sur les programmes de calcul ?

***JNM :* mathématiser la notion de droite ?**

Exposé 27. En quoi peut-on dire que la notion de droite n'est pas complètement mathématisable ?

***JB :* angles et radians**

Exposé 28. Pourquoi utilise-t-on le radian en mathématiques ?

***PL :* Effet Pygmalion et autres effets**

Exposé 29. En quoi les attentes formulées à l'endroit des élèves influent-elles sur leurs performances scolaires ?

3.2. Exposés à venir

a) Un exposé présentera ce que contiennent les archives du Séminaire sur le sujet suivant.

Exposé 30. Comment faire apparaître l'utilité des fonctions x^2 et $\dfrac{1}{x}$ en classe de seconde ?

b) Cet exposé est motivé par les deux questions suivantes :

1. Je suis en train de préparer la séquence sur les fonctions de référence. J'ai cherché dans des manuels des activités de découverte de la fonction carrée et je n'ai rien trouvé de percutant. Pouvez-vous m'aider en me donnant des idées d'activité ? (GD, JT, 2$^{\text{de}}$, 16)
2. Comment motiver l'étude des fonctions de référence x^2 et $\dfrac{1}{x}$? (EMTY, MJ, 2$^{\text{de}}$, 16)

Il sera proposé et présenté par *LN*.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 18 : mardi 7 février 2006

0. Le programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques // 2. Forum des questions : poursuites & anticipations // 3. Forum des questions : exposés.

1. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques

a) On s'arrête d'abord sur la question suivante.

> Dans la notice *Questions & réponses* de l'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques, en 6.1, il est question de « ressources didactiques » comportant « essentiellement des *connaissances* et des *savoirs* ». Quelle est la différence entre « connaissances » et « savoirs » ? (CG, OS, 2de, 15)

Dans le contexte où apparaît la distinction mentionnée, « savoir » désigne une « organisation de savoir », qui peut être ponctuelle ($[T/\tau/\theta/\Theta]$), locale ($[T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i]_{i\in I}$), ou plus large encore. Une connaissance désigne alors un ingrédient quelconque – type de tâches, geste technique, énoncé technologique, principe théorique – d'un tel savoir, que celui-ci soit institutionnalisé ou n'existe qu'en puissance, comme un savoir à venir (à construire, à institutionnaliser). La dialectique des connaissances et des savoirs est essentielle dans la construction (en amont) et dans l'usage (en aval) des organisations praxéologiques, de quelque nature qu'elles soient.

b) Suite de la lecture commentée de la notice *Questions & réponses* (depuis la sous-section 6.2).

2. Forum des questions : poursuites & anticipations

2.1. Une sélection classée

a) Parmi les questions de la semaine 17, on a retenu les questions que l'on examine d'abord, ici, sans y répondre. On observera que la nomenclature présentée lors de la séance 15 a été légèrement enrichie.

> **1. La formation et la profession**
>
> **1.1. Questionner**
>
> **1.2. Observer**
>
> **1.3. Analyser**
>
> **1.4. Évaluer**
>
> **1.5. Développer**

1.6. Diffuser et défendre

Les dispositifs présentés à l'IUFM au fur et à mesure de l'avancement de l'année sont-ils à introduire en classe lorsqu'ils sont adaptés au niveau d'enseignement ? Quand cela peut-il renforcer le contrat didactique de classe et quand cela risque-t-il de le rompre ? Cela est-il laissé à notre jugement ? (JNM, MJ, 4e, 17)

2. La société

3. L'École

3.1. Le système d'enseignement

3.2. L'établissement

a) Espace et temps scolaires

• Cette semaine, 14 élèves sur les 24 de ma classe sont partis en semaine de ski. Nous nous sommes mis d'accord avec le professeur de mathématiques parti avec eux sur le thème à étudier cette semaine. Je me demande comment organiser la séance où ils vont revenir afin de remettre tout le monde à peu près au même niveau (sachant que, malgré les heures prévues pour travailler, je ne pense pas que les élèves partis au ski avancent autant que les autres). (NP, CR, 3e, 17)

b) Conseil de classe

c) Orientation

4. La classe de mathématiques : aspects génériques

4.1. Le temps de l'étude

4.2. L'espace de l'étude

• J'ai du mal à utiliser l'AI comme il faut. L'heure d'AI se situer après deux heures de cours en classe entière et à la fin de la journée : les élèves ont du mal à se concentrer. J'ai essayé plusieurs choses :

– QCM avec discussion sur chaque réponse sur les fonctions ;

– questions de la semaine (mais j'y ai répondu tout de suite) : peut-être que c'est une idée à condition de les faire poser avant ;

– exercices d'applications.

Mais rien de tout ce que j'ai essayé ne m'a réellement convaincu, même si rien n'a été un échec totalement. Pouvez-vous nous donner des idées – ou du moins des pistes – pour rendre l'heure d'AI vraiment efficace pour les élèves ? (MK, OS, 2de, 17)

4.3. Les collectifs d'étude

a) Les règles de vie et de travail

b) Le travail en équipe

d) Gestion des situations critiques

4.4. Les ressources de l'étude

a) Outils langagiers et logiques

• Dans le chapitre « Droites remarquables dans un triangle », je me retrouve face à une incohérence. La médiane est définie comme étant une droite. Or une propriété énonce que le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers d'une médiane en partant du sommet. On parle donc de « longueur de droite » ! De plus la plupart des énoncés d'exercices jouent de cette ambiguïté en notant une médiane sous la forme (OM) ou [OM] en fonction de la démonstration attendue. Pourriez-vous m'éclairer sur ce sujet ? Comment aborder cela avec mes élèves ? (RR, OS, 4e, 17)

b) Outils épistémologiques

• Comment distinguer un caractère quantitatif discret d'un caractère quantitatif continu ? Quelle définition donner de ces deux types de caractères ? Si l'on étudie la taille des élèves, on considère que le caractère est quantitatif continu, mais est-ce raisonnable ? Après tout, un élève ne peut pas mesurer 1,78234 mètres. Est-ce le nombre « important » de valeurs prises par le caractère qui prime ? Pourtant, $\mathbb{N}$ est discret… La distinction entre ces deux notions ne me semble pas du tout rigoureuse ! (AI, JT, 2de, 17)

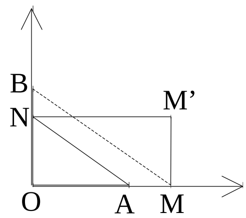
c) Outils mathématiques

d) Outils informatiques

• Je suis en train de travailler avec mes élèves sur le thème de la variation des fonctions. Pour déterminer les extrémums, on fait des conjectures à l'aide de la calculatrice. Je me demande si, lors des DS, il faut garder cette méthode ou s'il vaut mieux donner l'image d'un écran de calculatrice sur le sujet de manière à ce qu'ils conjecturent à partir de celui-ci, pour ne pas pénaliser ceux qui ont du mal à utiliser leur calculette. (CO, MJ, 2de, 17)

• Je vais faire une activité sur ordinateur pour introduire la fonction inverse ; j'utilise le logiciel GeoplanW. Le début consiste à considérer une hyperbole par une méthode géométrique (l'hyperbole sera le lieu géométrique du point M' lorsque M varie).

Activité. Soit un repère orthonormé de centre O ; A (1 ; 0) et B (0 ;1) deux points du plan. Soit M un point distinct de O et situé sur l'axe des abscisses. On note x la mesure algébrique du bipoint (O ; M). La droite parallèle à (MB) coupe l'axe des ordonnées en N. Construire le point d'intersection M' de la perpendiculaire en M à l'axe des abscisses et de la perpendiculaire en N à l'axe des ordonnées. Construire le lieu géométrique de M' lorsque M décrit l'axe des abscisses.



Le problème, c'est que M doit être différent du point O (centre du repère). Pour déclarer M, deux choix sont possibles : soit M est un point libre sur l'axe (Ox) ; soit on déclare une variable numérique x (soit sur $\mathbb{R}$, soit sur un intervalle de $\mathbb{R}$), puis on obtient M comme un point repéré du plan de coordonnées (x, 0). Dans ces deux cas, je ne trouve aucune possibilité pour signifier que M doit être différent du point O. Y a-t-il une solution à ce problème ? Mais peut-être que cela n'a pas d'incidence au moment où l'on construit l'hyperbole et peut permettre d'observer des « limites » au voisinage de zéro ? (DV, JT, 2de, 17)

• Je recommence à me poser sérieusement des questions sur la validation des compétences pour le C2i2e. En effet, certains « compétences générales liées à l'exercice du métier » me paraissent peu claires (voire pas du tout…), surtout que je ne sais pas si je les ai réellement « validées ». En plus, sur une feuille qui nous a été remise (je ne sais plus par qui), deux compétences apparaissent en plus :

∗ B.2.5. Concevoir des situations de communication et de travail à l'aide des ENT.

∗ B.4.4. Concevoir des démarches d'évaluation et de suivi pédagogique à l'aide de logiciels appropriés.

Faut-il « prouver » la validation ? Comment ? (CG, OS, 2de, 17)

• Je souhaiterais utiliser l'outil « Internet » avec mes élèves mais j'ai des difficultés pour trouver des sujets d'étude du programme qui demanderaient des recherches sur Internet. En regardant les archives, j'ai trouvé une utilisation intéressante en statistique : rechercher des données pour répondre à une question de statistique. Y a-t-il d'autres applications ? (NFG, MJ, 2de, 17)

e) Outils de tracé, de mesure, de pesée, etc.

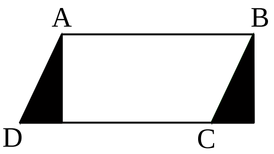
4.5. Les dispositifs & activités d'étude

• J'ai essayé de mettre en place un forum des questions en classe mais peu d'élèves ont posé des questions et les questions posées ne concernaient pas toujours la vie de la classe. Que faire ? (CD, CR, 5^{e}, 17)

• Doit-on systématiquement déduire des activités proposées aux élèves les propriétés de calcul, les théorèmes de géométrie ? Ne peut-on pas, par souci d'économie de temps, limiter à deux ou trois le nombre d'activités par chapitre, le reste étant introduit par exemple lors d'un cours dialogué suivi d'une synthèse et éventuellement d'un travail de démonstration ? (WB, JT, 4^e, 17)

• Je me suis entretenu avec mon PCP sur les questions cruciales. Pour lui, il est préférable de les mettre dans l'AER pour diverses raisons : gestion des traces écrites des élèves ; gestion de la classe ; gestion du temps… Quel est l'intérêt de les poser oralement ou de les faire émerger de la classe ? (MEK, MJ, 5^e, 17)

• Je vais bientôt introduire « l'aire d'un parallélogramme » à mes élèves de 5^e. Mais j'ai du mal à construire une AER qui ne serait pas trop guidée. L'idée de cette AER est de remarquer que l'aire d'un parallélogramme correspond à l'aire d'un certain rectangle :



Mais il est difficile, je pense, de ne pas les guider ! (AS, JT, 5^e, 17)

• Dans d'autres matières, des notions de mathématiques sont utilisées (par exemple en 5^e la proportionnalité est utilisée en physique-chimie, en technologie, en EPS). Les professeurs de ces matières-là ont donc fait des « rappels » sur ce sujet. Les élèves ont l'impression de sans arrêt « apprendre » cette notion, ce qui est démotivant pour eux. De plus, ils n'ont pas compris pour autant ce qu'était la proportionnalité. Comment optimiser cette transversalité ? (FE, MJ, 5^e, 17)

4.6. L'évaluation de l'étude

• Depuis octobre, j'ai établi un rituel concernant les DS : chaque vendredi, mes élèves travaillent sur un DS plus ou moins long sur les thèmes que nous venons d'étudier et parfois sur les thèmes et travaux de correction à réinvestir. Pour toute l'équipe pédagogique, la classe apparaît comme très difficile à mettre au travail ; je pensais donc que ce rituel donnerait un rythme de travail régulier. Malheureusement, je m'aperçois que mes élèves pensent pouvoir « rattraper » facilement leurs mauvais résultats grâce à la fréquence des DS et donc choisissent de concentrer leurs efforts suivant leurs « envies » du moment et leur « fatigue » (je reprends leurs termes). Non seulement ils n'obtiennent pas, ainsi, de bons résultats mais surtout ils n'acquièrent pas les connaissances et les compétences attendues. Que dois-je faire ? Espacer les DS ? (LLL, JT, 4^e, 17)

• L'administration de l'établissement souhaite que le soutien soit évalué. Mais comment évaluer le soutien et cela ne risque-t-il pas de gêner les élèves qui en font partie ? (CM, MJ, 5^e, 17)

5. La classe de mathématiques : aspects spécifiques

5.1. Géométries

a) Géométrie plane

• En classe de 5^e, est-il nécessaire de faire (ou de faire faire) toutes les démonstrations des résultats mathématiques du cours ? Par exemple, le résultat qui m'intéresse actuellement est « la somme des mesures des angles d'un triangle fait 180º ». Compte tenu de ma progression, la seule démonstration est lorsque et je m'interroge sur son utilité pour les élèves. Puis-je donner cette démonstration en travail hors classe comme travail facultatif pour ceux qui veulent comprendre « pourquoi » ? Idée de la démonstration : ABC triangle quelconque, I milieu de [AB], J milieu de [AC], C' symétrique de C par rapport à I, B' symétrique de B par rapport à J ; par symétrie, (AC') // (BC) et (AB') // (BC)… donc C', A', B' alignés ; de plus $\widehat{ABC} = \widehat{BAC'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{CAB'}$… D'où : la somme des trois mesures des angles fait 180º. (AG, JT, 5^e, 17)

b) Géométrie dans l'espace

• Peut-on, malgré les contraintes de temps en 2de, faire au sujet de la géométrie dans l'espace le même travail de construction de la théorie géométrique que l'on a fait pour le plan en collège ? (JG, OS, 2de, 17)

• Voici un exemple de définition de deux droites orthogonales trouvée dans un manuel : « Deux droites de l'espace sont orthogonales ssi les parallèles menées à l'une et à l'autre en un point sont perpendiculaires. » Ou encore : « Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales ssi il existe Δ, parallèle à l'une et perpendiculaire à l'autre. » Mais (sauf erreur), dans l'espace, deux droites ne peuvent pas être perpendiculaires (sécantes ou pas) : E et F perpendiculaires $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{E}^{\perp} \subset \overrightarrow{F}$; E et F orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{E}^{\perp} \subset \overrightarrow{F}^{\perp}$; ainsi dans l'espace : deux droites ne peuvent être qu'orthogonales ; deux plans ne peuvent être que perpendiculaires ; Δ perpendiculaire à P $\Leftrightarrow$ Δ orthogonale à P. Pourquoi alors cette définition (où on parle de droites perpendiculaires) ? (PL, OS, 2de, 17)

c) Géométrie vectorielle

• Dans le chapitre des vecteurs en 2de, quelle notation faut-il favoriser, $\overrightarrow{u}\ (x\,;y)$ ou $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$? (SP, MJ, 2de, 17)

5.2. Nombres, calculs, fonctions

a) Entiers, décimaux et rationnels

• Comment expliquer le fait qu'on ne puisse pas diviser par 0 à une classe de 4^{e} ? (NA, JT, 4^{e}, 17)

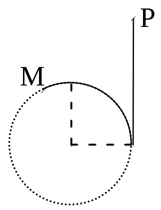
• Je suis en train de traiter les puissances en 4^{e}. L'usage des puissances de 10 est motivé par l'écriture de petits ou grands nombres ; on peut motiver les puissances de 2 par leur utilisation en informatique. Cependant, je n'ai pas su que répondre à un élève qui m'a demandé à quoi servaient les puissances de (–7) par exemple. Comment pouvons-nous motiver en général les puissances de nombres relatifs ? (RD, OS, 4^{e}, 17)

b) Nombres : au-delà des rationnels

• Quelles sont les motivations de l'introduction du cosinus d'un angle aigu en 4^{e} ? En particulier le cosinus est introduit avant le sinus et la tangente. (MD, MJ, 4^{e}, 17)

• Je n'ai pas encore vu les radians avec ma classe. Dans le dernier DM, il fallait calculer la longueur d'un arc de cercle connaissant l'angle au centre en degrés. Plusieurs de mes élèves ont utilisé les radians. Je n'ai pu discuter qu'avec trois d'entre eux qui m'ont avoué n'avoir rien compris à ce qu'ils ont compris : comment gérer cette situation ? (DC, OS, 2de, 17)

• Au sujet de l'enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique, je n'ai pas trouvé de logiciel de géométrie dynamique montrant l'enroulement d'un segment (ou d'une droite, demi-droite) sur un cercle. En existe-t-il ? J'ai donc envisagé la solution suivante. Le point M parcourt le cercle lorsque l'on bouge le point P.



Je pense programmer ainsi : P (1, ℓ) coordonnées cartésiennes, M (1, ℓ) coordonnées polaires. L'« introduction » des coordonnées polaires a l'avantage de bien d'écrire le procédé voulu. D'autres professeurs du lycée proposent M (cos ℓ, sin ℓ) : n'est-ce pas donner directement « la solution » ? Ou faut-il le voir alors plutôt comme une vérification de la définition donnée en 2de ? Le document d'accompagnement se « limite » à $[-\pi,\pi]$ ou $[0, 2\pi]$. Comment faire apparaître la périodicité des fonctions trigonométriques alors ? (AC, OS, 2de, 17)

c) Fonctions

• Est-ce que la motivation en classe de seconde de la fonction $x \mapsto x^2$ est le fruit que tout polynôme de degré 2 peut être mis sous « forme canonique » ? Sachant que cette dernière notion n'est pas au programme, n'est-ce pas hors sujet ? (DV, CR, 2^de^, 17)

5.3. Statistique

• Je vais aborder la partie statistique avec ma classe. Compte tenu de la facilité d'accès aux données statistiques, j'aurais souhaité faire faire des recherches aux élèves pour travailler sur leurs documents. Comment mettre en place cela et tenir compte des documents fournis par les élèves ? (GC, MJ, 2^de^, 17)

• Comment organiser le cahier de statistique (par rapport à l'organisation ternaire de l'étude) ? (AI, JT, 2^de^, 17)

5.4. Grandeurs et mesures

5.5. Thèmes transversaux

a) Citoyenneté

b) …

2.2. Questionner

a) On s'arrête un instant sur les deux questions suivantes.

1. J'ai essayé de mettre en place un forum des questions en classe mais peu d'élèves ont posé des questions et les questions posées ne concernaient pas toujours la vie de la classe. Que faire ? (CD, CR, 5^e^, 17)

2. J'ai du mal à utiliser l'AI comme il faut. L'heure d'AI se situer après deux heures de cours en classe entière et à la fin de la journée : les élèves ont du mal à se concentrer. J'ai essayé plusieurs choses :

– QCM avec discussion sur chaque réponse sur les fonctions ;

– questions de la semaine (mais j'y ai répondu tout de suite) : peut-être que c'est une idée à condition de les faire poser avant ;

– exercices d'applications.

Mais rien de tout ce que j'ai essayé ne m'a réellement convaincu, même si rien n'a été un échec totalement. Pouvez-vous nous donner des idées – ou du moins des pistes – pour rendre l'heure d'AI vraiment efficace pour les élèves ? (MK, OS, 2^de^, 17)

1) Il faut rappeler que le « travail par questions », qui est à la base de l'activité de création de connaissances hors de l'école, a été largement refoulé de la culture didactique scolaire : l'y introduire est salutaire mais certainement pas immédiat ! À cet égard, on rappelle les règles énoncées lors de la séance 13.

FQ_1. Questions et réponses sont un *trésor collectif de la classe* : elles renvoient, de façon parfois singulière et subjective, à des *problèmes objectifs du « métier d'élève »* de seconde (ou de 4^e^, etc.) ; quant au fait de se soucier des difficultés que rencontre autrui – garçon ou fille, « petit » ou « grand » –, outre qu'il contribue à la formation scolaire de l'élève, il participe de *l'éducation à la citoyenneté* dans ce cadre de socialisation qu'est une classe de mathématiques (tandis que, rappelons-le, le repliement sur ses seuls « problèmes » personnels conduit à l'« idiotie »).

FQ_2. Les questions sont formulées *par écrit*, de préférence *en classe entière* (et non hors classe).

FQ_3. Sauf exception, les éléments de réponses ne sont proposés *qu'une semaine plus tard au moins* : comme il y a un travail des élèves, il y a un travail du professeur, et qui prend du temps.

FQ_4. Pour des raisons diverses (manque de temps, mais aussi dynamique de la classe rendant l'abord de telle question peu pertinent, voire impossible, etc.), le professeur ne propose d'éléments de réponses que pour *certaines* des questions formulées, leur choix entrant dans sa responsabilité de professeur en charge de la classe ; mais bien sûr une question peut être posée à nouveau, par exemple lorsqu'elle réapparaît dans un contexte neuf.

FQ$_5$. Les réponses, ou du moins un résumé des réponses, sont consignées *par écrit* au bout d'un temps fini.
FQ$_6$. Questions et réponses sont « publiques » *au sein de la classe*, où elles constituent un outil de travail collectif ; elles ne sont pas communiquées à l'extérieur de la classe.
FQ$_7$. Toute difficulté ou toute interrogation relative au travail de la classe, à son travail propre ou aux conditions dans lesquelles ceux-ci doivent être accomplis peut faire, dans une formulation appropriée, l'objet d'une question de la semaine.

2) Répondre immédiatement n'est acceptable que dans de rares cas ; les règles d'exiger des questions écrites et de donner des réponses différées, mises ensuite par écrit, sont *fondamentales*. Mais il faut se souvenir surtout que la classe doit apprendre à formuler des questions. Celles-ci, en particulier, doivent mentionner des difficultés rencontrées concrètement par l'élève, et non des considérations variées où l'élève se pose en critique, en analyste, en commentateur plutôt qu'en acteur de la vie de la classe. C'est ce qu'indiquait ce passage des notes de la séance précédente, que l'on reprend ici.

Pour appréhender les difficultés réelles d'une classe, il convient d'*objectiver* ces difficultés, non de les subjectiver en interrogeant complaisamment les élèves sur ce qui, selon eux, les tiendrait en échec – un tel interrogatoire ne devant être conduit qu'avec beaucoup de circonspection, au risque d'entrer dans la spirale du misérabilisme didactique. Dans le cas où l'on use d'un dispositif du type « Les questions de la semaine », par exemple, il convient de se tenir au plus près des difficultés effectivement rencontrées telles qu'elles sont mentionnées sans apprêt par les élèves, en évitant de susciter des déclarations distanciées, « réfléchies » sur ce qu'ils *imaginent* être leurs difficultés – ce qui recouvre une autre réalité. De là le dispositif rigoureux décrit lors de la séance 13.

3) Lorsqu'un dispositif du type « Questions de la semaine » est mis en place, le rôle de ces questions dans la dynamique du travail de la classe doit non seulement être réel, mais doit encore être rendu en partie visible, grâce à un dispositif du type « Le Forum des questions ». Bien entendu, comme le veut la règle FQ$_5$, un tel dispositif doit se traduire, dans les documents en possession des élèves, par des *traces écrites pérennes*.

b) On reviendra sur le problème de l'AI, notamment en relation avec la lecture collective de la notice *L'espace de l'étude*.

2.3. Évaluer

a) Les questions ci-après ont trait – différemment – au thème de l'*évaluation* des travaux des élèves.

1. Depuis octobre, j'ai établi un rituel concernant les DS : chaque vendredi, mes élèves travaillent sur un DS plus ou moins long sur les thèmes que nous venons d'étudier et parfois sur les thèmes et travaux de correction à réinvestir. Pour toute l'équipe pédagogique, la classe apparaît comme très difficile à mettre au travail ; je pensais donc que ce rituel donnerait un rythme de travail régulier. Malheureusement, je m'aperçois que mes élèves pensent pouvoir « rattraper » facilement leurs mauvais résultats grâce à la fréquence des DS et donc choisissent de concentrer leurs efforts suivant leurs « envies » du moment et leur « fatigue » (je reprends leurs termes). Non seulement ils n'obtiennent pas, ainsi, de bons résultats mais surtout ils n'acquièrent pas les connaissances et les compétences attendues. Que dois-je faire ? Espacer les DS ? (LLL, JT, 4^e, 17)

2. L'administration de l'établissement souhaite que le soutien soit évalué. Mais comment évaluer le soutien et cela ne risque-t-il pas de gêner les élèves qui en font partie ? (CM, MJ, 5^e, 17)

1) Les textes officiels prévoient un petit nombre de devoirs de contrôle, ainsi que le rappelle ce passage d'un document du groupe de mathématiques de l'Inspection générale que l'on trouvera sur le site de l'IUFM (dans la rubrique des *Documents 2nd degré*), sous le titre « Travaux écrits en mathématiques » :

> les devoirs de contrôle (de 30 min en 6^{e} à 3 ou 4 h en terminale) sont peu fréquents (2 à 3 par trimestre) et doivent rester de difficulté et de longueur raisonnables. Ils ne doivent en aucun cas déborder du programme de la classe, ni faire appel à des notions ou des méthodes qui n'y sont pas étudiées.

2) Une modification du dispositif adopté davantage conforme à ces prescriptions ainsi qu'à la formation donnée ici consisterait à remplacer les DS en question par des *micro*-contrôles, à propos desquels les notes relatives à la séance 5 de ce Séminaire précisent :

> Le dispositif du micro-contrôle peut avoir divers usages didactiques, notamment celui de contrôler, non la bonne maîtrise du contenu du dernier DM, mais celle du *contenu en cours d'étude*. La *régularité* de ces micro-contrôles dénués de pièges aide à la régulation du travail personnel des élèves. Leur *absence* a des effets contraires, que révèlera cruellement un micro-contrôle prenant dès lors l'allure d'une interrogation « surprise ». Des micro-contrôles réguliers (un par semaine au moins, ou parfois davantage) permettent de prévenir de telles mauvaises surprises et aident les élèves les plus fragiles à affronter les apprentissages qui leur sont proposés.

3) S'agissant du soutien, qu'il vienne ou non en substitution d'IDD, on pourra se référer à la réponse faite lors de la séance 14 à la question de SPM sur un sujet voisin.

b) La question de l'évaluation se pose aussi à propos des praxéologies didactiques transmises en formation et leur maîtrise : on remplira donc à nouveau, mais après le repos des vacances d'hiver seulement, le *questionnaire* déjà utilisé le 13 décembre. On le fera en s'efforçant de faire un point *individuellement* et de suivre les principes de rigueur rappelés plus haut à propos des questions de la semaine.

2.4. Voyage, voyage…

> 1. J'ai appris qu'au mois de mars la moitié de ma classe part en Italie durant une semaine complète… Mon problème, c'est que je ne sais pas si je dois continuer à voir des choses nouvelles qui vont perdre les élèves lors de leur retour ou si je dois « temporiser » durant cette période mais perdre énormément de temps sur ma progression. (BR, JT, 4^{e}, 15)
>
> 2. Du 26 janvier au 5 février, 9 élèves (sur 23) sont en Angleterre. Au total, cela représente sept heures de cours en mathématiques. Les collègues du collège (ceux de la classe et d'autres) m'ont dit que, eux, continuent d'avancer normalement et que les absents devraient rattraper leur retard. Comment réagir ? Les parents ont-ils le droit de se plaindre ensuite ? Que puis-je mettre en place pour qu'ils récupèrent leur retard dans les meilleures conditions (sachant *qu'a priori* ils n'auront pas de temps consacré aux devoirs durant leur séjour). (CR, CR, 3^{e}, 15)
>
> 3. Cette semaine, 14 élèves sur les 24 de ma classe sont partis en semaine de ski. Nous nous sommes mis d'accord avec le professeur de mathématiques parti avec eux sur le thème à étudier cette semaine. Je me demande comment organiser la séance où ils vont revenir afin de remettre tout le monde à peu près au même niveau (sachant que, malgré les heures prévues pour travailler, je ne pense pas que les élèves partis au ski avancent autant que les autres). (NP, CR, 3^{e}, 17)

a) La question des voyages reste aujourd'hui encore une question taboue, non discutée et pas même posée. Il semble que la solution évoquée dans la troisième question constitue en elle-même un immense progrès des consciences. Car rien, en beaucoup de cas, n'est envisagé ni pour les élèves qui, restant au collège, ne bénéficieront pas des apports cognitifs (supposés réels) du voyage d'étude, ni pour ceux qui, partant, seront frustrés des enseignements usuels en cours : double injustice, donc !

b) Pour le second des déséquilibres créés, dans le cadre de la solution évoquée, on peut définir un programme partagé avec le professeur de mathématiques voyageur. Ce programme de voyage sera composé de sujets sur lesquels il semble plus facile de se mettre d'accord, soit qu'il s'agisse – en 3^e – d'une reprise complétant un travail de 4^e (comme il en va avec le théorème de Thalès par exemple), soit qu'il s'agisse d'un thème nouveau mais relativement circonscrit (tel, en 3^e toujours, le thème de l'angle inscrit et de l'angle au centre), tout cela augmenté à volonté d'un « travail de la technique » portant par exemple sur la maîtrise des opérations algébriques.

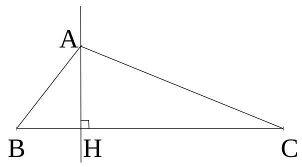
c) Le retour des voyageurs pourra être scellé par un travail en classe entière sur des fiches de synthèse correspondant au travail censé avoir été mené à bien pendant la semaine du voyage et préparées exceptionnellement par le professeur. Ces fiches seront lues, commentées, éventuellement complétées en séance, et ce travail sera complété par un micro-contrôle qui permettra d'assigner ensuite à certains élèves un effort personnel de réajustement.

2.5. Outils langagiers, outils épistémologiques

a) La question suivante a été soulevée – à nouveau !

> Dans le chapitre « Droites remarquables dans un triangle », je me retrouve face à une incohérence. La médiane est définie comme étant une droite. Or une propriété énonce que le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers d'une médiane en partant du sommet. On parle donc de « longueur de droite » ! De plus la plupart des énoncés d'exercices jouent de cette ambiguïté en notant une médiane sous la forme (OM) ou [OM] en fonction de la démonstration attendue. Pourriez-vous m'éclairer sur ce sujet ? Comment aborder cela avec mes élèves ? (RR, OS, 4^e, 17)

1) On reproduit la question voisine travaillée lors de la séance 11 du Séminaire.

> En 5^e, dans le thème des triangles, on introduit la définition des « hauteurs » d'un triangle. On énonce : dans un triangle, la hauteur relative au sommet A est la droite passant par A et perpendiculaire au côté opposé à A. Mais on parle aussi de hauteur pour la longueur du segment [AH] (voir la figure).
>
> 
>
>
> Comment expliquer qu'un même mot désigne une *droite* mais aussi la *longueur d'un segment* ? Ce n'est pas très clair pour moi ! (AS, JT, 5^e, 10)

2) Les archives du Séminaire pour l'année 2001-2002 contiennent par exemple cette question.

> Pour le SPA, nous prenons la classe en main lors de la leçon « Droites remarquables dans un triangle » en 4^e. Un problème survient lors de la définition de la hauteur : « C'est la droite qui… » Or, pour un calcul d'aire de triangle, on donne $\mathcal{A} = \frac{h \times b}{2}$. Ici on considère la « mesure de la hauteur ». Les livres scolaires ne parlent pas du problème. Que doit-on faire ? Faire comme s'il n'y en avait pas, considérant que cela va de soi que, lorsqu'on écrit $\frac{h \times b}{2}$, on ne considère pas vraiment la hauteur mais qu'une

partie ? Ou essayer d'expliquer le problème au risque de « pinailler » à leurs yeux (en expliquant que si on définit la hauteur comme étant « le segment qui… », l'orthocentre aura du mal à exister, à moins de parler des supports de segment, etc.) ? Bref, je pense que trop de détails risque de les perdre. (2$^{\text{de}}$, 8)

3) On avait lors de la séance 11 reproduit l'extrait suivant d'un manuel ancien, « du temps où la polysémie ne semblait pas poser problème », et sur lequel on observe en passant « le souci d'expliciter les raisons d'être de l'étude des propriétés du parallélogramme ».

99. Remarque. — *Utilité des théorèmes concernant les parallélogrammes.* Ces théorèmes servent à en démontrer d'autres qui ont pour objet de prouver :

1° Que deux droites sont égales ;

2° Que deux angles sont égaux ;

3° Que deux droites sont parallèles.

4) On avait aussi reproduit ce commentaire de l'année 2001-2002, commentaire, écrivais-je alors, « que l'on méditera ».

Cette *polysémie* du lexique et des notations a le grand mérite d'alléger le langage : ainsi la notation AB désignait-elle jadis à la fois la droite (AB), le segment [AB], la longueur AB, le cas de la « hauteur » évoqué dans la question examinée apparaissant ainsi comme *un vestige d'une telle pratique*. Le démérite dont on crédite aujourd'hui ces pratiques polysémiques procède d'une croyance abusive, installée dans la pensée didactique des professeurs de mathématiques à l'occasion de la réforme des « mathématiques modernes » (autour de 1970), selon laquelle la difficulté éprouvée par les élèves dans la maîtrise de certaines techniques ou notions mathématiques proviendrait en premier lieu de *« malentendus »* dus eux-mêmes à *l'imprécision* du vocabulaire ou des notations : d'où une chasse forcenée – dont on n'a plus guère idée aujourd'hui – à l'imperfection langagière ! À cet égard, la position avancée dans la question posée est sage, à condition de ne pas être motivée par… les élèves et leur faiblesse supposée. Chacun peut comprendre – et le professeur pourra donc l'indiquer aux élèves – qu'il est économique d'employer le même mot pour désigner des choses apparentées – la *droite hauteur*, le *segment hauteur*, la *longueur hauteur* –, que le contexte d'emploi permet de distinguer.

b) La question ci-après mérite également attention.

Comment distinguer un caractère quantitatif discret d'un caractère quantitatif continu ? Quelle définition donner de ces deux types de caractères ? Si l'on étudie la taille des élèves, on considère que le caractère est quantitatif continu, mais est-ce raisonnable ? Après tout, un élève ne peut pas mesurer 1,78234 mètres. Est-ce le nombre « important » de valeurs prises par le caractère qui prime ? Pourtant, $\mathbb{N}$ est discret… La distinction entre ces deux notions ne me semble pas du tout rigoureuse ! (AI, JT, 2$^{\text{de}}$, 17)

1) On pourra d'abord relire une question examinée lors de la séance 9.

Lors du cours sur les fonctions, on aborde les fonctions définies sur un ensemble fini. Lors de ma recherche d'exemples, je me suis posé une question : toutes les courbes de l'INSEE représentant le chômage sont représentées par des courbes affines par morceaux (de janvier 2005 à février 2005, etc.) Sachant que la fonction est définie sur un ensemble *fini* (relevés discrets en tout cas…), il est donc incorrect de la représenter par une courbe continue. Est-il judicieux de le faire remarquer ? (DV, CR, 2$^{\text{de}}$, 8)

2) Puis on reprendra les éléments de réponse formulés alors.

1) C'est plutôt l'occasion de faire remarquer qu'il y a là un *choix* de modélisation mathématique – en trois temps. Dans un premier temps, on décide de regarder le taux de chômage r comme une fonction du temps t, lui-même regardé comme une variable « continue » prenant ses valeurs dans l'intervalle [0 ; 365] (par exemple) : $r = f(t)$. Dans un deuxième temps, on relève la valeur de r en $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ À ce stade, une représentation graphique ne comporterait qu'un nombre fini de points (t_1, r_1), (t_2, r_2), (t_3, r_3), etc. Dans un troisième point, on décide de rechercher des valeurs approchées de r sur $]t_1 ; t_2[$,$]t_2 ; t_3[$, etc., *par interpolation*, et en l'espèce par interpolation *« affine »*.

2) La représentation de r par une « courbe continue » n'est donc nullement « incorrecte » : elle résulte en effet, *non du phénomène étudié lui-même*, mais d'une *décision de modélisation* – consistant (ici) à opter pour un modèle continu plutôt que pour un modèle discret. Cette remarque est essentielle : ce ne sont pas les phénomènes étudiés qui « dictent » le modèle. Dans tous les cas, bien entendu, il restera à examiner ce que le modèle élaboré nous apprend vraiment sur le système qu'il modélise. Pour ne prendre ici qu'un exemple, on peut modéliser l'évolution d'une population par un modèle discret de la forme

$$x(t + 1) = x(t)[1 + r(t, x(t))]$$

c'est-à-dire par une relation de récurrence d'ordre 1, ou par un modèle continu de la forme

$$\frac{dx}{dt} = x(t)r(t, x).$$

(Sur cette question, voir par exemple Alain Hillion, *Les théories mathématiques des populations*, PUF [coll. « Que sais-je ? »], Paris, 1986.)

3) On reviendra toutefois de manière plus spécifique sur les notions – couramment évoquées en statistique – de variables « discrètes », « continues », etc.

2.5. Outils informatiques

a) On a choisi ci-après deux questions touchant de façons diverses aux TICE.

1. Je suis en train de travailler avec mes élèves sur le thème de la variation des fonctions. Pour déterminer les extrémums, on fait des conjectures à l'aide de la calculatrice. Je me demande si, lors des DS, il faut garder cette méthode ou s'il vaut mieux donner l'image d'un écran de calculatrice sur le sujet de manière à ce qu'ils conjecturent à partir de celui-ci, pour ne pas pénaliser ceux qui ont du mal à utiliser leur calculette. (CO, MJ, 2^{de}, 17)

2. Je recommence à me poser sérieusement des questions sur la validation des compétences pour le C2i2e. En effet, certains « compétences générales liées à l'exercice du métier » me paraissent peu claires (voire pas du tout…), surtout que je ne sais pas si je les ai réellement « validées ». En plus, sur une feuille qui nous a été remise (je ne sais plus par qui), deux compétences apparaissent en plus :

∗ B.2.5. Concevoir des situations de communication et de travail à l'aide des ENT.

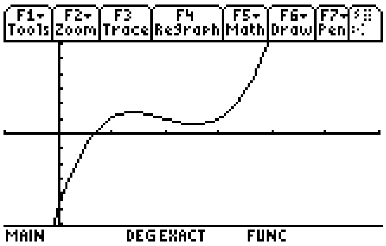
∗ B.4.4. Concevoir des démarches d'évaluation et de suivi pédagogique à l'aide de logiciels appropriés.

Faut-il « prouver » la validation ? Comment ? (CG, OS, 2^{de}, 17)

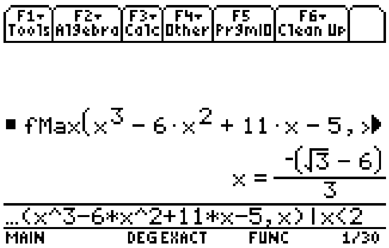
3. Je souhaiterais utiliser l'outil « Internet » avec mes élèves mais j'ai des difficultés pour trouver des sujets d'étude du programme qui demanderaient des recherches sur Internet. En regardant les archives, j'ai trouvé une utilisation intéressante en statistique : rechercher des données pour répondre à une question de statistique. Y a-t-il d'autres applications ? (NFG, MJ, 2^{de}, 17)

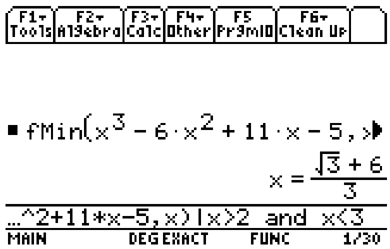
b) L'intégration des outils informatiques dans le travail mathématique est un problème brûlant de la profession. Leur intégration dans les travaux demandés aux élèves n'en est qu'une modalité particulière, particulièrement importante.

1) Considérons la fonction f définie sur [0 ; 5] par : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$.



La copie d'écran ci-dessus permet de conjecturer que *f* croît de 0 jusqu'à un nombre α compris entre, disons, 1,4 et 1,5, puis décroît jusqu'à un nombre β situé entre, disons, 2,5 et 2,6, etc. Pour aller plus loin à l'aide de la calculatrice, il convient de recourir à des moyens plus sophistiqués, qui exigent de manipuler la calculatrice. À moins qu'on ne « donne » le résultat sous la forme par exemple des copies d'écran ci-après.





On en tire que $\alpha = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\beta = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$. Le travail mathématique demandé à l'élève n'est évidemment pas considérable…

2) D'une manière générale, si l'on ne doit pas exclure de fournir dans l'énoncé une copie d'écran de la calculatrice pour *alléger* le travail demandé, il convient de respecter la règle suivante : si tel usage de la calculatrice a été étudié avec la classe de façon suffisante pour assurer raisonnablement un apprentissage satisfaisant, cet usage pourra apparaître dans le devoir de contrôle, et il n'y aura pas, alors, à faire de cas particulier.

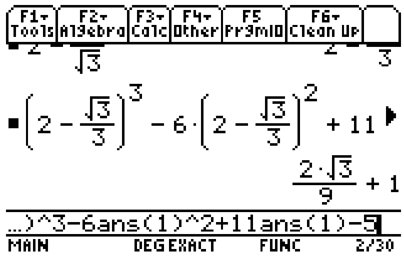
3) Cette règle ne doit pas pour autant conduire à oublier qu'un grand soin doit être mis à faire qu'une mise en œuvre inefficace de la calculatrice ne puisse contaminer tout le travail demandé à l'élève. À cet égard, on s'efforcera de ménager une bonne « étanchéité » entre les différentes « parties » du travail attendu sur la fonction *f* considérée. Par exemple, si l'on a eu l'occasion de retravailler le calcul sur les radicaux, on pourra ici proposer la question suivante :

Vérifier que l'on a l'identité suivante :

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = (x - 2)^3 - (x - 2) + 1.$$

Utiliser cette identité pour calculer la valeur de $f(\alpha)$ sous la forme $a + b\sqrt{3}$, où a et b sont des rationnels. (On explicitera le calcul.)

On a en l'espèce : $(x - 2)^3 - (x - 2) + 1 = (x - 2)((x - 2)^2 - 1) + 1 = (x - 2)(x^2 - 4x + 3) + 1 = (x^3 - 4x^2 + 3x) - 2(x^2 - 4x + 3) + 1 = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$. Il vient donc : $f(\alpha) = (\alpha - 2)^3 - (\alpha - 2) + 1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} + 1 = 1 + \frac{2}{9}\sqrt{3}$. Ici, l'emploi de la calculatrice permettra surtout de contrôler le résultat de son calcul, comme on le voit ci-dessous. Il y aura un simple avantage à l'utilisateur avisé, qui devra tout de même détailler les calculs ci-dessus.



b) Dans son numéro 1 du 5 janvier 2006, le *Bulletin officiel* du ministère de l'Éducation nationale contient une circulaire intitulée « Certificat Informatique et Internet. Généralisation du C2i® niveau 2 "enseignant" », adressée aux « rectrices et recteurs d'académie » ainsi qu'aux « directrices et directeurs des instituts universitaires de formation des maîtres ».

1) Cette circulaire rend officiel le « référentiel de compétences » déjà présenté lors de la séance 7 : les quelques changements intervenus sont d'ordre strictement typographique. Rappelons que le référentiel comporte « 27 compétences réparties en 7 domaines », dont – en bleu ci-dessous – 18 doivent obligatoirement être validées pour permettre l'obtention du C2i2e, laquelle suppose *en outre* la validation de 5 au moins des 9 compétences restantes. La circulaire précise que « dans ce contexte de première phase de généralisation, la certification et la validation ou non des compétences du C2i® niveau 2 "enseignant" ne doivent pas avoir d'incidences sur la validation de la formation des stagiaires ». Il n'en sera plus de même, en principe, à partir de 2006-2007.

A – Compétences générales liées à l'exercice du métier	
Domaines	**Compétences**
A.1. **Maîtrise de l'environnement numérique professionnel**	1. Identifier les personnes ressources TIC et leurs rôles respectifs, dans l'école ou l'établissement, et en dehors (circonscription, bassin, académie, niveau national...).
	2. S'approprier différentes composantes informatiques (lieux, outils...) de son environnement professionnel.
	3. Choisir et utiliser les ressources et services d'un environnement numérique de travail (ENT).
	4. Choisir et utiliser les outils les plus adaptés pour communiquer avec les acteurs et usagers du système éducatif.
	5. Se constituer et organiser des ressources en utilisant des sources professionnelles.
A.2. **Développement des compétences pour la formation tout au long de la vie**	1. Utiliser les ressources en ligne et les dispositifs de formation ouverte et à distance (FOAD) pour sa formation.
	2. Se référer à des travaux de recherche liant savoirs, apprentissages et TICE.
	3. Pratiquer une veille pédagogique et institutionnelle, notamment par l'identification des réseaux d'échanges concernant son domaine, sa discipline, son niveau d'enseignement.
A.3. **Responsabilité professionnelle dans le cadre du système éducatif**	1. S'exprimer et communiquer en s'adaptant aux différents destinataires et espaces de diffusion (institutionnel, public, privé, interne, externe...).

	2. Prendre en compte les enjeux et respecter les règles concernant notamment : – la recherche et les critères de contrôle de validité des informations ; – la sécurité informatique ; – le filtrage Internet.
	3. Prendre en compte les lois et les exigences d'une utilisation professionnelle et citoyenne des TICE concernant notamment : – la protection des libertés individuelles et publiques ; – la sécurité des personnes ; – la protection des mineurs ; – la confidentialité des données ; – la propriété intellectuelle ; – le droit à l'image.
	4. Respecter et faire respecter la charte d'usage de l'établissement, dans une perspective éducative d'apprentissage de la citoyenneté.

B - Compétences nécessaires à l'intégration des TICE dans sa pratique	
Domaines	**Compétences**
B.1. **Travail en réseau avec l'utilisation des outils de travail collaboratif**	1. Rechercher, produire, partager et mutualiser des documents, des informations, des ressources dans un environnement numérique.
	2. Contribuer à une production ou à un projet collectif au sein d'équipes disciplinaires, interdisciplinaires, transversales ou éducatives.
	3. Concevoir des situations de recherche d'information dans le cadre des projets transversaux et interdisciplinaires.
B.2. **Conception et préparation de contenus d'enseignement et de situations d'apprentissage**	1. Identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE.
	2. Concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de classe.
	3. Intégrer des outils et des ressources dans une séquence d'enseignement, en opérant des choix entre les supports et médias utilisables et leurs modalités d'utilisation.
	4. Préparer des ressources adaptées à la diversité des publics et des situations pédagogiques en respectant les règles de la communication.
B.3. **Mise en œuvre pédagogique**	1. Conduire des situations d'apprentissage en tirant parti du potentiel des TIC : – travail collectif, individualisé, en petits groupes ; – recherche documentaire.
	2. Gérer l'alternance, au cours d'une séance, entre les activités utilisant les TICE et celles qui n'y ont pas recours.
	3. Prendre en compte la diversité des élèves, la difficulté scolaire en utilisant les TICE pour gérer des temps et des modalités de travail différenciés, en présentiel et/ou à distance.

	4. Utiliser les TICE pour accompagner des élèves, des groupes d'élèves dans leurs projets de production ou de recherche d'information.
	5. Anticiper un incident technique ou savoir y faire face.
B.4. **Mises en œuvre de démarches d'évaluation**	1. Identifier les compétences des référentiels TIC (B2i® ou C2i®) mises en œuvre dans une situation de formation proposée aux élèves, aux étudiants.
	2. S'intégrer dans une démarche collective d'évaluation des compétences TIC (B2i® ou C2i®).
	3. Exploiter les résultats produits par des logiciels institutionnels d'évaluation des élèves.

2) On reviendra plus longuement sur les conditions sous lesquelles les différentes compétences pourront être validées. En tout état de cause, deux questions seront au cœur de cet examen :

– comment situer le *travail par questions* visant à faire émerger les *problèmes de la profession* (de professeur de mathématiques de l'enseignement secondaire français) par rapport au cadre précédent, qui apparaît constitué selon une procédure *top-down* (du haut vers le bas) plutôt que par une procédure *bottom-up* (du bas vers le haut) ?

– comment « opérationnaliser » le tableau des compétences précédent en accord avec l'état de repérage des problèmes de la profession réalisé dans la formation et en consonance avec les principes essentiels de cette formation ?

• Parmi les « principes essentiels », notons au premier rang celui formulé ainsi lors de la séance 7 de ce séminaire.

> Depuis toujours, pourtant, il existe une condition que l'école (au sens large du terme) s'engage à réaliser : la « contamination » scolaire, quelle qu'en soit la forme, est placée sous le contrôle d'une *instance de vérification* – fonction qu'assume notamment les professeurs (chacun dans son domaine de compétence). Dans une classe, ainsi, les élèves sont appelés à s'exprimer, à proposer, à débattre, mais toujours, en dernière instance, *sous la supervision du professeur*. Dans le cas du travail du chercheur, cette supervision n'est pas, sauf exception, le fait d'un « superchercheur », mais de la *communauté des pairs* – ce qu'on nomme de façon commode *la* communauté scientifique. D'une façon plus générale, tout collectif de travail – qu'il soit nombreux ou réduit à une personne – doit se donner une *instance de supervision*, qui diminuera les risques de pollution épistémologique. Un thésard a un directeur de thèse (et présente le fruit partiel de ses travaux dans un séminaire de pairs, par exemple) ; un trinôme réalisant son TER – la chose deviendra bientôt d'actualité – est supervisé par le tuteur du GFP ; etc. Que cette supervision cesse d'exister et l'engagement formatif de l'institution concernée sera par définition néantisé.

• Ce principe implique que ne pourront être validés des travaux n'ayant bénéficié d'aucune supervision raisonnable. Ainsi, s'agissant par exemple du domaine de compétences B1, le travail en réseau avec des professeurs de l'établissement du stage en responsabilité, par exemple, ne saurait être allégué *sans plus*, même accompagné par exemple de l'observation que les professeurs concernés se sont déclarés « satisfaits » du travail réalisé. On est donc conduit à rechercher le meilleur degré *d'intégration dans la formation et sa validation* telles qu'elles existent actuellement.

3) Considérons ainsi les compétences B1 (ci-après).

B.1. Travail en réseau avec l'utilisation des outils de travail collaboratif

1. Rechercher, produire, partager et mutualiser des documents, des informations, des ressources dans un environnement numérique.
2. Contribuer à une production ou à un projet collectif au sein d'équipes disciplinaires, interdisciplinaires, transversales ou éducatives.
3. Concevoir des situations de recherche d'information dans le cadre des projets transversaux et interdisciplinaires.

• Les deux premières compétences peuvent trouver à se montrer (et d'abord à se construire !) dans le cadre du *travail d'étude et de recherche* (TER) mené en bien en trinôme. La supervision est en ce cas assumée

– *pendant* le temps de développement de la réponse $R^{\heartsuit}$ visée par le directeur du TER ;

– à l'étape de sa diffusion et de sa défense, par le jury d'évaluation des mémoires professionnels.

• Il en va autrement de la troisième compétence – « Concevoir des situations de recherche d'information dans le cadre des projets transversaux et interdisciplinaires » – dans la mesure où il n'a pas trait à des « projets » *disciplinaires*, mais, si l'on peut dire, à des projets *au moins* interdisciplinaires. La validation de cette compétence, qui ne fait pas partie des 18 à validation obligatoire, devra faire l'objet d'un travail d'ampleur strictement limitée, qui pourrait *par exemple* prendre la forme suivante :

– sur l'un des six *thèmes de convergence* qui, à partir de la rentrée 2006 en classe de 5^{e}, feront l'objet d'une étude concertée entre plusieurs disciplines, définir un *sujet d'étude* prenant la forme d'une question Q validée par le tuteur ;

– amorcer l'exploration des ressources, disponibles sur l'Internet, appropriées à des élèves qui auraient à étudier Q ;

– rédiger une fiche indiquant, outre le thème de convergence et le sujet Q, quelques liens conduisant à certaines des ressources ainsi repérées, avec un commentaire sur leur usage éventuel par des élèves du niveau considéré ayant à étudier Q.

4) Les remarques ébauchées ici seront poursuivies ultérieurement : cette année, à titre exceptionnel, le temps de la validation des travaux présentés pour l'obtention du C2i2e devrait en principe s'étendre au-delà de la validation de la formation *stricto sensu*.

2.6. Mesure des angles, encore !

a) Lors de la séance dernière, on avait recherché les fonctions φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{U}$ ayant les propriétés suivantes :

(1) φ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier : c'est donc une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{U}$;
(2) φ est un *homomorphisme* du groupe additif de $\mathbb{R}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{U}$: on a $\varphi(t + t') = \varphi(t)\varphi(t')$ pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$.
(3) φ est une application *continue* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{U}$;
(4) φ est une *surjection* de $\mathbb{R}$ sur $\mathbf{U}$: tout point de $\mathbf{U}$ est atteint par φ.

b) Cette recherche avait abouti à définir l'application φ_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!}.$$

On avait établi que φ_1 satisfait aux trois premières conditions ci-dessus. En outre, on avait vu que, en posant, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$c_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, t^{2n} \text{ et } s_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n+1}$$

on a : $\varphi_1 = c_1 + \mathrm{i}s_1$.

c) La démonstration de la surjectivité de φ_1 se fait en plusieurs étapes.

1) On a vu que $c_1(0) = 1$ et $s_1(0) = 0$, et que $c_1' = -s_1$ et $s_1' = c_1$. On établit d'abord qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $c_1(t) = 0$. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi ; c_1 étant continue, puisque $c_1(0) = 1$, on aurait $c_1(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc $s_1'(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'application s_1 serait donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$; comme $s_1(0) = 0$, on aurait alors $s_1(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si $0 < t < u$, on a par ailleurs :

$$s_1(t)(u - t) < \int_t^u s_1(x)\mathrm{d}x = c_1(t) - c_1(u).$$

Comme $|c_1| \leq 1$, il vient $s_1(t)(u - t) < 2$, ce qui, si $s_1(t) > 0$, est impossible dès que u est assez grand. Par suite, on doit rejeter l'hypothèse évoquée. En d'autres termes, il existe des réels $t > 0$ tels que $c_1(t) = 0$. L'application c_1 étant continue, l'ensemble de ces réels est fermé. Soit alors t_0 le plus petit de ces nombres ; on pose traditionnellement $\pi = 2t_0$; on a donc $c_1(\pi/2) = 0$, en sorte que $s_1(\pi/2) = \pm 1$. Comme $s_1' = c_1 > 0$ sur $[0 ; \pi/2[$ et $s_1(0) = 0$, on a $s_1(\pi/2) = 1$. On a donc $\varphi_1(\pi/2) = \mathrm{i}$ et, par suite, $\varphi_1(\pi) = \varphi_1(\pi/2)^2 = -1$ et $\varphi_1(2\pi) = 1$. On a donc $\varphi_1(t + 2k\pi) = \varphi_1(t)$; en conséquence, c_1 et s_1 admette également la période 2π.

2) Montrons maintenant que, pour tout $t \in\ ]0 ; 2\pi[$, on a $\varphi_1(t) \neq 1$. Pour $t \in\ ]0 ; \pi/2[$, posons $\varphi_1(t) = x + \mathrm{i}y$: on a $0 < x, y < 1$. Il vient :

$$\varphi_1(4t) = (x + \mathrm{i}y)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4\mathrm{i}xy(x^2 - y^2).$$

Si $\varphi_1(4t)$ est réel, alors $x^2 - y^2 = 0$; comme $x^2 + y^2 = 1$, on a $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$, en sorte que $\varphi_1(4t) = \frac{1}{4} - 6\,\frac{1_2}{4} + \frac{1}{4} = -1$. Par suite, $\varphi_1(4t) \neq 1$ quel que soit $t \in\ ]0 ; \pi/2[$, CQFD.

3) On peut alors établir que $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbf{U}$ est bien une surjection. Plus précisément, on va montrer ceci : pour tout $z \in \mathbf{U}$, il existe un unique $t \in [0 ; 2\pi[$ tel que $\varphi_1(t) = z$. L'unicité résulte de l'observation que, si $0 \leq t < u < 2\pi$, alors $\varphi_1(u)\varphi_1(t)^{-1} = \varphi_1(u - t) \neq 1$, d'après le résultat précédent. Soit alors $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, avec $x_1^2 + y_1^2 = 1$ et $x_1 \geq 0$, $y_1 \geq 0$; Comme c_1 décroît de 1 à 0 sur $[0 ; \pi/2]$, il existe $t_1 \in [0 ; \pi/2]$ tel que $c_1(t_1) = x_1$. Comme $c_1^2 + s_1^2 = 1$ et $s_1 \geq 0$ sur $[0 ; \pi/2]$, il vient $s_1(t_1) = y_1$. Ainsi $\varphi_1(t_1) = z_1$. Soit alors $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbf{U}$. Si $x < 0$ et $y \geq 0$, posons $z_1 = -\mathrm{i}z = y + \mathrm{i}(-x)$; soit t_1 tel que $\varphi_1(t_1) = z_1$: on a alors $\varphi_1(t_1 + \pi/2) = \varphi_1(t_1)\varphi_1(\pi/2) = \mathrm{i}z_1 = z$. Si $x < 0$ et $y < 0$, posons $z_1 = -z$; il existe t_1 tel que $\varphi_1(t_1) = z_1$ et on a alors $\varphi_1(t_1 + \pi)$

$= \varphi_1(t_1)\varphi_1(\pi) = -\varphi_1(t_1) = -z_1 = z$. Si $x \geq 0$ et $y < 0$, posons $z_1 = \mathrm{i}z$; il existe t_1 tel que $\varphi_1(t_1) = z_1$ et on a alors $\varphi_1(t_1 + 3\pi/2) = \varphi_1(t_1)\varphi_1(\pi/2)\varphi_1(\pi) = -\mathrm{i}\varphi_1(t_1) = -\mathrm{i}z_1 = z$, CQFD.

4) Rappelons enfin que toutes les applications φ convenables sont alors les applications $t \mapsto \varphi_1(kt)$, où $k \in \mathbb{R}$.

2.7. Statistique

a) On s'arrête sur la question suivante.

> Je vais aborder la partie statistique avec ma classe. Compte tenu de la facilité d'accès aux données statistiques, j'aurais souhaité faire faire des recherches aux élèves pour travailler sur leurs documents. Comment mettre en place cela et tenir compte des documents fournis par les élèves ? (GC, MJ, 2^de^, 17)

1) On a rappelé lors de la séance précédente que le point de départ absolu d'une *étude statistique* tient dans une question Q à propos d'un *caractère* X que possèdent (ou non) les *individus* ω d'une certaine *population* Ω. Ce qui importe n'est pas en soi la connaissance des valeurs observées, $x = X(\omega)$, que, dans une enquête statistique *ab ovo*, on commencera par recueillir, mais la *distribution* de ces valeurs, sous la forme de la connaissance des effectifs n ou des fréquences $f = n/N$ (où N est l'effectif de Ω) des valeurs v prises par X sur Ω (on pourra poser : $V(X, \Omega) = \{\ v \in \mathfrak{R}\ /\ \exists\ \omega\ (\omega \in \Omega \wedge X(\omega) = v\ \}$, où $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}$ désigne le système des nombres utilisés), ou encore de la *fonction de répartition* F_X définie par

$$F_X(x) = \frac{1}{N} \sum_{v \leq x} n_v.$$

2) Ce qu'il faut d'abord retenir, ici, c'est qu'on ne demande pas de rechercher des « données », sur Internet ou ailleurs, si cette recherche *n'est pas impulsée par une question* Q. Il convient donc de partir d'une question : sans cela, tout ce qui devrait s'ensuivre ne sera qu'un jeu formel, un théâtre d'ombres.

b) Prenons un premier exemple.

Q. L'an dernier, dans mon collège, le taux de réussite au brevet a été de 79,4 %. Je ne crois pas que ce soit un taux faible. Est-ce un taux élevé ? Ou bien est-ce qu'il se situe « dans la normale » ?

1) Pour répondre, on doit situer ce taux dans une série de taux analogues, c'est-à-dire de taux obtenus par d'autres collèges. Ces « autres collèges » constitueront la population Ω, le caractère X étant le taux de réussite au DNB en 2005 (sur l'appellation officielle du « brevet des collèges », voir http://eduscol.education.fr/D0071/accueil.htm). Si l'on désigne le collège de l'auteur de la question par ω_0, on a donc : $X(\omega_0) = 0{,}794$.

2) Notons bien que, si la « série » évoquée se réduit à ω_0, alors on ne peut pas répondre à la question Q, c'est-à-dire, pour parler trivialement, à la question « 79,4 %, c'est beaucoup ou c'est pas beaucoup ? ». Pour pouvoir répondre à une telle question, on doit constituer une série statistique, en essayant par exemple de connaître le taux correspondant de quelques autres collèges, ω_1, ω_2, ω_3, etc., proches géographiquement de ω_0. Si l'on ne se réfère qu'à ces

collèges-là, la population Ω sera { ω_0, ω_1, ω_2, ω_3, … }, et on aura une certaine réponse – significative peut-être dans le cadre d'une rivalité, d'une compétition entre ces établissements, mais relativement fragile. Car que se passerait-il si l'on situait le collège ω_0 dans l'ensemble des collèges du département ? De l'académie ? De la France métropolitaine ?

3) C'est pour répondre à ces questions – situer le collège ω_0, du point de vue du caractère X, dans une population plus vaste – que l'on devra partir à la recherche de données. Une manière de faire consiste, non pas à s'adresser à chacun des collèges concernés pour leur demander leur taux de réussite (ce qui peut toujours être envisagé), mais aux organismes de tutelle qui peuvent détenir les données numériques recherchées.

• On peut, sur le site du ministère de l'Éducation nationale (http://www.education.gouv.fr/), explorer les publications (http://www.education.gouv.fr/publication/default.htm) : elles contiennent en particulier, à côté du *Bulletin officiel* bien connu, des *Notes d'information* (http://www.education.gouv.fr/stateval/ni/ni.htm) dont le dernier numéro de l'année présente, sous le titre de « Liste thématique des *Notes* de la DEP : Information, Évaluation, Recherche », l'inventaire des notes en ligne. En recherchant le mot « brevet » dans le fichier correspondant (pdf), on trouve rapidement : les résultats du DNB font l'objet d'une *Note* parue au cours de l'année 2004, la note 04-10. On se reporte donc aux *Notes* de cette année-là : le document cherché est intitulé « Résultats définitifs du diplôme national du brevet (public et privé) - Session 2003 ». Comme on le voit, il porte sur le DNB 2003, et non sur le DNB 2005, et il concerne les établissements privés comme les établissements publics : on voit que la population Ω n'est pas celle à laquelle on avait naïvement pensé. Le résumé par lequel débute l'article est lui aussi riche d'informations.

> En France métropolitaine et dans les départements d'outre-mer, le taux de réussite global au brevet pour la session 2003 est de 78,0 %, en quasi-stabilité par rapport à la session 2002. 613 000 candidats ont obtenu leur brevet. La série collège, très largement majoritaire, détient le taux de réussite le plus élevé (78,5 %), suivie de la série technologique (78,2 %) puis de la série professionnelle (68,5 %). Quelle que soit la série, les filles ont de meilleurs résultats que les garçons : 81,2 % d'entre elles ont obtenu le diplôme national du brevet, contre 74,7 % des garçons. Le taux de réussite dans les DOM (69,3 %) s'améliore par rapport à la session 2002. Aussi l'écart avec les résultats de la métropole (78,3 %) se réduit-il. En revanche, la dispersion des taux de réussite entre les départements de métropole reste toujours élevée (20 points) et se maintient d'une session à l'autre.

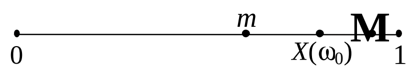
• La situation se complexifie : il y a la France métropolitaine et les DOM ; il y a trois types de brevets ; il y a les filles et les garçons. On doit souligner que cette recherche oblige à connaître un tant soit peu le fragment du monde que l'on est amené à examiner : elle rend savant sans que cela soit recherché ; les connaissances acquises sont un moyen, non une fin.

• Par rapport à la question Q posée, une valeur numérique semble plus pertinente : le taux de réussite global à la série « collège » du brevet pour la session 2003, qui est de 78,5 %. Mais qu'est-ce que ce taux ? L'examen de la *Note* fait apparaître qu'il s'agit du quotient du nombre de candidats *admis* au DNB au nombre des candidats qui se sont *présentés* aux épreuves du DNB : par exemple, dans le département des Bouches-du-Rhône, 23 286 candidats se sont présentés, toutes séries confondues, dont 17 578 ont été admis, ce qui donne un taux de $\frac{17\,578}{23\,286} \approx 75{,}5$ %. On découvre ainsi une autre difficulté dans la définition de X : s'agit-il d'un taux calculé comme indiqué ici ou du rapport du nombre d'admis au nombre d'*inscrits* ? Dans la série « collège », indique encore la *Note*, la différence entre *inscrits* et *présents* est peu importante : au total (France métropolitaine + DOM), sur 711 203 inscrits, 699 928 se sont présentés, soit un taux de présence de 98,4 % environ.

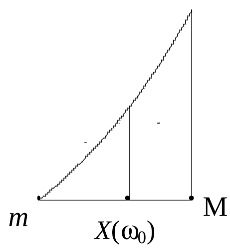
• Même si la différence de résultats entre garçons et filles est impressionnante, on peut sans doute écarter un effet de structure sensible – si le collège ω_0 comportait une proportion de filles très supérieure à 50 %, cela tirerait vers le haut le taux de réussite du collège et il ne serait plus guère pertinent de le comparer au taux global de réussite. On peut faire l'hypothèse, en l'espèce, qu'il n'en est rien et, dans un premier temps au moins, ignorer, par rapport à la question posée, la différence de réussite entre garçons et filles.

• En revanche, les informations apportées par la *Note* montrent d'autres faits statistiques qu'il ne saurait être question d'ignorer *a priori*. Le minimum du taux de réussite académique en France métropolitaine, toutes séries confondues, est de 74,8 % : c'est celui de l'académie de Clermont-Ferrand. Le maximum est de 84,9 % : c'est celui de l'académie de Rennes. Bien entendu la série des taux de réussite *académiques* a une *étendue* moindre que la série des taux de réussite *départementaux* : la Lozère a ainsi un taux de 89,5 % tandis que le Territoire de Belfort a un taux de 69,7 % : l'étendue, d'un peu plus de 10 points pour la série académique, passe à presque 20 points pour la série départementale. On doit donc être vigilant en ce qui concerne la série (inconnue jusqu'ici) des taux de réussite des collèges de – disons – l'académie d'Aix-Marseille.

• Supposons par exemple que le minimum (inconnu) de cette série soit de 60 %, tandis que le maximum serait de 93 %. On peut représenter le taux du collège ω_0 sur une demi-droite où l'on positionne aussi le minimum et maximum *supposés*.



Comme on le devine sur la figure ci-dessus, $X(\omega_0)$ est un peu plus proche du maximum M que du minimum m : le milieu $\frac{m + M}{2} = \frac{60 + 93}{2}\,\% = 76{,}5\,\%$ est en effet inférieur à $X(\omega_0) =$ 79,4 %. Mais cela ne permet guère de conclure : il se pourrait – pourquoi pas ? – que la distribution des taux ait l'allure stylisée ci-après, auquel cas le taux du collège ω_0 ne serait pas parmi même les 50 % de taux les plus élevés ! Dans l'autre sens, bien entendu, il se pourrait que, au contraire, les taux situés entre, disons, 78 % et le maximum 93 % constituent seulement 10 % des valeurs observées dans les collèges de l'académie. Les conclusions que l'on peut tirer dépendent ainsi de la *distribution* de X sur la population des collèges de l'académie.

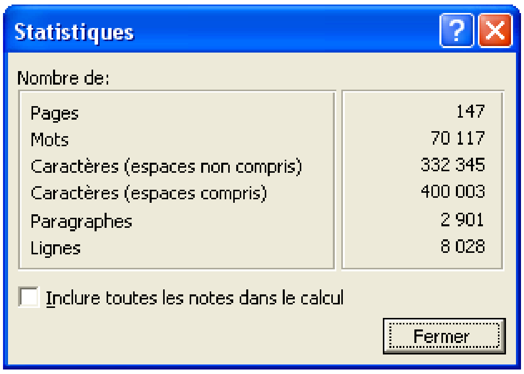


4) On peut alors rechercher sur le site de l'académie concernée. Pour Aix-Marseille, on pourra aller à l'adresse http://cap.ac-aix-marseille.fr/etudes/index.php pour constater que le document espéré (« Diplôme National du Brevet - Session 2005 ») est… inaccessible ! Dans ce cas, on ne peut véritablement répondre à la question. *L'étude devra se poursuivre par d'autres voies.*

c) Prenons maintenant un deuxième exemple.

Q. Mon professeur de français m'a dit que je faisais des phrases trop longues dans mes rédactions. Une phrase « pas trop longue », c'est quoi ?

1) Ici, il faut étudier une certaine population Ω de *phrases* en français et, pour chacune d'elle, considérer la valeur d'un caractère X qui permette d'estimer sa « longueur ». Dans ce cas, on est aidé par le logiciel Word qui fournit automatiquement certaines données : en cliquant sur **Outils** puis sur **Statistiques…** on obtient par exemple ceci :



2) On peut prendre pour X le nombre de « Caractères (espaces compris) ». Considérons par exemple la phrase suivante (extraite d'un texte que l'on trouvera à l'adresse suivante : http://abu.cnam.fr/cgi-bin/go?tordre1) :

> Je m'étais pris d'une profonde sympathie pour ce grand flemmard de gabelou qui me semblait l'image même de la douane, non pas de la douane tracassière des frontières terriennes, mais de la bonne douane flâneuse et contemplative des falaises et des grèves.

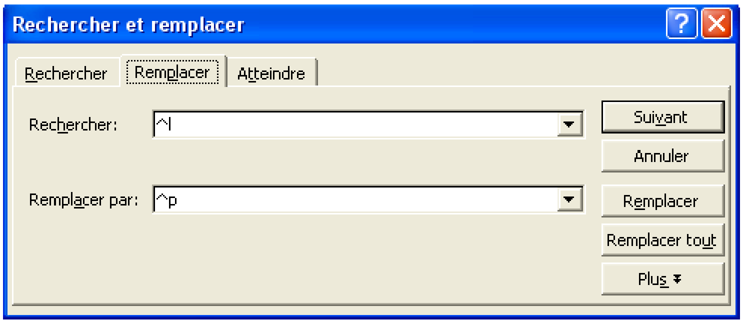
On a : $X = 255$.

3) La phrase examinée est la première d'un texte d'Alphonse Allais qu'on trouvera à l'adresse déjà indiquée. On peut provisoirement prendre pour population des phrases celle de ce texte. On a copié puis collé ici les premiers paragraphes de ce texte.

Je m'étais pris d'une profonde sympathie pour ce grand flemmard de gabelou que me semblait l'image même de la douane, non pas de la douane tracassière des frontières terriennes, mais de la bonne douane flâneuse et contemplative des falaises et des grèves.
Son nom était Pascal ; or, il aurait dû s'appeler Baptiste, tant il apportait de douce quiétude à accomplir tous les actes de sa vie.
Et c'était plaisir de le voir, les mains derrière le dos, traîner lentement ses trois heures de faction sur les quais, de préférence ceux où ne s'amarraient que des barques hors d'usage et des yachts désarmés.
Aussitôt son service terminé, vite Pascal abandonnait son pantalon bleu et sa tunique verte pour enfiler une cotte de toile et une longue blouse à laquelle des coups de soleil sans nombre et des averses diluviennes (peut-être même antédiluviennes) avaient donné ce ton spécial qu'on ne trouve que sur le dos des pêcheurs à la ligne. Car Pascal pêchait à la ligne, comme feu monseigneur le prince de Ligne lui-même.
Pas un homme comme lui pour connaître les bons coins dans les bassins et appâter judicieusement, avec du ver de terre, de la crevette cuite, de la crevette crue ou toute autre nourriture traîtresse.
Obligeant, avec cela, et ne refusant jamais ses conseils aux débutants. Aussi avions-nous lié rapidement connaissance tous deux.
Une chose m'intriguait chez lui c'était l'espèce de petite classe qu'il traînait chaque jour à ses côtés trois garçons et deux filles, tous différents de visage et d'âge.
Ses enfants ? Non, car le plus petit air de famille ne se remarquait sur leur physionomie. Alors, sans doute,

des petits voisins.
Pascal installait les cinq mômes avec une grande sollicitude, le plus jeune tout près de lui, l'aîné à l'autre bout.
Et tout ce petit monde se mettait à pêcher comme des hommes, avec un sérieux si comique que je ne pouvais les regarder sans rire.
Ce qui m'amusait beaucoup aussi, c'est la façon dont Pascal désignait chacun des gosses.
Au lieu de leur donner leur nom de baptême, comme cela se pratique généralement, Eugène, Victor ou Emile, il leur attribuait une profession ou une nationalité.
Il y avait le Sous-inspecteur, la Norvégienne, le Courtier, l'Assureur, et Monsieur l'abbé.

• On voit que chaque phrase est marquée par le signe ↵. On colle alors le texte dans un fichier de travail (vide) ; puis on fait disparaître le signe ↵ en le faisant remplacer par le signe de fin de paragraphe habituel, ¶ : le premier signe est codé ^l, le second ^p.



En cliquant sur **Remplacer tout**, on obtient alors le texte suivant, en même temps que Word donne le nombre de remplacement effectués, c'est-à-dire, ici, le nombre de *paragraphes*, soit 13 ; nombre que les **Statistiques…** de Word confirment.

Je m'étais pris d'une profonde sympathie pour ce grand flemmard de gabelou qui me semblait l'image même de la douane, non pas de la douane tracassière des frontières terriennes, mais de la bonne douane flâneuse et contemplative des falaises et des grèves.
Son nom était Pascal ; or, il aurait dû s'appeler Baptiste, tant il apportait de douce quiétude à accomplir tous les actes de sa vie.
Et c'était plaisir de le voir, les mains derrière le dos, traîner lentement ses trois heures de faction sur les quais, de préférence ceux où ne s'amarraient que des barques hors d'usage et des yachts désarmés.
Aussitôt son service terminé, vite Pascal abandonnait son pantalon bleu et sa tunique verte pour enfiler une cotte de toile et une longue blouse à laquelle des coups de soleil sans nombre et des averses diluviennes (peut-être même antédiluviennes) avaient donné ce ton spécial qu'on ne trouve que sur le dos des pêcheurs à la ligne. Car Pascal pêchait à la ligne, comme feu monseigneur le prince de Ligne lui-même.
Pas un homme comme lui pour connaître les bons coins dans les bassins et appâter judicieusement, avec du ver de terre, de la crevette cuite, de la crevette crue ou toute autre nourriture traîtresse.
Obligeant, avec cela, et ne refusant jamais ses conseils aux débutants. Aussi avions-nous lié rapidement connaissance tous deux.
Une chose m'intriguait chez lui c'était l'espèce de petite classe qu'il traînait chaque jour à ses côtés trois garçons et deux filles, tous différents de visage et d'âge.
Ses enfants ? Non, car le plus petit air de famille ne se remarquait sur leur physionomie. Alors, sans doute, des petits voisins.
Pascal installait les cinq mômes avec une grande sollicitude, le plus jeune tout près de lui, l'aîné à l'autre bout.
Et tout ce petit monde se mettait à pêcher comme des hommes, avec un sérieux si comique que je ne pouvais les regarder sans rire.
Ce qui m'amusait beaucoup aussi, c'est la façon dont Pascal désignait chacun des gosses.

Au lieu de leur donner leur nom de baptême, comme cela se pratique généralement, Eugène, Victor ou Emile, il leur attribuait une profession ou une nationalité.
Il y avait le Sous-inspecteur, la Norvégienne, le Courtier, l'Assureur, et Monsieur l'abbé.

• Comment obtenir le nombre de phrases ? Par convention, on pourrait dire qu'il y a autant de phrases que de points, s'il n'y a pas de point abréviatif (comme dans « M. » par exemple) ni de points de suspension. Il suffit alors de faire remplacer le point par… lui-même : on obtient le nombre de remplacements, et donc le nombre de points (ici, ce nombre est 16). Mais on peut vouloir regarder comme une seule phrase ce qui constitue formellement un paragraphe : on aura donc 13 phrases.

• Il convient alors de déterminer le nombre de caractères, espaces compris, de chacune de ces 16 phrases ; on obtient : 255 ; 133 ; 209 ; 414 ; 198 ; 128 ; 170 ; 129 ; 116 ; 129 ; 88 ; 159 ; 91. En triant ces nombres (à l'aide de Word), on obtient la série suivante : 88 ; 91 ; 116 ; 128 ; 129 ; 129 ; 133 ; 159 ; 170 ; 198 ; 209 ; 255 ; 414.

• On peut décider d'appeler « phrases longues » les 20 % de phrases les plus longues : on trouve ici qu'il s'agit des phrases sur lesquelles X vaut respectivement 255 et 414. Bien entendu, il conviendrait de travailler sur une population de phrases plus nombreuse, par exemple en examinant déjà la totalité du texte d'Alphonse Allais partiellement reproduit ci-dessus, intitulé « Un philosophe », qui comporte en tout 32 paragraphes, puis les textes suivants que l'on trouvera à la même adresse sous le titre d'ensemble *À se tordre. Histoires chatnoiresques* (1891) : « Ferdinand », « Mœurs de ces temps-ci », « En bordée », « Un moyen comme un autre », « Collage », « Les petits cochons », « Cruelle énigme », etc.

d) Le travail sur des textes est aujourd'hui facilité grâce à l'Internet et aux efforts de collectifs comme l'Association des Bibliophiles Universels (http://abu.cnam.fr/), qui mettent à disposition, en l'espèce, des textes classiques. On peut aussi se référer aux articles de journaux, etc., accessibles en ligne, pour des textes non littéraires, de facture plus courante. On peut ainsi – la chose est classique – étudier la *fréquence* des lettres dans la langue écrite. Le fragment de texte reproduit plus haut comporte ainsi 1858 caractères espaces non compris. Pour obtenir le nombre d'occurrences des lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, etc., on peut faire remplacer *a* par *a*, etc. (On ignore donc les occurrences de *à* par exemple.) On découvre ainsi la présence de 144 *a*, 19 *b*, 67 *c*, 68 *d*, 271 *e*, 17 *f*, etc. On voit que *e* est la lettre la plus fréquente ici : elle constitue $\frac{271}{1858} \approx 14{,}6$ % de l'ensemble des caractères. Si l'on tient compte des caractères *é*, *è*, *ê*, au nombre respectivement de 25, 7 et 8, ce taux monte à $\frac{311}{1858} \approx 16{,}7$ %. Cette « domination » du *e* est-elle générale ? Autant de questions que l'on peut se proposer d'étudier…

e) On poursuit maintenant l'examen du cadre conceptuel générique des études statistiques à conduire, au collège comme en seconde.

1) On reprend ici la série (croissante) des 28 notes trimestrielles d'une classe de 3^{e} examinée lors de la séance précédente : 6,9 ; 7,3 ; 7,4 ; 7,7 ; 8,2 ; 8,5 ; 8,5 ; 8,7 ; 8,9 ; 9,3 ; 9,5 ; 10 ; 10 ; 10,4 ; 11,1 ; 12,3 ; 13,3 ; 13,7 ; 14,1 ; 14,6 ; 14,6 ; 15 ; 15,3 ; 15,6 ; 15,7 ; 16,9 ; 17,0 ; 18,9. Considérons la fonction de répartition définie par

$$F_X(x) = \frac{1}{28} \sum_{v \leq x} n_v.$$

On a par exemple : $F_X(8{,}7) = \frac{1}{28}(n_{6,9} + n_{7,3} + \ldots + n_{8,7}) = \frac{8}{28} = \frac{2}{7} \approx 28{,}6$ %. On notera que, quel que soit $q \in [8{,}7 ; 8{,}9[$, on a $F_X(q) = F_X(8{,}7) = \frac{2}{7}$ mais que $F_X(8{,}9) = \frac{9}{28} \approx 32{,}1$ %. On a de même $F_X(10) = \frac{13}{28} \approx 46{,}4$ %, $F_X(q) = F_X(10)$ pour tout $q \in [10 ; 10{,}4[$, et $F_X(10{,}4) = \frac{14}{28} =$ 50 %.

2) Toujours dans le cas de la série précédente, considérons *a priori* un nombre $u \in [0 ; 1]$ et cherchons s'il existe q tel que $F_X(q) = u$. On voit que cela se produira si u possède l'une des valeurs suivantes :

$0 ; \frac{1}{28} ; \frac{2}{28} ; \frac{3}{28} ; \frac{4}{28} ; \frac{5}{28} ; \frac{7}{28} ; \frac{8}{28} ; \frac{9}{28} ; \frac{10}{28} ; \frac{11}{28} ; \frac{13}{28} ; \frac{14}{28} ;$
$\frac{15}{28} ; \frac{16}{28} ; \frac{17}{28} ; \frac{18}{28} ; \frac{19}{28} ; \frac{21}{28} ; \frac{22}{28} ; \frac{23}{28} ; \frac{24}{28} ; \frac{25}{28} ; \frac{26}{28} ; \frac{27}{28} ; 1.$

• Considérons par exemple la valeur $u = 60\ \% = \frac{0{,}6 \times 28}{28} = \frac{16{,}8}{28}$; on voit que $u \in \left[\frac{16}{28} ; \frac{17}{28}\right[= [F(12{,}3) ; F(13{,}3)[$. Pour $x \in [12{,}3 ; 13{,}3[$, on a $F_X(x) = \frac{16}{28} < 60$ % ; on a ensuite $F_X(13{,}3) = \frac{17}{28} > 60$ %.

• Généralisant le cas où il existe q tel que $F_X(q) = u$, on considère alors la plus petite valeur q telle que $F_X(q) \geq u$, qui est ici 13,3. D'une façon générale, on définit la fonction quantile par :

$$Q(u) = \inf \{\ x \,/\, F_X(x) \geq u\ \}.$$

On a ainsi $F_X(Q(u)) \geq u$ et, si $x < Q(u)$, $F_X(x) < u$.

3) Le nombre $Q(u)$ est appelé le u-quantile (ou u-fractile) ou le quantile (ou le fractile) d'ordre u. Comment déterminer un u-quantile ?

• Pour la série des notes trimestrielles, on peut dresser le tableau suivant de la fonction de répartition F_X.

v	6,9	7,3	7,4	7,7	8,2	8,5	8,7	8,9	9,3	9,5	10	10,4
100 F_X	3,6	7,1	10,7	14,3	17,9	25	28,6	32,1	35,7	39,3	46,4	50

11,1	12,3	13,3	13,7	14,1	14,6	15	15,3	15,6	15,7	16,9	17	18,9
53,6	57,1	60,7	64,3	67,9	75	78,6	82,1	85,7	89,3	92,9	96,4	100

Ce tableau fait apparaître ceci (notamment) :

$Q(10\ \%) = 7{,}4$; $Q(20\ \%) = Q(25\ \%) = 8{,}5$; $Q(30\ \%) = 8{,}9$; $Q(40\ \%) = 10$; $Q(50\ \%) = 10{,}4$; $Q(60\ \%) = 13{,}3$; $Q(70\ \%) = 14{,}6$; $Q(75\ \%) = 14{,}6$; $Q(80\ \%) = 15{,}3$; $Q(90\ \%) = 16{,}9$; $Q(95\ \%) = 17$; $Q(100\ \%) = 18{,}9$.

Les quantiles $Q(k/10)$, où l'entier k varie de 1 à 9, sont les *déciles* : $Q(10\ \%)$ est le *premier* décile, …, $Q(90\ \%)$ le *neuvième* décile. Les trois quantiles $Q(25\ \%)$, $Q(50\ \%)$, $Q(75\ \%)$ sont les *quartiles*, respectivement le premier quartile, le deuxième quartile et le troisième quartile.

• On peut aussi procéder ainsi : N étant l'effectif de la série (ici, $N = 28$), $Q(u)$ est la valeur du terme de la série (supposée rangée par ordre croissant) dont l'indice est le plus petit entier supérieur ou égal à Nu. Pour $u = 0{,}85$, par exemple, $Nu = 23{,}8$: $Q(85\ \%)$ est donc la valeur du terme de rang 24, à savoir 15,6.

4) On aura noté que le *deuxième quartile* ne correspond pas exactement (dans le cas précédent) à la *médiane* (qui, selon la convention adoptée en 2^de^, vaut ici 10,75). On peut donner, au prix de perdre la *fonction* quantile une autre définition d'un u-quantile (où $u \in]0\ ;\ 1[$). On aura noté que F_X est *continue à droite* et discontinue à gauche en chacune des valeurs v, où elle effectue un saut de $\frac{n_v}{N}$. On dira que q est un u-quantile si

$$F_X(q_-) \leq u \text{ et } F_X(q) \geq u.$$

• Si F_X prend la valeur u, ce qui suppose que Nu soit entier, l'ensemble des u-quantiles est l'intervalle $[x_{Nu}\ ;\ x_{Nu+1}]$. Dans la série des notes trimestrielles, c'est le cas pour $u = 50\ \%$: l'ensemble des 0,5-quantiles est l'intervalle $[10{,}4\ ;\ 11{,}1]$: de là la convention de prendre le *milieu* de cet intervalle pour médiane.

• Si F_X ne prend pas la valeur u, il y a une valeur q unique telle que $F_X(q_-) < u$ et $F_X(q) > u$: ce nombre q est alors l'unique u-quantile. Dans la série des notes trimestrielles prise pour exemple, F_X ne prend pas la valeur $u = 3/14 \approx 21{,}4\ \%$, par exemple (et cela bien que $Nu = 6$ soit un entier) ; le u-quantile est ici $q = 8{,}5$: on a $F_X(q_-) = 17{,}9\ \% < u$ et $F_X(q) = 25\ \% > u$. De même encore, si $u = 80\ \%$, auquel cas $Nu = 22{,}4$ n'est pas un entier, le u-quantile est $q = 15{,}3$: on a $F_X(q_-) = 78{,}6\ \% < u$ et $F_X(q) = 82{,}1\ \% > u$.

5) On complètera ces développements par deux extraits de textes officiels ou ayant inspiré les textes officiels.

• Le document d'accompagnement du programme de 1^re^ S comporte le passage suivant.

Écart interquartile : différence entre le troisième et le premier quartile.

…

Intervalle interdécile : intervalle dont les extrémités sont le premier et le neuvième décile.

Intervalle interquartile : intervalle dont les extrémités sont premier et le troisième quartile.

…

Médiane empirique : on ordonne la série des observations par ordre croissant ; si la série est de taille $2n+1$, la médiane est la valeur du terme de rang $n+1$ dans cette série ordonnée ; si la série est de taille $2n$, la médiane est la demi-somme des valeurs des termes de rang n et $n+1$ dans cette série ordonnée. La définition de la médiane n'est pas figée : certains logiciels et certains ouvrages définissent la médiane comme étant le second quartile ou le cinquième décile : dans la pratique de la statistique, les différences entre ces deux définitions sont sans importance ; au lycée, on évitera tout développement là-dessus qui ne serait pas une réponse individuelle à une question d'un élève.

…

Neuvième décile (empirique) : c'est le plus petit élément *d'* des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 90% des données soient inférieures ou égales à *d'*.

…

Premier décile (empirique) : c'est le plus petit élément *d* des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 10% des données soient inférieures ou égales à *d*.

Premier quartile (empirique) : c'est le plus petit élément *q* des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 25% des données soient inférieures ou égales à *q*.
…
Troisième quartile (empirique) : c'est le plus petit élément *q*' des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 75% des données soient inférieures ou égales à *q*'.

• Le second texte est extrait du site http://www.inrialpes.fr/sel auquel on se reportera plus généralement.

En statistique, on définit, pour toute série ordinale à valeurs dans un ensemble E, la fonction quantile Q de [0, 1] dans E par :

$$Q(u) = \inf \{ x \,/\, F(x) \geq u \},$$

où $F(x)$ désigne la fréquence des éléments de la série inférieurs ou égaux à x.

Soient $a_1, \ldots, a_r$ les valeurs prises par une série de taille n, ordonnées par ordre croissant ; la fonction F est discontinue et constante sur les intervalles $[a_i, a_{i+1}[$; sa représentation graphique est composée de segments horizontaux.

En pratique, en consultant la liste des nombres $\{ F(a_1), \ldots, F(a_r) \}$, il est aisé de déterminer un quantile. Cependant, pour programmer le calcul de Q, on utilise la propriété suivante :

Soit n la taille de la série ; si on ordonne la série par ordre croissant, $Q(u)$ *est la valeur du terme de cette série dont l'indice est le plus petit entier supérieur ou égal à nu.*

Dans le cadre de cette définition, les 3 quartiles sont $Q(0{,}25)$, $Q(0{,}50)$, $Q(0{,}75)$. Les 9 déciles sont les valeurs de $Q(i/10)$, $i = 1, \ldots, 9$, les 99 centiles sont les valeurs de $Q(i/100)$, $i = 1, \ldots, 99$. On définit assez souvent la médiane m par $m = Q(0{,}5)$: la médiane est alors le second quartile, le cinquième décile, le cinquantième centile, etc.

Mais de nombreux statisticiens, de nombreux logiciels (de qualité) et de nombreux médias utilisent comme définition de la médiane d'une série la définition suivante :

Médiane : on ordonne la série des observations par ordre croissant ; si la série est de taille $2n+1$, la médiane est la valeur du terme de rang $n+1$ dans cette série ordonnée ; si la série est de taille $2n$, la médiane est la demi-somme des valeurs des termes de rang n et $n+1$ dans cette série ordonnée.

C'est la définition adoptée dans le programme de seconde. Les deux définitions, Q(0,5) et celle-ci, donnent en pratique, pour des séries à valeurs continues de grande taille, des résultats le plus souvent très proches.

La procédure qui consiste à tracer une fonction dite de fréquences cumulées croissante, continue, obtenue par interpolation linéaire à partir des valeurs $F(a_i)$ définies ci-dessus et à définir la médiane comme l'intersection de cette courbe avec la droite d'équation $y = 0{,}5$, où avec une courbe analogue dite des fréquences cumulées décroissantes n'est pas une pratique usuelle en statistique et ne sera pas proposée au lycée.

Dans l'enseignement secondaire :

Pour les quartiles, nous proposons de garder la définition liée à la fonction quantile :

Premier quartile : c'est le plus petit élément *q* des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 25% des données soient inférieures ou égales à *q*.

Troisième quartile : c'est le plus petit élément *q'* des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 75% des données soient inférieures ou égales à *q*.

Certains logiciels prennent pour le premier quartile une définition analogue à la médiane : par exemple si $n = 4r$, le premier quartile est la demi-somme des valeurs prises par le terme de rang r et le terme de rang $r+1$. Nous n'adopterons pas cette définition un peu marginale.

Nous suggérons de ne pas définir le second quartile mais de manipuler {premier quartile, médiane, troisième quartile} ; il n'y a pas de raisons de signaler qu'avec la définition adoptée, la médiane n'est pas le second quartile, sauf si un élève pose précisément la question. Dans ce cas, on pourra lui expliquer individuellement que certaines séries comportant des ex æquo (par exemple 1 2 2 2 2 2 3 5) ne permettent pas une définition agréable de la médiane comme « le » nombre *m* tel qu'exactement 50% des termes de la série sont inférieurs à *m* et exactement 50% supérieurs à *m* ; à partir de là, plusieurs choix étaient possibles, mais l'idée reste que la médiane coupe la série en deux dans la cas où il n'y a pas d'ex æquo.

En première L, on ne définira que le premier et le neuvième décile :

Premier décile : c'est le plus petit élément *d* des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 10% des données soient inférieures ou égales à *d*.

Neuvième décile : c'est le plus petit élément *d'* des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 90% des données soient inférieures ou égales à *d'*.

On pourra introduire les termes suivants :

Intervalle interquartile : intervalle dont les extrémités sont le premier et le troisième quartile.

Intervalle interdécile : intervalle dont les extrémités sont le premier et le neuvième quartile.

Écart interquartile : longueur de l'intervalle interquartile, *i.e.* différence entre le troisième et le premier quartile.

Écart interdécile : longueur de l'intervalle interdécile, *i.e.* différence entre le neuvième et le premier décile.

Un abus de langage assez fréquent fait qu'on parle aussi d'intervalle interquartile au lieu d'écart interquartile : nous ne ferons pas cet abus de langage au lycée ou la notion même d'intervalle pose parfois problème.

f) Tout ce qui précède concerne l'étude de la distribution d'un caractère *X* sur une population Ω. D'une manière générale, plusieurs contraintes s'imposent plus souvent qu'à leur tour à une connaissance idoine de *X* sur Ω. Dans un certain nombre de cas, tout d'abord, on ne possède qu'une information très partielle relative à la distribution sur Ω : médiane, moyenne, effectifs de données regroupées en classes, etc. Dans d'autres cas, on dispose, non d'informations sur la distribution de *X* sur Ω, mais des valeurs de *X* sur une partie plus ou moins grande – un échantillon – de Ω. Il s'agit là de deux grands types de situations qui peuvent se combiner : on peut ne connaître qu'un échantillon, et ne le connaître qu'à travers les effectifs de valeurs regroupées en classes. C'est cela que l'on examinera dans les séances à venir.

3. Forum des questions : exposés

3.1. Mathématiser la notion de droite ?

a) On écoute un exposé de *JNM* sur la question suivante :

Exposé 27. En quoi peut-on dire que la notion de droite n'est pas complètement mathématisable ?

b) Remarques et commentaires

3.2. Exposés prévus

~~***AI :*** **programmes de calcul et calcul algébrique**~~

Exposé 26. Qu’est-ce que l’expression algébrique d’un programme de calcul ? Pourquoi peut-on dire que le calcul algébrique est un calcul sur les programmes de calcul ?

***JB :* angles et radians**

Exposé 28. Pourquoi utilise-t-on le radian en mathématiques ?

***PL :* Effet Pygmalion et autres effets**

Exposé 29. En quoi les attentes formulées à l’endroit des élèves influent-elles sur leurs performances scolaires ?

***LN :* Fonctions de référence**

Exposé 30. Comment faire apparaître l’utilité des fonctions x^2 et $\frac{1}{x}$ en classe de seconde ?

3.3. Exposés à venir

Ces exposés seront annoncés prochainement.

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 19 : mardi 14 mars 2006

0. Le programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques // 2. Un PER de statistique // 3. Forum des questions : poursuites & anticipations // 4. Forum des questions : exposés à venir.

1. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques

On achève la lecture de la notice *Questions & réponses* (interrompue, lors de la dernière séance, au milieu de la sous-section 6.5), en ayant notamment en tête la question suivante.

> Après la lecture de la notice *Questions et réponses*, je n'ai pas compris la « dialectique des boîtes noires et des boîtes claires ». Quel en est le sens ? (DP, OS, 5^{e}, 18)

2. Un PER de statistique

2.1. L'amorce d'un parcours d'étude et de recherche

On a reproduit ci-après un document – destiné au professeur – décrivant à grands traits le démarrage d'un parcours d'étude et de recherche sur la statistique en classe de 3^{e}. Groupés en binômes, les participants mettront par écrit les principales questions que soulève pour eux ce document, qui fait l'objet d'une présentation linéaire commentée.

Faire de la statistique en 3^{e}

C'est petit ou c'est gros ? C'est beaucoup ou c'est pas beaucoup ?

1. L'objet de la statistique

1.1. Questions de statistique

En statistique, on s'efforce de répondre à des questions comme celles-ci :

• Un bébé qui pèse 3,4 kg à la naissance, c'est un gros bébé ?

• Un éléphant de deux tonnes, c'est un gros éléphant ou c'est un petit éléphant, ou c'est ni l'un ni l'autre ?

• Quand on dit qu'un joueur de foot a marqué beaucoup de buts dans une saison, ça veut dire qu'il en a marqué au moins combien ?

• Est-il exact que les trois derniers jours ont été exceptionnellement froids ?

• Cet article est-il cher pour ce que c'est ?

1.2. Études statistiques

Pour répondre aux questions précédentes, on doit mener à bien, chaque fois, une *étude statistique* comportant plusieurs étapes.

L'objectif est toujours le même. Considérons la première question ci-dessus : « Un bébé qui pèse 3,4 kg à la naissance, c'est un gros bébé ? » Supposons qu'on ait relevé le poids à la naissance de tous les bébés nés en 2005 dans le département des Bouches-du-Rhône :

– si l'on trouvait que, par exemple, 47 % de ces bébés ont un poids inférieur ou égal à 3,4 kg, c'est-à-dire que 100 % – 47 % = 53 % ont un poids strictement supérieur à 3,4 kg, on pourrait conclure que, par rapport à l'ensemble des naissances considérées, 3,4 kg *n'est pas* un poids très élevé ;

– si, au contraire, on trouvait que, par exemple, 78 % des bébés ont un poids inférieur ou égal à 3,4 kg, et donc que seulement 100 % – 78 % = 22 % des bébés ont un poids à la naissance strictement supérieur à 3,4 kg, on pourrait conclure que 3,4 kg est un poids *assez élevé*.

Dans ce qui suit, on réalise une première étude statistique « simple ».

2. Un devoir en classe

2.1. L'étude

Dans une classe de 3^e de 28 élèves a eu lieu un devoir surveillé. Les 28 notes attribuées sont reproduites ci-après :

15 ; 13 ; 11 ; 9 ; 4 ; 11 ; 13 ; 18 ; 9 ; 10 ; 14 ; 17 ; 13 ; 16 ; 11 ; 16 ; 12 ; 16 ; 9 ; 5 ; 13 ; 19 ; 16 ; 0 ; 9 ; 16 ; 11 ; 7.

On dira qu'une note de cette série est *satisfaisante* si elle est supérieure ou égale à au moins 50 % des notes, soit à 14 notes de la série au moins.

Il revient au même de dire qu'elle est inférieure strictement à au plus 50 % des notes de la série, c'est-à-dire à 14 notes au plus.

Question 1. Lors du devoir, quatre élèves ont obtenu la note 11. Cette note est-elle satisfaisante ? Comment faire pour le savoir ?

Réponse 1. Un décompte à la main permet de constater que la note 11…

– … est supérieure ou égale à 13 notes, ce qui ne représente que $\frac{13}{28} = \frac{1300}{28}$ % ≈ 46,4 % des notes de la série ;

– … est strictement inférieure à 15 notes de la série, ce qui représente $\frac{15}{28} = \frac{1500}{28}$ % ≈ 53,6 % de ces notes.

En conséquence, la note 11 *n'est pas satisfaisante*.

Question 2. Pour savoir si la note 11 est satisfaisante ou non dans la série des 28 notes observées, un élève a eu l'idée de ranger ces 28 notes par ordre croissant et de les numéroter. Comment le faire ? Comment cela permet-il de décider si la note 11 est satisfaisante ou pas ?

Réponse 2. On peut saisir ces notes dans la colonne A d'un fichier du Classeur, puis utiliser l'icône de tri croissant. On obtient alors ceci.

1	0
2	4
3	5
4	7
5	9
6	9
7	9
8	9
9	10
10	11
11	11
12	11
13	11
14	12
15	13
16	13
17	13
18	13
19	14
20	15
21	16
22	16
23	16
24	16
25	16
26	17
27	18
28	19

Pour que 11 soit une note satisfaisante, il faut et il suffit que la note numérotée 14 soit inférieure ou égale à 11. Ici, cette note est 12 : on retrouve donc que 11 n'est pas une note satisfaisante.

Question 3. Préciser la plus petite note satisfaisante dans la série des 28 notes.

Réponse 3. La plus petite note satisfaisante est celle qui a le numéro 14 : on a vu qu'il s'agit de la note 12.

Question 4. On dit qu'une note est *excellente* si elle est supérieure ou égale à 90 % des notes au moins. Il revient au même de dire qu'elle est strictement inférieure à 10 % des notes de la série au plus. En utilisant à nouveau la série croissante et numérotée des 28 notes, déterminer les notes excellentes de la série.

Réponse 4. On a : 90 % × 28 = 25,2. Une note est donc excellente si et seulement si elle est supérieure ou égale à la note numérotée 26. D'après le tableau obtenu, la note numérotée 26 est 17. Les notes excellentes de la série sont donc 17, 18 et 19.

Question 5. On dit qu'une note est *remarquable* si elle est supérieure ou égale à au moins 70 % des notes. Il revient au même de dire qu'elle est strictement inférieure à au plus 30 % des notes de la série. Déterminer les notes remarquables de la série.

Réponse 5. On a : 70 % × 28 = 19,6. Une note est donc remarquable si et seulement si elle est supérieure ou égale à la note numérotée 20. D'après le tableau, les notes remarquables sont donc les notes au moins égales à 15.

2.2. Le bilan de l'étude

Question. Qu'a-t-on appris, au fond, dans ce qui précède ?

Réponse. a) Étant donné une série statistique de longueur n et un pourcentage k %, on a appris à déterminer la plus petite valeur de cette série supérieure ou égale à au moins k % des valeurs de la série.
b) Pour cela, on a dû apprendre à mettre, à l'aide du Classeur, la série donnée sous la forme d'une série croissante.
c) Étant donné un pourcentage k %, on a calculé le premier entier supérieur ou égal $k\,\% \times n$: la plus petite valeur cherchée est celle qui a pour numéro cet entier.

3. Une épreuve académique de mathématiques

3.1. L'étude

Une épreuve de mathématiques a été organisée dans une académie pour les classes de 3^{e} volontaires. Trente-deux classes se sont inscrites ; 794 élèves ont composé et ont reçu une note comprise entre 0 et 20. On trouvera ces notes dans le fichier 794 notes de mathématiques : elles y sont rangées sur une colonne, dans l'ordre alphabétique des noms des candidats (ces noms n'ont pas été reproduits). Par précaution, chacun commencera par créer une copie de ce fichier, copie dans laquelle se fera le travail demandé.

On dira que, par rapport à la population des élèves ayant participé à l'épreuve, une note est…

– … *satisfaisante* si elle est supérieure ou égale à au moins 50 % des notes, c'est-à-dire si elle est strictement inférieure à au plus 50 % des notes ;

– … *très satisfaisante* si elle est supérieure ou égale à au moins 60 % des notes, c'est-à-dire si elle est strictement inférieure à au plus 40 % des notes ;

– … *remarquable* si elle est supérieure ou égale à au moins 70 % des notes, c'est-à-dire si elle est strictement inférieure à au plus 30 % des notes ;

– … *très remarquable* si elle est supérieure ou égale à au moins 80 % des notes, c'est-à-dire si elle est strictement inférieure à au plus 20 % des notes ;

– … *excellente* si elle est supérieure ou égale à au moins 90 % des notes, c'est-à-dire si elle est strictement inférieure à au plus 10 % des notes.

Question 1. Lors de l'épreuve académique, un élève a obtenu la note 12. Cette note est-elle satisfaisante ? Est-elle très satisfaisante ?

Réponse 1. On utilise la technique vue dans l'étude du devoir en classe, ci-dessus, pour ranger en une série croissante et numérotée les 794 notes. Cela fait, on procède comme on l'a vu jusqu'ici. On a : 50 % × 794 = 397. La note numérotée 397 est 12. La note 12 est donc satisfaisante. En fait, la note 12 est supérieure ou égale à 445 notes, soit à $\frac{445}{794} = \frac{44500}{794}$ % ≈ 56 % des notes : satisfaisante, cette note n'est donc pas *très* satisfaisante.

Question 2. Quelle note minimale un élève devait-il obtenir pour que sa note soit…

a) … très satisfaisante ?
b) … remarquable ?
c) … très remarquable ?

d) … excellente ?

Réponse 2. a) On a : 60 % × 794 = 476,4. La note numérotée 477 est 13. La note 13 est donc très satisfaisante. En fait, la note 13 est supérieure ou égale à 520 notes, ce qui représente un pourcentage de $\frac{520}{794} = \frac{52000}{794}$ % ≈ 65,5 %. La note 13 est donc très satisfaisante, sans être remarquable.

b) On a : 70 % × 794 = 555,8. La note numérotée 556 est 14. La note 14 est donc remarquable. En fait, la note 14 est supérieure ou égale à 584 notes, ce qui représente un pourcentage de $\frac{584}{794} = \frac{58400}{794}$ % ≈ 73 %. La note 14 est donc remarquable, sans être très remarquable.

c) On a : 80 % × 794 = 635,2. La note numérotée 636 est 15. La note 15 est donc très remarquable. En fait, la note 15 est supérieure ou égale à 640 notes, ce qui représente un pourcentage de $\frac{640}{794} = \frac{64000}{794}$ % ≈ 80,6 %. La note 15 est donc très remarquable, sans être excellente.

d) On a : 90 % × 794 = 714,6. La note numérotée 715 est 18. La note 18 est donc excellente. Elle est supérieure ou égale à 748 notes, ce qui représente un pourcentage de $\mathbf{\frac{748}{794} = \frac{74800}{794}}$ % ≈ 94,2 %.

3.2. Bilan de l'étude

Question. Qu'a-t-on appris de plus dans ce qui précède ?

Réponse. On a amélioré notre maîtrise de la technique – mise au point dans la première étude statistique – permettant de déterminer la plus petite valeur d'une série statistique donnée qui est supérieure ou égale à au moins *k* % des valeurs de la série.

4. Longueur de phrases

4.1. L'étude

Le professeur de français d'une élève de 3^{e} lui a rendu sa rédaction en lui disant qu'elle faisait des phrases trop longues. Il a ajouté qu'elle devrait prendre exemple sur l'écriture journalistique dans ce qu'elle a de meilleur.

Dans le cadre d'un *parcours d'étude et de recherche* de statistique lancé par le professeur de mathématiques sur le thème « C'est petit ou c'est gros ? C'est beaucoup ou c'est pas beaucoup ? », l'élève propose de travailler avec un camarade sur le sujet suivant : « Dans l'écriture journalistique de qualité, c'est long comment, une phrase longue ? » La proposition, discutée avec l'ensemble de la classe, est finalement acceptée par le professeur.

L'idée est de prendre un corpus de textes parus dans la presse et de compter la longueur de chacune des n phrases figurant dans ce corpus. Disposant alors d'une série de n nombres, on recherchera pour quelle longueur ℓ les phrases de longueur inférieure ou égale à ℓ constituent *au moins*, par exemple, 80 % de l'ensemble des phrases. (Il revient au même de dire que les phrases dont la longueur est strictement supérieure à ℓ constituent *au plus* 20 % de l'ensemble des phrases du corpus.)

Dans ce but, on a rassemblé, dans le fichier Textes de journaux, 11 articles parus dans le quotidien français *Libération* entre le 9 février et le 6 mars 2006. Ces textes ont été divisés en 62 paragraphes, dont les élèves se partagent l'examen.

Question 1. Comment estimer la longueur d'une phrase du paragraphe examiné ?

Réponse 1. On prendra conventionnellement pour longueur le nombre de mots de la phrase. (Une autre manière de faire serait de prendre le nombre de signes que comporte la phrase.) Une difficulté : le découpage en « phrases », qui n'est pas unique, et qui peut donc donner lieu à des résultats différents, quoique proches. Il s'agit là d'un type de difficulté classique en statistique : l'identification des individus – ici les « phrases » – composant la population étudiée.

Question 2. Comment obtenir la suite des nombres donnant la longueur des phrases composant un paragraphe ?

Réponse 2. On ouvre un fichier de brouillon. On insère un champ **Statistiques - Mots** du menu **Insertion → Champs → Autres**, onglet **Document**. (Si la valeur 0 n'est pas affichée, utiliser Ctrl F9.) On sélectionne la phrase dans le fichier la contenant et on la copie dans le fichier de brouillon. On met à jour le champ avec F9 : la longueur de la phrase s'affiche alors. On retourne au « fichier des phrases » et on tape la valeur affichée. La phrase, toujours sélectionnée, est alors remplacée automatiquement par sa longueur. On répète l'opération, en annulant chaque fois l'opération antérieurement effectuée dans le fichier de brouillon. Prenons par exemple le paragraphe 16, reproduit ci-après :

« Que l'on soit rassuré. Ils ne tomberont pas sur nos têtes comme des mouches. Le grand rush des oiseaux migrateurs est pour tout de suite (mars et avril), notamment avec une importante remontée en provenance d'Afrique. On estime que 4,5 milliards d'oiseaux de 185 espèces font le voyage. Pour certains, la migration durera jusqu'à fin mai. Beaucoup mourront d'épuisement, nettement plus que de la grippe aviaire. Avec deux grands couloirs (rhodanien et atlantique), la France est l'un des pays d'Europe qui voient passer le plus de migrateurs. Sont, entre autres, attendus des cigognes, martinets, grues cendrées... »

On obtient ceci : 4. 10. 22. 12. 8. 10. 21. 9.

Question 3. Comment procéder pour exploiter les résultats partiels obtenus par chacun ?

Réponse 3. Chacun met ses résultats sous la forme d'un « texte » avec le signe de fin de paragraphe pour séparateur ; on a par exemple :

4¶
10¶

22¶
12¶
8¶
10¶
21¶
9¶

On ouvre alors une feuille de calcul partagée, où chacun, dans un ordre quelconque, « colle » ses résultats. Lorsque tous les résultats ont été collectés, on analyse la série comme on a fait dans les études relatives au devoir surveillé et à l'épreuve académique. (Voir le classeur Longueur des phrases, où figurent les résultats relatifs aux 54 premiers paragraphes en lesquels ont été scindés les onze articles de presse considérés.)

Question 4. Alors c'est long comment, une phrase longue du corpus de phrases étudié ici ?

Réponse 4. La série des longueurs de phrases obtenue a pour taille 350. (Ce nombre peut varier selon les découpages adoptés.) Convenons qu'une phrase est *longue* si les phrases de longueur inférieure ou égale représentent au moins 80 % de la population des phrases considérée. Pour déterminer la longueur minimale d'une phrase « longue », on doit alors calculer le plus petit entier supérieur ou égal à 80 % × 350 ; comme 80 % × 350 = 0,8 × 350 = 280, cet entier est 280. La longueur de phrase numérotée 280 dans la série croissante des longueurs (voir le classeur Longueur des phrases) est 23 : une phrase longue est donc une phrase de longueur supérieure ou égale à 23. Convenons maintenant qu'une phrase est *très longue* si les phrases de longueur inférieure ou égale représentent au moins 90 % de la population des phrases considérée. On doit calculer le plus petit entier supérieur ou égal à 90 % × 350, qui est 315. La longueur ayant le rang 315 dans la série croissante des longueurs est cette fois 29 : une phrase très longue est donc une phrase de longueur supérieure ou égale à 29. Définissons enfin la notion de phrase *vraiment très longue* en disant que les phrases de longueur inférieure ou égale à la longueur d'une telle phrase représentent au moins 95 % de la population des phrases. On a alors 95 % × 350 = 0,95 × 350 = 332,5. La longueur de rang 333 dans la série ordonnée obtenue est 35 : une phrase vraiment très longue est donc une phrase de longueur supérieure ou égale à 35. Notons que la plus longue phrase rencontrée est de longueur 57 – il s'agit de la phrase suivante : « “Le rythme est désormais de 20 000 cas par semaine, et au total 70 000 personnes (soit 10 % de la population de l'île, NDLR) auraient été touchées depuis mars”, a annoncé hier Xavier Bertrand, ministre de la Santé, lors d'une conférence de presse conjointe avec François Baroin (ministre de l'Outre-Mer) et Léon Bertrand (ministre du Tourisme). » Notre petite étude statistique semble ainsi montrer le recours systématique, dans le style d'écriture examiné, à des phrases courtes, et même volontairement « raccourcies ». Par comparaison, la phrase « Définissons enfin la notion de phrase *vraiment très longue* en disant que les phrases de longueur inférieure ou égale à la longueur d'une telle phrase représentent au moins 95 % de la population des phrases » comporte 35 mots : elle serait donc elle-même « vraiment très longue » ! Quant à la phrase qui précède, elle, elle est longue de 52 mots… Mais elle contient une formulation presque figée, utilisée déjà plusieurs fois (« … les phrases de longueur inférieure ou égale à la longueur d'une telle phrase représentent au moins *n* % de la population des phrases »), ce qui, en principe, réduit sensiblement l'effort de lecture demandé.

4.2. Le bilan de l'étude

Question. Qu'a-t-on appris encore dans ce qui précède ?

Réponse. a) On avait évoqué le poids d'un bébé à la naissance, le poids d'un éléphant, la note obtenue par un élève. Ici, on a travaillé sur deux notions qui se révèlent mal définies. Au lieu de bébés, d'éléphants, d'élèves, on a considéré des « phrases », notion non dénuée d'ambiguïté. Au lieu de poids ou de notes, on a considéré la « longueur » d'une phrase, ce qui n'est pas non plus bien défini. Il s'agit là d'un type de situations que l'on rencontre souvent en statistique, et qu'il faut savoir affronter.
b) Par ailleurs, on a retrouvé ce fait que les qualificatifs utilisés (phrase *longue*, *très longue*, etc.) sont le fruit d'une convention, que celle-ci soit imposée aux auteurs de l'étude statistique ou qu'elle soit décidée par eux.

c) Enfin, au lieu de disposer d'une série numérique toute faite (comme il en allait dans les deux premières études statistiques), il a fallu construire cette série à partir des contributions de la classe, chaque élève entrant dans une même colonne d'un fichier du Classeur la longueur des phrases qu'il a eu à examiner.

2.2. Une question

En s'appuyant notamment sur les commentaires apportés, chaque binôme élabore une courte réponse à la question ci-après.

Comment organiser le cahier de statistique (par rapport à l'organisation ternaire de l'étude) ? (AI, JT, 2de, 17)

Le forum des questions ci-après n'a pu, faute de temps, faire l'objet d'une présentation lors de la séance du mardi 14 mars.

3. Forum des questions : poursuites & anticipations

3.1. Comment dire ? Comment l'écrire ?

a) Les deux questions suivantes soulèvent des problèmes de vocabulaire et/ou de notation.

1. Dans certains manuels, il y a des « si et seulement si » dans les définitions. Lors de mes études, on m'a dit qu'il ne fallait pas en mettre dans celles-ci. Le « si et seulement si » est-il réservé aux théorèmes, propriétés ?… Et pourquoi ? (ED, MJ, 2de, 18)

2. Quelle est la meilleure rédaction pour passer par exemple de $\cos \alpha = \frac{5}{8}$ à $\alpha \approx 51{,}3^{\text{o}}$ en classe de 4^{e} ? Certains professeurs font marquer « shift cos », mais cela ne me paraît pas correct. (MD, MJ, 4^{e}, 18)

b) La première question évoque un débat sur lequel le séminaire de l'année 2002-2003 apporte les éléments suivants :

2. S'agissant du débat entre les partisans du « si » ou du « seulement si » dans les définitions, on se référera d'abord au passage suivant de l'*Introduction à la logique* (Gauthier-Villars, Paris, 1969) du logicien mathématicien Alfred Tarski (1902-1983) :

La locution *« si et seulement si »* s'emploie fréquemment dans la rédaction des DEFINITIONS, c'est-à-dire des conventions stipulant quel sens doit être attribuée à une expression qui jusque là n'avait pas figuré dans une certaine discipline, et qui pourrait n'être pas d'emblée compréhensible. Imaginez, par exemple, qu'en arithmétique le symbole « ≤ » n'ait pas encore été employé mais qu'on veuille maintenant l'introduire dans les ? les considérant (le regardant, selon l'usage, comme une abréviation de l'expression « *est plus petit que ou égal à* »). À cette fin, il faut définir ce symbole, c'est-à-dire expliquer exactement son sens en termes qui sont déjà connus et dont le sens ne fait aucun doute. Pour en arriver là, nous rédigeons la définition que voici – en supposant que « > » fait partie des symboles déjà connus :

nous disons que $x \leq y$ si, et seulement si, ce n'est pas le cas que $x > y$.

La définition que nous venons de formuler pose l'équivalence des deux fonctions propositionnelles

$$x \leq y$$

et

ce n'est pas le cas que $x > y$;

on peut dire, partant, que cette définition permet la transformation de la formule « $x \leq y$ » en une expression équivalente qui ne contienne plus le symbole « ≤ » mais qui soit formée entièrement en termes qui nous sont déjà compréhensibles.

La difficulté évoquée dans la question examinée semble donc levée…

3. Traditionnellement, on nomme ***definiendum*** l'assertion que l'on définit (le definiendum est l'énoncé « $x \leq y$ » dans l'exemple choisi par Tarski), et ***definiens*** l'assertion qui le définit (l'énoncé « ce n'est pas le cas que $x > y$ » dans ce même exemple). Cela noté, le texte déjà cité se poursuit alors ainsi :

Il convient de noter que les mathématiciens, lorsqu'ils rédigent des définitions, préfèrent les mots « *si* » ou « *dans le cas où* » à la locution « *si, et seulement si* ». Ainsi, pour la définition du symbole « ≤ », ils donneraient probablement la forme suivante :

nous disons que $x \leq y$ si ce n'est pas le cas que $x > y$.

Il semble qu'une telle définition affirme seulement que le definiendum découle du definiens, sans bien marquer que la relation de conséquence est vraie aussi dans la direction opposée, et qu'ainsi elle ne réussit pas à exprimer l'équivalence du definiendum et du definiens. Mais ce que nous avons en fait ici, c'est une convention tacite à l'effet que « *si* » ou « *au cas où* », s'ils sont employés pour joindre le definiendum et le definiens, veulent dire la même chose que la locution « *si, et seulement si* ».

Telle est l'origine de la remarque faite en première année. Encore faut-il en comprendre la raison, sur laquelle on s'arrêtera maintenant.

4. Notons T la théorie dont on augmente le langage L en y introduisant par une définition un mot ou symbole ♣ qui n'y figurait pas : on pose $L^* = L \cup \{♣\}$. Dans la théorie T^* ainsi augmentée par une définition qui exprime un certain *definiendum* $\theta_♣$ à l'aide d'un certain *definiens* Θ ne contenant pas d'occurrence de ♣, on a bien

$$T^* \vdash \theta_♣ \Leftrightarrow \Theta$$

parce que l'assertion $\theta_♣$ « veut dire » Θ, en sorte que ce qui précède équivaut à écrire :

$$T^* \vdash \Theta \Leftrightarrow \Theta.$$

Il est donc indiscutable que, par exemple, on aura :

$$T^* \vdash x \leq y \Leftrightarrow \neg(x > y).$$

Cela précisé, la réticence à utiliser le connecteur « *si et seulement si* » s'explique semble-t-il ainsi : au moment où on introduit un certain mot ou symbole ♣, l'énoncé $\theta_♣$ ***n'a pas de sens dans T***. S'il est donc possible de dire que

si Θ est vrai (dans T) alors [on écrira, on dira] que $\theta_♣$ est vrai (dans T^*)

cela n'a pas de sens de dire que

si $\theta_♣$ est vrai (dans T^*) alors Θ est vrai (dans T)

puisque le langage L^* et donc la théorie T^* ***n'ont pas encore été définis***, et qu'on ne sait donc pas ce que ♣ et donc $\theta_♣$ « veulent dire »…

5. Conclusion : la critique précédente du « si et seulement si » n'est certes pas infondée, mais elle est fort subtile. On pourra donc sans déchoir s'en tenir à des définitions exprimées à l'aide du « si et seulement si » !

c) La deuxième question est plus surprenante : elle se réfère à une pratique récemment apparue, semble-t-il, pour suppléer l'absence d'une notation « officielle », au collège, concernant la fonction inverse du cosinus. La notation évoquée se réfère à l'organisation sur certaines calculatrices de l'accès aux fonctions trigonométriques inverses : appuyer sur la touche « shift », puis sur la touche « cos ». Historiquement, deux traditions sont en rivalité : une tradition « continentale » et une tradition « anglo-saxonne ». La première, qui remonte au moins à Euler dans son principe, aboutit à la notation arc cos 0,625 = 51,31781… L'idée derrière cette notation est évidemment que l'on cherche l'arc dont le cosinus vaut 0,625 : ainsi l'arc dont le cosinus vaut, disons, $\sqrt{2}/2$ est-il l'arc de 45º, etc. La seconde, créée par John Herschel en 1813, conduit à la notation des calculatrices les plus répandues : $\cos^{-1}(0,625)$ = 51,31781… Elle est cohérente avec la notation de l'inverse d'une fonction – même si elle était nouvelle à l'époque où Herschel l'introduisit. La domination internationale de la notation anglo-américaine s'est accrue avec la diffusion de l'usage des calculatrices. En pratique, on peut encore, en 4e, se passer d'une notation spécifique et écrire par exemple : « L'angle aigu dont le cosinus vaut 0,625 est d'environ 51,3º. » On peut encore écrire (par exemple) : « Si $\cos \widehat{BAC} = 0,625$ alors $\widehat{BAC} \approx 51,3^o$ ». Dans certaines situations, toutefois, on peut être amené à user d'une notation *ad hoc*. Sans doute est-il réaliste, aujourd'hui, d'employer la notation qui sera la première rencontrée, et pendant longtemps la seule : on écrira donc plutôt $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^o$, etc.

3.2. AER, etc.

a) On s'arrête maintenant sur les deux questions que voici.

1. Le moment et le lieu « logiques » pour aborder la démonstration d'un élément technologique semble être en AER, quand la question se pose (en « détachant » correctement cette partie de la réponse à la question de l'AER, aussi bien dans les traces écrites que dans le temps). La synthèse étant « ce qu'il y a à savoir » n'est donc pas le lieu de la faire, contrairement aux pratiques « classiques » (sachant aussi qu'une démonstration n'amène généralement pas grand chose au thème étudié et peut en être très éloigné). Au niveau des traces écrites, la synthèse ne comporte-t-elle donc « que » [$T/\tau/\theta$] ? (GF, MJ, 2de, 18)

2. Lors des activités, certaines notions viennent « sur la table » et certaines « passent à la trappe » pendant la résolution du problème. Comment revenir sur celles oubliées sans que cela paraisse un peu artificiel ? Peut-être est-ce dû à la préparation même de l'activité, mais il est très difficile de créer une activité concernant tous les [$T/\tau/\theta$] à mettre en place et la multiplication des activités prend beaucoup de temps. (MT, OS, 4e, 18)

b) L'activité d'étude et de recherche est le temps de la production de l'organisation mathématique dont la mise en place est visée. En conséquence, c'est dans le cadre de l'AER que *tout* doit être créé, y compris les « démonstrations » des énoncés technologiques pertinents.

1) Avant d'aller plus loin, il faut souligner que la distinction des divers *moments* de l'étude est un élément important de l'organisation de l'étude : on ne passe pas sans autre forme de procès d'un moment où s'élabore une technique à un moment où se construit la synthèse – les moments sont hétérogènes entre eux. Pour cette raison, il est bon par exemple de renvoyer la

synthèse *et même déjà le bilan d'AER* à la séance *suivante* (à condition que celle-ci n'ait pas lieu le même jour), avec préparation du bilan ou de la synthèse entre ces séances, et cela afin que le temps fasse son œuvre et permette une mise à distance favorable à une reprise distanciée par rapport à la chronique des menus faits de l'élaboration de la technique ou du bloc technologique en question.

2) La synthèse n'est certes pas le lieu de « faire » la démonstration d'un résultat technologique : celle-ci trouve sa place en amont, au cours d'une AER. Mais cette démonstration doit être *reprise et mise en forme* dans la synthèse : dans le « θ » de la formule [$T/\tau/\theta/\Theta$], en effet, il n'y a pas que *l'énoncé à démontrer*, il y a la *démonstration* elle-même !

c) Pour comprendre mieux la chose, considérons l'exemple suivant : supposons que, dans une classe de 2^de^, à l'occasion de l'étude des fonctions de référence, soit apparu le résultat suivant, pour lequel les deux démonstrations ci-après ont été établies.

> Théorème. La fonction $f : x \mapsto x^2$ n'est pas affine.
>
> ♣ Démonstration 1. Si f était affine, il existerait des réels a, $b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $x^2 = ax + b$. En prenant $x = 0$ on aurait alors $b = 0$, et on aurait donc $x^2 = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or, quel que soit le réel a, l'égalité $x^2 = ax$ n'est vérifiée que pour $x = 0$ et pour $x = a$, c'est-à-dire pour au plus deux valeurs de x : contradiction.♣
>
> ♥ Démonstration 2. Si f était affine, le rapport $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, où $x \neq 0$, serait constant ; or on a $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x} = x$: contradiction.♥

1) Ce qui précède constitue une partie de la synthèse, rédigée selon certaines règles rhétoriques. Mais il est une autre façon de faire, dans laquelle le « théorème » apparaît – plus authentiquement – comme la *conclusion* d'un petit « discours technologique » :

> Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2$. Si elle était affine, le rapport $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, où $x \neq 0$, serait constant ; or on a $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x} = x$. *La fonction $x \mapsto x^2$ n'est donc pas affine.*

2) Une autre manière de rédiger, intermédiaire, consiste à procéder ainsi.

> Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2$. Si elle était affine, le rapport $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, où $x \neq 0$, serait constant ; or on a $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x} = x$. Il en résulte donc que
>
> Théorème. *La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas affine.*

3) La synthèse suivante pourrait se poursuivre ainsi.

> Considérons de même la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Si elle était affine, le rapport $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, où $x \neq 0$, serait constant ; or on a $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Comme l'application $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas constante, il en découle que

Théorème. *La fonction* $x \mapsto \sqrt{x}$ *n'est pas affine.*

c) Venons-en à la deuxième question ci-dessus. Il n'y a pas de raison d'introduire de force des éléments (notions, notations, résultats, etc.) qui ne se sont pas imposés d'eux-mêmes dans l'AER. Un certain nombre d'éléments « oubliés » (au sens de la question examinée) peuvent toutefois être rencontrés d'abord lors du moment de *travail de l'organisation mathématique* mise en place puis lors du moment de l'*évaluation* de celle-ci. On donne de cela un exemple rapide.

1) Supposons que, lors de l'évaluation (collective) de l'organisation mathématique construite jusque-là, on confronte la construction réalisée à ce que propose tel manuel, et que l'on tombe sur une suite d'« exercices » dont les deux spécimens suivants donneront une idée.

Exercice 7. Un cycliste s'éloigne d'un village A à la vitesse constante de 20 km/h. À l'instant $t = 0$ il se trouve à 3 km de A. Les unités étant le kilomètre et l'heure, préciser la fonction f donnant la distance x du cycliste au village A en fonction de l'instant t.

Exercice 8. Un organisateur de voyages scolaires propose une formule dont le prix est de 3000 € pour 15 élèves, somme à augmenter de 120 € par élève supplémentaire. Préciser la fonction f donnant le prix p € du voyage en fonction du nombre x d'élèves.

2) L'étude du manuel en question peut conduire à la technique mise en jeu de la façon suivante sur les deux spécimens indiqués.

Exercice 7. La vitesse étant constante, égale à 20 km/h, la fonction f est affine de coefficient directeur $a = 20$. Par ailleurs, l'ordonnée à l'origine est $b = f(0) = 3$. On a donc $x = f(t) = 20t + 3$.

Exercice 8. Le prix unitaire étant constant, égal à 120 € par élève, la fonction f est affine de coefficient directeur $a = 120$. Par ailleurs, on a $f(15) = 120 \times 15 + b = 3000$, d'où $b = 3000 - 1800 = 1200$. On a donc $p = f(x) = 120x + 1200$.

3) L'ingrédient principal de la technologie de cette technique est le théorème suivant, que l'on aura pu oublier dans les AER et la synthèse menées à bien jusque-là, et que l'on introduira à l'occasion de ce moment de l'étude – l'évaluation de ce qui a été construit.

Théorème. Si, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ de la fonction f est constant, alors f est une fonction affine dont le coefficient directeur est la valeur du taux d'accroissement.

♣ Démonstration. Soit a la valeur du taux d'accroissement. Posons $b = f(0)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, on a $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - b}{x} = a$ et donc $f(x) = ax + b$. Comme cette égalité est valable aussi pour $x = 0$, la fonction f est affine. ♣

4) Le « rattrapage » à l'occasion du travail de l'OM ou lors de son évaluation est en un sens normal ; mais on se gardera d'en abuser. On n'oubliera pas, en effet, que l'organisation mathématique répondant à un thème d'études donné s'écrit, en général, non pas $[T/\tau/\theta/\Theta]$ (ce qui désigne une OMP), mais $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ (ce qui renvoie à une OML). Une AER ciblant généralement l'*un* des types de tâches T_i seulement, il faudra donc en principe *plusieurs* AER pour faire émerger pleinement l'OML $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$.

3.3. Évaluer

a) On s'arrête – brièvement – sur deux questions touchant à l'évaluation *du rapport des élèves* aux organisations mathématiques mises en place dans la classe.

> 1. Lors du ramassage puis de la correction du dernier DM donné à mes élèves, l'un d'eux était absent. À son retour, je lui ai demandé de me rendre son DM comprenant les exercices initialement demandés augmenté d'un exercice supplémentaire de même difficulté. Mon but était de vérifier que les notions en jeu étaient comprises et de lui permettre d'avoir une note comme ses camarades. L'élève a pris cela comme une sanction malgré mes explications. Comment aurais-je pu / dû gérer cette situation ? (NA, JT, 4e, 18)
>
> 2. Comment évaluer les compétences des élèves concernant l'usage de la calculatrice ? (GC, MJ, 2de, 18)

b) Il n'y a guère de raison, en effet, d'imposer un exercice *supplémentaire* à l'élève. Encore une fois, c'est l'équivalence – du point de vue des apprentissages et de leur contrôle – qu'il faut viser entre deux versions de DM, ce qui n'exige nullement que le second DM reprenne *ne varietur* le contenu du DM proposé en première instance à la classe.

1) On méditera à ce propos la réponse apportée, lors de la séance 6, à la question suivante.

> Lors d'un contrôle important (un des deux DS du trimestre), quelle procédure doit-on mettre en place lorsque les élèves sont absents ? (MB, CR, 4e, 5)

2) On ajoutera qu'il est du devoir du professeur de créer des conditions qui protègent l'élève contre des tentations auxquelles *il a le droit de ne pas être exposé*. De là l'idée d'une « deuxième session ».

c) En matière d'évaluation de la maîtrise de certains usages de la calculatrice dans le travail mathématique, le premier principe est qu'une telle évaluation n'a pas à se distinguer spécialement de celle des autres praxéologies à maîtriser. Il faut d'abord faire émerger clairement des types de tâches, des techniques associées adéquatement justifiées, en effectuer une synthèse explicite, etc. Quant à la manifestation de la maîtrise de ces praxéologies, elle soulève les mêmes problèmes que celle de toutes les praxéologies qui ne se réduisent pas à des « gestes » inscrits sur du papier : ainsi en va-t-il par exemple avec les constructions géométriques. Deux sortes de « traces » inscriptibles peuvent être retenues faute de mieux : la description de la technique ; l'illustration de la mise en œuvre de la technique. Notons que la *justification* de la technique est, elle, généralement d'ordre discursif et, donc, « inscriptible ».

1) On prend ici un exemple simple dans son principe, quoique peu usuel : celui du type de tâches consistant à écrire sous forme canonique une expression contenant un radical, $E(\sqrt{c})$ (où c est un entier naturel *quadratfrei*).

> Exercice. On veut mettre sous la forme $a + b\sqrt{3}$, où $a, b \in \mathbb{Q}$, l'expression $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}}$.
>
> a) Préciser la technique rendue possible par l'utilisation de la calculatrice.
>
> b) Mettre en œuvre cette technique en précisant les différents résultats intermédiaires.
>
> c) Vérifier par un calcul direct le résultat obtenu.
>
> ♦ Solution. a) On calcule a grâce à l'égalité $a = \dfrac{E(\sqrt{3}) + E(-\sqrt{3})}{2}$ puis on calcule $b = \dfrac{E(\sqrt{3}) - a}{\sqrt{3}}$.
>
> b) On entre $\sqrt{3}$ dans la calculatrice, puis on demande à la calculatrice d'afficher la valeur de

((ans(1)–1)/(2+ans(1))+(-ans(1)–1)/(2–ans(1)))/2.

La calculatrice affiche la valeur –5. On a donc $a = -5$. On entre à nouveau $\sqrt{3}$ et on demande à la calculatrice d'afficher la valeur de

((ans(1)–1)/(2+ans(1))+5)/ans(1).

La calculatrice affiche la valeur 3. On a donc $b = 3$. On a finalement : $\frac{\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}} = -5 + 3\sqrt{3}$.

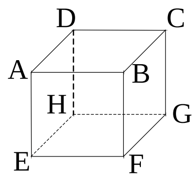
c) Il vient : $(-5 + 3\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = -10 + 9 - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = -1 + \sqrt{3}$. L'égalité établie à l'aide de la calculatrice est donc bien vérifiée. ♦

2) Les participants au séminaire sont invités à élaborer, pour la séance prochaine, une *technologie* de la technique présentée dans ce qui précède.

3.4. Faits spatiaux

a) La question suivante soulève un problème fondamental à propos de la connaissance des faits spatiaux et des outils de cette connaissance.

En géométrie dans l'espace, certains de mes élèves ont du mal à « voir » les droites non coplanaires. Par exemple, dans un cube ABCDEFGH, (DE) et (AG) sont sécantes pour une partie de mes élèves.



Comment faire pour « travailler leur vision » dans l'espace ? (AI, JT, 2de, 18)

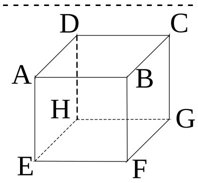
b) Alors que dans le plan, on peut se targuer de « voir » les faits spatiaux, il est plus difficile de le faire dans l'espace. D'une façon générale, l'élucidation des faits de l'espace à trois dimensions requiert le secours du *raisonnement déductif* que permet la disponibilité d'une théorie déductive, progressivement construite, de ce type de faits.

c) En conséquence, au lieu de s'étonner, voire de s'offusquer de ce que, pour certains, les droites (DE) et (AG) seraient sécantes, il convient d'*étudier*, comme autant de *problèmes* dont on ne se sort pas en disant – à tort, mais aussi bien à raison – que « c'est évident », des questions telles les suivantes.

Q_1. Les droites (DB) et (CF) sont-elles sécantes ?

Q_2. Les droites (AG) et (CE) sont-elles sécantes ?

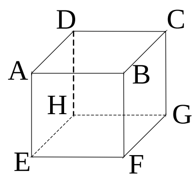
Q_3. Les droites (EC) et (HF) sont-elles sécantes ?



d) Il conviendra donc d'apporter à ces questions des réponses argumentées, à la production desquelles la classe devra consacrer un temps non négligeable. À titre d'exemple, on donne ci-après *une* réponse possible à la question Q_1.

Q_1. Les droites (DB) et (CF) sont-elles sécantes ?
R_1. Le point F n'est pas dans le plan (DCB).

Par suite la droite (CF) n'est pas dans le plan (DCB) ;
comme cette droite a le point C dans (DCB),
elle n'en a pas d'autre. Puisque C n'est pas sur la droite (DB),
(CF) ne coupe donc pas la droite (DB).



3.5. Impossibles fractions !

a) On achèvera ce forum par une question portant sur un sujet déjà travaillé, mais qui résiste…

Le thème de mon corpus B est la comparaison et l'addition en écriture fractionnaire. Pour l'instant, on a écrit que $\frac{a}{b}$ est le quotient de *a* par *b*… (Je comptais donner la définition « $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par *b*, donne *a* » lorsque j'entamerai la multiplication en écriture fractionnaire.) Puis j'ai précisé que, lorsque *a* et *b* étaient des nombres entiers, le quotient $\frac{a}{b}$ était appelé fraction (comme je l'ai vu dans de nombreux libres, ainsi qu'avec ma PCP). Depuis ma visite et la discussion qui a suivi, je sais qu'il y a un problème dans cette définition (entre la nature et l'écriture d'un nombre), mais je dois dire que je saisis mal le problème. Peut-on revenir un peu sur tout ça ? (SPM, CR, 5^{e}, 18)

b) La question fait mention de deux interrogations. On s'arrêtera ici sur la première, tout en signalant qu'il n'y a pas de vraie raison de réserver le nom de fraction à des quotients *d'entiers*, même si une telle convention peut s'avérer commode : mathématiquement, $\frac{\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}}$ est une fraction, avec un numérateur et un dénominateur, et cette fraction est une écriture fractionnaire du nombre $x = 3\sqrt{3} - 5$, écriture qui permet par exemple de voir d'un coup d'œil que $x > 0$.

1) Ce qu'il faut arriver à saisir, c'est que le fait de définir $\frac{a}{b}$ comme « le quotient de *a* par *b* » *revient exactement* à dire que « $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par *b*, donne *a* » ! On dit en effet que $\frac{a}{b} = q$ si (et seulement si) $a = bq$.

2) Cette « évidence » est pourtant masquée, dans une certaine culture professorale, par la méprise suivante : $\frac{4}{3}$ désignerait le « quotient » de 4 par 3, ce quotient étant entendu ici comme *le résultat de l'opération usuelle de division*, en faisant comme si celle-ci était *toujours possible* dans l'anneau des nombres décimaux. Dans cette vision des choses, l'écriture fractionnaire $\frac{4{,}2}{3}$ désignerait un nombre dont l'identité serait révélée *en effectuant la division* de 4,2 par 3, opération que, à la manière française, on « pose » ainsi :

4,2	3
1 2	1,4
0	

Dans ce cas, l'écriture fractionnaire $\frac{4,2}{3}$ apparaît bien comme une manière (« provisoire ») de désigner le nombre (décimal) 1,4. « Définir » $\frac{a}{b}$ comme « le quotient de *a* par *b* » revient alors à dire que $q = \frac{a}{b}$ est ce nombre qui se révèle quand on effectue la « division » de *a* par *b*…

3) Le problème est évidemment que, quand on effectue la division d'un entier *a* par un entier *b*, on se situe à l'intérieur de l'anneau des nombres décimaux $\mathbb{D} = \mathbb{Z}[1/10]$, qui ne contient pas forcément le quotient $q = \frac{a}{b}$. Il est regrettable que les élèves ne rencontrent pas plus nettement, dès la 6e, ce fait têtu, dont l'établissement est pourtant à portée de main. Il est en effet facile de montrer que si, par exemple, on prenait pour quotient $q = 1,33$, on aurait $3 \times q = 3,99 \neq 4$; et, plus généralement (mais de façon plus « abstraite »), que si l'on prenait un décimal q dont la dernière décimale non nulle soit l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le produit $3 \times q$ aurait pour dernière décimale, selon le cas, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, mais jamais 0, ce qui montre qu'on n'obtient *jamais* l'égalité $3 \times q = 4$.

c) L'idée semble donc prévaloir que la notation fractionnaire $\frac{a}{b}$ est un artifice utile qui, toutefois, reste un artifice face à la véritable « réalité numérique », celle du nombre qui serait le quotient de *a* par *b*, et qui s'obtiendrait par une extension de l'algorithme usuel de division. Il s'agit là d'une idée prégnante, qui barre l'accès à un point de vue essentiel.

1) Ce point de vue est le suivant : au lieu de *construire* les nombres (au sens des mathématiques « modernes », c'est-à-dire, en l'espèce, des mathématiques du XIXe siècle), on les *découvre*. On pourrait, à cet égard, dès le début des études mathématiques, noter $\mathbb{R}$ le système des nombres positifs ou nuls que l'on va explorer et découvrir peu à peu au fil des années.

2) Le moteur de cette découverte, on l'a dit et répété, est la *mesure des grandeurs* : parce que, pour des raisons géométriques, on peut diviser un segment [AB] de longueur *a* unités en trois segments de même longueur, on découvre qu'il existe dans $\mathbb{R}$ un nombre x tel que $3x = a$; de même, on découvre par la géométrie que, étant donné deux segments de longueur *a* et *b* unités, il existe un segment de longueur x unités, avec x vérifiant $x^2 = a^2 + b^2$, en sorte qu'il existe dans $\mathbb{R}$ un nombre x tel que $x^2 = a^2 + b^2$; etc.

3) On peut alors chercher si le nombre ainsi découvert était en fait *déjà connu*. Dans le cas où $a = 4,2$, on arrive vite au fait que la réponse est positive, que le nombre vérifiant $3x = 4,2$ n'est autre que le *décimal* 1,4. Il en va de même si $a = 3$ et $b = 4$, auquel cas $x = 5$. Il n'en va de même, en revanche, si $a = 4$ ou si $a = b = 1$. Dans ces cas, il faut donc pouvoir nommer/désigner les nombres nouvellement « découverts » dans $\mathbb{R}$: on *convient* alors de noter, *dans tous les cas*, $\frac{a}{3}$ le nombre x tel que $3x = a$, et $\sqrt{a^2 + b^2}$ le nombre x tel que $x^2 = a^2 + b^2$; etc. On a donc $\frac{4,2}{3} = 1,4 \in \mathbb{D}$, $\frac{4}{3} \notin \mathbb{D}$, etc.

4) On découvre ainsi que, pour chaque couple d'entiers naturels a, b, $b \neq 0$, il existe dans $\mathbb{R}$ un nombre $x = \frac{a}{b}$ tel que $bx = a$. Notons $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble de ces nombres, qui, à l'évidence, contient $\mathbb{D}_+$ (si x est décimal, il existe des entiers n et a tel que $x = \frac{a}{10^n}$). Il est normal alors de se demander ce que vaut la somme de deux tels nombres, leur produit, leur quotient, etc. On découvre aisément que ces opérations ne font pas sortir de l'ensemble $\mathbb{Q}_+$.

5) On découvre aussi que le quotient de deux décimaux non nécessairement entiers est encore dans $\mathbb{Q}_+$, etc. En particulier, on « redécouvre » des nombres qui apparaissent comme les quotients d'un décimal par un décimal *non entier*. En ce point, le principe générateur s'inverse : alors que, jusqu'ici, c'était le besoin de *nombres pour mesurer* qui avait conduit à la découverte de nouveaux nombres, on tombe ici sur des expressions numériques qu'on ne regarde pas, *a priori*, comme « forcées » par les besoins de la mesure des grandeurs… Mais rien ne se perd : les participants se demanderont pour la séance prochaine ce que peut bien mesurer par exemple, disons, le nombre $\frac{4,2}{3,1}$.

4. Forum des questions : exposés à venir

4.1. Exposés prévus

***AI* : programmes de calcul et calcul algébrique**

Exposé 26. Qu'est-ce que l'expression algébrique d'un programme de calcul ? Pourquoi peut-on dire que le calcul algébrique est un calcul sur les programmes de calcul ?

***JB* : angles et radians**

Exposé 28. Pourquoi utilise-t-on le radian en mathématiques ?

***PL* : Effet Pygmalion et autres effets**

Exposé 29. En quoi les attentes formulées à l'endroit des élèves influent-elles sur leurs performances scolaires ?

***LN* : Fonctions de référence**

Exposé 30. Comment faire apparaître l'utilité des fonctions x^2 et $\frac{1}{x}$ en classe de seconde ?

4.2. Exposés à venir

a) Un exposé présentera ce que contiennent les archives du Séminaire sur le sujet suivant.

Exposé 31. Doit-on faire une différence entre « modélisation mathématique » et « mathématisation » ? Laquelle ? Pourquoi ?

Cet exposé est motivé en particulier par la question suivante :

Quelle est la différence entre mathématiser et modéliser un problème ? La différence n'est pas nette pour moi. (CO, MJ, 2^{de}, 18)

Il sera proposé et présenté par *GF*.

b) Un exposé présentera ce que contiennent les archives du Séminaire sur le sujet suivant.

Exposé 32. Comment peut-on motiver l'introduction des « fonctions trigonométriques » (cosinus, sinus, tangente) ?

Cet exposé est motivé en particulier par la question suivante :

Quelles sont les motivations de l'introduction du cosinus d'un angle aigu en 4^e ? En particulier le cosinus est introduit avant le sinus et la tangente. (MD, MJ, 4^e, 17)

Il sera proposé et présenté par *EB*.

b) Un exposé présentera ce que contiennent les archives du Séminaire sur le sujet suivant.

Exposé 33. Peut-on expérimenter en matière de géométrie dans l'espace ? Comment ? À propos de quoi ?

Il sera proposé et présenté par *GB*.

b) Un exposé présentera ce que contiennent les archives du Séminaire sur le sujet suivant.

Exposé 34. Comment axiomatiser la géométrie dans l'espace enseignée en seconde ?

Cet exposé est motivé en particulier par la question suivante :

Peut-on, malgré les contraintes de temps en 2^{de}, faire au sujet de la géométrie dans l'espace le même travail de construction de la théorie géométrique que l'on a fait pour le plan en collège ? (JG, OS, 2^{de}, 17)

Il sera proposé et présenté par *GD*.

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 20 : mardi 21 mars 2006

0. Le programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions : poursuites & anticipations // 2. Un PER de statistique.

1. Forum des questions : poursuites & anticipations

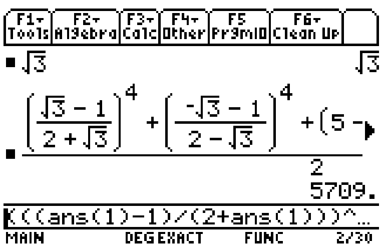
1.1. Questions proposées : une technologie mathématique

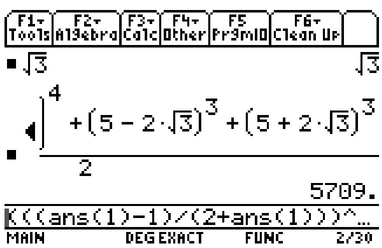
a) Le forum des questions inclus dans les notes de la séance précédente présentait une technique de calcul de l'écriture canonique $a + b\sqrt{c}$ où $a, b \in \mathbb{Q}$, d'une expression $E(\sqrt{c})$, où E est une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et où c est un entier naturel *quadratfrei*.

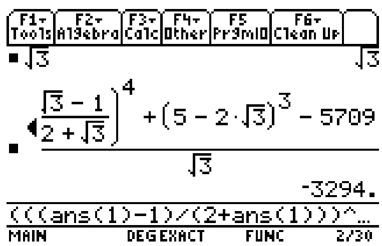
b) Cette technique consiste à utiliser les formules

$$a = \frac{E(\sqrt{3}) + E(-\sqrt{3})}{2}\ ;\ b = \frac{E(\sqrt{3}) - a}{\sqrt{3}}.$$

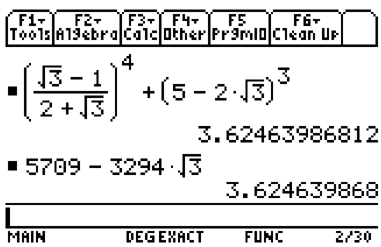
Soit par exemple l'expression $E(\sqrt{3}) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}}\right)^4 + (5 - 2\sqrt{3})^3$. On calcule d'abord la valeur de a (ci-après à gauche et au milieu), puis la valeur de b (ci-après, à droite).







On a donc : $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}}\right)^4 + (5 - 2\sqrt{3})^3 = 5709 - 3294\sqrt{3}$, ce qu'on peut vérifier (ci-après).



c) Les participants au séminaire étaient invités à élaborer, pour la présente séance, une *technologie* de la technique mise en œuvre.

1) Supposons d'abord que la fraction rationnelle E est un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$. Utilisons la division euclidienne de P par le polynôme $X^2 - c$: il existe un polynôme Q et un polynôme R de degré au plus un tel que $P(X) = Q(X)(X^2 - c) + R(X)$. Posons $R(X) = u + vX$ et soit $\varepsilon = \pm 1$; on a : $P(\varepsilon\sqrt{c}) = Q(\varepsilon\sqrt{c})(c - c) + R(\varepsilon\sqrt{c}) = u + v(\varepsilon\sqrt{c}) = u + \varepsilon v\sqrt{c}$. On en conclut que, si $P(\sqrt{c}) = u + v\sqrt{c}$ alors $P(-\sqrt{c}) = u - v\sqrt{c}$.

2) Supposons maintenant que $E(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$, où $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$. Soit $u, v, s, t \in \mathbb{Q}$ tels que $P(\sqrt{c}) = u + v\sqrt{c}$ et $Q(\sqrt{c}) = s + t\sqrt{c}$. On a :

$$\frac{u + \varepsilon v\sqrt{c}}{s + \varepsilon t\sqrt{c}} = \frac{(u + \varepsilon v\sqrt{c})(s - \varepsilon t\sqrt{c})}{s^2 - t^2c} = \frac{us - vtc + \varepsilon(-ut + vs)\sqrt{c}}{s^2 - t^2c}.$$

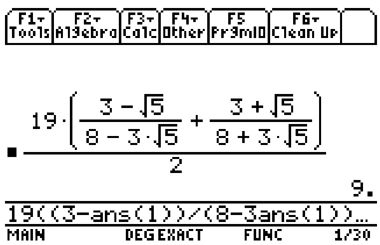
On a donc : $E(\sqrt{c}) = \dfrac{P(\sqrt{c})}{Q(\sqrt{c})} = \dfrac{u + v\sqrt{c}}{s + t\sqrt{c}} = \dfrac{us - vtc}{s^2 - t^2c} + \varepsilon\dfrac{-ut + vs}{s^2 - t^2c}\sqrt{c}$. Il vient donc :

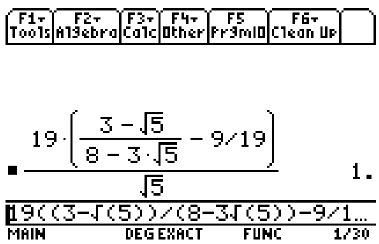
$$E(-\sqrt{c}) = \frac{P(-\sqrt{c})}{Q(-\sqrt{c})} = \frac{u - v\sqrt{c}}{s - t\sqrt{c}} = \frac{us - vtc}{s^2 - t^2c} - \frac{-ut + vs}{s^2 - t^2c}\sqrt{c}, \text{ CQFD.}$$

d) On notera que la technique proposée fournit a et b sous forme exacte si a et b sont des entiers. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, on peut multiplier a et b par l'entier $N = s^2 - t^2c$ pour obtenir des valeurs entières. Ainsi, pour

$$E(\sqrt{5}) = \frac{3 - \sqrt{5}}{8 - 3\sqrt{5}}$$

on aura $N = 64 - 9 \times 5 = 19$ et les calculs ci-après donnent les valeurs attendues.



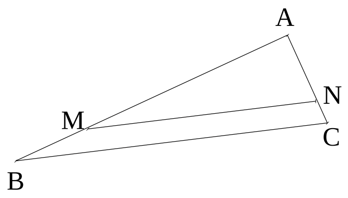


On a donc $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{8 - 3\sqrt{5}} = \dfrac{9}{19} + \dfrac{1}{19}\sqrt{5}$ ($\approx 0{,}59137199881577840507416703519 63$).

1.2. Questions proposées : une tâche ✓

a) La question était la suivante : supposant que l'on a « découvert » – sans en avoir éprouvé le besoin *a priori* – le nombre noté $\dfrac{4{,}2}{3{,}1}$, c'est-à-dire le nombre x qui, multiplié par 3,1, donne 4,2, on se demande ce qu'un tel nombre peut bien mesurer.

b) En récrivant l'égalité $x = \frac{4,2}{3,1} = x$ sous la forme $\frac{1}{x} = \frac{3,1}{4,2}$, on relie le problème proposé au théorème de Thalès : sur la figure suivante, où AB = 4,2 et AM = 3,1, si AN = 1 alors AC = x.

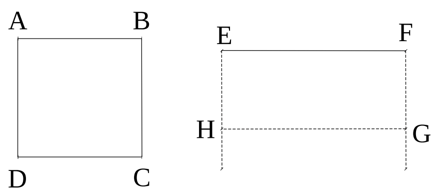


1) On notera que cette construction permet le *calcul graphique* de $x = \frac{4,2}{3,1}$: le logiciel utilisé pour dessiner la figure indique ainsi que x = AC ≈ 1,35.

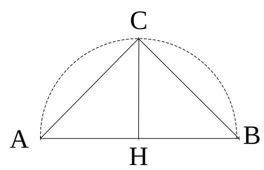
2) Bien entendu, on aurait pu écrire aussi l'égalité $\frac{1}{x} = \frac{3,1}{4,2}$ sous la forme (par exemple) $\frac{0,7}{x} = \frac{3,1}{6}$ ou encore $\frac{0,6}{x} = \frac{3,1}{7}$. Ces égalités, qui montrent en passant que $1,2 < x < 1,4$, donneraient lieu à des constructions graphiques analogues.

c) On peut aussi imaginer que $x = \frac{4,2}{3,1}$ soit la mesure (par rapport à une certaine unité u) de l'autre côté d'un rectangle ayant un côté de mesure 3,1 et d'aire 4,2 (par rapport à l'unité d'aire u^2), c'est-à-dire vérifie : $3,1 \times x = 4,2$.

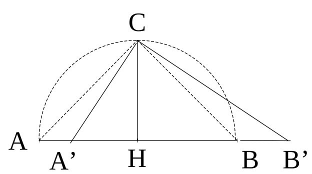
1) Bien entendu, on doit se demander si un tel rectangle existe. Le rectangle de côtés de mesures 2 et 2,1 existe et a pour aire 4,2. Il faut donc montrer comment on peut construire un rectangle de même aire dont l'un des côtés ait pour mesure 3,1.



2) Dans un triangle ABC rectangle en C, si H est le pied de la hauteur issue de C, on a : $CH^2 = HA \times HB$. Sur la figure ci-après, on a pris HA = 2, HB = 2,1, en sorte que $CH^2 = 4,2$.



Il est alors facile de construire un point A' de]HA) tel que HA' × 3,1 = 4,2. Soit en effet B' le point de]HB) tel que HB' = 3,1 : la perpendiculaire en C à (B'C) coupe]HA) au point A' demandé.



On a ainsi une autre construction du nombre $x = \frac{4,2}{3,1}$.

3) Le résultat clé utilisé découle du théorème de Pythagore : dans les triangles AHC et BHC, on a $AC^2 = HA^2 + HC^2$ et $BC^2 = HB^2 + HC^2$; l'addition de ces égalités donne $AB^2 = HA^2 + HB^2 + 2HC^2$. Comme $AB^2 = (AH + HB)^2 = HA^2 + HB^2 + 2\ HA \times HB$, l'égalité annonce en découle.

2. Un PER de statistique

2.1. Aux origines de la statistique

a) On poursuit le travail sur le PER dont une amorce a été proposée lors de la séance précédente. On inaugure ce travail en partant d'une question qui donnera l'occasion de préciser certains points essentiels dont la compréhension a semblé un peu flottante.

> Le contenu de la question des « fluctuations d'échantillonnage » est-ce le fait de remarquer que, dans une série statistique,
> – localement, on a un comportement « erratique » ;
> – globalement, on observe des « règles », un « déterminisme » ?
>
> (DV, CR, 2de, 19)

b) On reviendra à la question de la fluctuation d'échantillonnage telle qu'elle se pose dans le programme de 2de. On la situe ici dans un contexte plus large. L'abord profane, non instruit de la *variabilité* (qui est l'objet de la statistique, comme la spatialité est l'objet de la géométrie), se traduit, au niveau le plus fruste, par une attitude consistant à penser (et à dire, ce que font nombre de médias, à l'instar de la *vox populi*), que *ça dépend*… De quoi mourrait-on dans la ville de Londres au cours de l'année 1632 ? Que pense un élève de lycée professionnel de sa réussite scolaire en 1997 ? Réponse : ça dépend ! Merci pour cette information.

c) Dès la *Political Arithmetic* élaborée par les Anglais John Graunt (1620-1674) et William Petty (1623-1687), la science statistique s'inscrit en faux contre ces fausses finesses.

1) Dans ses *Observations on the Bills of Mortality* (1662), John Graunt, faisant œuvre de pionnier, présente les causes de mortalité à Londres pour diverses années. Voici, en traduction française, la table qu'il dresse pour l'année 1632 (pour des indications sur la nature exacte des causes recensées, voir http://www.ac.wwu.edu/~stephan/Graunt/graunt.html).

Abcès : 74 Angine : 7 Aphtes et affections de la bouche : 40 Assassinés : 7 Brûlés et échaudés : 5 Chancre : 1 Chancre et lupus : 10 Colique, pierre et strangurie : 56 Consomption : 1797 Contusions, écoulements, plaies et ulcères : 28 Convulsions : 241 Dépression : 8	Hypertrophie du foie : 87 Indigestion : 86 Jaunisse : 43 Léthargie : 2 Mordu par un chien enragé : 1 Mort subite : 62 Morts dans la rue et de faim : 6 Morts de chagrin : 11 Nouveaux nés et enfants en bas âge : 2268 Noyés : 34 Opérations de la pierre : 5 Paralysie : 25 Peste : 8

Écrouelles : 38	Phtisie : 34
Épilepsie : 7	Pleurésie et atrabile : 36
Éruptions et varioles : 531	Poussée des dents : 470
Étouffés et morts de faim en nourrice : 7	Rhume et toux : 55
Exécutés et torturés à mort : 18	Rougeole : 80
Femmes mortes en couche : 171	Sciatique : 1
Fièvre : 1108	Scorbut et gale : 9
Fistule : 13	Soulèvement des poumons : 98
Flux de ventre, diarrhée et dysenterie : 348	Suicidés : 15
Folie : 5	Tués dans divers accidents : 46
Foudroyés par une planète : 13	Tympanite : 13
Gangrène : 5	Typhus et scarlatine : 38
Goutte : 4	Varicelle : 6
Hémorragie : 3	Vérole : 12
Hémorroïdes : 1	Vers : 27
Hernie : 9	Vomissements : 1
Hydropisie et ballonnements : 267	

2) L'un des buts essentiels du travail engagé est de donner aux personnes des indications sur ce qui les conduira à quitter ce monde, en leur permettant d'aller au-delà de la réponse de l'ignorance et de la crainte immotivée – « ça dépend ». Graunt écrit à ce propos :

> In the next place, whereas many persons live in great fear, and apprehension of some of the more formidable, and notorious diseases following; I shall only set down how many died of each: that the respective numbers, being compared with the Total 229250, those persons may the better understand the hazard they are in.

La table présentée est celle-ci.

Apoplex: 1306	Kil'd by several accidents: 1021
Bleeding: 069	Leprosy: 0006
Cut of the Stone: 0038	Lunatique: 0158
Burnt, and Scalded: 125	Murthered: 0086
Falling Sickness: 0074	Overlaid, and Starved: 0529
Drowned: 829	Poysoned: 014
Dead in the Streets: 0243	Palsy: 0423
Excessive drinking: 002	Smothered: 026
Gowt: 0134	Rupture: 0201
Frighted: 022	Shot: 007
Head-Ach: 0051	Stone and Strangury: 0863
Grief: 279	Starved: 051
Jaundice: 0998	Sciatica: 0005
Hanged themselves: 222	Vomiting: 136
Lethargy: 0067	Sodainly: 0454

On voit ainsi, par exemple, que la fréquence des décès du fait d'un accident, relativement élevée, n'est que de $\frac{1021}{229250} = \frac{1021000}{229250}$ ‰ ≈ 4,45 ‰ : il y a moins de 5 « chances » sur 1000 de périr d'un accident.

d) L'objectif de la statistique est ainsi de faire entendre qu'il est faux qu'on ne puisse rien dire, ni rien savoir. Tout n'est pas également probable : il existe des *régularités statistiques* qui nous assurent que, si la survenue de tel événement est bien possible, elle est de faible « probabilité ». Cela revient à dire que les *distributions de fréquences* ne sont pas, en général, *uniformes*. Et ce

sont ces distributions de fréquences que les études statistiques vont s'efforcer de porter à la lumière.

2.2. Distributions de fréquences : quelques exemples

a) Dans un livre intitulé *Les conduites déviantes des lycéens* (Hachette Éducation, 2000), le sociologue Robert Ballion rend compte d'une enquête par questionnaire auprès de lycéens : 9919 de ces questionnaires, recueillis entre avril et novembre 1997, ont pu être analysés.

1) Les enquêtés étaient interrogés sur leur propre estimation de leur valeur scolaire. Si l'on interroge un individu pris au hasard, le fait qu'il estime avoir une bonne réussite scolaire ou non dépendra sans doute de beaucoup de facteurs. Mais voici ce qu'on trouve, à l'instar de John Graunt examinant les causes de mortalité.

- Élèves disant avoir des résultats bons ou excellents : 10,6 %
- Élèves s'attribuant des résultats assez bons ou moyens : 74,5 %
- Élèves jugeant leurs résultats médiocres ou faibles : 13,8 %
- Non-réponses : 1,1 %

2) Que pensent les *parents* de la valeur scolaire de leur progéniture ? Ça dépend. Bien sûr. Mais une enquête conduite par ailleurs (et citée par le même auteur) montre ceci.

- Parents jugeant leur enfant « excellent » : 7,3 %
- Parents jugeant leur enfant « bon » ou « moyen » : 82,1 %
- Parents jugeant que leur enfant a « des difficultés » ou « de grosses difficultés » : 8,2 %
- Non-réponses : 2,4 %

Les auteurs de l'enquête concluent que les parents manifestent « une certaine réticence à placer leurs enfants aux extrémités de l'échelle scolaire, parmi les élèves excellents, ou parmi ceux qui ont de grosses difficultés ». Les deux distributions apparaissent en effet différentes.

3) On peut envisager maintenant, au sein de l'échantillon des lycéens interrogés par Robert Ballion, ceux qui fréquentent un lycée d'enseignement général et technologique (LEGT) et ceux qui fréquentent un lycée professionnel (LT). Les distributions correspondantes sont-elles semblables, voire superposables ? Voici.

	LEGT	LP
Disent avoir des résultats bons ou excellents	9 %	14 %
Disent avoir des résultats moyens	75 %	78 %
Disent avoir des résultats médiocres ou faibles	16 %	8 %

La comparaison de ces distributions sera peut-être une surprise pour le lecteur : la distribution est translatée *vers le haut* quand on passe des élèves de LEGT aux élèves de LP ! Le phénomène est connu des spécialistes, et l'auteur cité écrit à ce propos :

> … les lycées d'enseignement professionnel proposent à leurs élèves des situations d'apprentissage qui favorisent le sentiment de réussite mieux que ne le font les lycéens d'enseignement général et technologique. Comme l'écrit Bernard Charlot : « Le lycée professionnel, lycée de relégation au départ, devient en cours de route un lieu de reconstruction d'élèves en échec. »

On notera la différence entre appréciation subjective et réalité objective de la réussite scolaire : alors que (seulement) 39,7 % des élèves de LEGT ont redoublé durant leur scolarité, ce pourcentage passe à 82,3 % en LP – il fait plus que doubler.

4) Il est intéressant de comparer aussi filles et garçons. Les premières ont *objectivement* une meilleure réussite scolaire que les seconds : alors que 55,9 % des garçons ont redoublé au cours de leur scolarité, ce pourcentage tombe à 46,9 % pour les filles, soit 9 *points de moins*. Les distributions de fréquences sont les suivantes.

	Garçons	Filles
Disent avoir de bons résultats	11 %	10 %
Disent avoir des résultats moyens	74 %	76 %
Disent avoir des résultats faibles	15 %	14 %

Ces distributions sont donc très voisines : objectivement, les filles se sous-estiment (et/ou les garçons se surestiment).

5) Ajoutons encore une touche à ce tableau, en distinguant, non entre garçons et filles, ou entre élèves de LEGT et élèves de LP, mais entre élèves *en fonction de l'âge*. Les différentes distributions de fréquences sont les suivantes.

	15 ans et moins	16 ans	17 ans	18 ans	19 ans	20 ans et plus
Déclarent de bons résultats	15 %	12 %	10 %	9 %	9 %	8 %
Déclarent des résultats faibles	13 %	14 %	13 %	14 %	17 %	21 %

L'auteur commente ces résultats dans les termes que voici.

Plus on avance en âge, et donc dans le cursus, plus la valeur de l'auto-estimation baisse : le taux des élèves qui estiment avoir de bons résultats faiblit, tandis qu'au contraire augmente celui des élèves à résultats faibles. On peut voir dans ce phénomène un indicateur de dégradation dans le temps de l'expérience scolaire, le fait d'éprouver un sentiment de réussite devenant de moins en moins fréquent au fur et à mesure que se déroule la scolarité.

b) Dans une étude intitulée *Cultures lycéennes. La tyrannie de la majorité* (Éditions Autrement, 2005), la sociologue Dominique Pasquier rend compte d'une enquête qui « s'est déroulée en 2001-2002 dans trois lycées généraux et technologiques de Paris et de sa grande banlieue ». 944 questionnaires ont été analysés. Bien entendu, les résultats publiés ne portent que sur cette population, dont l'auteure ne prétend nullement qu'elle serait représentative de la population lycéenne de France. Mais que nous apprend cette enquête ? On laissera le lecteur commenter par lui-même les résultats présentés ci-après.

1) On peut comparer garçons et filles selon certains caractères, comme le permet ce tableau.

	Filles	Garçons
Utilise son portable tous les jours	70 %	59 %
Téléphone à ses ami(e)s tous les jours	49 %	34,5 %
Garde des liens par téléphone avec des ami(e)s qu'elle/il ne voit plus	80 %	58 %
Garde des liens par lettre postale avec des ami(e)s qu'elle/il ne voit plus	72 %	30 %
Garde des liens par e-mail avec des ami(e)s qu'elle/il ne voit plus	47	41

2) On peut aussi comparer les comportements en fonction de l'origine sociale, comme le font les tableaux ci-après. Le premier concerne la participation à des *chats*.

	Ensemble	Origine favorisée	Origine moyenne	Origine populaire
Jamais	41 %	51 %	39 %	30 %
Parfois	29,5 %	31 %	27 %	31 %
Souvent	18	8 %	22 %	27 %

Le deuxième tableau suggère que, en 2001-2002, l'âge fait une différence.

	Ensemble	15-17 ans	Plus de 18 ans
Jamais	41 %	38 %	52 %
Parfois	29,5 %	30 %	22 %
Souvent	18	20 %	16 %

Le troisième tableau concernent la pratique de correspondre par Internet avec des gens qu'on n'a jamais rencontrés.

Ensemble	Origine favorisée	Origine moyenne	Origine populaire
37 %	26 %	41 %	49 %

c) D'une façon générale, la connaissance – collective *et* individuelle – du monde auquel on est amené à s'intéresser (d'un point de vue professionnel ou d'un autre point de vue) suppose l'appui d'études objectives qui font connaître les distributions de fréquences clés, études qu'on ne peut disqualifier *a priori* en disant que « ça dépend ». Le fait que de telles études rencontrent toutes sortes de difficultés – qui prennent quelquefois la forme de pièges – ne doit pas conduire à les écarter, mais au contraire *à se former à la statistique* – collectivement *et* individuellement.

2.3. Intermède : différents types de caractères statistiques

a) En statistique univariée, on part d'une question Q, que l'on précisera en précisant un caractère X sur une population Ω à propos duquel on étudiera la question Q. Cela rappelé, il arrive que les « valeurs » prises par X soient des « qualités », comme le fait, pour un individu dans la population des élèves d'une classe, d'être un garçon ou une fille ; ou, pour un étudiant de 1re année de sociologie, d'avoir un bac littéraire, ou économique et social, ou scientifique, ou technologique, ou « autre » (y compris une « équivalence » – on aurait ici un caractère à cinq « modalités ». Un tel caractère est dit souvent *qualitatif* ou *catégorique* (parce qu'il désigne la catégorie à laquelle appartient l'individu ω d'un certain point de vue).

1) Dans un tel cas, on peut toujours « étiqueter » les modalités du caractère par des nombres, transformant ainsi X en une application de Ω dans $\Re \subset \mathbb{R}$. Mais les valeurs numériques attribuées ne sont alors que des *numéros*. On posera par exemple que, si $\omega \in \Omega$ est un garçon, alors $X(\omega) = 1$, tandis que si ω est une fille, alors $X(\omega) = 2$. Mais on aurait pu prendre aussi bien pour « numéros » 0 et 1, etc.

2) Pour généraliser la notion de mesure d'une grandeur, on regarde parfois X comme « mesurant » une certaine « grandeur » attachée aux individus $\omega \in \Omega$. Mais si X est une

« mesure » de cette espèce de grandeur (sur Ω), dans le cas d'une variable catégorique, $X^* = f \circ X$ en est une autre, dès lors simplement que f est une *bijection* de $\Re$, puisque f se contente d'assigner d'autres étiquettes, d'autres « noms » (numériques) aux catégories en question. On dit en conséquence que X prend ses valeurs sur une *échelle nominale*, à savoir $\Re$ muni de son groupe de bijections.

3) Un indicateur statistique, $\varphi(X)$, doit alors vérifier : $\varphi(f \circ X) = f(\varphi(X))$, pour toute bijection f de $\Re$. Prenons par exemple $\varphi(X) = \bar{X}$; si une classe Ω comporte 14 garçons et 18 filles, par exemple, et si l'on assigne le numéro (ou le « nom ») 1 aux garçons et 2 aux filles, on aura $\bar{X} = \frac{14 + 2 \times 18}{32} = 1{,}5625$. Si, en revanche, prenant $f(x) = x - 1$ si x est entier et $f(x) = x$ sinon, on assigne le numéro 0 aux garçons et 1 aux filles, on aura $\overline{f \circ X} = \frac{18}{32} = 0{,}5625 \neq f(1{,}5625)$. La moyenne n'est donc pas, ici, un indicateur de tendance centrale « permis ».

4) L'indicateur de tendance centrale usuellement considéré est, dans ce cas, le *mode*. Il est facile de voir que l'on a bien la relation de compatibilité $\varphi(f \circ X) = f(\varphi(X))$. Dans l'exemple examiné, on a ainsi $\varphi(X) = 2$ et $\varphi(f \circ X) = 1 = f(2)$.

5) Des indicateurs de dispersion ont déjà été introduits dès la séance 3 : on reproduit ci-après le passage correspondant des notes de cette séance : on laissera le lecteur se remémorer le contexte de ce développement.

• Le ***rapport de variation***, qui correspond à la probabilité qu'une valeur observée prise au hasard parmi les N n'appartienne pas à la classe modale, est donné par $\delta = 1 - \frac{n^*}{N}$ où $N = \sum n_i$ est l'***effectif total*** et $n^* = \max(n_i)$ est l'effectif de la ***classe modale*** : pour k modalités ($1 \leq i \leq k$), lorsque n^* varie de 1 (dispersion maximale) à N (dispersion minimale), δ décroît de $\frac{N-1}{N}$ à 0. Ici, ce rapport vaut successivement $\frac{5}{52} \approx 0{,}096$, $\frac{29}{52} \approx 0{,}56$, $\frac{29}{51} \approx 0{,}6$, $\frac{25}{52} \approx 0{,}48$ (l'indice de dispersion maximale étant peu différent de 0,98). On observe que l'accord du collectif enquêté ***est d'autant plus marqué qu'il a trait à des comportements davantage inacceptables***. En d'autres termes, l'accord *a priori* (avant tout travail du collectif) se fait plutôt sur l'interdit que sur le permis, ce que montraient déjà les pourcentages d'acceptation donnés ci-dessus. Cette situation laisse ouvert un vaste champ de prise de décision à chacun des membres du collectif dès lors qu'il souhaite pouvoir se référer à une règle : on est ici tout près de l'***anomie*** (voir ci-après).

• L'***indice de diversité***, qui correspond à la probabilité que deux valeurs observées prises au hasard parmi les N ne relèvent pas de la même modalité x_i, vaut $\delta = 1 - \sum \left(\frac{n_i}{N}\right)^2$. Il décroît jusqu'à 0 à partir d'un maximum $\leq \frac{k-1}{k}$. (On laissera le lecteur effectuer les calculs correspondants à propos des quatre caractères étudiés.)

Dans l'exemple considéré plus haut, le rapport de variation vaut $1 - \frac{18}{32} = 0{,}4375$, tandis que l'indice de diversité est égal à $1 - \frac{14^2 + 18^2}{32^2} = 0{,}4921875$.

b) On distingue ordinairement quatre « niveaux de mesure » (dont le dernier est celui des « grandeurs mesurables » au sens usuel du terme : masse, longueur, etc.). Au-dessus du premier niveau, celui des échelles nominales, se trouve le niveau des échelles *ordinales*. Ici, on suppose que cela a un sens de dire que $X(\omega) < X(\omega')$, où $\omega, \omega' \in \Omega$. En d'autres termes, l'*ordre* de $\mathfrak{R}$ prend un sens vis-à-vis du caractère X considéré.

3) Un indicateur statistique, $\varphi(X)$, doit alors vérifier : $\varphi(f \circ X) = f(\varphi(X))$, pour toute fonction f *strictement monotone* de $\mathfrak{R}$ dans $\mathfrak{R}$, c'est-à-dire pour toute f appartenant à ce qu'on appelle parfois le groupe *isotone* de $\mathfrak{R}$.

4) À nouveau, la moyenne n'est pas un indicateur de tendance centrale permis. Supposons que l'on attribue à des élèves un des « niveaux » de résultats scolaires suivants : faible $\prec$ médiocre $\prec$ moyen $\prec$ bon $\prec$ excellent. On peut par exemple « étiqueter » ces modalités en leur assignant respectivement les nombres 1, 2, 3, 4, 5, dans cet ordre. Dans une classe Ω, on a observé les résultats suivants :

Niveau de résultats (X)	Effectif
1	4
2	7
3	12
4	8
5	1

On a : $\bar{X} = \dfrac{1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 12 + 4 \times 8 + 5 \times 1}{32} = 2{,}84375$. Prenons pour f une fonction affine par morceaux, strictement croissante, compatible avec le ré-étiquetage correspondant au tableau suivant.

Niveau de résultats ($f \circ X$)	Effectif
1	4
2	7
5	12
9	8
10	1

Cette fois, il vient : $\overline{f \circ X} = \dfrac{1 \times 4 + 2 \times 7 + 5 \times 12 + 9 \times 8 + 10 \times 1}{32} = 5$. Or on a $f(2{,}84375) = 2 + 3 \times 0{,}84375 = 4{,}53125 \neq 5$.

5) En revanche, la médiane (définie comme la première valeur telle qu'au moins 50 % des valeurs observées lui soit inférieures ou égales) est, dès le niveau ordinal, un indicateur permis. Examinons ainsi les fréquences cumulées correspondant aux deux tableaux précédents.

Niveau de résultats (X)	Effectifs cumulés	Fréquences cumulées
1	4	12,5 %
2	11	34,375 %
3	23	71,875 %
4	31	96,875 %
5	32	100 %

Niveau de résultats ($f\circ X$)	Effectifs cumulés	Fréquences cumulées
1	4	12,5 %
2	11	34,375 %
5	23	71,875 %
9	31	96,875 %
10	32	100 %

La plus petite valeur de X qui soit supérieure ou égale à 50 % au moins des valeurs observées est 3 ; la plus petite valeur de $f\circ X$ qui soit supérieure ou égale à 50 % au moins des valeurs observées est 5. Or on a bien $f(3) = 5$.

6) Les indicateurs de dispersion sont, à ce niveau, les mêmes qu'au niveau nominal. Notons que, si les quartiles sont bien définis au niveau ordinal, l'écart interquartile, c'est-à-dire la différence entre le troisième et le premier quartiles, ne l'est pas.

c) Le troisième niveau est celui des échelles dites *d'intervalles*. Dans un tel cas, on suppose que le caractère étudié est défini à une transformation *affine* strictement croissante près : si X est un tel caractère, $X^* = f\circ X$ en est un autre, f étant de la forme $f(x) = ax + b$, avec $a > 0$.

1) Le cas emblématique est la température d'un corps : on connaît les échelles de température que sont les échelles Fahrenheit et Celsius, qui s'échangent par les relations affines $t_F = 1,8\ t_C + 32$ et $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$. D'une façon générale, si l'on écrit $f(x) = a(x - c)$, le choix de c correspond au choix du zéro sur l'échelle, tandis que a correspond à l'unité choisie. L'usage en France est de parler, à propos de ce que « mesure » X, d'une espèce de grandeur « repérable » mais non « mesurable ». On va voir que, *du point de vue de la statistique*, il n'y a guère de raison de faire une distinction tranchée entre ces deux types de grandeurs et les grandeurs au sens usuel du terme – les grandeurs « mesurables ».

2) Supposons quatre valeurs x_1, x_2, x_1', $x_2' \in \mathfrak{R}$ telles que $x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$. Soit f une fonction affine strictement croissante ; posons $f(x) = ax + b$. On a : $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) = a(x_2' - x_1') = f(x_2') - f(x_1')$. On voit ainsi que les « intervalles » sont variables (leur longueur sont multipliées par a) mais *l'égalité* des longueurs des intervalles est un invariant : de là découle la dénomination d'échelle d'intervalles.

3) L'indicateur de tendance centrale est ici la médiane, à laquelle vient s'ajouter la *moyenne* (l'indicateur de dispersion associé étant l'*écart type*) : médiane et moyenne vérifient en effet l'égalité $\varphi(f\circ X) = f(\varphi(X))$, pour toute fonction affine strictement croissante f. À cet égard, on s'arrête un instant sur la question suivante.

La question qui m'interpelle provient d'un exercice de statistique fait avec ma classe. L'énoncé de cet exercice est le suivant : « Les Anglo-saxons utilisent le degré Fahrenheit comme unité de mesure de température, alors que nous utilisons le degré Celsius. Lorsqu'un nombre T exprime une température en degrés Fahrenheit, si le nombre t exprime la même température en degré Celsius, alors la relation $T = 1,8\ t + 32$ est vérifiée. Dans une ville anglaise, on a relevé la température extérieure, pendant le mois de décembre. Ces mesures forment une série statistique de température moyenne 35,87 ºF et de médiane 44,78 ºF.Peut-on en déduire la médiane et la moyenne de la série des mesures qu'on aurait obtenues si l'on avait utilisé un appareil gradué en degrés Celsius ? (On justifiera sa réponse, et on déterminera cette médiane et cette moyenne si cela est possible.) » Comment expliquer à un élève, si une question

> est soulevée, que l'on utilise ici la linéarité de la moyenne, mais que l'application qui associe 1,8 t + 32 à t n'est pas linéaire ? (AI, JT, 2de, 19)

La propriété notée $\varphi(f\circ X) = f(\varphi(X))$, qui s'écrit en l'espèce $\varphi(aX + b) = a\varphi(X) + b$, est appelée traditionnellement « propriété de linéarité ». On trouve une explication de cette appellation dans les notes de la séance 22 du séminaire de l'année 2001-2002 : on la reproduit ci-après.

> ① L'expression « fonction ***linéaire*** » a été longtemps utilisée, en français, pour désigner toute fonction de la forme $x \mapsto ax + b$ et donc pour désigner ce que nous nommons, lorsque $b \neq 0$, une fonction ***affine***. Les auteurs d'un manuel de 3e publié en 1940 écrivaient ainsi :
>
> **63. Théorème.** – ***La fonction y = ax + b est représentée graphiquement par une droite parallèle à la droite y = ax et coupant l'axe* Oy *au point d'ordonnée b.***
>
> C'est pourquoi la fonction $y = ax + b$ est aussi appelée *fonction linéaire*.
>
> Dans la pratique, on parlait cependant tout aussi couramment de « la fonction $y = ax + b$ ». L'emploi de l'adjectif *linéaire* (pour « affine ») reste usuel en anglais : on a vu plus haut un auteur d'aujourd'hui parler d'une température T_E qui « depends linearly on the ambient temperature T_A ». Et il en existe un vestige dans ce commentaire du programme de 2de, où « non-linéarité » signifie « non-affinité » :
>
> Exemples de non-linéarité. En particulier, on fera remarquer que les fonctions carré, inverse, … ne sont pas linéaires.
>
> ② Dans le cas de la « linéarité de la moyenne », l'usage du mot « linéarité » relève de cette tradition lexicale ancienne. Mais il n'est pas nécessaire – et il serait maladroit – de le remplacer par « affinité ». Lorsque, en effet, une série statistique s'écrit sous la forme $(\lambda x_i + \mu)_i$, on peut poser $y_i = 1$ pour tout i ; comme $\overline{(y_i)_i} = 1$, on a alors : $\overline{(\lambda x_i + \mu)_i} = \overline{(\lambda x_i + \mu y_i)_i} = \lambda\overline{(x_i)_i} + \mu\overline{(y_i)_i} = \lambda\overline{(x_i)_i} + \mu$.

d) Le quatrième niveau de mesure fait retrouver la notion usuelle de « grandeurs mesurables ».

1) Cette fois, le caractère X est défini à une transformation *linéaire* près, définie par $f(x) = ax$, avec $a > 0$. On suppose donc qu'il existe, en quelque sorte, un « zéro absolu » : seule l'unité de mesure est laissée au choix de l'utilisateur.

2) Les échelles correspondantes sont dites échelles *de rapport*, pour cette raison que le rapport des valeurs est conservé, puisqu'on a : $\frac{f(x')}{f(x)} = \frac{ax'}{ax} = \frac{x'}{x}$. C'est uniquement dans ce cas-là que l'on peut dire que « ω' a un *X deux* fois plus gros que celui de ω » – alors qu'on ne peut pas dire, par exemple, que la température d'aujourd'hui est le double de celle d'il y a dix jours.

3) Les notions de mode, de médiane, de moyenne sont définies à ce niveau. Mais elles l'étaient déjà au niveau précédent : il est donc peu judicieux, on l'a dit, de distinguer fortement entre grandeurs « mesurables » et grandeurs « repérables ». Appelant *quantitatifs* les caractères définis au niveau des échelles *de rapports*, certains parlent à propos de ceux relevant du niveau des échelles *d'intervalles* de caractères « pseudo-quantitatifs », ce qui est déjà un peu plus juste, au double sens de ce terme.

4) Ce qui devient disponible à ce niveau est le *coefficient de variation*, quotient de l'écart type par la moyenne : $CV(X) = \frac{s(X)}{\bar{X}}$. Pour $a > 0$, on a en effet : $CV(aX) = \frac{s(aX)}{a\bar{X}} = \frac{as(X)}{a\bar{X}} = \frac{s(X)}{\bar{X}} = CV(X)$.

2.4. Questions sur l'esquisse de PER de statistique

a) À la suite de la présentation, lors de la séance 19, du scénario de l'amorce d'un PER de statistique conçu pour une classe de 3e n'ayant pas encore, à ce moment de l'année, engagé le travail sur la statistique, les participants avaient été invités à mettre par écrit « les principales questions que soulève pour eux ce document ». On examine dans ce qui suit une partie des questions formulées à cette occasion, en commençant par la question suivante.

Une des difficultés soulevées par le PER est celle de la gestion du temps. (GC, CD)

Cette interrogation appelle au moins une remarque *quantitative* : le scénario proposé couvre *une* période en classe, ainsi que le lancement de la suite du travail à réaliser lors d'une séance ultérieure. Il ne couvre donc que le *démarrage* du travail consacré au secteur d'études de la statistique en 3e – lequel ne saurait se réduire à *deux* périodes en classe !

b) Une meilleure compréhension de ce qu'est un PER se dessine en filigrane derrière les questions que voici.

1. Le PER doit-il nécessairement faire travailler les différentes notions (moyenne, étendue, mode…) sur la statistique ? (AI, DR)
2. En quoi ce PER n'est-il pas une AER ? (DC, RD)
3. En quoi les différentes situations proposées constituent-elles des activités différentes ? (GC, CD)
4. En quoi les différentes activités du PER apportent-elles des éléments nouveaux ? (GC, CD)
5. Est-ce que ce PER peut-être étendue à d'autres parties que la statistique ? (DC, RD)

1) Le PER amorcé devrait en effet, par son développement au-delà de la séance visée, être capable de faire rencontrer et de faire travailler l'ensemble des praxéologies statistiques figurant au programme de 3e.

2) Une AER vise en principe à faire rencontrer un élément praxéologique bien déterminé – par exemple la tangente d'un angle, l'élagage d'une série statistique, etc. Un PER, au contraire, doit ouvrir une voie principale large qui permettra – presque à volonté – l'ouverture de voies secondaires plus étroites, conduisant à rencontrer tel ou tel élément de connaissance déterminé. Dans un PER de statistique, « on fait de la statistique » avant que de viser la rencontre avec telle ou telle notion précise. Un PER est un dispositif qui doit constituer un « écosystème didactique » où les différentes praxéologies à étudier trouveront une niche, niche que l'on ira explorer dans le cadre d'autant d'AER particulières que nécessaires. Bien entendu, il se peut qu'un PER ne suffise pas à une étude exhaustive d'un secteur d'études : on n'hésitera pas alors à ouvrir un *second* parcours d'étude et de recherche, en partant d'une autre question inaugurale.

3) Dans le scénario examiné, on enchaîne une présentation emmenée par le directeur d'étude (en interaction avec les élèves) avec, regroupées en trois *études statistiques* successives, des AER dont chacune est rendue possible par ce qui la précède. La première AER, qu'on peut désigner par le code ES_{11} par exemple, peut être présentée ainsi :

Voici les notes obtenues par les 28 élèves d'une classe de 3e lors d'un DS : 15 ; 13 ; 11 ; 9 ; 4 ; 11 ; 13 ; 18 ; 9 ; 10 ; 14 ; 17 ; 13 ; 16 ; 11 ; 16 ; 12 ; 16 ; 9 ; 5 ; 13 ; 19 ; 16 ; 0 ; 9 ; 16 ; 11 ; 7. On dira qu'une note obtenue à ce DS est satisfaisante si elle est supérieure ou égale à au moins 50 % des notes. La note 11 est-elle satisfaisante ? Quelle est la plus petite note satisfaisante ?

La deuxième AER, ES_{12}, est sur le même modèle, mais avec *un* changement.

Voici les notes obtenues par les 28 élèves d'une classe de 3e lors d'un DS : 15 ; 13 ; 11 ; 9 ; 4 ; 11 ; 13 ; 18 ; 9 ; 10 ; 14 ; 17 ; 13 ; 16 ; 11 ; 16 ; 12 ; 16 ; 9 ; 5 ; 13 ; 19 ; 16 ; 0 ; 9 ; 16 ; 11 ; 7. On dira qu'une note obtenue à ce DS est excellente si elle est supérieure ou égale à au moins 90 % des notes. Quelle est la plus petite note excellente ?

• Ces deux AER ont pour objet de faire émerger tout à la fois un type de tâches (« Étant donné une série statistique de longueur n et un pourcentage k %, déterminer la plus petite valeur de cette série supérieure ou égale à au moins k % des valeurs de la série »), une technique (« On détermine le premier entier supérieur ou égal $k \% \times n$: la plus petite valeur cherchée est celle qui, dans la série des valeurs rangée par ordre croissant, a pour numéro cet entier ») et les notions technologiques sans lesquelles ni le type de tâches, ni la technique ne peuvent être pensés.

• La troisième AER, ES_{13}, conforte ces créations praxéologiques, et participe déjà du travail de l'organisation émergente ; on peut la formuler ainsi.

Voici les notes obtenues par les 28 élèves d'une classe de 3e lors d'un DS : 15 ; 13 ; 11 ; 9 ; 4 ; 11 ; 13 ; 18 ; 9 ; 10 ; 14 ; 17 ; 13 ; 16 ; 11 ; 16 ; 12 ; 16 ; 9 ; 5 ; 13 ; 19 ; 16 ; 0 ; 9 ; 16 ; 11 ; 7. On dira qu'une note obtenue à ce DS est remarquable si elle est supérieure ou égale à au moins 70 % des notes. Quelle est la plus petite note excellente ?

4) Les trois études statistiques proposées dessinent une progression.

• Dans la première (« Un devoir en classe »), la série statistique est fournie et elle est même à l'origine des questions étudiées. Par ailleurs, elle est assez courte pour que le travail exigé puisse se faire facilement « à la main », même s'il est l'occasion – suscitée par une proposition *imaginée* – de mettre en jeu le tableur.

• Dans la deuxième (« Une épreuve académique de mathématiques »), on retrouve en partie le schéma précédent : une série statistique est donnée directement sur une feuille de calcul et elle est à nouveau à l'origine des questions étudiées. Ces questions sont relatives au type de tâches déjà rencontré. L'objectif didactique est ici, essentiellement, le travail de l'organisation praxéologique mise en place : on vérifie que, moyennant l'usage du tableur, la technique mise au point dans la première étude statistique « résiste » à une augmentation sensible – de 28 à 794 – de la taille de la série étudiée.

• La troisième étude amorce un changement plus fort – même si l'on n'en est pas encore à confier aux élèves la conduite en autonomie didactique d'une étude statistique de A à Z. Jusque-là, la population Ω et le caractère X étaient donnés, c'est-à-dire imposés. Ici, il n'en est rien : on se réfère à une population *floue* – les phrases écrites par des journalistes ayant une écriture « de qualité »… – et à un caractère dont la définition n'est guère plus précise – la *longueur* desdites phrases. La technique plus large à mettre en œuvre est présentée sans détour, dans le scénario, à travers l'indication suivante – ce qui ne préjuge *nullement* du mode d'émergence de cette technique dans la classe.

L’idée est de prendre un corpus de textes parus dans la presse et de compter la longueur de chacune des n phrases figurant dans ce corpus. Disposant alors d’une série de n nombres, on recherchera pour quelle longueur ℓ les phrases de longueur inférieure ou égale à ℓ constituent *au moins*, par exemple, 80 % de l’ensemble des phrases.

Cela noté, le corpus de textes a été préparé par le directeur d’étude : cette fois-là au moins, la classe n’a pas à le constituer *motu proprio*. En revanche, il lui revient :

– d’identifier les différentes phrases ω qui le composent ;

– de mettre au point tout à la fois une définition de la longueur $X(\omega)$ d’une phrase ω et une technique de calcul de $X(\omega)$;

– de constituer la série des n longueurs $X(\omega)$ dans une forme appropriée (sous la forme d’une colonne dans une feuille de calcul, en l’espèce).

Chacune de ces opérations comportent des difficultés spécifiques, sur lesquelles on s’appesantira plus ou moins : si l’on peut ne pas être trop exigeant sur la première opération, on sera plus attentif à la deuxième et plus encore à la troisième. Au-delà, la classe retrouve un univers rendu familier par le travail réalisé dans les deux premières études statistiques.

5) Bien entendu, la progression amorcée n’est nullement terminée. On pourra par exemple, en utilisant judicieusement le temps et l’espace de l’étude, demander à la classe de reprendre la troisième étude statistique en constituant (collectivement) un autre corpus d’articles – prélevé par exemple dans tel autre quotidien « de qualité », etc. On devra ensuite lancer des études sur d’autres questions exigeant de parcourir toutes les étapes évoquées (et, pour certaines, effectivement réalisées).

6) Il va de soi qu’on pourra de même lancer un ou des PER dans chacun des autres secteurs ou domaines d’étude du programme : un PER de géométrie dans l’espace, par exemple, devra permettre à la classe de « faire » de la géométrie dans l’espace avant même d’engendrer des questionnements conduisant de façon plus ou moins directe vers telle ou telle notion « au programme ».

c) Des questions portent sur le rapport entre le contenu de l’amorce de PER décrite dans le scénario et les notions de statistique figurant au programme.

1) La question suivante soulève directement une telle interrogation.

Ce PER répond-il à un type de tâches (ou plusieurs) au programme de la classe de 3^{e} ? (AC, MT)

La réponse est évidemment positive, comme le montre l’examen du programme – reproduit ci-après – relatif au secteur de la statistique. On y notera tout particulièrement le commentaire suivant, qui montre que le travail réalisé est bien au cœur de la construction de connaissances attendue par le programme : « On repère, en utilisant effectifs ou fréquences cumulées, à partir de quelle valeur du caractère on peut être assuré que la moitié de l’effectif est englobée. Les exemples ne devront soulever aucune difficulté au sujet de la détermination de la valeur de la médiane. » On remarquera que le secteur d’études est scindé en trois thèmes (marqués formellement ci-après) : l’entame de PER examinée concerne les thèmes 1 et 3, non le thème 2, sur lequel on reviendra.

La statistique en 3^{e} : programme

Contenus 1

Caractéristiques de position d'une série statistique

Compétences exigibles 1

Une série statistique étant donnée (sous forme de liste ou de tableau, ou par une représentation graphique), proposer une valeur médiane de cette série et en donner la signification.

Commentaires 1

Il s'agit essentiellement d'une part, de faire acquérir aux élèves les premiers outils de comparaison de séries statistiques, d'autre part de les habituer à avoir une attitude de lecteurs responsables face aux informations de nature statistique.
On repère, en utilisant effectifs ou fréquences cumulées, à partir de quelle valeur du caractère on peut être assuré que la moitié de l'effectif est englobée. Les exemples ne devront soulever aucune difficulté au sujet de la détermination de la valeur de la médiane.

Contenus 2

Approche de caractéristiques de dispersion d'une série statistique

Compétences exigibles 2

Une série statistique étant donnée, déterminer son étendue ou celle d'une partie donnée de cette série.

Commentaires 2

L'étude des séries statistiques ayant même moyenne permettra l'approche de la notion de dispersion avant toute introduction d'indice de dispersion.

On introduira l'étendue de la série ou de la partie de la série obtenue après élimination de valeurs extrêmes.

On pourra ainsi aborder la comparaison de deux séries en calculant quelques caractéristiques de position et de dispersion, ou en interprétant des représentations graphiques données.

Contenus 3

Initiation à l'utilisation de tableurs-grapheurs en statistique

Compétences exigibles 3

$\varnothing$

Commentaires 3

Les tableurs que l'on peut utiliser sur tous les types d'ordinateurs permettent, notamment en liaison avec l'enseignement de la technologie, d'appliquer de manière rapide à des données statistiques les traitements étudiés.

Accompagnement du programme de 3^{e} (extrait)

En classe de 3^{e}, il s'agit d'aider les élèves à franchir une nouvelle étape dans le développement de leur autonomie de jugement à propos d'informations qui peuvent être nombreuses. Dans le cas d'un regroupement en classes, les choix effectués peuvent avoir des effets sur les résultats numériques ou les représentations graphiques et leurs interprétations.
En classe de 4^{e}, on a pu observer que « la moyenne d'une population dont les éléments sont rangés par ordre croissant ne sépare pas ceux-ci, en général, en deux parties de même effectif », ce qui justifie l'introduction de la médiane en classe de 3^{e}. Les élèves disposent alors de deux indicateurs de la tendance centrale d'une population, leur position relative pouvant faire l'objet d'une interprétation dans des situations appropriées.
La nécessité de distinguer deux séries statistiques de même tendance centrale justifie l'intérêt de la notion de dispersion. Dans ce premier contact, le programme se limite à l'étendue d'une série statistique ou à l'étendue d'une partie donnée de celle-ci ; cela permet, sans difficulté technique, de familiariser les élèves avec une démarche habituelle en statistique : procéder à une synthèse de l'information sous la forme de nombres mesurant respectivement la position et la dispersion de la série étudiée.

2) Éclairante, la question ci-après met le doigt – discrètement – sur un certain manque d'habitude s'agissant de saisir *fonctionnellement* (quoique implicitement) les notions mises en jeu – *effectifs cumulés, médiane* et autres *quantiles*.

Pourquoi ne pas travailler avec la moyenne (ou la médiane) ? (GB, MEK, MK)

• Il devrait être clair, maintenant, que l'on travaille bien, dans cette amorce de PER, avec la médiane. Mais on ne procède pas avec une notion de médiane introduite *ex abrupto* : on laisse la notion émerger et s'imposer fonctionnellement, avant de la définir formellement – plus tard.

• Il devrait être non moins clair que la *moyenne* n'a rien à faire ici : son apparition dans ce cadre de travail aurait toutes chances d'être *forcée,* sans lien *fonctionnel* avec les questions que l'on étudie.

3) Dans la ligne précédente, la question que voici suggère l'usage d'une technique – l'élagage – et d'une notion – la moyenne élaguée – dont le besoin n'apparaît pas davantage dans ce qui est fait en ce début de PER.

Peut-on parler d'améliorer, d'affiner les résultats à l'aide de la moyenne élaguée (*i.e.* en supprimant les valeurs extrêmes) ? (GB, MEK, MK)

4) L'abord fonctionnel – et donc silencieux, à bas bruit – des notions du programme mis en œuvre dans le PER s'oppose frontalement à une conception « occasionnaliste » de l'enseignement où le problème étudié serait regardé à travers le filtre pas nécessairement approprié de « notions toutes faites » qu'il s'agirait d'importer dans son étude, soit parce que ces notions sont supposées déjà disponibles, soit parce qu'elles sont au contraire « à enseigner ». La question ci-après illustre peut-être cette problématique scolairement classique, mais inauthentique au plan épistémologique, et dont il faut donc s'éloigner dans toute la mesure du possible.

Pourquoi ne pas caractériser le mode (dans le PER de 3^{e}) ? C'est un critère qui donne également un ordre d'idée sur la série étudiée. On aurait pu faire un tableau récapitulatif des effectifs de chaque note et, à partir de ce tableau, représenter visuellement cette série : histogramme, diagramme circulaire, diagramme en bâtons, etc. (CC, AG, DV)

d) Plusieurs questions interrogent le scénario présenté à propos de choix qu'il renferme relevant plus *spécifiquement* de la statistique.

1) La question ci-après traduit une interrogation qui, en fait, est au cœur du travail amorcé dans le PER.

Ne serait-il pas pertinent d'inviter les élèves à s'interroger sur la relativité des questions exprimées de manière trop large (par exemple, ce bébé est-il gros ?) ? Ne faudrait-il pas les inviter à définir certains éléments indispensables tels que : par rapport à quelle population ? Dans l'exemple du joueur de foot, étudions-nous le cas sans distinguer le poste du joueur ou l'équipe ou le championnat sur lesquels nous allons nous appuyer pour répondre ? (DB, WB, LLL)

Le difficile problème de définir la population Ω et le caractère X ne commencera d'être rencontré qu'avec la *troisième* étude statistique : il sera au cœur de certaines de celles qui suivront (mais qui ne figurent pas dans ce scénario d'amorce d'un PER). En revanche, c'est *volontairement* qu'il est *neutralisé* dans les deux premières études proposées – même s'il n'est pas absent, fugitivement, de l'introduction au PER assumée par le professeur.

2) La question des qualificatifs usités n'a pas manqué d'être soulevée. Ainsi en va-t-il dans la question suivante.

> Ne devrait-on pas remplacer, par exemple, le critère « Satisfaisant » par « Note ≥ 90 % » ? En effet, ce critère est assez subjectif. On garderait alors des catégories « sup. à 90 % », etc. (CM, DP)

• Notons d'abord l'erreur vénielle commise (une note « satisfaisante » est telle que 50 % – et non 90 % – des notes au moins lui soient inférieures ou égales) et surtout l'imprécision des formulations adoptées (« Note ≥ 90 % » puis « sup. ≥ 90 % »), qui montre qu'il y là une *vraie difficulté d'expression* renvoyant à un *concept non trivial* à penser et à mettre en mots (une valeur supérieure ou égale à *au moins k* % des valeurs de la série).

• Quant au fond de la question, on doit souligner que l'utilisation de qualificatifs conventionnels *n'a pas, elle, été neutralisée*, et cela *volontairement*, afin de nourrir une réflexion – qui peut s'imposer durant la séance ou n'émerger que plus tard – sur le thème de *l'objectivité statistique* et de *l'arbitraire interprétatif*, en vue de faire entendre – à terme – que toute dénomination est à « excrire » et non à prendre à sa valeur faciale : on aurait pu dire aussi bien qu'une note supérieure ou égale à 60 % des notes est une note *de bouffon*, une note supérieure ou égale à 70 % des notes, une note *de ouf*, etc. Ou ne rien dire du tout, au prix de ne pas amorcer une interrogation essentielle sur la statistique et la construction du réel social et culturel qu'elle induit.

3) La question ci-après évoque plusieurs « difficultés » dont l'une au moins appelle un commentaire supplémentaire.

> Remarques sur le PER : 1) importance de l'échantillonnage ; 2) importance des conventions ; 3) procédure de *choix* des conventions ; 4) retour critique sur ce choix : la distribution fournit un critère objectif ; 5) Domaines de préoccupation des élèves (éléphants ?… Notes, *oui*. Foot. Fortune de Paris Hilton). (MD, JNM)

• La question de l'*échantillonnage*, sur laquelle on reviendra dans ce séminaire, devra émerger peu à peu comme *essentielle* (même si elle ne donne lieu à aucune formalisation). D'où la suggestion (faite plus haut) de reprendre (ou plutôt de poursuivre) la troisième étude statistique à propos cette fois d'un *autre* corpus d'articles, etc. Dans tous les cas, on se trouve devant deux types possibles de situations :

– ou bien on considère, comme on le fait dans les deux premières études proposées, que l'ensemble Ω sur lequel on connaît le caractère X est *la population* à laquelle on s'intéresse : on peut alors conclure de façon *sûre*, mais ces conclusions sont limitées strictement au couple (Ω, X) ;

– ou bien on s'intéresse à une population Ω qu'on ne peut guère connaître exhaustivement sous l'angle du caractère X et dont on étudie, faute de mieux, un ou plusieurs échantillons : les conclusions sur ces échantillons sont sûres, mais l'*inférence* à partir de là à la population Ω est un immense problème – celui de l'*inférence statistique* –, autour duquel s'est bâtie en grande partie la science statistique.

• Le choix de la question *Q* étudiée – le poids des éléphants, les joueurs de football et les buts qu'ils marquent, les notes des élèves, les revenus de telle *celebrity* – est certainement une variable didactique non dénuée d'effets. Dans un premier temps, le PER choisit à cet égard une réalité familière et « chaude » pour les élèves, les notes. Dans un second temps, la question proposée porte sur une réalité *censée* susciter l'intérêt d'*une* élève (et d'un élève qui accepte de l'accompagner dans l'aventure) : on s'éloigne déjà des intérêts « spontanés » – ou supposés tels – des élèves. Mais il faudra bien que, à la fin des fins, toute complaisance bue, la classe apprenne à s'engager dans l'étude d'une question *Q quelle qu'elle soit*, et à ne plus voir dans cette étude que les difficultés à vaincre – dont certaines ont été épinglées plus haut – pour parvenir à une réponse *R* solide. Pour le dire plus directement, il faudra que l'on devienne capable – psychologiquement – d'étudier la question du poids des bébés ou celle des buts marqués par les joueurs de football, indépendamment de ses « goûts », indépendamment du fait que l'on est fille ou garçon, etc.

e) D'autres questions portent sur certains moments de l'étude ou sur la direction de l'étude. On les énonce ici : nous y reviendrons lors de la séance prochaine.

1. Où est la recherche ? Où sont les questions cruciales ? (PL, RR)
2. Sur les questions posées en début de PER, peut-il être intéressant d'en faire formuler par les élèves ? (MG, SP, NP)
3. Peut-on demander aux élèves de faire le bilan de l'étude en travail hors classe avant de le faire en classe ? (FE, CM)
4. Quelle synthèse peut-on bâtir avec les éléments observés sur le PER de statistique ? (GB, JG)
5. Y a-t-il une synthèse complémentaire au travail sur la longueur des phrases par rapport au travail sur les notes ? (AC, MT)
6. Comment insérer les moments d'institutionnalisation portant sur des notions « générales » (médiane, etc.) ? (NA, LN, AS)

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 21: mardi 21 mars 2006 & mardi 4 avril 2006

0. Programme de la séance

→ Mardi 21 mars (17 h 15 – 18 h 45)

1. Forum des questions : exposés du jour // 2. Forum des questions : poursuites & anticipations // 3. Forum des questions : exposés à venir.

1. Forum des questions : exposés du jour

1.1. Angles et radians

a) On écoute un exposé de *JB* sur la question suivante :

Exposé 28. Pourquoi utilise-t-on le radian en mathématiques ?

b) Remarques et commentaires

1.2. Effet Pygmalion et autres effets

a) On écoute un exposé de *PL* sur la question suivante :

Exposé 29. En quoi les attentes formulées à l'endroit des élèves influent-elles sur leurs performances scolaires ?

b) Remarques et commentaires

1.3. Programmes de calcul et calcul algébrique

a) On écoute un exposé d'*AI* sur la question suivante :

Exposé 26. Qu'est-ce que l'expression algébrique d'un programme de calcul ? Pourquoi peut-on dire que le calcul algébrique est un calcul sur les programmes de calcul ?

b) Remarques et commentaires

2. Forum des questions : poursuites & anticipations

2.1. Praxéologies didactiques professorales

a) On part de la question suivante.

Dans une organisation praxéologique didactique, que pourraient être des techniques et des technologies ? (DC, OS, 2de, 18)

1) On trouve dans les notes de la séance 3 du séminaire de l'année 2000-2001 les développements suivants.

⇨ ***Organisations didactiques***

A. Étudier une question

– La ***réponse R*** à une ***question Q*** prend d'une manière générale la forme d'une ***organisation praxéologique*** (ou d'un fragment d'une telle organisation) : si, par exemple, la question posée est du type « Comment accomplir les tâches du type T ? », une réponse R sera une praxéologie ponctuelle : $R = [T/\tau/\theta/\Theta]$.

– L'***étude*** d'une question Q est le processus par lequel on s'efforce de construire une organisation praxéologique qui soit une réponse R à la question Q : on parle alors de ***processus didactique***.

– Lorsqu'un type de tâches T a trait à ***l'étude d'une question*** Q, on dit que les tâches du type T sont des tâches ***didactiques*** : les praxéologies qui peuvent être construites autour de T, $[T/\tau_\ell/\theta_\ell/\Theta_\ell]$, sont alors appelées ***organisations didactiques*** (OD)

– Un type de tâches T n'est pas, en général, ***intrinsèquement didactique*** : il n'est didactique que si sa mobilisation procède d'une ***intention didactique***, c'est-à-dire vise à instrumenter l'étude d'une ou plusieurs questions. C'est ainsi que la plupart des organisations ***mathématiques*** assument dans la classe de mathématiques une fonction ***d'outil d'étude*** de questions de mathématiques, et doivent donc être comptées au nombre des organisations ***didactiques***.

B. Praxéologies professorales

– La pratique du professeur l'oblige à se poser une foule de questions, et notamment des questions Q_T du type « Comment accomplir les tâches du type T ? », où T est un type de tâches didactiques.

– Un professeur débutant P devrait idéalement pouvoir répondre ***à toutes ces questions Q_T à la fois***, c'est-à-dire construire, ***simultanément et de manière quasi instantanée***, des praxéologies $[T/\tau/\theta/\Theta]$.

– De fait, sauf à différer l'accomplissement des tâches du type T, P va apporter *de facto* des réponses personnelles $R_P = [T/\tau_P/\theta_P/\Theta_P]$ dont les composants τ_P, θ_P, Θ_P seront plus ou moins précisés : ce sont ces réponses premières, R_P, que P, étudiant à nouveaux frais les questions Q_T, devra accepter de ***déconstruire*** pour les ***reconstruire*** à l'aide notamment des matériaux apportés par la formation.

– La (re)construction par P d'une réponse $R = [T/\tau/\theta/\Theta]$ se fait dans tous les cas sous une multitude de contraintes aussi bien « pratiques » que « théoriques », dont bien sûr des contraintes de ***motivation*** de T (pourquoi accomplir des tâches du type T ?). Dans ce processus de construction, il conviendra donc notamment

- d'identifier les couples (T^*, τ^*) qui motivent véritablement T, pour les examiner de manière ***critique et inventive*** (la technique τ^*, qui motive T, est-elle la seule et la meilleure possible ?) ;
- de soumettre la technologie θ à un ***examen critique*** attentif, car, en matière d'enseignement, le « prêt-à-penser » est omniprésent ;
- de tirer profit de la liberté de penser ainsi gagnée pour ***modifier la technique*** τ, tout en s'imposant de ***justifier*** la technique $\tau^\#$ nouvellement mise au point par une technologie $\theta^\#$ la plus sûre possible.

2) Lors de la séance suivante du séminaire de l'année 2000-2001, ce développement est repris, résumé, commenté. On lit notamment ceci dans les notes correspondantes.

La pratique du professeur P ***l'oblige à répondre*** à une foule de questions, et notamment à des questions Q_T du type

« Comment accomplir les tâches du type *T* ? »

où *T* est un type de tâches ***didactiques***, motivé par la ***direction d'étude*** que P doit assumer, plus ou moins proche des contenus à enseigner :

– « Comment organiser une progression sur l'année ? »

– « Comment remplir le cahier de textes de classe ?
– « Comment gérer la mémoire de la classe ? »

– « Comment introduire le théorème de Pythagore ? »

3) Lors de cette même séance 4, on trouve encore ceci.

⇨ ***À propos de la question*** **« Pourquoi rejeter les révisions ? Et comment alors gérer la mémoire de la classe ? »**

– Il y a ici deux questions distinctes :

• la première, « Pourquoi rejeter les révisions ? », est une question de ***technologie didactique***, à propos de la ***motivation*** (ou plutôt de l'***immotivation***) d'un certain type de tâches (« faire des révisions ») ;

• la seconde, « Comment gérer la mémoire de la classe ? », est une question de ***technique didactique***, à laquelle il convient de répondre sous le contrôle d'une technologie didactique à préciser.

– Le texte intitulé *De l'ancien au nouveau : révisions, reprises, transitions* (fichier Révisions et reprises.doc) apporte les matériaux suivants pour répondre à la ***première question*** :

• les contrats didactiques modernes postulent que ***l'avancée dans le savoir à étudier*** ne doit pas – officiellement – modifier ***le savoir antérieurement étudié***, en sorte que « ce que je sais ou crois savoir aujourd'hui » ne puisse « demain se révéler *faux* ou, du moins, inadéquat », que, par exemple, il ne puisse se faire que je découvre demain « qu'une équation du second degré peut posséder *plus* de deux racines distinctes, ou que la dérivée de ln *x n'est pas toujours* $\frac{1}{x}$ » ;

• or la « révision » d'un savoir déjà étudié peut toujours porter en elle la possibilité d'une ***modification*** – plus ou moins subreptice – ***de ce savoir*** ; en conséquence, ce qui a été étudié ***ne devra plus être « touché »***, et le savoir ancien ne doit plus être un ***enjeu didactique entre la classe et le professeur*** (bien qu'il puisse être un enjeu didactique ***personnel*** pour l'élève, qui peut vouloir le retravailler ***pour son propre compte***) ;

• la clause d'***intangibilité du savoir ancien*** assure une fonction de ***protection*** – psychologique mais surtout didactique – ***de l'élève*** : sans prise sur un avenir qu'il voit le professeur façonner à son gré, l'élève veille avec une sensibilité parfois exacerbée à ce que le professeur, du moins, ***ne touche pas au passé*** ;

• la tentation de « faire des révisions » assaille d'autant plus le professeur « débutant » (dans une classe de tel type ou de tel niveau) que, n'ayant jamais créé de temps didactique dans une classe de ce type ou de ce niveau, il appréhende – non sans raison – de le faire : l'idée opportuniste de travailler sur « du temps didactique *créé par d'autres* » s'impose alors à lui parce qu'elle permet, avec la conscience tranquille, et parfois un joli mouvement du menton, de différer l'instant fatidique où il faudra assumer la fonction « chronogène » du professeur.

– Sur la deuxième question, les matériaux suivants sont proposés :

• dans le cas examiné, celui de la ***reprise de l'étude d'un thème*** θ déjà étudié dans la classe précédente, il convient d'abord d'identifier avec soin les aspects ***nouveaux*** du thème θ, qui constituent les seuls ***enjeux didactiques légitimes*** ;
• sur les aspects ***récents mais passés*** du thème, le professeur aidera les élèves à faire un bilan de leur besoins d'étude, et cela par un bref ***test d'entrée dans l'étude du thème*** ;
• il pourra alors les aider à effectuer le travail spécifique dont le test d'entrée aura révélé l'utilité, et cela dans divers dispositifs didactiques (travail personnel hors établissement, atelier de mise à jour, module, etc.), dont ***aucun ne devra faire avancer le temps didactique*** ;
• cela fait (ou non, selon les cas), le professeur pourra diriger (en classe entière ou en groupe) un travail transitionnel sur le thème θ à étudier, et cela afin de ***rassembler la classe*** autour de θ – avant de démarrer véritablement l'étude des aspects nouveaux du thème.

b) La question suivante soulève le problème précédemment évoqué dans un cas particulier.

Dans le cadre d'une organisation didactique, nous avons rencontré le type de tâches *T* « Élaborer la réciproque du théorème de Thalès ». La technique τ associée à *T* doit alors être :

∗ motiver le théorème par une tâche ✓ résolue par une technique τ' justifiée par le théorème ;

∗ le tester dans l'espace sensible ;

∗ le démontrer dans la TGD.

Existe-t-il d'autres techniques associées possibles ? Quelle peut-être la technologie associée ? (DC, OS, 2de, 19)

1) Un correctif d'abord : « Élaborer la réciproque du théorème de Thalès » *n'est pas* un *type* de tâches *T*, mais une tâche d'un certain *type*, lequel peut être par exemple « Élaborer la réciproque d'un théorème ». Notons que, dans la mesure où l'on parle d'un *théorème*, la propriété directe correspondante a été *démontrée* ; en conséquence, pour la déduire dans la TGD, on pourra utiliser le théorème direct – ici le théorème de Thalès –, ce qui est un élément technique souvent crucial en géométrie élémentaire.

2) Une certaine technique d'enseignement « classique » consiste à supprimer les deux premières étapes mentionnées dans la question, et donc 1) à laisser immotivée la propriété réciproque, 2) à faire l'économie d'un travail expérimental établissant la *vérité* dans l'espace sensible de la propriété que l'on se contente alors de « démontrer » (c'est-à-dire de déduire des théorèmes connus). Notons que cette économie ne fait rien gagner si l'on adopte une technologie de l'étude conforme aux canons de la science : la propriété une fois établie dans la théorie, il reste en principe à la valider par une *vérification expérimentale* – qui donc peut venir *après*.

3) Lors de la séance 17 de ce Séminaire, on a évoqué, par l'entremise d'un extrait des archives, une technique didactique alternative à celle évoquée dans la question, et qui rejoint la remarque précédente.

① Cette interrogation peut avantageusement prendre sa place dans un ***PER*** englobant qui pourrait s'intituler ***« La réciproque est-elle vraie ? »***. Un tel PER, qui se développera à travers ***tous les domaines*** du programme d'études de la classe, donnera ainsi une place contrôlée, dans la culture didactico-mathématique de la classe, au type de situations dans lesquelles on est amené à établir, ***pour des raisons formelles*** – « la réciproque est-elle vraie ? » –, des énoncés technologiques dont plusieurs pourront demeurer ***en attente d'utilisation***.

2.2. Moments de l'étude : la dévolution

a) Le premier moment, celui de la rencontre avec un type de tâches *T*, soulève un problème conceptuel qui est un problème de technologie didactique.

1. La « dévolution d'une notion à la classe » est une notion que je n'arrive pas à appréhender. La lecture des séminaires des années passées et de cette année ne me permet d'avancer dans le travail sur le TER. (GB, OS, 2^{de}, 19)

2. Après avoir cherché dans les anciens séminaires, je n'étais toujours pas compris la notion de « dévolution ». Pourrait-on avoir une explication sur ce terme ? (MK, OS, 2^{de}, 19)

b) Que trouve-t-on dans les archives du séminaire à propos du mot *dévolution* ? On se limitera ici à l'année 2000-2001.

Séance 5

– En conséquence, il n'y a pas véritablement de ***dévolution*** de la question *Q* aux élèves : ceux-ci n'ont pas la responsabilité de son étude, et peuvent se contenter de s'investir dans les tâches parcellaires (« Construire l'image… ») que l'énoncé a découpées à leur intention.

– Plus généralement, les choix didactiques faits et consignés dans l'énoncé ne résultent pas d'un travail collectif de la classe quant à la manière d'étudier la question *Q* (ce qui eût sans doute permis une meilleure dévolution de cette question).

Séance 12

• La dévolution aux élèves de ce problème prend appui, sans commentaire, sur leur familiarité culturelle supposée avec un type de problèmes plus large, central dans le ***secteur*** des ***fonctions***, celui de ***l'évaluation des fonctions*** : « étant donné une fonction f (dont on sait telle et telle choses), déterminer $f(x_1)$, $f(x_2)$, … » (où x_1, x_2, …, sont des nombres déterminés).

Séance 14

– S'agissant de la tâche particulière $t \in T_M$ à accomplir, on doit noter que sa dévolution est conditionnée, au niveau 1, par ***l'usage presque exclusif de l'écrit dans la classe de mathématiques***, même quand le problème porte sur un ***système « matériel »***. Cette dévolution, qui se fait donc par le biais d'un énoncé écrit de manuel ***et de cela seulement***, aurait pu par exemple s'opérer par la présentation de ***l'objet même*** à propos duquel le problème est posé : la maquette que l'énoncé du manuel ne fait qu'***évoquer***. La présentation ***effective*** d'une boule de 24 cm de diamètre eût permis de donner du relief au fait que, si l'on a fixé le diamètre du Soleil, ***toutes*** les autres dimensions (distances, diamètres) sont déterminées, comme le suggèrent les deux schémas ci-après (qui sont, eux, dessinés « à l'échelle »).

– Le ***travail de la technique*** σ_M se réalise non seulement dans l'épisode d'AER précédent, mais encore dans le ***travail hors classe***, sous la forme d'un problème dont l'énoncé est à consigner dans le cahier d'exercices et dont la dévolution se fait ***en fin de séance***.

c) *Faire dévolution aux élèves d'un certain problème*, c'est (réussir à) faire qu'ils se considèrent comme responsables de sa résolution, au lieu de se livrer à des tâches parcellaires impulsées par les consignes successives de l'enseignant (et non par la stratégie de résolution dans laquelle ils se seraient engagés). La difficulté à comprendre la notion de dévolution tient sans doute en grande partie au fait que, dans l'enseignement classique, l'élève n'est pas censé être responsable du « sort » du problème étudié, le professeur ne signifiant jamais aux élèves : « Je compte sur vous ! » Il y a donc ici une véritable « conversion » à opérer pour parvenir à une bonne maîtrise théorique et pratique de ce concept : le professeur ne pourra guère faire que les élèves se sentent responsables du problème étudié s'il n'imagine pas lui-même pouvoir leur confier cette responsabilité.

2.3. Raisons d'être

a) On prendra pour exemple la question suivante.

> Je n'arrive pas à trouver un manuel faisant apparaître la raison d'être des probabilités conditionnelles. En connaissez-vous ? (GB, MJ, 3e, 19)

b) La recherche des raisons d'être d'une notion (ou d'une technique, etc.) est un problème *épistémologique* avant que d'être un problème *didactique*. En conséquence, il doit être posé de façon *ouverte*, et en particulier sans se référer uniquement aux manuels du secondaire, qui sont souvent, on l'a dit, indigents à cet égard, pris qu'ils sont dans un processus historique de monumentalisation des savoirs (mathématiques) à enseigner.

c) Les participants au séminaire rechercheront des éléments de réponse à la question examinée, sur laquelle on reviendra lors de la prochaine séance.

3. Forum des questions : exposés à venir

3.1. Nombres relatifs. Pourquoi ? Comment ?

a) Un exposé présentera ce que contiennent les archives du Séminaire sur le sujet suivant.

Exposé 35. Quels besoins numériques motivent l'introduction des nombres relatifs ? Et comment organiser la rencontre des élèves avec ces nombres ?

b) Cet exposé est motivé en particulier par la question suivante :

> Dans le chapitre « Nombres relatifs : opérations » en 5e, comment motiver l'AER « Différence de deux nombres relatifs » ? Comment faire comprendre aux élèves, par exemple, que 4 – (–5) = 4 + 5 ? Je ne trouve pas d'explication pertinente. (AS, JT, 5e, 19)

c) Il sera proposé et présenté par *CM*.

3.2. Nombres relatifs et modélisation

a) Un exposé présentera ce que contiennent les archives du Séminaire sur le sujet suivant.

Exposé 36. Quels usages peut-on faire des nombres relatifs dans la modélisation de systèmes intra- et extramathématiques ?

b) Cet exposé est motivé en particulier par la question suivante :

> Dans le cadre de l'étude des équations de la forme $x^2 = a$ avec $a > 0$, j'ai trouvé une activité dont le problème était de trouver les températures, un certain jour de décembre, au Québec et en Tunisie, sachant que lorsqu'on élève chacune de ces températures au carré, on trouve la température d'ébullition de l'eau. Est-il judicieux d'utiliser la température, qui est une grandeur non mesurable, pour amener à l'équation $x^2 = 100$? L'intérêt pour moi de cette activité était le fait que la solution négative de

l'équation avait un sens, chose que je n'ai pas réussi à retrouver dans d'autres exercices utilisant d'autres grandeurs. (NP, CR, 3^{e}, 19)

c) Il sera proposé et présenté par *CR*.

→ Mardi 4 avril 2006 (9 h – 10 h 30)

0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions : poursuites & anticipations.

1. Forum des questions : poursuites & anticipations

1.1. À propos du PER de statistique

a) On s'arrête ici sur la question suivante.

Peut-on en cours de statistique en 4^{e} commencer à faire émerger le fait que la médiane est plus « intéressante » comme indicateur que la moyenne ? (MB, CR, 4^{e} + 4^{e} partagée, 20)

1) La question soulevée est d'abord l'occasion d'apporter quelques précisions sur l'histoire « moderne » de la notion de moyenne en statistique. La promotion historique de la notion de moyenne a été liée à une situation particulière : celle où la série statistique considérée est une série de *mesures* d'une certaine grandeur supposée *non variable*. Une telle situation surgit notamment en géodésie et en astronomie : c'est là que le problème va être posé.

2) Longtemps, l'attitude du « scientifique » devant une série de mesures x_1, x_2, …, x_n qu'il a obtenue (ou dont il dispose) fut celle décrite dans ce passage d'un ouvrage récent (Ken Alder, *Mesurer le monde*, Flammarion, 2005, p. 336) :

Pendant des siècles, les savants s'étaient cru autorisés à utiliser leur intuition et leur expérience pour publier comme seul résultat de la mesure d'un phénomène celui qui correspondait à leur « meilleure » observation. Au cours du XVIII^{e} siècle, ils en étaient venus à croire que la moyenne arithmétique de leurs mesures offrait l'aperçu le plus « équilibré » de leurs résultats. Pourtant, nombreux étaient ceux qui continuaient à penser (…) que toute mesure s'écartant trop de la moyenne comptait forcément moins que celles qui s'en rapprochaient le plus et que, de ce fait, il était possible de la supprimer sans prendre la peine de s'en excuser.

On voit ici que le recours à la moyenne n'est *nullement*, alors, un réflexe « culturel », comme cela semble être (ou risque d'être) le cas dans l'enseignement secondaire aujourd'hui ! La moyenne, ici, ne s'oppose pas à la médiane (par exemple) : c'est l'idée de « tendance centrale » qui s'oppose *en bloc* à l'idée de « meilleure mesure » (laquelle renvoie au néant les *autres* mesures).

3) Les extraits suivants de l'*Histoire de la statistique* de Jean-Jacques Droesbeke et Philippe Tassi (PUF, coll. « Que sais-je ? ») précisent à cet égard quelques points clés.

Le recours à des observations « nombreuses » d'une même quantité pour en estimer la valeur apparaît dans l'œuvre de Tycho Brahé (1546-1601) qui constitua un ensemble de données sur le mouvement des planètes tel qu'il permet à Képler de formuler ses lois sur le sujet (…). Il apparaît clairement que Tycho Brahé a recours à une *moyenne arithmétique* pour éliminer des erreurs d'observations. En 1722, Roger Cotes, dans une annexe de son ouvrage *Harmonia Mensurarum*, considère le problème de connaître la position exacte d'un point pour lequel il dispose de 4 observations qui ne sont pas toutes aussi fiables l'une que l'autre. Il propose dès lors d'utiliser une *moyenne pondérée* dont les coefficients sont inversement proportionnels à la « dispersion » des erreurs d'observations.

Les mêmes auteurs ajoutent ceci.

Signalons (…) que le premier à défendre l'usage de la moyenne arithmétique, en calculant sa distribution, semble être Thomas Simpson qui, en 1756, rédigea « A Letter to the Right Honourable George Earl of Macclesfield, President of the Royal Society, on the advantage of taking the mean of a number of observations in practical astronomy »…

Remarquons encore que la *médiane* voit naître son intérêt à la même époque, en 1757, sous la plume de Roger Joseph Boscovitch. Notons enfin que la *moyenne géométrique* et la *moyenne harmonique* ont été introduites par William Stanley Jevons en 1874…

4) Moyenne ou médiane répondent, dans le cas d'une série de valeurs observées, à un *même* type de critère : minimiser l'écart à la supposée « vraie valeur ». Les auteurs déjà cités précisent ce point dans les termes suivants.

Carl Friedrich Gauss propose, en 1816, l'usage de l'expression suivante pour mesurer les variations des erreurs de mesure en astronomie :

$$\varepsilon_k = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k\right)^{1/k}$$

où x_i désigne la valeur absolue de l'écart de la *i*-ième observation à la moyenne arithmétique, *n* est le nombre d'observations et *k* un nombre naturel. Nous retrouvons ainsi l'écart type $\sigma = \varepsilon_2$ préféré par Gauss à toutes les autres mesures alors que ε_1 avait reçu les faveurs de Laplace.

Comme on le sait, le choix de ε_2 conduisait à prendre pour indicateur de tendance centrale la *moyenne*, tandis que le choix de ε_1 conduirait à la médiane. Or, *s'agissant de la question examinée*, c'est Gauss « qui va gagner ».

5) Le point de vue ainsi développé, qui repose sur le postulat de l'existence d'une vraie valeur va en effet avoir un grand succès, non seulement dans l'étude de la nature mais aussi dans l'étude des sociétés. Sous l'influence d'un statisticien belge, astronome de formation (et de métier), Adolphe Quételet (1796-1874), on se mit à penser que, par exemple, la Nature s'efforçait de produire un homme « idéal » (dont une approximation était donnée par l'« Homme moyen », ayant pour taille la moyenne des tailles, etc.), mais que, à l'instar d'une machine produisant des objets, la machine-Nature produiraient des hommes réels s'écartant plus ou moins de ce « produit » idéal. Dans le passage suivant d'un article intitulé « Adolphe Quételet » paru dans le numéro 104 du *Courrier des statistiques* (décembre 2002), le statisticien Alain Desrosières écrit ceci.

Intéressé par l'astronomie, [Quételet] parvient, dans les années 1820, à convaincre l'administration du Royaume des Pays-Bas (la Belgique est néerlandaise jusqu'en 1830) de la nécessité de construire un observatoire astronomique à Bruxelles, sur le modèle de ceux qui existent déjà en France et en Angleterre. Pour préparer ce projet, il se rend à Paris pour quelques mois en 1823, afin de rencontrer les astronomes et les mathématiciens français : Alexis Bouvard, François Arago, Pierre Simon Laplace, Joseph Fourier, Siméon Denis Poisson. Ce séjour aura une importance décisive pour la suite de son histoire. En effet, il y découvre l'usage que ces savants font du calcul des probabilités pour contrôler les *erreurs de mesure* en astronomie. Le cœur de cette méthodologie mathématique a été formalisé par Carl Friedrich Gauss et Laplace, autour de trois notions étroitement reliées entre elles : 1) la distribution dite « *gaussienne* » (et plus tard « normale ») des erreurs de mesure d'une grandeur astronomique, 2) le choix de la *moyenne arithmétique* comme valeur la plus probable de la grandeur mesurée, et 3) la *méthode des moindres carrés* comme critère d'optimisation. Quételet a importé et popularisé, dans les « sciences de l'homme », les deux premières de ces notions, (la « courbe de Gauss » et la moyenne), tandis que la troisième (la méthode des moindres carrés) ne le sera qu'à la fin du XIX^{e} siècle par le Britannique Udny Yule (…). La « courbe de Gauss », supposée refléter la distribution des erreurs de mesure, est alors désignée comme « loi des possibilités ». Elle ne sera nommée « loi normale » qu'en 1894 par Karl Pearson (…).

6) Par la grâce de Quételet, la moyenne – utilisée en astronomie et en géodésie – va ainsi voir sa fortune singulièrement accrue : sa popularité lui donnera le statut de réflexe culturel dans toutes les affaires de la cité. Alain Desrosières explicite en ces termes l'aventure de l'« Homme moyen ».

À travers ce rapprochement entre deux domaines scientifiques en apparence différents, on trouve les deux caractéristiques essentielles de la statistique impulsée par Quételet durant toute sa vie : l'organisation des observations, et le traitement des « grands nombres » ainsi recueillis au moyen d'outils issus des sciences de la nature : la loi normale et la moyenne. De fait, le principal acquis du transfert ainsi effectué, à partir du voyage de Quételet à Paris, est la grande généralité des usages possibles de la distribution « gaussienne » postulée par les astronomes pour caractériser la dispersion de leurs erreurs de mesure. Cette distribution est supposée résulter de la combinaison d'effets nombreux, petits et indépendants les uns des autres. Mais l'originalité de ce transfert sera aussi de changer radicalement le statut épistémologique de la distribution « normale » (on utilisera ici par commodité cette appellation aujourd'hui courante, malgré son caractère anachronique pour décrire les idées de Quételet). Quételet a été en effet le premier à observer que cette même forme de distribution en « chapeau de gendarme » apparaît pour *d'autres mesures*, comme par exemple celle de la taille des conscrits d'un régiment. Son coup de génie a été de rapprocher les formes similaires de ces deux distributions (celle des erreurs de mesure en astronomie et celle des tailles des conscrits) et d'engendrer, ce faisant, une entité toute nouvelle : l'*homme moyen*. En effet une étoile *réelle* existe bien en amont de ses observations imparfaites et dispersées. Un calcul de moyenne permet d'en estimer la position la plus probable. De même, selon Quételet, un être nouveau mais bien réel lui aussi, l'« homme moyen », existe en amont des individus tous différents les uns des autres. Pour l'astronome, la position réelle de l'étoile constitue la *cause constante* de ses observations successives, qui explique la forme « normale » de la distribution des erreurs de mesure. De même, l'« homme moyen » constitue la « cause constante » de la distribution des tailles. Le raisonnement a ainsi été retourné : c'est l'allure « normale » de cette distribution des tailles qui implique l'existence, en amont, d'une « cause constante », qui n'est autre que l'« homme moyen », dont la taille « la plus probable » est la moyenne des tailles observées.

7) Notons que cette croyance en une « taille vraie » de l'Homme a eu une belle descendance : beaucoup de travaux de docimologie ont ainsi pris pour postulat, sans le discuter, celui de l'existence d'une « vraie note » d'un travail d'élève, vraie note dont les notes assignées par des correcteurs en chair et en os ne fourniraient que des valeurs approchées, parce qu'entachées d'« erreurs »… Cela souligné, le rôle de Quételet n'en est pas moins à saluer profondément, en cela notamment qu'il porte à son acmé le projet de mise en évidence de « régularités » (par-delà la variabilité apparente) formé presque deux siècles avant lui par John Graunt et William Petty. Le passage suivant de l'étude d'Alain Desrosières est à cet égard éclairant : on le méditera.

Le transfert d'outils cognitifs opéré par Quételet prend ensuite appui sur une deuxième caractéristique des moyennes : leur relative *stabilité dans le temps*. Ainsi la taille moyenne des conscrits possède cette propriété importante. Alors que, pour une année donnée, la dispersion de ces tailles est assez grande, en revanche, d'une année sur l'autre, la taille *moyenne* des nouveaux conscrits est à peu près stable, ou du moins varie dans un intervalle beaucoup plus petit que celui des tailles individuelles des conscrits d'une année. Cette stabilité de la moyenne, opposée à la dispersion des cas individuels, va fonder l'usage des statistiques dans les sciences sociales. En effet, une permanence temporelle comparable est observée pour d'autres totalisations fournies par la statistique administrative naissante. L'exhibition de *régularités* justifie la possibilité de faire des *prévisions*, ce qui constitue une des principales demandes adressées par le monde de l'action à celui des sciences sociales. La mise en évidence de régularités est rendue possible par les publications, de plus en plus régulières à partir des années 1830, de statistiques administratives rassemblées alors sous le nom de « statistiques morales ». Celles-ci portent sur divers événements, tels que la procréation, le mariage, le suicide ou encore les crimes. Bien que ces événements puissent sembler être le résultat de décisions relevant de la seule liberté individuelle, leurs nombres annuels, révélés par la statistique officielle, apparaissent remarquablement stables, de même que l'est la taille moyenne des conscrits. L'« inexorable budget du crime », prophétisé par Quételet, annonce le déterminisme sociologique d'Émile Durkheim et de ses successeurs. De même que chaque individu est doté d'une taille et d'un poids, il l'est aussi d'une « propension » à se marier, à se suicider ou à tuer autrui. Les bureaux de statistique sont ainsi comparables aux observatoires astronomiques : ils enregistrent des faits stables, et par là *prévisibles*. La « mesure sociale » a ainsi gagné ses lettres de noblesse de scientificité, en se calant sur celles, indiscutables, de l'astronomie. De fait, dans les années 1830, Quételet s'active tout autant à faire construire un observatoire à Bruxelles qu'à organiser un système statistique incluant les recensements de population et le rassemblement des données de l'état civil (naissances, mariages, décès) et de la statistique criminelle et sanitaire. L'importance du rôle de Quételet dans la promotion des « mesures sociales », tant dans les sciences humaines que dans la gestion politique du monde social, résulte de la force de cette association entre l'État et la science. Cette association fait tenir, d'un côté, la machine administrative et ses enregistrements stabilisés selon des procédures codifiées, et, de l'autre, la simplicité et la généralité de la « loi des grands nombres », issue de l'application du calcul des probabilités aux mesures astronomiques. Mais, par cette opération, l'État change en partie de nature. À la généralité issue de la *loi juridique*, au sens de règle sociale s'imposant à tous dans le cadre d'un État, s'ajoute désormais celle de la loi statistique, observée dans la société, pensée dès lors indépendamment de l'Etat. La « statistique », qui, à son origine allemande du XVIII^e^ siècle, était synonyme d'État, s'émancipe maintenant par rapport à celui-ci, et fonde l'existence d'un *social autonome*. Du coup l'État doit tenir compte de ces nouvelles « lois », non édictées par lui. La sociologie, notamment celle de Durkheim, se construira en partie contre la science des légistes et des juristes, en prenant appui sur les régularités statistiques que Quételet a su si bien orchestrer. Les sciences sociales quantitatives, avec leurs « variables » dont on analyse les « effets », descendent directement du tableau des « causes constantes » et des « propensions » des individus, inventées par Quételet.

b) Pour se dégager de cette hégémonie de la moyenne, il faut se dégager de l'emprise du paradigme des « erreurs de mesure » : au lieu d'être regardée comme consignant différentes mesures d'une *même* grandeur *fixe*, une série statistique doit être regardée comme procédant de différentes « mesures », sans doute elles-mêmes entachées d'erreurs, d'une grandeur *variable* : non pas des mesures de « *la* taille de l'Homme », par exemple, mais les mesures de la taille des hommes d'une certaine population. À partir de là, cela n'a plus de sens de se demander quelle est la « vraie mesure » (qui n'existe pas), mais si, par rapport à la population considérée, telle mesure est grande, ou petite, etc. (Il faut pour cela, rappelons-le, travailler sur un caractère se situant au moins au niveau des échelles ordinales.)

1) Selon ce qui a été vu dans les séances précédentes, il convient de ne pas séparer la notion de médiane de la notion plus générale de *quantile*, liée elle-même à la fonction de répartition

$$F_X(x) = \frac{1}{N}\text{Card}\ \{\ i \ /\ x_i \leq x\ \} = \frac{1}{N}\sum_{v_j \leq x} n_j$$

et donc à la notion d'effectifs *cumulés* (croissants ou décroissants). Cet ensemble conceptuel clé de la statistique « ordinale » apparaît dès le programme de la classe de 5^e, où on lit ceci.

Contenus

3. Relevés statistiques

Lecture, interprétation, représentations graphiques de séries statistiques.

Classes, effectifs.

Compétences exigibles

Regrouper des données statistiques en classes, calculer des effectifs.

Commentaires

Le calcul d'effectifs cumulés n'est pas une compétence exigible mais il pourra être entrepris, en liaison avec les autres disciplines dans des situations où les résultats auront une interprétation.

2) On aura noté en outre que c'est en 5^{e} que s'introduit la notion de *fréquence,* ce que le document d'accompagnement du programme du cycle central commente en ces termes : « … les notions d'effectifs et de fréquences introduites en classe de 5^{e} trouvent un prolongement en classe de 4^{e}, avec les effectifs cumulés et les fréquences cumulées. » De fait, en 4^{e}, le programme comporte ceci.

Contenus

3. Statistiques

Effectifs cumulés, fréquences cumulées.

Compétences exigibles

Calculer des effectifs cumulés, des fréquences cumulées.
Calculer la moyenne d'une série statistique.
Calculer une valeur approchée de la moyenne d'une série statistique regroupée en classes d'intervalles.

3) S'il est indéniable que le programme donne une priorité à la moyenne sur la médiane – respectant ainsi la *doxa* « gaussienne » –, il n'en reste pas moins que l'idée de médiane rôde.

• Pour ce qui est de la place de la moyenne, le document d'accompagnement indique ceci.

Avec la moyenne d'une série statistique, qui ne constitue pas une réelle nouveauté pour les élèves, on aborde en classe de 4^{e} une nouvelle phase de la synthèse des informations recueillies. Le programme insiste sur la distinction entre le cas où l'on dispose de données sur l'ensemble des éléments de la population étudiée et celui où les données concernent un regroupement de la population en classes d'intervalles ; dans ce dernier cas, la méthode mise en œuvre ne permet d'obtenir qu'une valeur approchée de la moyenne de la population.

Rappelons que le calcul de la moyenne – ou du moins d'une valeur approchée d'icelle – dans le cas « où les données concernent un regroupement de la population en classes d'intervalles » n'a à être envisagé, aujourd'hui, que dans le cas où *l'on ne dispose pas* des données « primaires » (non regroupées) – à moins qu'on ne veuille procéder à un calcul approché, avant, par exemple, de saisir les données sur un tableur.

• Pour ce qui de la médiane, voici alors la suite du passage précédemment cité.

Sans introduire de nouveaux indicateurs de la tendance centrale d'une population, il peut être intéressant de faire observer aux élèves, dès la classe de 4^{e}, que la moyenne d'une population dont les éléments sont rangés par ordre croissant ne sépare pas ceux-ci, en général, en deux parties de même effectif.

• Le document d'accompagnement du programme de la classe de 3^{e} confirme cette indication.

En classe de 4e, on a pu observer que « la moyenne d'une population dont les éléments sont rangés par ordre croissant ne sépare pas ceux-ci, en général, en deux parties de même effectif », ce qui justifie l'introduction de la médiane en classe de 3e.

• Conclusion : dès la 4e, il est donc possible de faire calculer

$$F_X(\overline{x}) = \frac{1}{N}\text{Card } \{ i \mathbin{/} x_i \leq \overline{x} \} = \frac{1}{N} \sum_{v_j \leq \overline{x}} n_j$$

et de s'assurer que, par exemple, $F_X(\overline{x}) < 50\ \%$ ou que, au contraire, il existe $x_k < \overline{x}$ tel que $F_X(x_k) \geq 50\ \%$, etc. Et cela même si on ne fige pas ce schéma en prononçant le mot de médiane !

1.2. Les angles et leur mesure

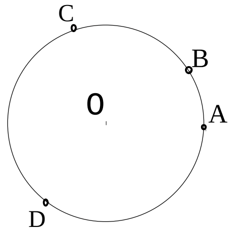
a) À l'occasion de la question ci-après, on revient, pour quelques additifs, sur un sujet déjà bien travaillé.

En plus de la description intuitive de l'enroulement de la droite réelle sur le cercle, quelle formalisation peut-on / doit-on présenter aux élèves de cette construction ? (JG, OS, 2de, 18)

b) Généralisons la question : que peut être l'organisation mathématique à mettre en place, en seconde, à propos de la mesure des angles ? Au lieu de répondre de manière directe, on laissera ici la parole à deux ouvrages anciens, dans lequel est apparente une *organisation* qui semble aujourd'hui affaissée, dont certains aspects sont devenus obsolètes, mais dont les grandes divisions peuvent inspirer (ou éclairer) le travail du professeur d'aujourd'hui. Il ne sera pas inutile, pour le lecteur, de revenir d'abord aux développements donnés à ce sujet à partir de la séance 16.

1) On consulte en premier lieu les *Leçons élémentaires de trigonométrie* de H. Commissaire, publiées en 1929, conçues à l'origine comme un cours pour les classes de première. L'ouvrage s'ouvre par un chapitre intitulé *Définition et premières propriétés des fonctions circulaires*. La première section de ce chapitre a pour titre *Arcs et angles*. En voici les premières lignes.

1. Mesure des arcs. – Pour mesurer les arcs d'un cercle O ou de tout autre cercle qui lui est égal, on choisit comme unité un arc particulier de ce cercle, par exemple, le plus petit des deux arcs limités aux points A et B.



Le rapport d'un arc limité aux point C, D à l'arc unité est la mesure de l'arc considéré.

Le développement précédent appelle de brèves remarques. Tout d'abord, selon la propension à la polysémie de la langue mathématique d'autrefois, on y emploie le même mot – *arc* – pour désigner et l'arc et sa *longueur*. Ensuite, la *raison* pour laquelle on considère le *rapport* de [la longueur] de l'arc $\overset{\frown}{CD}$ à [la longueur de] l'arc unité $\overset{\frown}{AB}$ n'est pas explicitée. Enfin, bien sûr, le fait que les arcs de cercle soient *rectifiables*, c'est-à-dire qu'on puisse parler de *la longueur* de $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ ou de $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, est tenu pour aller de soi.

2) Le passage reproduit ci-dessus se poursuit par la présentation de la *Division sexagésimale du cercle* puis de la *Division centésimale du cercle,* avant de présenter le *Radian* dans les termes suivants.

> **Radian**. – Dans l'étude des fonctions circulaires il est commode d'employer comme unité d'arc l'arc dont la longueur est égale au rayon. Nous l'appellerons le *radian*. La circonférence entière est mesurée par le rapport de sa longueur à celle du rayon soit 2π, la demi-circonférence par π, le quart par $\frac{\pi}{2}$, le sixième par $\frac{\pi}{5}$, le douzième par $\frac{\pi}{6}$ etc.

Là encore un commentaire est de rigueur : on y parle sans autre forme de procès des « fonctions circulaires », et on n'y dit rien – même sous forme d'annonce – de ce qui fait le caractère « commode » du radian.

c) Pour mieux marquer ce qui correspond pour nous, aujourd'hui, à la transition entre la classe de 3^{e} et celle de 2de, on examine maintenant un ouvrage non scolaire, pour autodidactes, paru en 1947 chez Doin & C^{ie} dans le cadre de la *Bibliothèque d'éducation scientifique* : le volume intitulé *Pour comprendre la Trigonométrie* dû à la plume de Georges Durand, « docteur ès sciences mathématiques ».

1) On reproduit d'abord sous forme abrégée la table des matières de cet ouvrage.

On notera ici simplement que le changement essentiel réalisé en 2de, le passage des fonctions d'*angles*, applications du groupe des angles $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$, aux fonctions d'*une variable réelle*, applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ne vient *qu'en fin d'ouvrage* : il fait l'objet de la dernière « leçon », laquelle occupe une vingtaine de pages.

2) Voici alors les premières lignes de cette ultime leçon.

> **211**. Au lieu d'envisager la Trigonométrie et les lignes trigonométriques comme de simples procédés de calcul, ainsi que nous l'avons fait jusqu'alors, on pourrait étudier ces lignes en elles-mêmes, en les considérant comme des fonctions.
> Écrivons par exemple :
> $$y = \sin x$$

Rien n'empêche de regarder x comme un angle variable, qui sera la variable indépendante, et de le faire varier arbitrairement ; alors, à chaque valeur de x correspond une valeur de y, qui est bien une fonction de x.

212. Cette manière d'étudier la Trigonométrie a été indiquée pour la première fois par Jean BERNOULLI [(1667-1748), né et mort à Bâle], puis développée par Euler [(1707-1783), né à Bâle, mort à Saint-Pétersbourg] dans un ouvrage écrit en latin selon l'usage de l'époque : *Introductio in Analysin Infinitorum*.

Bien entendu, on aura observé l'identification subreptice de l'*angle* (élément de $\mathcal{A}$) à sa *mesure* (élément de $\mathbb{R}$), manœuvre qui répond, traditionnellement, au refoulement du problème de la mesure des angles (ou des arcs). Notons aussi le souci d'inscrire, même succinctement, le développement évoqué dans l'histoire des mathématiques : le passage de la 3e à la 2de est à cet égard une répétition (transposée) d'un changement historiquement situé.

3) La leçon se poursuit alors par l'introduction du *radian*.

L'unité de la Trigonométrie théorique : le radian

213. Dans cette étude *fonctionnelle* de la Trigonométrie, on emploie rarement comme unité d'angle le degré ou le grade. D'abord, on préfère considérer, à la place de l'angle, l'arc correspondant, ce qui revient évidemment au même, car on sait qu'un angle au centre a même mesure que l'arc compris entre ses côtés. De plus, l'arc unité est un arc qui a même longueur que le rayon de la circonférence à laquelle il appartient ; pour cette raison, cette unité le nom de *radian* (du mot latin : radius, rayon).

Même si la raison précise n'en est pas explicitée, il est ici clairement affirmé que l'introduction du radian s'impose lorsqu'on passe des fonctions d'une variable *angulaire*, si l'on peut dire, aux fonctions d'une variable *numérique*. On notera comment, de façon sans doute subreptice, est évoqué ce passage : partant de l'*angle*, on passe à l'*arc* intercepté, mot polysémique derrière lequel il faut saisir la *longueur* de l'arc – c'est-à-dire un certain nombre réel x. On aura observé, en outre, la référence à une mesure *des angles* (assimilés à des secteurs circulaires) indépendante de la mesure des arcs (contrairement au schéma préconisé dans le Séminaire), d'un côté, à une mesure des arcs, d'un autre côté, et à un théorème affirmant l'égalité de la mesure d'un angle et de la mesure de l'arc qu'il intercepte sur le cercle. Il s'agit là d'un schéma classique mais abandonné depuis la réforme des mathématiques modernes (autour de 1968) à cause des difficultés et des lacunes mathématiques qu'il comportait (en particulier à propos de la mesure « intrinsèque » des angles). Remarquons enfin la référence, déjà rencontrée, et longtemps traditionnelle, à l'origine du mot radian.

4) Le développement consacré au radian se poursuit de la manière suivante.

Or, une circonférence de rayon r a pour longueur $2\pi r$; par conséquent, le nombre de *radians* que contient cette circonférence entière s'obtient en divisant $2\pi r$ par r, soit : $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

Donc, toute circonférence entière représente 2π radians. On remarque, en premier lieu, que ce nombre est indépendant du rayon de la circonférence envisagée. En outre, nous avons une correspondance entre les radians et les degrés ; on sait, en effet, qu'une circonférence entière comprend 360º, par suite :

$$360^\circ = 2\pi \text{ radians}$$

ou :

$$180^\circ = \pi \text{ radians.}$$

Cette égalité permet de transformer des degrés en radians, et inversement, par une simple règle de trois.

Se met en place ici la technique de changement d'unité. On notera la légère incohérence des notations : il aurait fallu écrire soit « 360 degrés = 2π radians », soit « 360º = 2π rad ». Mais l'essentiel est là ; pour déterminer la valeur en radians d'un angle de, disons, 36º, j'écrirai simplement :

$$36^{\circ} = \frac{36}{180} \times 180^{\circ} = \frac{36}{180} \times \pi \text{ rad} = \frac{1}{5} \times \pi \text{ rad} = \frac{\pi}{5} \text{ rad}.$$

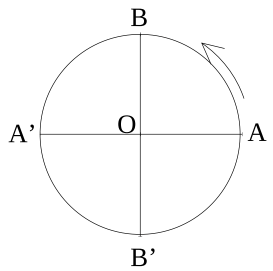
5) Dans l'ouvrage examiné, le passage à des fonctions trigonométriques définies sur ℝ s'effectue lorsque commence l'étude de la première des fonctions traditionnellement étudiées, le sinus.

Fonction sinus

214. Soit à étudier la fonction $y = \sin x$.

Dans les Leçons précédentes, nous n'avons considéré que des arcs compris entre 0 et 180º ou bien entre 0 et π radians. Pour étendre la portée de la Trigonométrie, on a généralisé l'idée qu'on se fait d'un arc variable.

Considérons le cercle trigonométrique (…), c'est-à-dire le cercle dont le rayon est égal à l'unité. Prenons sur la circonférence un point A et commençons à parcourir cette circonférence à partir de l'origine A, en tournant constamment dans le sens de la flèche.



Ainsi, partant de A et s'arrêtant en B, on parcourt un arc égal à 90º ou $\frac{\pi}{2}$ radians ; si l'on s'arrête en A', on parcourt un arc de 180º ou π^{R} ; en B', c'est 270º ou $\frac{3\pi^{R}}{2}$; enfin, si l'on décrit la circonférence entière et si l'on revient en A, un arc de 360º ou 2π [*sic*]

Mais, de retour en A, on peut très bien recommencer le mouvement, et cela indéfiniment. On voit que cette manière de mesurer un arc permet de concevoir des arcs plus grands qu'une circonférence ; par exemple, un mobile qui décrit trois fois la circonférence entière, parcourt un arc de $360^{\circ} \times 3 = 1080^{\circ}$ ou $2\pi \times 3 = 6\pi^{R}$ [re-*sic*].

De plus, si le mouvement, au lieu de se faire dans le sens de la flèche, se fait en sens inverse, nous conviendrons que l'arc ainsi parcouru sera *négatif*. Ainsi, un mobile partant de A et allant au point voisin B' parcourt un arc de –90º ou $-\frac{\pi^{R}}{2}$. Finalement, toutes ces conventions nous font envisager un arc comme une variable illimitée, prenant toutes les valeurs possibles entre –∞ et +∞.

Quoique les formulations usitées ici reprennent les abus de langage et les silences théoriques déjà pointés, on a là ce qui est devenu, dans l'organisation « réformée », *l'enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique*. Dans cette présentation classique, aujourd'hui obsolète, on fait comme s'il était évident que les « arcs » ont une longueur. Dans la présentation actuelle, la longueur d'un arc « vrai » (et non d'un arc « généralisé ») est mesurée par la longueur de fil qui s'enroule sur l'arc en question. Quant aux arcs

« généralisés », ils n'ont plus de raisons d'être : c'est la longueur x du fil enroulée qui définit le point du cercle en lequel vient se « poser » l'extrémité du segment de fil (et qui définit donc les valeurs numériques $\cos x$, $\sin x$). On aura en outre remarqué la notation « anglo-saxonne » des radians (avec l'exposant ^{R}), employée de façon systématique par l'auteur, à deux « oublis » près.

6) L'étude des fonctions trigonométriques se fait ensuite à partir de considérations géométriques simples, ou formellement (et, bien sûr, implicitement), l'auteur joue avec deux « mesures des angles » ψ correspondants à des unités de mesure différentes, comme l'illustre ce passage, où les confusions qu'a tentées d'éradiquer la réforme des mathématiques modernes sont nettement perceptibles.

> Faisons varier l'arc x de 0 à $2\pi^R$, ce qui revient à décrire la circonférence entière dans le sens positif. Quand nous sommes en A (…), on a $x = 0$ et $\sin x = 0$. De A à B, l'arc augmente de 0 à $\frac{\pi^R}{2}$, et le sinus croît de 0 à 1 ; de B à A', le sinus décroît de 1 à 0. À partir de A', le sinus est négatif ; de cette façon, de A' à B', le sinus décroît encore de 0 à –1 ; enfin de B' à A, il croît de –1 à 0.

L'absence de définition « analytique » du sinus interdit, à ce niveau, qu'il en soit autrement. Notons, en revanche, que l'étude de la tangente peut, en s'appuyant sur la connaissance des variations des fonctions *sinus* et *cosinus*, procéder « par le calcul » (et non par des considérations graphiques) : si $0 < x < x' < \frac{\pi}{2}$ alors $0 < \sin x < \sin x'$ et $\cos x > \cos x' > 0$, et donc $\frac{1}{\cos x} < \frac{1}{\cos x'}$ en sorte qu'il vient : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \times \frac{1}{\cos x} < \sin x' \times \frac{1}{\cos x'} = \frac{\sin x'}{\cos x'}$ $= \tan x'$. Semblablement, la connaissance des variations des fonctions affines et des fonctions *carrée* et *racine carrée*, jointe à la connaissance du théorème de Pythagore permet de « décoller » l'étude de la fonction *cosinus* de la configuration graphique exploitée lors de l'étude du sinus : si $0 < x < x' < \frac{\pi}{2}$ alors on a successivement $0 < \sin x < \sin x'$, $\sin^2 x < \sin^2 x'$, $-\sin^2 x' < -\sin^2 x$, $1 - \sin^2 x' < 1 - \sin^2 x$, $\cos x' = \sqrt{1 - \sin^2 x'} < \sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$.

7) Bien entendu, il resterait à voir en quoi le passage d'applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ à des application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est « utile ». La réponse globale est la suivante : cela permet de faire bien des choses du point de vue du *calcul différentiel et intégral*, notamment en *paramétrant* les fonctions. Supposant acquis un résultat classique sur le calcul d'aires, considérons ainsi le problème soulevé par la question suivante.

> En donnant les formules des aires d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle, d'un losange à mes élèves de 6e, je me suis aperçu que je n'avais jamais rencontré de formule pour l'aire d'une ellipse (ce qui n'a rien à voir avec le programme). J'ai essayé avec des intégrales, mais je rencontre des problèmes d'ensemble de définition. Peut-être avec des affinités orthogonales, mais je ne sais pas comment. Bref comment fait-on pour calculer l'aire d'une ellipse ? (BR, JT, 4e, 18)

Considérons pour cela l'ellipse de demi-axes a et b, ayant donc pour équation (par rapport à un repère bien choisi)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le quart d'ellipse contenu dans le premier quadrant a pour équation $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Le quart de l'aire de l'ellipse est donc égal à $I = \int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$. Pour calculer cette intégrale, faisons le changement de variable $x = a \cos t$, où $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$; il vient :

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b \sin t\,(-a \sin t\,dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \sin^2 t\,dt = \frac{ab}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\,d(2t) = \frac{ab}{4}\,[\pi - (\sin\pi - \sin 0)] = \frac{\pi ab}{4}.$$

Il en découle aussitôt que l'aire de l'ellipse vaut πab : dans le cas où $a = b = r$, on retrouve la formule classique donnant l'aire d'un cercle de rayon r.

1.3. Grandeurs et unités

a) On examine ici une question en partie « retardataire », en retard sur le travail effectué dans ce séminaire.

> En 5e, concernant le thème de la proportionnalité, dans le cas des mouvements uniformes, quelle méthode doit-on utiliser pour calculer des vitesses moyennes ? Exemple : un véhicule parcourt 100 m en 10 s ; quelle est sa vitesse moyenne en km/h ?
>
> • La méthode « proportionnalité »
>
> La distance parcourue est proportionnelle au temps.
>
> | distance (m) | 100 | x |
> |---|---|---|
> | temps (s) | 10 | 3600 |
>
> 1 h ↔ 3600 s
>
> $x = \frac{3600 \times 100}{10} = 36000$
>
> 36000 m ↔ 36 km
>
> La vitesse moyenne est de 36 km/h.
>
> • La méthode « physicienne »
>
> $v = \frac{d}{t} = \frac{100\text{ m}}{10\text{ s}} = \frac{100\text{ m} \times 360}{10\text{ s} \times 360} = \frac{36000\text{ m}}{3600\text{ s}} = \frac{36\text{ km}}{1\text{ h}}$
>
> …
>
> (AG, JT, 5e, 20)

b) On notera d'abord que les écritures « 1 h ↔ 3600 s » et « 36000 m ↔ 36 km » sont *fautives* : on doit écrire résolument

$$1\text{ h} = 3600\text{ s},\ 36000\text{ m} = 36\text{ km},\ 30^\circ = \frac{\pi}{6}\text{ rad, etc.}$$

Ces égalités ont lieu entre grandeurs de *même espèce*, lesquelles forment une (demi-)droite vectorielle, dans laquelle { h } et { s } sont deux bases distinctes pour ce qui est de l'espèce des *durées*, etc.

1) La technique dite, ici, « physicienne » a bien un côté typique : celle d'être « figée » afin de devenir une *recette* minimisant la quantité de travail *mathématique* à accomplir. Par contraste, au lieu de

$$v = \frac{d}{t} = \frac{100 \text{ m}}{10 \text{ s}} = \frac{100 \text{ m} \times 360}{10 \text{ s} \times 360} = \frac{36000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{36 \text{ km}}{1 \text{ h}}$$

on peut évidemment écrire *par exemple* :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{100 \text{ m}}{10 \text{ s}} = \frac{100 \times \frac{1}{1000} \text{ km}}{10 \times \frac{1}{3600} \text{ h}} = \frac{0{,}1 \text{ km}}{\frac{1}{360} \text{ h}} = \frac{360 \times 0{,}1 \text{ km}}{\text{h}} = 36 \text{ km/h}.$$

On voit que, ce faisant, on accroît la *liberté* mais aussi la *difficulté* mathématique du travail à mener à bien.

2) Cela dit, la manière « physicienne », lorsqu'elle n'est pas pure application d'une recette, incorpore une invention mathématique pertinente, que l'on peut saluer. Soit par exemple à calculer en m/h une vitesse de 2 dm/min ; on a :

$$2 \text{ dm/min} = \frac{2 \text{ dm}}{\text{min}} = \frac{2 \text{ dm}}{\text{min}} \times \frac{60}{60} = \frac{12 \text{ m}}{\text{h}} = 12 \text{ m/h}.$$

Un calcul que l'on dirait, dans l'anglais des mathématiciens, « straightforward », aurait donné ceci (par exemple, et « au pire ») :

$$2 \text{ dm/min} = \frac{2 \text{ dm}}{\text{min}} = \frac{2\ (10^{-1} \text{ m})}{60^{-1} \text{ h}} = \frac{120\ (10^{-1} \text{ m})}{\text{h}} = \frac{12 \text{ m}}{\text{h}} = 12 \text{ m/h}.$$

3) En fait, dans la formation des physiciens et chimistes dans les pays de langue anglaise, la technique évoquée ci-dessus, très française apparemment, se fige en une recette dite des « équations de conversion », dont la présentation suivante (que l'on trouvera sur l'Internet à l'adresse http://www.shodor.org/UNChem/math/units/) est typique.

Unit Conversions

Changing between units is easy if we have a conversion equation. For example, Robert Millikan (a 20th century physicist) performed a landmark experiment with X-rays and determined the mass of an electron to be 9.1×10^{-31} kg. While this is the standard way to represent this quantity, it would also be correct to use grams (g) or milligrams (mg):

$$9.1 \times 10^{-28} \text{ g or } 9.1 \times 10^{-25} \text{ mg}.$$

How do we change between units like this? Here are two conversion equations that will help in this situation:

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g and } 1 \text{ g} = 1000 \text{ mg}.$$

Notice that we can rearrange these equations in several ways dividing by one of the sides:

$$\frac{1 \text{ kg}}{1000 \text{ g}} = 1 \quad \frac{1000 \text{ g}}{1 \text{ kg}} = 1 \quad \frac{1 \text{ g}}{1000 \text{ mg}} = 1 \quad \frac{1000 \text{ mg}}{1 \text{ g}} = 1$$

We have formed several ratios which are all equal to 1! Now we need to remember a crucial fact from arithmetic:

We can multiply any quantity by one and not change its value.

This is the key to changing units! Consider changing from kg to g. Which ratio equal to 1 should we multiply kilograms by to get grams? Well, if we use the fraction with grams on top and kilograms on bottom, kilograms will "cancel out" when we simplify. Watch:

$$9.1 \times 10^{-31}\ \cancel{\text{kg}} * \frac{1000\ \text{g}}{1\ \cancel{\text{kg}}} = (9.1 \times 10^{-31} * 1000)\ \text{g} = 9.1 \times 10^{-28}\ \text{g}.$$

….

Changing from kilograms to milligrams works in the same way, except we need to convert from kg to g and then from g to mg since we aren't given a single kg-to-mg conversion equation. We can combine these into one step, though! Watch:

$$9.1 \times 10^{-31}\ \cancel{\text{kg}} * \frac{1000\ \cancel{\text{g}}}{1\ \cancel{\text{kg}}} * \frac{1000\ \text{mg}}{1\ \cancel{\text{g}}} = (9.1 \times 10^{-31} * 1000 * 1000)\ \text{mg} = 9.1 \times 10^{-25}\ \text{mg}.$$

We just multiplied by "one" twice, choosing the ratios that allowed us to cancel out the kg and the g units.

4) Appliquons la recette précédente au calcul de la vitesse $v = \dfrac{100\ \text{m}}{10\ \text{s}}$ en km/h. On a besoin de deux équations de conversion : 1000 m = 1 km, utilisée sous la forme $\dfrac{1\ \text{km}}{1000\ \text{m}} = 1$, et 1 h = 3600 s, utilisée sous la forme $\dfrac{3600\ \text{s}}{1\ \text{h}} = 1$. Il vient alors :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{100\ \text{m}}{10\ \text{s}} = \frac{100\ \text{m}}{10\ \text{s}} \times \frac{1\ \text{km}}{1000\ \text{m}} \times \frac{3600\ \text{s}}{1\ \text{h}} = \ldots$$

Il s'agit là d'une technique dont la technologie apparaît explicitement dans la présentation ci-dessus (*en italiques*). Cette technique est évidemment des plus simples : si le mathématicien peut critiquer sa « rigidité », cette propriété apparaîtra comme une vertu à l'utilisateur peu mathématicien.

c) En fait, la question soulevée à propos de la classe de 5^{e} ne se pose nullement :

– la notion de vitesse moyenne n'apparaît qu'en 4^{e} : en 5^{e} les mouvements sont *uniformes*, c'est-à-dire à vitesse *constante*, en sorte que le concept de vitesse *moyenne* n'est pas encore utile ;

– le changement d'unités de vitesse relève lui aussi de la 4^{e}, comme le montre l'extrait suivant du programme relatif à cette classe.

Contenus

2. Applications de la proportionnalité.
Grandeurs quotients courantes

Compétences exigibles

Changer d'unités de vitesse (mètre par seconde et kilomètre par heure).

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 22 : mardi 4 avril 2006 & mardi 11 avril 2006

0. Programme de la séance

→ Mardi 4 avril (17 h 15 – 18 h 45)

1. Forum des questions : poursuites & anticipations // 2. Questions d'entretien : forum impromptu

1. Forum des questions : poursuites & anticipations

1.1. À propos du TER

a) Des assertions lues ou entendues ici ou là conduisent à deux mises au point à propos des TER.

b) La première assertion est la suivante.

Pour que le mémoire soit « professionnel », il doit prendre en compte plusieurs aspects du métier et déborder le cadre strictement disciplinaire ou didactique.

1) Cette affirmation soulève plusieurs objections. Il en résulterait par exemple qu'un mémoire professionnel centré sur un travail de développement d'une suite d'AER relatives à l'enseignement de telle organisation mathématique *ne serait pas un travail professionnel* pour un futur professeur de mathématiques ! Il s'agit là à l'évidence d'une profession de foi qui donne du métier une bien curieuse idée – une idée derrière laquelle on peut craindre que ne se cache la tentation de fuir les difficultés spécifiques du « cœur du métier » : faire la classe, en mathématiques (ou en telle autre discipline).

2) Cela ne veut pas dire, bien entendu, que le métier se réduise à son cœur. Recevoir des parents, par exemple, fait partie du métier. Engager avec eux un dialogue qui permettra de « faire bouger » – d'une manière supposée bénéfique – les conditions et contraintes auxquelles ces parents et leur enfant sont assujettis et dont ils sont porteurs jusqu'au sein de la classe (ou dans son voisinage immédiat, par exemple le conseil de classe), fait aussi partie du métier. Il n'en est pas moins vrai, cependant, que ce type de problèmes de la profession est exclu du champ des problèmes travaillés *dans le TER* (puisqu'on y travaille sur une séance observée en classe), et cela pour de fortes raisons : étant donné le cadre très resserré de la formation, un choix est nécessaire ; et ce choix est de cibler le cœur du métier, sans nier pour autant qu'une formation complémentaire – par exemple dans le cadre d'une troisième année d'IUFM – serait utile (y compris, au reste, s'agissant du cœur du métier lui-même…).

3) En revanche croire que les problèmes de la profession regardés comme ne relevant pas du volet « didactique et disciplinaire » n'entrent pas dans le champ de la didactique, c'est manifester qu'on a de cette science une idée bien pauvrette, idée d'origine culturelle que, apparemment, la présentation et les commentaires faits lors de la séance 14 à propos de l'*échelle des niveaux de détermination didactique* (reproduite ci-après) n'ont guère entamée.

Civilisation
↓↑
Société
↓↑
École
↓↑
Pédagogie
↓↑
Discipline d'études
↓↑
Domaine d'études
↓↑
Secteur d'études
↓↑
Thème d'études
↓↑
Sujet d'études

Cette échelle nous rappelle en effet que ce qui peut se passer dans la classe lors du travail conduit par le professeur au niveau d'un sujet d'études (niveau 5, si l'on attribue à la pédagogie le niveau 0) est contraint et conditionné par des facteurs ayant leur siège au niveau de l'École (niveau –1) et de la Société (niveau –2), et même, toujours, de la Civilisation (niveau –3). Chercher par exemple à agir sur les contraintes et conditions issues de la Société en intervenant auprès des parents incombe sans doute à beaucoup d'acteurs sociaux, mais cela échoit tout particulièrement aux professeurs. En ce qui concerne spécifiquement le professeur *de mathématiques*, son action visera *notamment* à faire bouger certaines des conditions et contraintes déjà évoquées dans un sens favorable aux apprentissages *en mathématiques* – par exemple en s'efforçant de dissoudre certaines idées fausses sur les contenus mathématiques et leur apprentissage (telle par exemple l'idée que, dans cette discipline, il suffirait de « comprendre » pour savoir faire, etc.).

c) La seconde assertion peut être formulée ainsi.

Il faudrait que les stagiaires puissent mettre à l'épreuve le développement construit pendant l'année de formation.

1) Cette assertion trahit la non-compréhension d'une problématique qui devrait être encore plus familière aux participants au Séminaire que celle que l'on vient de discuter à propos de didactique – science dans laquelle l'instruction reçue, subordonnée aux besoins professionnels manifestés *et* aux contraintes de volume de la formation, est pour cela relativement limitée. En ce sens, le vœu formulé dans cette assertion constitue un symptôme plus inquiétant.

2) Dans le travail de production d'une réponse R à une certaine question Q, le stage de pratique accompagnée a conduit un élève professeur à fabriquer une première réponse $R_0^{\heartsuit}$: il

l'a fait en observant des réponses $R^\lozenge$ (dans des classes, dans des manuels, etc.), en les analysant, en les évaluant, afin d'en tirer les « matériaux » de la construction de $R_0^\heartsuit$, qu'il *diffusera* ensuite en réalisant cette « réponse » dans l'une des classes du professeur d'accueil, où il devra la *défendre*. Lorsqu'il fait cela, en principe avec l'aide de ses camarades de trinôme (si un individualisme spontané n'y fait pas obstacle), il a *mis* $R_0^\heartsuit$ *à l'épreuve* d'une *analyse a priori*, où s'est déployée toute la « science » professionnelle *alors disponible* du trinôme de professeurs stagiaires. Cela noté, la réponse $R_0^\heartsuit$ a été ensuite *mise à l'épreuve d'une réalisation en classe*. Cette réponse réalisée, devenue dès lors pour le trinôme une simple réponse $R_1^\lozenge$, a été *observée*, *analysée*, *évaluée*, afin de servir de point de départ à un nouveau travail de développement aboutissant à une réponse $R_1^\heartsuit$ qui sera diffusée, elle, face à un jury et défendue devant lui.

3) Une « mise à l'épreuve » en classe a donc été réalisée, mais sur une première version de la réponse *R*. Le processus cyclique

> … → Développement de *R* → Diffusion et défense de *R* en classe → Observation, analyse, évaluation de *R* diffusée et défendue en classe → Développement de *R** → Diffusion et défense de *R** en classe → …

que le vœu rapporté voudrait couper ainsi :

> … → Développement de *R** → Diffusion et défense de *R** en classe → Observation, analyse, évaluation de *R** diffusée et défendue en classe …

est coupé autrement :

> … → Développement de *R* → Diffusion et défense de *R* en classe → Observation, analyse, évaluation de *R* diffusée et défendue en classe → Développement de *R** → Diffusion et défense de *R** devant un jury → …

Notons en particulier que, dans le schéma retenu pour la formation, une « mise à l'épreuve » en classe a bien été réalisée : il est dommageable qu'aux yeux de certains elle semble avoir compté pour si peu, avec sans doute pour conséquence d'avoir été peu exploitée pour la suite du travail demandé !

4) La raison pour laquelle la coupure est placée là où on l'a rappelé est double. D'une part, au plan scientifique, il serait erroné de croire – en se référant à une certaine image d'Épinal de l'expérience scientifique, et en regardant la réalisation en classe comme une « expérience », *ce qu'elle n'est pas* – que la diffusion d'une réponse *R* au sein de ce milieu qu'est une classe serait le *nec plus ultra* en matière de « mise à l'épreuve » d'un scénario de séance (ou de séquence). Une classe, en effet, est un milieu qui révèle sans doute certaines choses, mais qui demeure silencieux à propos de bien des aspects aussi de la construction élaborée, en sorte que la réalisation dans une *autre* classe réservera peut-être de fortes surprises et pourra même être regardée comme incommensurable avec celle déjà réalisée. D'autre part, au plan professionnel, la coupure souhaitée fait apparaître un découpage inauthentique : le métier de professeur implique que l'on se présente devant une classe donnée avec une construction de papier $R^\heartsuit$ élaborée pour être diffusée *dans cette classe-là*, et qui, par définition, n'y a encore jamais été diffusée ! Tel est le lot du professeur. Le professeur n'est pas un expérimentateur qui aurait le droit d'engager une classe dans une activité simplement « pour voir », une telle problématique non professionnelle modifiant d'ailleurs fortement les conditions et contraintes sous lesquelles une classe (qui n'en serait plus tout à fait une alors) serait amenée à travailler.

5) L'exigence de formation porte sur un savoir professionnel développé au cours de la formation et qui doit permettre non seulement de *produire* la réponse attendue, mais encore

de la défendre, non dans une classe, mais devant un jury qui préfigure ce qui, dans un fonctionnement *rénové* de l'activité des professeurs au sein de leur établissement, serait la diffusion et la défense d'une « préparation » *devant un séminaire d'établissement*. Cette dernière pratique, qui malheureusement existe encore fort peu, devra se développer à l'avenir pour permettre la pratique au long cours, tout au long de la carrière, d'un geste professionnel essentiel, celui qu'inaugure le TER au cours de cette année de formation initiale. Bien entendu, dans un tel contexte intégré au travail « ordinaire » des professeurs, le fait que la question *Q* ne concerne plus essentiellement le *cœur du métier* irait de soi – sans que cela doive entraîner un évitement des problèmes les plus spécifiques du métier.

d) On s'arrêtera plus brièvement sur la question suivante.

> Pour la séance que l'on va proposer pour notre TER, peut-on en plus proposer une fiche de travail à la maison pour achever la réflexion ? (BR, JT, 4e, 20)

Il va de soi qu'un scénario de séance doit prendre en charge l'articulation de la séance en question avec les séances précédentes et avec les séances suivantes, articulation que le corpus B permet en principe de voir s'agissant de la séance observée par le visiteur en deuxième visite. De ce point de vue, dans le TER, il convient d'envisager – même sommairement – les prolongements immédiats possibles de la séance scénarisée. Toutefois, la formulation adoptée ici – « une fiche de travail à la maison pour achever la réflexion » – laisse craindre une relative *déresponsabilisation* de l'enseignant : la « réflexion » s'achèverait-elle *d'elle-même*, sans que nulle intervention de la part du professeur soit nécessaire ? Notons qu'une telle interrogation pourra être opposée par le jury à la présentation de la construction élaborée, qu'il faut donc se préparer à défendre sur ce point – ce qui peut amener, d'ici là, un changement dans la conception de ladite fiche.

1.2. Problèmes d'AER

a) On examine d'abord cette question.

> Faire émerger les notions au programme plutôt que de les énoncer sans justification, est-ce nécessairement lié à la reprise du travail épistémologique savant ? Exemple : $(10^n)^m$ ne pourrait être abordé qu'après avoir étudié a^n (et pas seulement les puissances de 10). Ce n'est pas le cas dans l'ensemble des ouvrages de 4e que j'ai consultés. (WB, JT, 4e, 20)

1) Le fait que les manuels ignorent certaines exigences n'est pas vraiment un argument solide. Cela dit, le fait de motiver une certaine réalité mathématique ne suppose pas que l'on reprenne à son compte l'organisation mathématique « savante » correspondante. Si les professeurs ont à respecter l'authenticité épistémologique de ce qu'ils proposent aux élèves, ils ont aussi pour obligation d'en délivrer une transposition didactiquement recevable par ceux auxquels ils s'adressent. L'oubli de *l'une ou l'autre* de ces exigences conduit à un enseignement non viable, à court terme pour la seconde, à plus long terme pour la première. Ce que fait chacun, à cet égard, engage donc *la profession*.

2) Sur le sujet évoqué, l'observation faite procède d'une méprise épistémologique *et* didactique qui aurait dû être levée lors de la séance 10 de ce séminaire où, parmi d'autres développements, était repris ce passage des notes du Séminaire de l'année 2002-2003 – passage que l'on méditera.

4. L'argument selon lequel la considération d'égalités telles que $(10^3)^4 = 10^{12}$ ou $(10^4)^{-2} = 10^{-8}$ supposerait la notion « générale » de puissance d'un nombre relatif relève d'une vision des mathématiques comme construction *a priori* que l'on dévoilerait en partant du plus général pour en faire dériver le plus particulier : il s'agit là d'une conception où l'on suppose l'histoire faite, au lieu de la regarder comme « à revivre ». Tout à rebours, on peut envisager de travailler d'abord sur les puissances de 10 (on établira alors par exemple que $10^3 \times 10^3 = 10^{3+3} = 10^6$, etc.), puis sur les ***puissances des puissances de 10*** (ce qui conduira à observer que, en écrivant $(10^3)^2$ le produit $10^3 \times 10^3$, on arrive à $(10^3)^2 = 10^6 = 10^{3\times 2}$, etc.), avant de généraliser aux puissances d'un entier non nul quelconque (par exemple). Dans tous les cas, même si l'on a d'abord travaillé sur les nombres a^n (avec a relatif non nul quelconque et $n \in \mathbb{Z}$), il conviendra encore de ***motiver*** l'étude du cas particulier $a = 10$ (qui conduira bien sûr à s'intéresser plus généralement au cas $a = 10^p$, avec $p \in \mathbb{Z}$)…

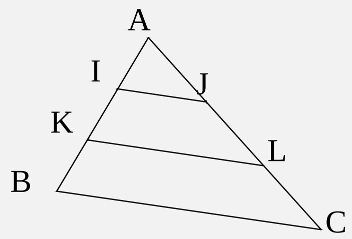
b) On s'arrête enfin sur la question que voici.

Une des propriétés des milieux permet de situer le milieu d'un segment en connaissant le milieu d'un autre segment, en traçant une parallèle. On a vu en séminaire qu'un type de tâches pouvant permettre d'utiliser cette propriété (et donc d'en légitimer l'introduction) était celui de la détermination d'une distance d'un point A à un point P inaccessible. On avait vu aussi qu'en *itérant* le processus, d'ailleurs autant de fois que requis, on pouvait dans tous les cas déterminer la distance AP. On a alors affaire à la propriété de Thalès, dans le cas particulier des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, etc. Cela peut-il constituer une façon d'introduire la propriété de Thalès en demandant si c'est vrai pour d'autres fractions (voire pour toutes les fractions) ou bien une référence lorsqu'il s'agira, dans une AER appropriée, d'amener la classe à la mise en évidence de la propriété pour résoudre le problème posé ? (JNM, MJ, 4e, 20)

1) On trouve, dans les notes du Séminaire 2002-2003, le passage ci-après.

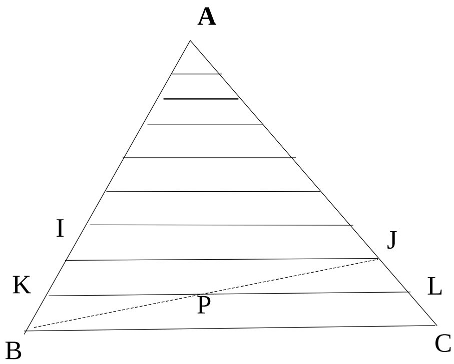
3. En 4e, la voie technologique à suivre pour arriver jusqu'au résultat clé part plus simplement des ***théorèmes des milieux***. Ceux-ci permettent par exemple de démontrer le résultat qu'illustre le passage suivant du document d'accompagnement du programme du cycle central (déjà cité lors de la séance 6 de ce Séminaire) :

On a coupé un des côtés d'un triangle ABC en trois segments de même longueur : AI = IK = KB. Par I et K, on a mené les parallèles au côté [BC], qui coupent [AC] en J et L respectivement. À l'aide des résultats sur les milieux de deux côtés d'un triangle, on souhaite établir que le côté [AC] se trouve lui aussi coupé en trois régulièrement : AJ = JL = LC.



La première des deux égalités ci-dessus est simple à établir dès que l'on a remarqué que I est le milieu de [AK]. Le second (dans l'ordre des programmes) théorème des milieux appliqué au triangle AKL permet alors de conclure. La seconde égalité est autrement plus difficile et il se peut très bien que, dans une classe, l'idée du tracé d'un segment auxiliaire convenable, par exemple celui du segment [BJ], ne surgisse pas d'elle-même et doive être indiquée par le professeur. La mise en forme de la démonstration a tout son intérêt dans un cas comme dans l'autre. Notons M le point d'intersection des droites (BJ) et (KL). Le second (dans l'ordre des programmes) théorème des milieux appliqué au triangle BIJ permet de conclure que le point M est le milieu de [BJ]. Ce résultat acquis devient alors une hypothèse, qui permet à nouveau l'application du second théorème des milieux, cette fois au triangle JBC, pour conclure que L est le milieu de [IC]. Ainsi, deux pas de démonstration enchaînés ont conduit à la conclusion : JL = LC.

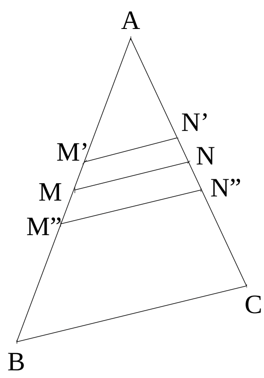
4. On notera que, en toute rigueur, pour démontrer le résultat général relatif à la division d'un segment donné en *n* segments de même longueur, il conviendrait, formellement, de procéder par récurrence.



Notons Th(*n*) la propriété énonçant que la projection parallèle d'une division régulière en *n* segments est encore une division régulière. La technique mise en jeu dans le cas $n = 3$ permet alors de démontrer que, si Th(n–1) est vraie, alors Th(*n*) est vraie. Sur la figure ci-après, (KL) et (IJ) étant parallèles, et puisque BK = KI, d'après le deuxième théorème des milieux appliqué au triangle BIJ la droite (KL) coupe [BJ] en son milieu P. D'après le deuxième théorème toujours, dans le triangle JBC la droite (PL) = (KL) coupe [BJ] en son milieu et est parallèle à (BC) ; par suite, (PL) coupe (JC) en son milieu L.

2) On voit qu'on obtient ainsi que, M et N étant des points de [AB] et [AC] respectivement, si AM = $\frac{m}{n}$AB, où n, $m \in \mathbb{N}^*$, $m < n$, et si (MN) est parallèle à (AB), alors AN = $\frac{m}{n}$AC. On obtient ainsi le théorème de Thalès *dans le cas rationnel*.

3) Pour passer au cas *non rationnel* – comme il en va par exemple lorsque AM = $\frac{\sqrt{2}}{2}$AB –, il suffit de savoir que, pour tout non rationnel $x \in\ ]0\,;1[$, et pour tout entier n, il existe un entier $m < n$ tels que $\frac{m}{n} < x < \frac{m+1}{n}$. Soit alors M, M', M" $\in$ [AB] tels que AM = x AB, AM' = $\frac{m}{n}$ AB, AM" = $\frac{m+1}{n}$AB.



Les parallèles à (BC) en M, M', M" coupe [AC] en N, N', N". On sait que l'on a AN' = $\frac{m}{n}$AC et AN" = $\frac{m+1}{n}$AC. Par ailleurs, le point N est situé entre N' et N" (ce qui résulte de considérations de géométrie de l'ordre que l'on omettra ici) : si l'on pose AN = y AC, on a donc $\frac{m}{n} < y < \frac{m+1}{n}$. Il en résulte que $|x - y| < \frac{1}{n}$ et donc que $y = x$, CQFD.

4) Bien entendu, la démonstration précédente ne peut être donnée dans cette forme ; mais on peut travailler par exemple avec un réel irrationnel donné pour faire apparaître le phénomène clé. Si, par exemple, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on fabriquera d'abord des fractions qui encadrent x « de près ». En partant de la valeur affichée par une calculatrice, par exemple

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}70710678118654752440084436210 48\ldots$$

on obtiendra ainsi les encadrements

$$\frac{7}{10} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{8}{10},\ \frac{70}{100} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{71}{100},\ \frac{707}{1000} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{708}{1000},\ \frac{7071}{10\,000} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{7072}{10\,000},\ \frac{70\,710}{100\,000} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{70\,711}{100\,000},\ \ldots$$

5) Bien entendu, ce qui précède ne fournit encore que *l'argument mathématique* d'une AER (ou d'une suite d'AER), qu'il resterait à élaborer.

2. Questions d'entretien : forum impromptu

a) On reprend la liste des questions d'entretien de l'année 2004-2005, reproduite ci-après.

1. L'entretien avec le jury d'évaluation des enseignements n'a nullement pour objet de permettre à ce jury de porter une appréciation sur l'enseignement délivré par le professeur stagiaire dans sa classe tel que le donne à voir son support d'entretien. La commission d'examen est là pour se forger un jugement sur la capacité du candidat à user de concepts appropriés et adéquatement maîtrisés pour décrire, analyser, commenter, interroger, de manière concise et efficace, la réalisation didactique présentée, en prolongeant ce travail, le cas échéant, de manière motivée et raisonnée, par des éléments d'évaluation ainsi que par l'indication de choix alternatifs possibles.

2. On donne ci-après une liste de questions autour desquelles s'organisera l'entretien. Cette liste est structurée en cinq grandes rubriques interdépendantes, que les questions proposées ont d'abord pour objet d'illustrer, sans exclusive et sans en épuiser la matière.

① ***Structure et contenu de la séquence et de la séance observées***

❶ Que sont les SDA et dispositifs didactiques internes au SDP mobilisés lors de la réalisation de la séquence ? Comment la séquence exploite-t-elle l'espace didactique offert par le SDP et ses SDA ?

❷ Quelle est la place du thème mathématique parmi les secteurs et domaines d'études en lesquels se structure le programme de mathématiques de la classe ? Que sont les principaux sujets d'étude participant de ce thème ? Comment ce thème est-il situé dans la programmation annuelle adoptée ?

② ***L'organisation mathématique***

❶ Que sont les types de tâches travaillés dans la séquence ? Y sont-ils clairement dégagés et bien identifiés ?

❷ Quelles sont les raisons d'être des types de tâches travaillés ? Sont-elles explicitées ? Comment ?

❸ Quelle pertinence ont les types de tâches travaillés en tant qu'outils d'études pour l'année en cours ? Pour les années à venir ? Pour d'autres disciplines ?

❹ Que sont les techniques associées aux types de tâches travaillés ? Sont-elles faciles à utiliser ? Quelle est leur portée ? Sont-elles fiables ? Qu'en est-il de leur intelligibilité ? Quel est leur avenir ? Quelles évolutions devront-elles subir pour perdurer ?

❺ Comment les techniques travaillées sont-elles justifiées ? Y a-t-il des énoncés technologiques ou théoriques qui soient considérés comme « évidents » ou « bien connus » ? Les formes de justification utilisées sont-elles proches des formes canoniques en mathématiques ? Ont-elles valeur d'explication pour les élèves ? Les résultats technologiques rendus disponibles sont-ils effectivement exploités ?

③ ***L'organisation didactique***

❶ Comment se réalisent dans les temps et les lieux alloués, et selon quelles modalités (place du manuel, travail en classe et hors classe, etc.), les différents moments de l'étude – première rencontre avec les types de problèmes associés au thème, travail exploratoire visant à l'émergence d'une technique, travail d'élaboration technologique et théorique, travail de la technique et, plus largement, de l'organisation mathématique, institutionnalisation, évaluation ? Comment ces moments didactiques sont-ils articulés ? Jusqu'à quel point leurs modalités de réalisation apparaissent-elles installées dans la culture de la classe ?

❷ Qu'en est-il de la chronogenèse ? Quelle avancée de l'étude la séquence a-t-elle permis ?

– Cette avancée dans le temps didactique se manifeste-t-elle concrètement dans l'organisation mathématique effectivement construite ?
– S'est-elle faite au détriment de certains des moments de l'étude ? Lesquels ?
– Comment la mémoire didactique de la classe est-elle assurée ?

❸ Qu'en est-il de la topogénèse ?

– Quel est le *topos* de l'élève dans l'organisation de l'étude ? Les élèves l'occupent-ils franchement, ou seulement d'une manière aléatoire ?
– Quel est le *topos* du professeur dans la séquence ? Lui permet-il d'assurer adéquatement ses différents rôles (directeur d'étude, aide à l'étude, enseignant, etc.) ?
– Comment le *topos* du professeur s'articule-t-il avec le *topos* de l'élève ?

❹ Qu'en est-il de la mésogénèse ?

– De quelles ressources, en termes de médias et de milieux, les élèves disposent-ils ou construisent-ils sous la direction du professeur, dans le travail d'étude qui leur est dévolu ?
– Ces ressources leur permettent-elles de résoudre en quasi-autonomie les problèmes qu'ils ont à affronter ?

④ ***La gestion de la séquence et de la séance***

❶ La gestion du temps didactique permet-elle d'impulser une dynamique de l'étude adéquate ? La gestion de l'espace didactique conduit-elle à une exploitation satisfaisante des divers SD mobilisables et des dispositifs didactiques qu'ils proposent, notamment en ce qui concerne la mémoire didactique de la classe et de chacun des élèves ?

❷ La gestion par le professeur de son propre *topos* et du *topos* de l'élève, et en particulier des ressources que celui-ci peut mobiliser, lui permet-elle une prise de décision effective et une action efficace devant les difficultés rencontrées au cours de la séquence ?

⑤ ***Les passages imposés***

❶ Quel est le dispositif d'évaluation utilisé ? Quels sont les critères d'évaluation ? Quels sont leurs rôles ?

❷ Quelle est la contribution possible de la séquence à l'éducation à la citoyenneté ?

❸ Quelles formes d'aide ou de différenciation réalistes propose la séquence (ou pourrait-on proposer à partir de cette séquence) pour gérer la diversité des élèves ?

❹ Quelles formes de collaboration disciplinaires, interdisciplinaires ou intercatégorielles pourraient prolonger la séquence ou s'intégrer à elle ?

b) Les échanges avec les tuteurs et les participants conduisent à préciser que le travail du mardi 11 avril devrait aborder en priorité les points questions 1, 2 et 4 de la rubrique *Les passages imposés*.

→ Mardi 11 avril 2006 (9 h – 10 h 30)

0. Questions de la semaine // 1. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques

1. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques

On procède à la lecture commentée d'une version provisoire de la notice *Évaluation & notation* (jusqu'à la sous-section 3.1.6).

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 23 : mardi 11 avril 2006

0. Programme de la séance

➔ **Matin** : 1. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques.

➔ **Après-midi** : 1. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques *(suite)* // 2. Forum impromptu // 3. Gérer la diversité des élèves : un extrait des archives du Séminaire

Matin

1. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques

On poursuit la lecture commentée d'une version provisoire de la notice *Évaluation & notation* (jusqu'à l'introduction de la section 4.4).

Après-midi

1. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques

On poursuit la lecture commentée d'une version provisoire de la notice *Évaluation & notation,* jusqu'à l'introduction de la section 5, cette dernière faisant seulement l'objet d'une présentation d'ensemble complétée par l'examen de quelques points particuliers : sur le fait qu'il y a un moment pour évaluer – et des moments où l'on doit s'interdire d'évaluer ; sur la différence entre évaluation et analyse ; sur le fait qu'évaluer, c'est « dire la valeur », mais que celle-ci n'existe pas de façon *intrinsèque* – elle dépend du *projet* dans lequel le travail demandé vient prendre place ; sur la « docimo-rigidité » de certains correcteurs ou examinateurs qui tiennent *mordicus* à la note qu'ils ont assignée ; sur la confrontation de la réponse construire à des réponses allogènes (prises dans des manuels autres) ; sur l'existence et les fonctions du *barème* (attention à l'orthographe !), pour faire connaître – par une assignation quantitative – la place relative des travaux particuliers composant le « devoir » à évaluer par rapport au projet global de formation ; sur les évaluations nationales en 6^{e} et leurs usages, notamment le fait – contestable – de se référer en janvier à des erreurs de septembre…

3. Forum impromptu

3.1. Un choix de questions

Un choix de questions a été fait en séance, en fonction des principales « urgences » : on n'a retenu ci-après que quelques-unes d'entre elles.

3.2. Ébauches de réponses

On reprend ci-après des éléments de réponse évoqués en séance, avec quelques additifs.

♣ **Question 1**

Doit-on, lors de l'oral face au jury d'évaluation des enseignements, présenter, même rapidement, la classe, le collège, les élèves choisis pour la constitution du corpus B ou notre présentation doit-elle exclusivement porter sur la séquence présentée ? (NA, JT, 4^{e}, 21)

♦ **Ébauche de réponse**

La présentation *éventuelle* d'éléments d'information ou d'analyse relatifs à la classe, à l'établissement, aux élèves choisis pour constituer le corpus B n'est pas une priorité lors du passage devant le jury : de tels éléments ne doivent être avancés que de façon *fonctionnelle*, pour éclairer les réponses faites au questionnement principal, qui porte sur la séquence (et en particulier sur la séance observée *in situ*)

♣ **Question 2**

Quelles sont les raisons d'être des probabilités conditionnelles ? (GB, MJ, 3^{e}, 21)

♦ **Ébauche de réponse**

Les probabilités conditionnelles s'introduisent *notamment* lorsqu'on se pose la question de calculer la probabilité d'un « produit » d'événements, P(A *et* B) : on a alors, en règle générale, non pas $P(\text{A } et \text{ B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B})$, mais $P(\text{A } et \text{ B}) = P(\text{A}) \times P_{\text{A}}(\text{B})$. Que vaut le cofacteur noté $P_{\text{A}}(\text{B})$, c'est cela que l'on peut examiner…

♣ **Question 3**

En module de FGC, il a été question de trois types d'évaluation. De mémoire, il y avait : une première évaluation ; une évaluation *formative* (parfois on évoque aussi une évaluation *formatrice*) ; une évaluation *sommative*. Quel est le principe de l'évaluation formative (ou formatrice) et quels en sont les supports, les enjeux, etc., en mathématiques. (GB, OS, 2de, 21)

♦ **Ébauche de réponse**

Des éléments de réponse figurent dans la partie de la notice *Évaluation & notation* qui a été lue et commentée lors de la séance 22.

♣ **Question 4**

Le travail du jour me fait regretter le cloisonnement entre les disciplines d'enseignement. La question se pose de « casser » ce cloisonnement. L'interdisciplinarité aurait un « facteur de rendement » accru et éviterait des confusions dans l'esprit des élèves et des enseignants. (GB, OS, 2de, 21)

♦ **Ébauche de réponse**

La question fait allusion au calcul « avec unités » et, plus particulièrement, à l'algorithme « anglo-saxon » présenté lors de la séance 21 le mardi 4 avril (matin), qui conduit par exemple à écrire : $100 \text{ m/s} = \dfrac{100 \text{ m}}{10 \text{ s}} = \dfrac{100 \text{ m}}{10 \text{ s}} \times \dfrac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \times \dfrac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 36 \text{ km/h}$. Le problème évoqué est un immense problème – sur lequel on reviendra peut-être (à propos par exemple des « thèmes de convergence »).

♣ Question 5

En 4^e, on peut démontrer la formule $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ en calculant l'aire d'un rectangle de deux façons différentes. Comment généraliser à tous les nombres relatifs ? Comment motiver cette formule au collège ? (DB, JT, 4^e, 21)

♦ Ébauche de réponse

1) Il est à souligner en effet que la « démonstration » évoquée (par les aires) ne vaut que pour des nombres *a*, *b*, *c*, *d* strictement *positifs*.

2) Les sommes et différences de nombres relatifs ont été étudiées en 5^e. En 4^e, le programme prévoit l'introduction des *produits*, les propriétés utiles étant mises en place progressivement, comme l'indique le commentaire ci-dessous :

> Les élèves ont la pratique de l'utilisation de la multiplication des nombres positifs en écriture décimale ou fractionnaire. En s'appuyant sur ces connaissances, les opérations seront étendues au cas des nombres relatifs. Les justifications pourront être limitées à l'observation de l'extension de tables de multiplication ou à la généralisation de règles provenant de l'addition de nombres (par exemple $3 \times (–2) = –2 – 2 – 2 = –6$) en admettant les résultats dans les autres cas.

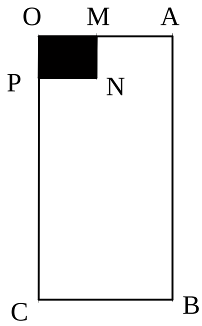
3) Le travail sur des programmes de calcul plus complexes est régi par les mêmes principes ; le programme indique ainsi :

> **Compétences exigibles**
> Sur des exemples numériques, écrire en utilisant correctement des parenthèses, des programmes de calcul portant sur des sommes ou des produits de nombres relatifs. Organiser et effectuer à la main ou à la calculatrice les séquences de calcul correspondantes.
>
> **Commentaires**
> À la suite du travail commencé en 5^e avec des nombres décimaux positifs, les élèves seront entraînés aux mêmes types de calculs avec des nombres relatifs. Ils seront ainsi progressivement familiarisés à l'usage des priorités opératoires intervenant dans les conventions usuelles d'écritures ainsi qu'à la gestion d'un programme de calcul utilisant des parenthèses.

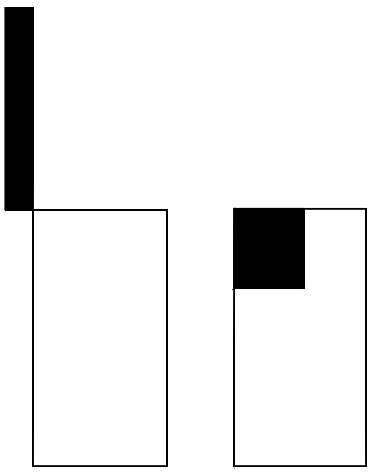
4) En 4^e, il convient donc déjà d'étendre la validité des identités $k(a \pm b) = ka \pm kb$ aux nombres relatifs. Cela fait, il viendra, en posant $k = a + b$: $(a + b)(c + d) = k(c + d) = kc + kd = (a + b)c + (a + b)d = \dots$

5) Pour saisir l'intérêt de pouvoir calculer sur des relatifs – c'est-à-dire *sans se soucier de savoir si l'on a affaire à des nombres positifs ou à des nombres négatifs* –, considérons par exemple l'équation $(10 – 3x)(5 – x) = 8$. On peut imaginer que cette équation modélise la transaction suivante : dans une redistribution à l'amiable de parcelles de jardins potagers, un propriétaire d'une parcelle de 6 m sur 7 m (et donc d'aire 42 m^2) accepte d'échanger sa parcelle contre une autre située plus près de chez lui, obtenue à partir d'une parcelle de 5 m

sur 10 m (et donc d'aire 50 m^2) en retranchant à celle-ci une petite parcelle rectangulaire de (5 – x) m sur (10 – 3x) m, d'aire 8 m^2, selon le plan que montre la figure ci-après.



L'équation envisagée correspondante se récrit $50 - 25x + 3x^2 = 8$, soit encore $3x^2 - 25x + 42 = 0$. Le propriétaire demande à son fils – qui fait des études de mathématiques – de résoudre cette équation. Ce dernier, qui, en bon étudiant français, ne cherche pas à connaître l'origine de l'équation proposée, trouve pour solutions $x = 6$ et $x = 2 + \frac{1}{3}$. En fait, seule la seconde solution convient : si l'on prenait $x = 6$, le petit rectangle à retirer aurait pour mesures –8 m et –1 m (dont le produit est bien égal à 8 m^2) et on aboutirait alors à « retirer » de la parcelle promise le petit rectangle ci-dessous à gauche ! La seule solution convenable est $x = 2 + \frac{1}{3}$ (qui correspond au petit rectangle représenté ci-dessous à droite).



Cela noté, lorsqu'on résout l'équation $(10 - 3x)(5 - x) = 8$ en développant le produit $(10 - 3x)(5 - x)$, on n'a pas à se soucier de savoir si les nombres que l'on manipule ainsi potentiellement sont ou non positifs : le calcul est valable que ces nombres soient positifs ou qu'ils soient négatifs. D'une manière générale, avant même de servir à *modéliser des situations « algébriques »*, les nombres relatifs sont motivés par leur rôle dans le *calcul* algébrique – qui, sans eux, deviendrait un enfer : de là le fait qu'on les nommait autrefois *nombres algébriques*.

♣ Question 6

Doit-on faire une distinction entre $f(x) = \ldots$ lorsqu'on parle d'une fonction f et $y = \ldots$ lorsqu'on parle de l'équation de la courbe représentative ? Ou peut-on indifféremment utiliser l'un ou l'autre (comme en séminaire ce jour : « Soit la fonction $y = \sin x$ ») ? (CC, JT, 2de, 21)

♦ Ébauche de réponse

On ne dit plus aujourd'hui, dans l'enseignement secondaire français, « la fonction $y = f(x)$ » : la fonction, ici, c'est f, qui peut être précisée en indiquant l'expression de l'image y de x par f : par exemple $x \mapsto y = f(x) = \sin x$. On pourra en revanche parler de la courbe d'équation $y = \dots$ (dans un certain repère).

♣ Question 7

> Avec les derniers événements, je vais avoir du mal à finir le programme. Quelle attitude adopter ? S'entendre avec tous les collègues pour ne pas aborder les mêmes notions ? Essayer de les voir au travers de DM ? Utiliser les heures d'AI (qui perdent alors tout leur sens) ?… (DC, OS, 2de, 21)

♦ Ébauche de réponse

1) Il s'agit là d'une question posée, dans des formulations voisines, par plusieurs participants dont on reproduit ci-après les variantes.

> 1. Le lycée étant bloqué depuis deux semaines, certains professeurs souhaitent inviter les élèves chez eux pour poursuivre les cours. Est-ce légitime ? (GC, MJ, 2de, 21)
>
> 2. Cela fait maintenant trois semaines que les élèves sont « en grève » et ils ont voté hier le blocus, sans limite de date. Bien que le temps didactique ne doive pas avancer hors classe, les élèves sont inquiets quant au programme et demandent à travailler. Est-ce possible d'organiser un forum privé, réservé aux élèves de la classe ? Le lycée ne met à disposition des élèves un « espar ». Comment en créer un ? (AC, OS, 2de, 21).
>
> 3. Que vaut-il mieux faire, finir le programme ou ne pas forcer le rythme, vu que nos élèves ont perdu une semaine et demie de cours ? Certains de mes collègues du lycée vont forcer le rythme pour boucler le programme, afin de permettre aux futurs élèves de première d'être « au niveau », mais je ne crois pas que cela sera le cas pour tous les élèves. Je compte prendre le temps prévu pour mes séquences en transformant peut-être les séances d'AI en cours supplémentaires. Est-ce judicieux ? (MD, JT, 2de, 21)
>
> 4. Dans mon lycée, les cours s'arrêtent fin mai. De plus mes élèves partent une semaine en voyage. Donc un calcul rapide – en supposant que le lycée soit débloqué cette semaine – m'indique qu'il reste cinq semaines. Il est évident que je ne pourrai pas aborder toutes les parties restantes du programme. Quels conseils me donnez-vous quant à la façon de choisir les thèmes à écarter ou à alléger ? (NFG, MJ, 2de, 21)
>
> 5. Quels dispositifs didactiques sont préconisés pour arriver à finir le programme malgré les perturbations actuelles ? (JG, OS, 2de, 21)

2) Une première disposition consiste à mobiliser de façon exceptionnelle le temps dévolu à des activités en demi-groupes (voire en groupes plus petits) pour en faire des heures en classe entière. Ainsi en va-t-il, en seconde, avec l'enseignement modulaire et l'aide individualisée : tout compris on aboutit alors, sur le papier, à 6 heures en SDP. Le regroupement de la classe – même pour quatre ou cinq heures, et non six, par exemple – aura le mérite, avant même de « gagner du temps d'horloge », de signifier à chacun le caractère exceptionnel de l'effort à fournir dans un cadre de *mobilisation didactique* dans lequel il convient de « resserrer les rangs ». Plusieurs observations doivent cependant être faites. Tout d'abord, il se peut que cette banalisation horaire ne puisse avoir lieu, notamment en ce qui concerne les heures de module (sauf à trouver un arrangement avec le ou les professeurs « intéressés » par les mêmes heures et les mêmes élèves). Ensuite, il convient de toute façon d'avoir l'accord du chef d'établissement, des collègues, des parents, des élèves : la modification envisagée ne prend

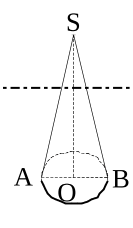
son sens que dans le cadre d’un projet collectif explicité et partagé. Enfin, on ne saurait dans le cadre exceptionnel ainsi créé ignorer les fonctions didactiques normalement assumées dans les SDA ainsi intégrés au SDP : au lieu par exemple que la « modulation » de la mise en place des OML étudiées se fasse « en modules », elle se fera ici en classe entière. D’une façon plus générale, il conviendra de faire une place sans doute un peu réduite mais néanmoins effective aux différents *moments de l’étude*. Notons encore qu’on peut envisager de ne banaliser qu’une *partie* du temps de l’étude disponible, dans le but par exemple de conserver une aide spécifique à l’intention des élèves les plus scolairement démunis.

3) Que faire dans le temps disponible dès lors que ce temps d’horloge apparaît gravement insuffisant ? En certaines disciplines, nombre de professeurs peut-être sont portés, en un tel cas, à accélérer leur enseignement en « faisant cours » – avec prise de notes corrélative des élèves – de façon quasi continue et à toute vitesse. On préconisera ici une autre voie, celle d’une organisation didactique alternative, modeste, qui fut autrefois classique, et qui n’est nullement illégitime, où l’on étudie une matière non pas en suivant le *cours* du professeur mais en examinant l’*exposé* de cette matière *dans tel livre* – sous la direction du professeur. Le choix de l’ouvrage étudié est ici la *clé* de l’économie temporelle à faire prévaloir : on choisira donc un livre présentant par exemple des « résumés de cours » assortis de quelques exercices emblématiques, soit ce qu’on peut nommer un « compendium », un « précis », un « abrégé », qui offre – c’est le principe de la chose – un *digest* (le mot est anglais) d’un ensemble d’items. Muni alors des indications du programme sur le thème ou le sujet à étudier, on en bornera l’étude – au moins en un premier temps – au condensé offert par l’ouvrage choisi.

4) Prenons pour ouvrage le mémento intitulé *Maths 6^e 5^e 4^e 3^e* paru chez Hachette Éducation en 2000 (coll. « Maxi Mémento »). Et considérons à titre d’exemple le thème du *cône de révolution* en 4^e ou en 3^e. L’ouvrage indiqué lui consacre deux pages – une « fiche » – que l’on a reproduites ci-après. Le contrat passé avec la classe sera alors *d’étudier ces deux pages*, en classe sous la direction du professeur, mais aussi « à la maison », en complétant si nécessaire leur étude par un petit corpus d’exercices & problèmes fourni par le professeur (voire élaboré avec les élèves à partir de diverses sources). L’étude en question visera à dégager les types de tâches (= les types de problèmes) présents ou représentés dans le condensé étudié, ainsi que les techniques, la technologie, les éléments théoriques qui les accompagnent, l’objectif étant de parvenir à une maîtrise raisonnable de ces praxéologies mathématiques de la façon la moins dispendieuse au plan de l’économie temporelle.

5) Dans le cas où le sujet ou le thème étudié requiert une étude plus ample que celle permise par le dispositif évoqué ici, on pourra scinder le travail en deux « unités », par exemple *Cône de révolution I* et *Cône de révolution II* – organisation qui permet la reprise et le travail d’après-coup, contre la fiction d’un apprentissage instantanée qui répond, en vérité, à la fiction du temps didactique irréductible. La seconde unité, programmée un peu plus tard – dans une période de temps, il est vrai, resserrée – sera constituée surtout d’un corpus d’exercices & problèmes plus étendu, résultant par exemple (en 3^e) d’une compilation des épreuves du DNB, comme il en va pour l’exercice suivant – qui n’a pas été choisi pour son originalité, mais qui a été proposé dans les académies de Paris, Créteil et Versailles en juin 1997.

L’unité de longueur est le centimètre.
Une bougie a la forme d’un cône de révolution de sommet S ;
sa base est un cercle de centre O et de diamètre AB = 10 ; on donne SA = 13.



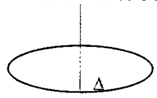
1. Montrer que la hauteur de la bougie a pour longueur 12 cm.
2. **a**. Calculer la valeur exacte du volume de la bougie en cm^3.
(On écrira cette valeur sous la forme $k \times \pi$, où k est un nombre entier.)
b. Combien peut-on fabriquer de bougies de ce type avec 4 litres de cire ?
(On rappelle : 1 litre = 1000 cm^3.)

110
TRAVAUX GÉOMÉTRIQUES
Les solides

CÔNE DE RÉVOLUTION

EN SAVOIR PLUS

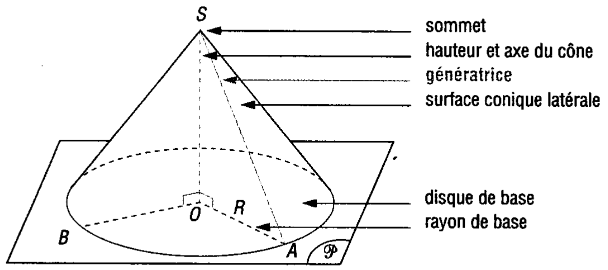
● L'**axe** d'un disque est :
– la droite perpendiculaire à son plan en son centre ;
– l'ensemble de tous les points de l'espace équidistants de tous les points du cercle.
On dit aussi **axe du cercle**.



● Pour savoir si une droite et un plan sont perpendiculaires, se reporter aux rubriques « En savoir plus » :
– Parallélépipède rectangle, cube, **107** ;
– Prismes droits, **108** ;
– Cylindre de révolution, **109** ;
– Boule et sphère, **112**.

COMPRENDRE ET DÉCRIRE

4e 3e ● **Qu'est-ce qu'un cône de révolution ?**
Un cône de révolution est limité par un disque de base et une surface latérale conique.



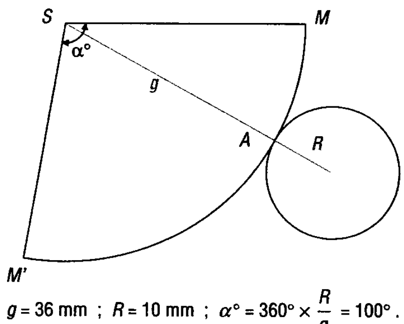
Ce cône de révolution peut être engendré par la rotation complète du triangle rectangle SOA autour de l'axe (SO). Son sommet appartient à l'axe du disque de base, c'est-à-dire à la perpendiculaire en son centre au plan qui le contient.

4e 3e ● **Comment fabrique-t-on un cône de révolution ?**
Le **développement** (ou patron) d'un cône de révolution se compose d'un *disque* et d'un **secteur de disque**.

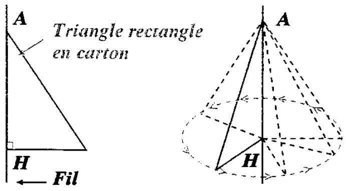
• Le disque est la base du cône ; son rayon R est connu.

• Le secteur donne la surface conique ; son rayon est la génératrice g ; la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ est $2\pi R$; La mesure de $\alpha°$ de son angle au centre est obtenue en écrivant

$$2\pi R = 2\pi g \times \frac{\alpha}{360}.$$



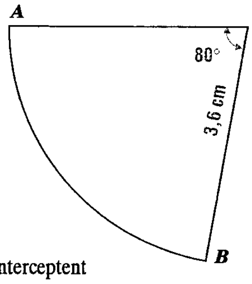
$g = 36$ mm ; $R = 10$ mm ; $\alpha° = 360° \times \frac{R}{g} = 100°$.



La révolution (tour complet) d'un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit engendre (donne naissance à) un* cône de révolution*.
L'hypoténuse génère (engendre) la surface conique, d'où le nom de génératrice.

UTILISER SES CONNAISSANCES

4e 3e ● *La figure ci-contre représente une partie du patron d'un cône de révolution (la surface conique). Quel est le rayon du disque de base ?*



Calcul de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
Un cercle de 3,6 cm de rayon a une longueur égale à $(2 \times \pi \times 3{,}6)$ cm ou $7{,}2\pi$ cm.

On sait que les longueurs des arcs sont proportionnelles aux angles au centre qui les interceptent (*cf.* Tableaux de proportionnalité, **119**).

Angles au centre (en °)	360	80
Longueur des arcs (cm)	7,2 π	*x*

$x \times 360 = 80 \times 7{,}2\pi$; d'où $x = 1{,}6\pi$.
La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est égale au périmètre du disque de base.
Le périmètre du disque de base est $1{,}6\,\pi$ cm ; si R est son rayon, c'est aussi $2\pi R$ cm. Donc $R = 0{,}8$. Le rayon du disque de base est 0,8 cm.

4e 3e ● *Dessiner le patron d'un cône de révolution sachant que le rayon du disque de base est* 3 cm *et que chaque génératrice a* 5 cm *de long.*
Découper ce patron et coller.

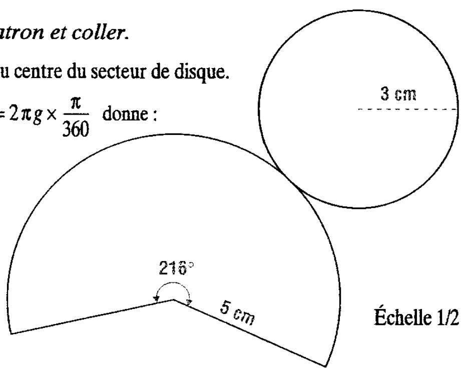
Calcul de l'angle au centre du secteur de disque.

La formule $2\pi R = 2\pi g \times \frac{\pi}{360}$ donne :

$\alpha = 360 \times \frac{R}{g}$;

$\alpha = 360 \times \frac{3}{5}$;

$\alpha = 216°$.



Échelle 1/2

VOIR AUSSI :
Aires et volumes, 114
Pythagore et l'espace, 115
Sections planes, 116
Proportionnalité, 119

6) Il est en revanche peu acceptable de recourir à des moyens privés – telle l'invitation à se retrouver au domicile de l'enseignant, ou même en un tiers lieu regardé comme « public » (cafés, etc.). Il appartient à l'établissement d'accueillir les dispositifs de travail exceptionnels que l'on mettra en œuvre au vu et au su de tous, et non en catimini : des points de rendez-vous pourront par exemple être proposés à la classe, éventuellement en dehors des horaires usuels, pour réguler l'étude d'un document (« polycopié » ou autre) distribué aux élèves afin qu'ils l'examinent essentiellement hors classe, en autonomie didactique. Ainsi qu'on l'a souligné déjà, le caractère exceptionnel de telles dispositions comme des dispositions éventuellement envisagées dans les circonstances présentes suppose la bonne volonté d'une multiplicité de « partenaires » – ce qui sera indispensable bien sûr pour obtenir, plus exceptionnellement

encore, l'ouverture et le fonctionnement quasi régulier de l'établissement un mercredi après-midi, voire un samedi après-midi.

7) Le recours à des moyens électroniques en lieu et place des traditionnels « polycopiés » et des documents manuscrits ou imprimés de toute nature diffusés aux élèves doit respecter quelques principes que l'on rappelle succinctement. Tout d'abord, il n'est guère raisonnable de modifier fortement, alors que s'exerce la pression du temps qui manque, les usages de communication mis en place dans la classe : créer un *espar* (ou un *spip*, etc.) qui n'existerait pas déjà et – surtout – qui n'aurait pas déjà été intégré au fonctionnement de la classe paraît de nature à compliquer la situation et non à en faciliter la gestion. Dans cette ligne même, on gagnera donc, à court terme, à se contenter de mettre à la disposition des élèves, par l'emploi de TIC appropriées, ce que, dans le face-à-face de la classe, on leur eût communiqué antérieurement en main propre et sous forme imprimée. Bien entendu, on devra s'assurer que les élèves qui ne disposeraient pas personnellement des moyens électroniques indispensables pour mettre en œuvre la procédure imaginée (ou qui se refuseraient, pour de bonnes ou de moins bonnes raisons, à en user dans ce but) puissent obtenir les documents utiles au travail de la classe *sous forme manuscrite ou imprimée* – en s'adressant *par exemple*, en dehors même des heures de mathématiques, à la personne en charge de l'accueil à l'entrée de l'établissement.

8) Contrairement à ce qui a pu être avancé par certains lors de la séance 23, il est inexact d'affirmer qu'il serait illicite d'adresser les documents utiles aux élèves par le truchement de leur boîte à lettres électronique. Même s'il est recommandé de faire savoir aux parents (quand l'usage n'en est pas déjà établi) que certains documents pourront à l'avenir être adressés à leur enfant par courrier électronique, même si, bien entendu, un accord des parents ou du tuteur est indispensable si l'on doit utiliser, non le courrier électronique de l'enfant (l'expérience montre que l'adresse personnelle de l'élève est assez fréquemment peu fiable), mais celui de l'un ou l'autre des parents (ou des membres de la fratrie, etc.), il n'en reste pas moins que le fait d'adresser un courriel à un élève n'est pas plus illicite que le fait de lui adresser un courrier postal. Ce qui est illicite, en revanche, et ce à quoi faisait référence l'une des études de cas – intitulée « Utiliser la messagerie avec les élèves » – proposée dans le cadre de la préparation aux C2i2e (http://www.aix-mrs.iufm.fr/C2i/rubrique.php3?id_rubrique=8), c'est le fait pour l'enseignant de pénétrer dans la boîte à lettres électronique d'un élève dont, pour telle ou telle raison liée à son activité, il connaîtrait l'adresse et le mot de passe. La chose paraît évidente si on la compare à son analogue non électronique – le fait pour l'enseignant de prétendre avoir accès à l'ensemble du courrier reçu par l'élève à son domicile, au motif par exemple que, parmi ce courrier, pourraient figurer des missives dont il serait l'expéditeur.

♣ Question 8

A-t-on séminaire et GFP le mardi 2 mai ? (FEB, CR, 4^{e}, 21)

♦ Ébauche de réponse

La réponse est positive !

4. Gérer la diversité des élèves : un extrait des archives du Séminaire

Présentation d'un document diffusé aux participants, rassemblant des extraits des notes du Séminaire 2004-2005 relatives au thème de la *gestion de la diversité*.

IUFM d’Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

➔ Séance 24 : mardi 2 mai 2006

0. Programme de la séance

0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions : poursuites & antici… // 2. Forum des questions : exposés du jour // 3. L’Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques.

1. Forum des questions : poursuites & antici…

Le forum des questions se poursuivra pendant quelques semaines encore, sous forme électronique, dans un bulletin intitulé ***Addenda*** que l’on trouvera en ligne sur la page où se trouvent les résumés des séances de ce séminaire.

2. Forum des questions : exposés du jour

2.1. Usages des nombres relatifs

a) On écoute un exposé de *CR* sur la question suivante :

Exposé 36. Quels usages peut-on faire des nombres relatifs dans la modélisation de systèmes intra- et extramathématiques ?

b) Remarques et commentaires

2.2. Fonctions trigonométriques

a) On écoute un exposé d’*EB* sur la question suivante :

Exposé 32. Comment peut-on motiver l’introduction des « fonctions trigonométriques » (cosinus, sinus, tangente) ?

b) Remarques et commentaires

2.3. Autres exposés

Le texte des exposés ci-après, non présentés oralement, sera prochainement mis en ligne.

Exposé 30. Comment faire apparaître l’utilité des fonctions x^2 et $\frac{1}{x}$ en classe de seconde ? (LN)

Exposé 35. Quels besoins numériques motivent l'introduction des nombres relatifs ? Et comment organiser la rencontre des élèves avec ces nombres ? (CM)

2. L'Encyclopédie 2005-2006 du professeur de mathématiques

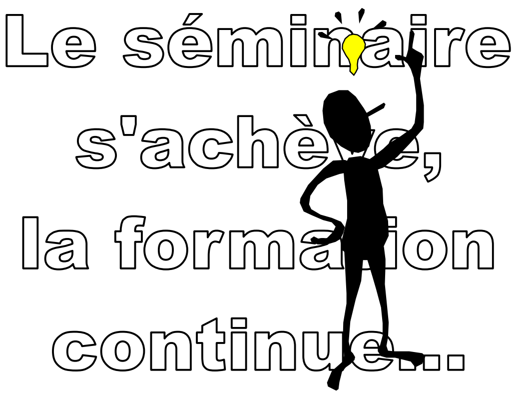
2.1. La notice *Évaluation & notation*

a) À propos des erreurs : une scène du film *Angèle*, de Marcel Pagnol (1934), mettant en scène Fernandel (Saturnin, un garçon de ferme au grand cœur) dans un monologue adressé à Orane Demazis (Angèle, fille d'un fermier aisé, contrainte à se prostituer), illustre le rôle essentiel de l'oubli dans la construction ou la reconstruction du rapport au monde : « Et si un jour, par fantaisie, tu venais me dire : "Saturnin, tu te rappelles le jour où je suis tombé dans le fumier ?", je te dirai : "Quel fumier ? Où ça ? Quand ? Comment ?"… » (Sur *Angèle*, voir http://www.marcel-pagnol.com/fr/oeuvre/cineaste_10.htm.)

b) Présentation de la version complète de la notice.

2.2. La notice *L'espace de l'étude*

Lecture cursive.



IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

Addenda 1 – Addenda 2 – Addenda 3

Addenda, 25e semaine

1. À propos du PER de statistique

a) L'étude conduite lors des séances 19 & 20 avait dégagé et laissé de côté les questions suivantes, que l'on examinera maintenant.

1. Où est la recherche ? Où sont les questions cruciales ? (PL, RR)
2. Sur les questions posées en début de PER, peut-il être intéressant d'en faire formuler par les élèves ? (MG, SP, NP)
3. Peut-on demander aux élèves de faire le bilan de l'étude en travail hors classe avant de le faire en classe ? (FE, CM)
4. Quelle synthèse peut-on bâtir avec les éléments observés sur le PER de statistique ? (GB, JG)
5. Y a-t-il une synthèse complémentaire au travail sur la longueur des phrases par rapport au travail sur les notes ? (AC, MT)
6. Comment insérer les moments d'institutionnalisation portant sur des notions « générales » (médiane, etc.) ? (NA, LN, AS)

b) « La » recherche a bien sûr pour objet central de répondre à la question première suivante : « Peut-on savoir, et comment, si un bébé qui pèse 3,4 kg à la naissance est un gros bébé, ou si un éléphant de deux tonnes est un petit éléphant, etc., et peut-on savoir – et comment – combien un joueur de foot doit avoir marqué de buts dans une saison pour qu'on puisse dire qu'il en a marqué "beaucoup" ? » La recherche engagée a aussi pour objet de répondre à une foule de questions apparentées, comme : « Un bébé de 3,4 kg, est-ce un très gros bébé ? Ce serait quoi, un très gros bébé ? Un éléphant de deux tonnes, si ce n'est pas un petit éléphant, est-ce un éléphant "moyen gros" ? Ce serait quoi, un éléphant "moyen gros" ? », etc.

1) En fait, ce parcours d'étude et de recherche est *a priori* ouvert *à tous les problèmes de la statistique à une variable*, même si, en conformité avec le programme de 3e, tout problème de cette sorte ne saurait y être étudié de façon poussée – que l'on songe ici au problème de l'échantillonnage, croisé lors de la troisième étude statistique, intitulée « Longueur de phrases ».

2) Ce qui doit être souligné, c'est que, en un PER, les questions que l'on peut étudier ne sont pas *a priori* fixées : la liste de ces questions ne saurait être établie à l'avance, et reste en principe indéfiniment ouverte.

c) La toute première question « cruciale » est en fait prise en charge *par le professeur*. Face à la question « Un bébé qui pèse 3,4 kg à la naissance, c'est un gros bébé ? », la question cruciale à poser était bien sûr : « *Comment faire pour savoir si* un bébé qui pèse 3,4 kg à la naissance est un gros bébé ? » En fait, pour bâtir le scénario présenté, on a supposé 1) que la classe dans laquelle ce scénario devait être mis en œuvre n'était pas habituée à travailler par questions cruciales, 2) qu'elle n'avait aucune culture statistique « authentique ». Dans ces conditions, le choix a été fait 1) de réaliser une entrée en matière « culturelle » (c'est là l'objet de la première section du scénario, « L'objet de la statistique »), ce qui est, en règle générale, une quasi-obligation lors du lancement d'un PER *neuf*, 2) de faire suivre cette entrée en matière, dans le cadre de l'étude « Un devoir en classe », par la mobilisation spontanée, non débattue encore, d'une première technique – à portée limitée – relative au type de tâches au cœur du PER.

1) Dans le cas retenu, en effet, on s'attend (et c'est ce qui s'est produit lors de la réalisation princeps dans une classe de 3e) à ce que les élèves arrivent spontanément et très vite à une technique raisonnable – quoique rudimentaire – pour répondre à la question sur le caractère « satisfaisant » ou non de la note 11 : en l'espèce, la série des 28 notes étant projetée à l'écran, on les voit se mettre à compter avec leur doigt le nombre de notes inférieures ou égales à 11. En ce cas, il n'est nul besoin que soit posée dans la classe la question cruciale « Comment déterminer le nombre de notes de la série inférieures ou égales à 11 ? ».

2) On doit se rappeler, plus généralement, que l'explicitation de questions cruciales n'est utile que lorsqu'on bute sur une tâche qui risquerait, sinon, de demeurer durablement problématique, et non lorsqu'on croit pouvoir accomplir cette tâche d'une certaine manière – même si l'on doit s'apercevoir un peu plus tard que cette manière de faire est inefficace ou impuissante devant tel ou tel autre spécimen du même type de tâches.

3) Une telle rencontre se produira lors de la deuxième étude, avec les 794 notes de l'épreuve académique de mathématiques. Mais lorsque cette rencontre se produit, la classe a été munie – par le moyen d'une manœuvre un rien « artificielle », amorcée par la question 2 de la première étude – d'une technique dont la classe va alors surtout s'assurer qu'elle résiste au changement consistant à passer d'une série de longueur 28 à une série de longueur 794.

4) En revanche, la question 2 de la première étude incorpore bien deux questions cruciales, énoncées, il est vrai, dans l'ordre inverse de l'ordre génétique : la première (comment ranger les 28 notes par ordre croissant ?) devrait normalement suivre la seconde – comment le fait de disposer des 28 notes par ordre croissant permet-il de déterminer si la note 11 est « satisfaisante » ou non ?

5) Comme le suggèrent les cas précédents, dans le travail réellement impulsé dans une classe par le professeur opérant à partir du scénario examiné, le volume et le contenu du travail de formulation de questions cruciales dépendra bien évidemment des réactions de la classe et de la dynamique de l'étude : le scénario ne fait à cet égard qu'ébaucher un plan d'action qui devra être complété *in situ*.

6) Nombre de questions que le scénario laisse filer (volontairement) dans cette toute première étape du PER devront être posées par la classe lors des phases de *synthèse* : ainsi devra-t-on notamment élaborer une *technologie* explicite, relative à la technique permettant de déterminer si une valeur donnée de la série étudiée est supérieure ou égale à au moins k % des valeurs de la série et, plus généralement, quelle est la plus petite valeur de la série ayant cette propriété. La recherche d'une telle justification devra alors généralement prendre appui sur un petit nombre de questions cruciales.

d) Les questions posées en début de PER, dans le cadre d'une introduction « culturelle », fixent un premier cadre directeur au parcours ainsi lancé. Le fait que la classe devienne capable de produire – et même de produire indéfiniment – d'autres questions des types envisagés est évidemment un objectif de formation assigné au PER. Mais, pour des raisons que l'on a suggérées ci-dessus, il ne convient sans doute pas de s'attarder à cet « exercice » dans le cadre de la première séance – à moins que la dynamique propre à telle classe ne l'impose de façon peu ou prou incontournable. Hormis en un tel cas, donc, le choix est *d'avancer*. Le travail de formulation évoqué n'aurait au reste ici qu'un caractère *formel*. En revanche, dans la suite du PER (que le scénario n'explicite pas), il conviendra de demander aux élèves de proposer des sujets d'études statistiques nouvelles – entre lesquelles il faudra choisir celles que l'on mènera à bien (certaines demeureront non réalisées). Ce sera alors l'occasion d'obtenir des élèves de façon *fonctionnelle* qu'ils s'efforcent de proposer des questions des types envisagés : on notera que cette situation est mentionnée dans l'exorde de la troisième étude (« Longueur de phrases »), où l'on évoque un binôme d'élèves qui propose la question suivante : « Dans l'écriture journalistique de qualité, c'est long comment, une phrase longue ? »

e) D'une façon générale, « demander aux élèves de faire le bilan de l'étude en travail hors classe avant de le faire en classe » ou plutôt de faire *hors classe* une *préparation* du bilan de l'étude que l'on fera ensuite *en classe* est un type de travail des plus recommandés. Dans les notes de la séance 19 de ce séminaire, on lit par exemple ceci :

> … la distinction des divers *moments* de l'étude est un élément important de l'organisation de l'étude : on ne passe pas sans autre forme de procès d'un moment où s'élabore une technique à un moment où se construit la synthèse – les moments sont hétérogènes entre eux. Pour cette raison, il est bon par exemple de renvoyer la synthèse *et même déjà le bilan d'AER* à la séance *suivante* (à condition que celle-ci n'ait pas lieu le même jour), avec préparation du bilan ou de la synthèse entre ces séances, et cela afin que le temps fasse son œuvre et permette une mise à distance favorable à une reprise distanciée par rapport à la chronique des menus faits de l'élaboration de la technique ou du bloc technologique en question.

f) Quelle synthèse peut-on attendre du travail qui devrait être réalisé à partir de l'amorce de PER que l'on a scénarisée ?

1) On devra trouver dans une telle synthèse l'organisation mathématique formée autour du type de tâches « fondamental » étudié, comme on le voit ci-après.

> Collège Georges Bouligand
> 3e7 – Mathématiques
>
> **Synthèse : PER de statistique**
>
> (Dernière mise à jour : *22-03-06*)
>
> ……………………………………………………………………………………………………
>
> **II. Le type de tâches fondamental**
>
> **a) Le type de tâches.** Étant donné une série statistique de longueur n et un pourcentage k %, déterminer la plus petite valeur de cette série qui est supérieure ou égale à au moins k % des valeurs de la série.

b) La technique. On range la série par ordre croissant ; on calcule alors l'entier N qui est le plus petit entier supérieur ou égal au nombre $k\ \% \times n$ (lequel, en général, n'est pas entier) ; la valeur cherchée est alors la valeur de rang N dans la série rangée par ordre croissant.

c) Exemple. On cherche la plus petite valeur x d'une série de longueur $n = 162$ telle qu'au moins 80 % des valeurs de la série soit inférieure ou égale à x. On a : 80 % × 162 = 129,6. Le plus petit entier N supérieur ou égal à 129,6 est 130. La valeur cherchée est donc celle qui occupe le rang 130 dans la série rangée par ordre croissant.

d) Justification & remarques. 1) Supposons que la série que l'on vient d'évoquer se présente ainsi :

Rang : …128 129 130 131 132 133 …
Valeur : …013 014 015 016 017 017 …

La valeur donnée par la technique est 15. Cette valeur est supérieure ou égale à 130 valeurs de la série, soit à $\frac{130}{162} = \frac{13000}{162}\ \% \approx 80{,}25\ \%$ de l'effectif de la série. La valeur immédiatement plus petite, 14, ne convient pas : elle n'est supérieure ou égale qu'à 129 valeurs de la série, c'est-à-dire à $\frac{129}{162} = \frac{12900}{162}\ \% \approx 79{,}63\ \%$ de l'effectif de la série.

2) Supposons que la série se présente ainsi :

Rang : …128 129 130 131 132 133 …
Valeur : …014 015 015 016 017 017 …

La valeur cherchée est toujours 15 ; mais on voit que la valeur classée au 129e rang convient aussi, puisque c'est la même ! Le rang qu'on a calculé (130) n'est donc pas le plus petit rang possible. Mais la *valeur* ayant ce rang est bien la plus petite possible. La valeur immédiatement plus petite, 14, est supérieure ou égale à 128 valeurs, ce qui ne représente que $\frac{128}{162} = \frac{12800}{162}\ \% \approx 79\ \%$ de l'effectif de la série.

3) Supposons enfin que la série se présente ainsi :

Rang : …128 129 130 131 132 133 134…
Valeur : …014 014 015 015 015 015 016…

La valeur cherchée est toujours 15 ; mais, ici, cette valeur, qui, dans les cas précédents, était la plus petite possible qui soit supérieure ou égale à 80 % ou « juste un peu plus » des valeurs de la série, est en fait supérieure ou égale à « sensiblement plus » de 80 % des valeurs de la série, puisqu'on a en effet : $\frac{133}{162} = \frac{13300}{162}\ \% \approx 82{,}1\ \%$.

4) On peut généraliser la justification précédente en utilisant des lettres : la valeur x cherchée occupe le rang N : elle est donc supérieure ou égale à $\frac{100\ N}{n}\ \%$ de l'effectif de la population. Comme $N \geq k\ \% \times n$, on a $100\ N \geq k \times n$ et il vient donc : $\frac{100\ N}{n}\ \% \geq \frac{k \times n}{n}\ \% = k\ \%$.

…………………………………………………………………………………………………

2) On devra également trouver dans la synthèse, mais peut-être *ultérieurement,* les éléments suivants, issus de la troisième étude statistique (éléments qui, en attendant de faire l'objet d'une synthèse, seront consignés dans une forme adéquate dans les bilans d'étape).

Collège Georges Bouligand

3[e]7 – Mathématiques

Synthèse : PER de statistique

(Dernière mise à jour : *22-03-06*)

…………………………………………………………………………………………………

III. Les grands problèmes du travail statistique

a) Définir la population. Dans l'étude statistique d'un caractère, on doit préciser ce qu'est la *population* sur laquelle on étudie le caractère : à quelle population d'élèves, ou de bébés, ou d'éléphants, ou de joueurs de football s'intéresse-t-on exactement ? Répondre à ce type de questions suppose une enquête dont l'objet n'est pas, en général, mathématique, mais à laquelle il faut tout de même procéder – de façon plus ou moins approfondie.

b) Définir l'échantillon. En général, on ne dispose pas de la valeur du caractère étudié pour chacun des « individus » de la population : on s'en tiendra à étudier ce caractère sur un ou plusieurs échantillons de cette population. L'idéal serait de disposer d'échantillons dits « représentatifs » de la population, c'est-à-dire qui « ressemblent » à la population. Mais on est souvent loin de cet idéal : on devra se contenter en général d'échantillons *disponibles*, c'est-à-dire pour lesquels on dispose des données utiles. Pour cette raison, une étude statistique est presque toujours partielle et provisoire.

c) Définir le caractère. De la même façon que la population est souvent indiquée de façon approximative (que ce soit celle des bébés, des footballeurs ou des éléphants), le caractère que l'on est censé étudier sur cette population est lui-même souvent *mal défini*. Qu'est-ce, par exemple, que la « longueur » d'une phrase ? Si, de même, on étudie le caractère « nombre d'occurrences de la lettre *a* » dans la population des « phrases françaises », va-t-on compter les occurrences de *à* et de *â* ? Comptera-t-on aussi les occurrences de *æ* ? Etc. Dans tous les cas, il conviendra de préciser le choix, en général en partie *conventionnel*, que l'on aura fait.

…………………………………………………………………………………………………

3) Dans la synthèse relative au PER de statistique, on devra évidemment trouver la mention explicite des « grandes » notions qui auront émergé. Ainsi pourra-t-on avoir le développement suivant.

Collège Georges Bouligand

3[e]7 – Mathématiques

Synthèse : PER de statistique

(Dernière mise à jour : *22-03-06*)

…………………………………………………………………………………………………

IV. Les grandes notions de la statistique : la médiane

a) Définition. Étant donné une série statistique de longueur n, la plus petite valeur de cette série qui est supérieure ou égale à au moins 50 % des valeurs de la série est appelée *la médiane*.

b) Technique de calcul. Si la longueur n de la série est un entier impair $2m + 1$, la médiane est la valeur de rang $m + 1$. Si la longueur de la série est un entier pair $2m$, la médiane est la valeur de rang m.

d) Justification & remarques. 1) Supposons que la série étudiée comporte 163 valeurs et se présente ainsi :

Rang : … 79 80 81 82 83 84 …

Valeur : … 07 07 08 09 10 10 …

Ici $n = 163 = 2 \times 81 + 1$: la médiane est la valeur occupant le 82ᵉ rang, soit 9. On a bien, en effet, d'une part $\frac{82}{163} = \frac{8200}{163}$ % ≈ 50,3 %, d'autre part $\frac{81}{163} = \frac{8100}{163}$ % ≈ 49,7 %.

2) Supposons que la série étudiée comporte 162 valeurs et se présente ainsi :

Rang : …79 80 81 82 83 84 …
Valeur : …07 07 08 09 10 10 …

Ici $n = 162 = 2 \times 81$: la médiane est la valeur occupant le 81ᵉ rang, soit 8. On a cette fois $\frac{81}{162} = \frac{8100}{162}$ % = 50 %.

3) On peut justifier la technique indiquée en utilisant des lettres. Lorsque $n = 2m + 1$, la valeur x occupant le rang $m + 1$ est supérieure ou égale à $\frac{m+1}{n}$ de l'effectif de la population ; or on a : $\frac{m+1}{n} = \frac{m+1}{2m+1} = \frac{1}{2}\frac{m+1}{m+0,5} > \frac{1}{2}$ = 50 %. Lorsque $n = 2m$, …

……………………………………………………………………………………………………

2. À propos de probabilités

2.1. Probabilités conditionnelles

a) Plusieurs questions ont été formulées à propos de l'enseignement de la notion de probabilité conditionnelle. La première est ancienne : la voici.

Je n'arrive pas à faire l'écriture des probabilités conditionnelles avec Word. (MEK (MJ, 5ᵉ, 9)

1) La notion de probabilité conditionnelle est *mentionnée* dans le programme de 1ʳᵉ ES dans le passage suivant.

Statistique
…
Contenus
Tableau à double entrée : étude fréquentielle ; lien entre arbre et tableau à double entrée ; notion de fréquence de *A* sachant *B*.
Commentaires
La fréquence de *A* sachant *B* sera notée $f_B(A)$; elle prépare à la notion de probabilité conditionnelle qui sera traitée en terminale.

2) Le programme de terminale ES précise ceci.

Contenus
Conditionnement et indépendance.
Modalités de mise en œuvre
On justifiera la définition de la probabilité de B sachant A, notée $P_A(B)$, par des calculs fréquentiels.
On utilisera à bon escient les représentations telles que tableaux, arbres, diagrammes… efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités.
Commentaires
Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve.

3) La même précision est apportée dans le programme de terminale S et dans celui de terminale L : la « probabilité de B sachant A » se note $P_A(B)$, et non, par exemple, P(B / A) ou P(B | A).

b) Une autre question a été soulevées deux fois par son auteur.

1. Je n'arrive pas à trouver un manuel faisant apparaître la raison d'être des probabilités conditionnelles. En connaissez-vous ? (GB, MJ, 3e, 21)

2. Quelles sont les raisons d'être des probabilités conditionnelles ? (GB, MJ, 3e, 21)

1) Le problème générique de la recherche des raisons d'être a été abordé lors de la séance 15 du Séminaire : on ne le reprendra pas ici. Dans le cas d'espèce évoqué, voici par exemple un bref passage de la traduction en anglais (américain) d'un ouvrage du probabiliste russe Yakov G. Sinai intitulé *Probability Theory. An Introductory Course* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992, p. 43) :

> The importance of the concept of conditional probability lies in the fact that for a large number of problems the initial data consist of conditional probabilities from which one wishes to find properties of ordinary non-conditional probabilities.

2) Dans un enseignement en terminale, on pourra s'en tenir à ce point de vue, qu'illustre par exemple la situation suivante.

> Deux usines fabriquent des ampoules électriques ; sur le marché local, la première assure 70 % de la production, la seconde 30 %. Une enquête indique que 83 % des ampoules produites par la première usine satisfont aux normes prescrites, contre seulement 63 % des ampoules produites pour la seconde.

• Ici, en fait, l'énoncé indique des « fréquences théoriques », ce qu'il faut entendre ainsi : sur un très grand nombre n d'ampoules vendues sur le marché local, le nombre n_1 de celles qui proviennent de la première usine est *peu différent* de 0,7 n, et cela « en moyenne », etc. En d'autres termes, l'énoncé propose un modèle (probabiliste) du marché local des ampoules : on y considère que la *probabilité* qu'une ampoule vendue ait été produite par la première usine vaut 70 % = 0,7, etc. On revient plus loin sur ces notions, que l'on utilise tout d'abord, ici, pour illustrer l'usage des « fréquences théoriques conditionnelles » ou « probabilités conditionnelles ».

• Désignons par U l'événement « l'ampoule vendue sur le marché provient de la première usine », par V l'événement « l'ampoule vendue sur le marché provient de la deuxième usine ». Désignons par K l'événement « l'ampoule vendue est conforme aux normes ». En usant de la notion de « fréquence théorique » sur laquelle on revient plus loin, on peut traduire l'énoncé par les égalités suivantes : $f(U) = 0,7$; $f(V) = 0,3$; $f_U(K) = 0,83$; $f_V(K) = 0,63$. C'est ce genre de situations qui conduit à s'intéresser aux règles de manipulation des probabilités conditionnelles : on peut en effet désirer connaître la fréquence théorique de l'événement K, tout court, soit $f(K)$; on peut aussi désirer connaître la fréquence théorique des événements « l'ampoule vendue est conforme et provient de U » et « l'ampoule vendue est conforme et provient de V », soit $f(K \text{ et } U)$ et $f(K \text{ et } V)$. On peut aussi vouloir connaître les fréquences théoriques qu'on noterait $f_K(U)$ et $f_K(V)$, c'est-à-dire la fréquence théorique des événements « l'ampoule conforme vendue provient de U » et « l'ampoule conforme vendue provient de V ». Le problème est alors le suivant : connaissant $f(U)$, $f(V)$, $f_U(K)$, $f_V(K)$, peut-on calculer les fréquences théoriques demandées, à savoir $f(K)$, $f(K \text{ et } U)$, $f(K \text{ et } V)$, $f_K(U)$ et $f_K(V)$, etc. ?

• Dans une classe, à la fin de l'étude du problème « des ampoules », on devrait avoir progressé vers les suites d'égalités suivantes (dans le désordre) :

$$f(\mathrm{K}) = f_{\mathrm{U}}(\mathrm{K}) \times f(\mathrm{U}) + f_{\mathrm{V}}(\mathrm{K}) \times f(\mathrm{V}) \qquad (\clubsuit)$$

$$f(\mathrm{K\ et\ U}) = f(\mathrm{U\ et\ K}) = f(\mathrm{U}) \times f_{\mathrm{U}}(\mathrm{K}) \text{ et } f(\mathrm{K\ et\ V}) = f(\mathrm{V\ et\ K}) = f(\mathrm{V}) \times f_{\mathrm{V}}(\mathrm{K}) \quad (\heartsuit)$$

$$f_{\mathrm{K}}(\mathrm{U}) = \frac{f(\mathrm{K\ et\ U})}{f(\mathrm{K})} = \frac{f(\mathrm{U\ et\ K})}{f(\mathrm{K})} = \frac{f(\mathrm{U}) \times f_{\mathrm{U}}(\mathrm{K})}{f(\mathrm{K})} = \frac{f(\mathrm{U}) \times f_{\mathrm{U}}(\mathrm{K})}{f_{\mathrm{U}}(\mathrm{K}) \times f(\mathrm{U}) + f_{\mathrm{V}}(\mathrm{K}) \times f(\mathrm{V})} \quad (\diamondsuit)$$

Mais quelle technique employer pour cela ? Il est clair que les égalités (♥) sont le cœur de la solution : elles sont les plus simples et permettent d'engendrer les autres. Pour engendrer (♣), par exemple, on peut, en observant que U ou V est l'événement certain et que U et V est l'événement impossible, écrire d'abord : f(K) = f(K et (U ou V)) = f(K et (U ou V)) = f((K et U) ou (K et V)) = f(K et U) + f(K et V). Comment alors calculer f(K et U) ? Supposons un très grand nombre d'ampoules sur le marché, n. Le nombre de celles qui proviennent de la première usine est $n_1 \approx f(\mathrm{U})n$. Parmi elles, le nombre de celles qui sont conformes aux normes est $n_2 \approx f_{\mathrm{U}}(\mathrm{K})n_1$. La fréquence f(K et U) est alors peu différente de $\frac{n_2}{n}$; on a donc :

$$f(\mathrm{K\ et\ U}) \approx \frac{n_2}{n} \approx \frac{f_{\mathrm{U}}(\mathrm{K})n_1}{n} \approx \frac{f_{\mathrm{U}}(\mathrm{K})(f(\mathrm{U})n)}{n} = \frac{f_{\mathrm{U}}(\mathrm{K})f(\mathrm{U})n}{n} = f_{\mathrm{U}}(\mathrm{K}) \times f(\mathrm{U}) = f(\mathrm{U}) \times f_{\mathrm{U}}(\mathrm{K}).$$

Puisqu'elle est indépendante de n et vaut donc quel que soit n pourvu qu'il soit « assez grand », on retiendra l'égalité $f(\mathrm{K\ et\ U}) = f(\mathrm{U}) \times f_{\mathrm{U}}(\mathrm{K})$. Sans utiliser encore le « calcul des probabilités », c'est-à-dire la *théorie déductive des probabilités*, on peut donc conclure que, si le modèle adopté est adéquat, on a $f(\mathrm{K\ et\ U}) = f(\mathrm{U}) \times f_{\mathrm{U}}(\mathrm{K})$. C'est ce résultat qui motivera, ultérieurement, la définition classique de la probabilité conditionnelle.

• En pratique, on pourra dégager le schéma de calcul précédent d'un travail sur un ou *des* cas particuliers *arithmétiques*. Pour $f(\mathrm{U}) = 0{,}7$ et $f_{\mathrm{U}}(\mathrm{K}) = 0{,}83$, par exemple, si l'on prend n = 10 000, le nombre d'ampoules provenant de la première usine sera approximativement de $0{,}7 \times 10\,000 = 7000$; parmi ces 7000 ampoules, le nombre des ampoules conformes sera à peu près de $0{,}83 \times 7000 = 5810$. On aura donc

$$f(\mathrm{K\ et\ U}) \approx \frac{5810}{10\,000} = 0{,}518.$$

Une fois la formule $f(\mathrm{K\ et\ U}) = f_{\mathrm{U}}(\mathrm{K}) \times f(\mathrm{U})$ dégagée, on pourra en sens inverse la mettre à l'épreuve de données numériques déterminées : avec les données précédentes, on obtiendra ainsi $f(\mathrm{K\ et\ U}) = f(\mathrm{U}) \times f_{\mathrm{U}}(\mathrm{K}) = 0{,}7 \times 0{,}83 = 0{,}518$; etc.

2.2. Probabilités : la construction d'une théorie déductive

a) Une réception adéquate de l'esquisse précédente suppose que l'on ait clairement en tête un certain nombre de données relatives à la notion de probabilité et à la théorie des probabilités.

b) Le point de départ absolu se trouve dans la notion de *dispositif expérimental*, c'est-à-dire de montage permettant d'imprimer une perturbation d'un certain type à un système d'un type déterminé : « lancer une pièce », « jeter un dé », « tirer une boule dans une urne » sont ainsi des expressions qui désignent chacune un certain dispositif expérimental.

1) Le résultat de la perturbation imprimée au système, désigné par les mots d'*issue*, d'*événement élémentaire*, etc., est un élément ω d'un ensemble Ω, dit *univers* ou *ensemble fondamental*, etc., que dans ce qui suit on suppose *fini*.

2) Lors de la réalisation de l'*expérience* – dite parfois *aléatoire* – que permet le dispositif expérimental considéré, on ne sait *a priori* que ceci : le résultat de cette *épreuve* sera l'un des états du système perturbé que décrit l'élément $\omega \in \Omega$, sans que l'on puisse savoir lequel exactement des éléments de Ω ce sera.

3) Une fois l'expérience réalisée, on peut savoir si tel événement A s'est réalisé ou non, c'est-à-dire si l'état ω du système réalise l'événement A, par exemple le fait que la face supérieure du dé que l'on a fait rouler porte un numéro qui soit un nombre premier.

c) On suppose de plus que l'expérience envisagée peut être réalisée autant de fois qu'on le souhaite. Désignons par $f_{(n,\,\Sigma)}(\mathrm{A})$ la fréquence de réalisation de l'événement A lors d'une série Σ de n réalisations de l'expérience. Considérons alors une famille de telles séries Σ_i de longueur n_i, où $i \in \mathrm{I}$. On constate alors ceci : si les n_i sont « assez grands », la famille des fréquences $f_{(n_i,\,\Sigma_i)}(\mathrm{A})$ paraît se grouper autour d'un certain nombre, qu'on peut noter $f(\mathrm{A})$ ou, de façon plus suggestive peut-être, $f_\infty(\mathrm{A})$.

1) Il s'agit d'un fait d'observation ancien. C'est ainsi que, ayant lancé 4040 fois une pièce de monnaie, Buffon (1707-1788) obtint face 2048 fois, ce qui correspond à une fréquence d'apparition du côté face de 0,5069 environ. Plus tard, Karl Pearson (1857-1936), ayant procédé à 24 000 lancers, obtint 12012 fois le côté face, ce qui correspond à une fréquence de 0,5005. Prisonnier dans un camp allemand durant la seconde guerre mondiale, le mathématicien sud-africain John Kerrich réalisa 10 000 lancers : il observa 5067 fois l'apparition du côté face. Etc.

2) À moins de disposer d'une théorie préalable du système perturbé, on ne peut déterminer le nombre $f_\infty(\mathrm{A})$ qu'à partir de résultats *expérimentaux* analogues à ceux que l'on vient de mentionner. C'est ainsi que les trois résultats précédemment évoqués (0,5069 ; 0,5005 ; 0,5067) ne désignent pas nécessairement le nombre 0,5 comme valeur autour de laquelle se regroupent les fréquences empiriques : des études récentes ont ainsi conduit certains chercheurs à soutenir qu'une pièce lancée retombe dans la position qu'elle avait au départ dans près de 51 % des cas (voir http://www.sciencenews.org/articles/20040228/fob2.asp).

3) En pratique, notamment lorsque la lecture des résultats obtenus n'est pas gênée par des hypothèses *a priori*, il est d'usage de choisir pour fréquence théorique une valeur tirée de la série des fréquences $f_{(n_i,\,\Sigma_i)}(\mathrm{A})$, par exemple, si l'on suit l'usage « gaussien », en prenant la moyenne arithmétique de la série obtenue. Souvent même, on adopte pour valeur celle correspondant à une longue série Σ. C'est ainsi que, dans son ouvrage *Probability Theory and Mathematical Statistics* (John Wiley & Sons, New York, 1963), à propos du célèbre probabiliste russe Andrei Andreevich Markov (1856-1922), qui souhaitait déterminer la « probabilité » d'apparition en russe d'une paire « voyelle après voyelle », l'auteur, Marek Fisz, écrit ceci :

> To compute these probabilities [Markov] counted the corresponding pairs of letters in Pushkin's poem *Eugene Onegin* on the basis of a text of 20,000 letters, and he accepted the observed frequencies as probabilities.

Markov trouve ainsi que la probabilité d'apparition d'une paire de voyelles serait de $\frac{1104}{8638} \approx$ 0,128. L'auteur cité ajoute que *"the methods of verification of such hypotheses are given in Part 2 of this book"* : la partie 2 est en effet consacré à un exposé intitulé *Mathematical Statistics*, dont l'un des chapitres est consacré à la théorie de l'estimation, voie sur laquelle on ne s'avancera pas plus avant ici.

d) Lorsque, par exemple, on dit que, dans la production d'une usine, 96 % des articles sont exempts de défauts, on adopte *de facto* un *modèle probabiliste* de la production : on assume l'hypothèse que la probabilité $f_\infty(\text{D})$ pour qu'un article soit défectueux (événement D) est égal à 0,04. La valeur ainsi adoptée est une estimation sur la base de divers contrôles empiriques de la production. On voit ainsi que, en pratique, on est amené à « faire des probabilités » très souvent, et trop souvent *sans le savoir* – à la manière dont Monsieur Jourdain faisait de la prose.

1) On admet ici sans s'y arrêter plus longtemps que tout « événement » intéressant peut être identifié à une partie de l'ensemble Ω des événements élémentaires, en sorte que « l'algèbre » $\mathcal{A}$ des événements (si A et B sont des événements possibles, alors A & B en est un autre, de même que A & non-B, etc.) peut être identifiée à l'algèbre des parties de Ω : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

2) Une *loi de probabilité P* sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ est définie comme mimant le comportement des fréquences empiriques ; plus précisément, l'usage est de poser, de façon minimale, les axiomes suivants (où P désigne une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$) :

(MP$_1$) $P(\text{A}) \geq 0$ pour tout $\text{A} \in \mathcal{A}$.

(MP$_2$) $P(\Omega) = 1$.

(MP$_3$) Si A, B $\in \mathcal{A}$ sont incompatibles (c'est-à-dire si $\text{A} \cap \text{B} = \varnothing$), alors $P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B})$.

On peut alors déduire de là d'abord des résultats « évidents » (qui miment les comportements des fréquences), comme par exemple les suivants :

$P(\bar{\text{A}}) = 1 - P(\text{A})$, pour tout $\text{A} \in \mathcal{A}$, où $\bar{\text{A}} = \Omega \setminus \text{A}$.

$P(\varnothing) = 0$.

$0 \leq P(\text{A}) \leq 1$, pour tout $\text{A} \in \mathcal{A}$.

$P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A} \cap \text{B}) \leq P(\text{A}) + P(\text{B})$, pour tous A, B $\in \mathcal{A}$.

Etc.

3) Considérons un ensemble $\text{B} \subset \Omega$ tel que $P(\text{B}) > 0$; sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, l'application P_B définie par $P_\text{B} : \text{A} \mapsto P_\text{B}(\text{A}) = \frac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})}$ est une loi de probabilité. (La démonstration est laissée au lecteur.)

• Si U est un événement de probabilité non nulle, on a donc (avec d'autres notations) :

$P(\text{K et U}) = P(\text{U et K}) = P(\text{U}) \times P_\text{U}(\text{K})$ (♥)

• Si U et V sont deux événements de probabilités non nulles, incompatibles et dont la disjonction est l'événement certain ($U \cup V = \Omega$), c'est-à-dire si U et V forment un « système complet d'événements », on a, pour tout $K \in \mathcal{A}$:

$$\Rightarrow P(K) = P((K \cap U) \cup (K \cap V)) = P((K \cap U) \cup (K \cap V)) = P(K \cap U) + P(K \cap V)$$
$$= P_U(K) \times P(U) + P_V(K) \times P(V) \quad (\clubsuit)$$

$$\Rightarrow P_K(U) = \frac{P(K \text{ et } U)}{P(K)} = \frac{P(U) \times P_U(K)}{P(K)} = \frac{P(U) \times P_U(K)}{P_U(K) \times P(U) + P_V(K) \times f(V)} \quad (\blacklozenge)$$

On retrouve donc, *par déduction*, des égalités obtenues plus haut – à propos de ce qu'on appelait alors des « fréquences théoriques » – par « passage à la limite » à partir de fréquences empiriques.

e) Que le postulat d'origine expérimentale de l'existence d'un nombre noté $f(A)$, ou $f_\infty(A)$, ou $P(A)$ satisfaisant les axiomes d'une « loi de probabilité » est confirmé par la théorie déductive qu'on peut élaborer ainsi qu'on vient de le suggérer est illustré de façon cruciale par un théorème nommé classiquement « loi des grands nombres de Bernoulli » (1713).

1) On doit établir d'abord le résultat suivant : pour tout entier n, si les univers finis $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ sont munis de lois de probabilité $P_1, \dots, P_n$, alors sur l'univers $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ il existe une loi de probabilité unique $P^{(n)}$ telle que, pour tous $A_1 \in \Omega_1, \dots, A_n \in \Omega_n$, on a $P^{(n)}(A_1 \times \dots \times A_n) = P_1(A_1) \times \dots \times P_n(A_n)$.

2) On considère alors le cas où $\Omega_1 = \dots = \Omega_n$, en sorte que $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n = \Omega_1{}^n$. On suppose en outre que $P_1 = \dots = P_n$: l'ensemble $\Omega_1{}^n$ muni de la probabilité produit $P^{(n)}$ correspondante est quelquefois appelé univers *des tirages répétés n fois*, comme des tirages dans urne *avec remise* (sinon on n'aurait pas $P_1 = \dots = P_n$). Soit $A \subset \Omega_1$ et $p = P_1(A)$; on suppose $0 < p < 1$. Soit $\sum$ une série de n réalisations de l'expérience correspondant à l'univers Ω_1 et à la loi de probabilité P_1. Pour tout réel $\varepsilon \in]0 ; 1[$, on considère l'événement $\{ |f_{(n, \Sigma)}(A) - p| < \varepsilon) \}$ formé des n-uplets $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_1{}^n$ tels que $|f_{(n, \Sigma)}(A) - p| < \varepsilon$. On a alors le résultat suivant :

> Pour tous réels $\delta \in]0 ; 1[$, il existe un entier N tel que, si $n \geq N$, alors $P^{(n)}(|f_{(n, \Sigma)}(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \delta$.

• Le résultat précédent peut être commenté ainsi (Fisz 1963, p. 180) :

> We perform *n* experiments according to the Bernoulli scheme, where the probability of the event A is *p*. The law of large numbers states that, for large values of *n*, the probability that the observed frequency of A will differ little from *p* is close to one.

• On observera que, comme dans les autres domaines d'études mathématiques, on part ici d'une réalité extramathématique pour la mathématiser. On retrouve alors dans le modèle mathématique construit ce qu'on avait mis au fondement extramathématique de sa construction – la « convergence » des fréquences empiriques $f_{(n, \Sigma)}(A)$ vers la fréquence théorique p. À cet égard, pour dissiper encore certaines malentendus possibles, on pourra méditer ce passage du livre de A. Rényi, *Calcul des probabilités* (Dunod, Paris, 1966, p. 144), où l'expression « fréquence relative » désigne simplement la fréquence.

Lors de l'introduction du concept de probabilité, nous avons assigné une probabilité à des événements dont la fréquence relative, au cours d'une longue série d'épreuves, manifestait une certaine stabilité. Ce fait, la stabilité de la fréquence relative, vient d'être démontré mathématiquement. Il est remarquable que la théorie rende possible une description précise de cette stabilité ; cela témoigne sans aucun doute en faveur de sa puissance.
Il semblerait qu'il s'agisse alors d'un « cercle vicieux ». Nous avons en effet défini la probabilité grâce à la stabilité de la fréquence relative, mais d'autre part la notion de probabilité intervient pour caractériser cette stabilité. En réalité, il s'agit pourtant de deux choses entièrement différentes. La « définition » de la probabilité comme valeur autour de laquelle oscille la fréquence relative n'est pas une définition mathématique mais une description du substrat concret du concept de probabilité. La loi des grands nombres de Bernoulli par contre est fondée sur la *définition mathématique* de la probabilité et par conséquent il n'y a là aucun cercle vicieux.

• En pratique, avec des élèves, on n'hésitera pas à parler concurremment de « probabilité » et de « fréquence théorique », afin de rappeler que la probabilité d'un événement n'est pas une entité tombée du ciel des idées mathématiques, mais bien une réalité qui *émerge* du phénomène extramathématique de « stabilisation » (ou de « convergence ») des fréquences de réalisation de cet événement – pour en permettre la mathématisation.

IUFM d’Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

Addenda, 26e & 27e semaines

1. Médias / milieux

a) Les questions ci-après touchent, d’une manière ou d’une autre, à la dialectique des milieux et des médias dans l’organisation et la conduite de l’étude.

1. Comment peut-on utiliser le « cours » des manuels avec les élèves ? Peut-on demander aux élèves de consulter le livre pour construire la synthèse et comment vérifier que ce travail n’apporte pas de confusions importantes chez les élèves ? (GC, MJ, 2de, 19)

2. Je me pose la question suivante : n’y a-t-il pas un problème épistémologique si je simule (avec une classe) une expérience sur ordinateur pour conjecturer une technologie θ alors que cet ordinateur utilise cette même technologie pour simuler l’expérience ? Le serpent ne se mord-il pas la queue ? (GB, OS, 2de, 20)

3. Les logiciels de construction géométrique sont *a priori* un milieu. Mais sont-ils aussi un média ? (MD, MJ, 4e, 20)

b) S’agissant de l’emploi du manuel en relation avec la synthèse, il est sans doute plus pertinent de distinguer deux étapes : celle de la *synthèse* proprement dite, étape que précèdent, si besoin est, des *bilans d’AER*, qui relève du moment de l’institutionnalisation et doit organiser, mettre en forme, mettre au net la matière mathématique qui se sera construite dans la classe (éventuellement en appui sur le manuel !) ; celle de *l’évaluation* de l’organisation mathématique ainsi mise en forme.

1) C’est dans cette seconde étape que, en classe, sous la direction du professeur, on comparera le « butin » mathématique issu des AER et l’exposé du manuel (ou d’autres documents), avant, le cas échéant, de *retoucher la synthèse* plus ou moins profondément en fonction des déficiences et autres imperfections qu’on aura cru y constater.

2) Les propositions formulées éventuellement par certains élèves quant à l’introduction dans la synthèse de matériaux découverts dans le manuel ou ailleurs ne sauraient être agréées sans qu’une *mise en débat* de ces matériaux et de la pertinence de leur intégration dans la synthèse soit intervenu explicitement, sous la responsabilité du professeur.

3) Bien entendu, si de telles propositions doivent être favorisées dès lors qu’elles participent du souci de pourvoir au progrès, individuel et collectif, dans l’étude du thème en cours, elles devront en revanche être écartées s’il appert, comme cela se voit à tous les niveaux de la scolarité, que le proposant cherche surtout à perturber l’étude en la saturant de débats tout à la fois centrés sur lui-même et centrifuges par rapport au projet collectif d’étude.

c) Le problème du « cercle épistémologique » à propos de l'usage de logiciels de géométrie mérite d'être posé. Sa résolution appelle plusieurs remarques.

1) L'activité humaine produit des *œuvres*, qui acquièrent bientôt un caractère *objectif*, c'est-à-dire qui ont leurs lois propres, fixées, indépendantes du désir de leurs producteurs comme de leurs usagers. Si je construis un miroir, je produis un objet qui renvoie des images du réel selon des lois que je peux vouloir étudier, mais que je ne peux commander. Le thermomètre renvoie de même une information que je ne peux pas davantage contester. Ces œuvres humaines ont leur vie propre : c'est ce qui en fait des « milieux », c'est-à-dire des fragments de « nature », en dépit de leur caractère d'œuvres humaines.

2) La chose est frappante s'agissant des œuvres *mathématiques*. Lorsque j'ai écrit les axiomes d'une théorie déductive, ce qui peut s'en déduire est *fixé objectivement*, même si je ne suis pas capable de savoir si telle assertion se déduit ou non de ces axiomes que, pourtant, je viens de formuler ! En 1889, Heinrich Hertz (1857-1894) écrivait ainsi à propos des équations de Maxwell (cité *in* Georges Lochak, *La géométrisation de la physique*, Flammarion, Paris, 1994, p. 177) :

> On ne peut s'empêcher de penser que ces formules mathématiques ont une existence indépendante et une intelligence propre, qu'elles en savent plus que nous, plus même que ceux qui les ont découvertes, et que nous en tirons plus de choses que l'on y avait mises à l'origine.

L'Homme est ainsi un fabricateur de *milieux*, qui lui permettent d'accroître sa connaissance du monde, y compris de ces milieux eux-mêmes.

3) Les milieux que l'on est amené à exploiter dans l'activité scientifique sont rarement transparents à ceux qui les utilisent. On en connaît (ou on croît en avoir reconnu) certaines régularités fonctionnelles, sur lesquelles on s'appuie pour en user comme milieux. Mais leur conception et leur mode de fabrication nous restent souvent inconnus. En vérité, le *contrôle* qu'on en a dans l'emploi qu'on en fait ne suppose pas qu'on les maîtrise *à tous égards*. À leur propos, le maniement pertinent, non figé, de la *dialectique des boîtes noires et des boîtes claires* est de mise.

• Pendant longtemps, on usa au collège comme au lycée de *tables trigonométriques* que les élèves et leurs professeurs eussent été bien incapables de fabriquer !

• Ainsi en va-t-il aujourd'hui avec la *calculatrice*. En 4^e, elle indique que, par exemple, $\sqrt{7} \approx 2{,}6457513$. Je pourrai lui faire confiance, mais je pourrai aussi procéder de temps à autre à un « contrôle de qualité », en faisant cette fois confiance à d'autres œuvres humaines, par exemple à l'algorithme que voici (et à la calculatrice pour effectuer certains produits partiels qui apparaissent dans l'exécution de l'algorithme) :

$26457513^2 = (2645 \times 10^4 + 7513)^2 = (2645 \times 10^4)^2 + 2 \times 2645 \times 7513 \times 10^4 + 7513^2 = (2645^2 \times 10^8 + 39\,743\,770 \times 10^4 + 56\,445\,169 =$

$$\begin{array}{r} 699602500000000 \\ 397437700000 \\ 56445169 \\ \hline 699999994145169 \end{array}$$

J'obtiens donc : $2{,}6457513^2 = 6{,}99999994145169$. Le contrôle effectué est positif.

3) Le fait qu'une œuvre demeure partiellement – et parfois largement – opaque à celui qui en use semble ne guère poser problème lorsque l'œuvre-outil qu'on manipule est utilisée pour produire des « biens » (matériels ou immatériels) qui, *culturellement*, semblent indépendants de la genèse propre des outils qui permettent pourtant de les produire. Pour produire, à partir d'un clou tordu, un clou redressé, je puis utiliser un marteau : on n'y trouvera rien à redire. Mais si, pour produire un marteau, j'use d'un marteau (à côté d'autres outils et matériaux), d'aucuns trouveront à cela un côté « circulaire » quelque peu désagréable. Pour échapper à ce sentiment, il convient à la fois de situer l'activité que l'on entend développer dans son cadre *social* – la société est remplie d'outils dont la production peut requérir des connaissances allogènes, qui me demeurent pour le moment inconnues – *et* dans sa problématique propre – celle que l'on a définie *motu proprio*.

• Il y a ainsi, dans le monde où nous vivons, des calculatrices, des ordinateurs et des logiciels de géométrie. Ces derniers permettent en nombre de cas de répondre à des questions que l'on se pose sur l'espace parce qu'ils simulent l'espace d'une certaine façon qu'il se peut fort bien que nous ignorions.

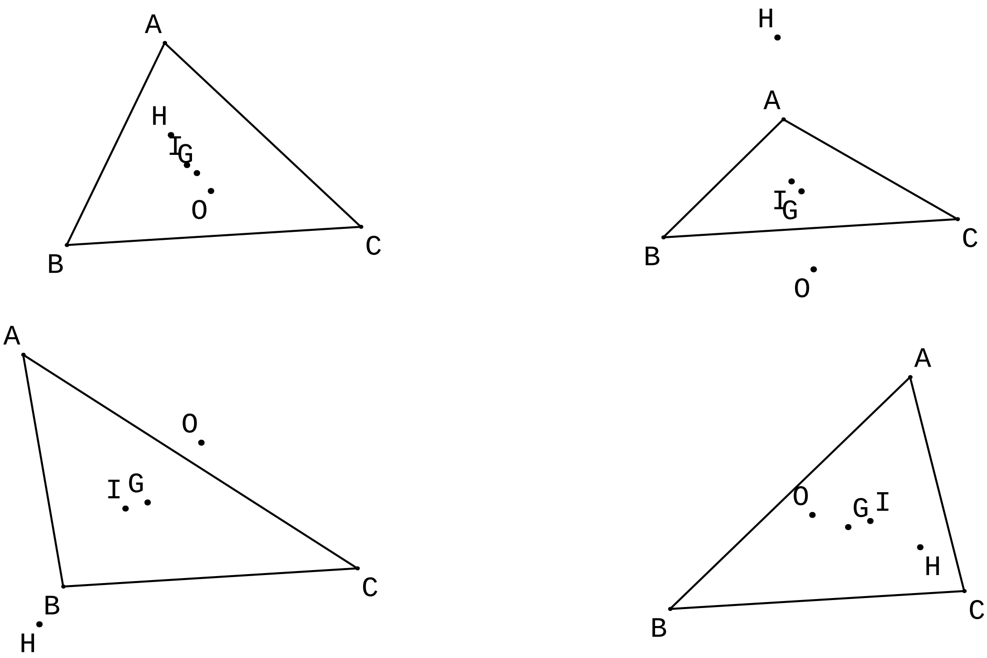
– Une première attitude peut être de vouloir connaître le fonctionnement « interne » du logiciel, et notamment le modèle mathématique sur lequel il repose. C'est là une problématique d'étude qui ne peut être acclimatée dans la classe de mathématiques que dans de rares cas (car les mathématiques du logiciel ne sont pas en général les mathématiques dont l'étude met à contribution le logiciel, pas plus que la physique du bec Bunsen n'est celle que l'on prétend étudier avec son aide).

– Une seconde attitude consiste à veiller à ne pas changer subrepticement l'outil d'étude en objet d'étude, au risque d'abandonner l'objet d'étude initial : elle consiste donc à n'« étudier » l'outil d'étude que dans la mesure où cette étude est indispensable pour en user de façon bien contrôlée. L'outil n'intervient alors que par les possibilités bien contrôlées qu'il offre, et dans lesquelles on a une confiance d'abord « sociale » (on n'est pas le premier à utiliser cet outil ainsi qu'on le fait), ensuite « pratique » (quand son expérience personnelle de cet usage de l'outil devient substantielle).

• Imaginons un univers social dans lequel les mathématiques du logiciel – disons, la géométrie *analytique* – soient « bien connues » (même si nous les ignorons et entendons continuer de les ignorer parce que ces mathématiques-là ne nous intéressent pas actuellement), mais un univers aussi dans lequel nous voulons créer une œuvre qui y serait encore inconnue – une géométrie *synthétique*, c'est-à-dire une théorie déductive de la géométrie du plan (par exemple). Nous pourrons pour cela utiliser alors sans vergogne ce logiciel comme *milieu* (au lieu de l'espace « réel »), par exemple parce qu'il nous permettra des contrôles beaucoup plus rapides et économiques, et favorisera ainsi l'avancement de notre projet de connaissance. Le fait que, historiquement, les choses soient allées à l'inverse – la géométrie dite synthétique précédant la géométrie analytique de plusieurs millénaires – ne modifie nullement le principe évoqué : si, pour produire un savoir S je dois user – directement ou plus souvent indirectement, sous forme cristallisée dans des appareils, des théories, etc. – de savoirs S_1, S_2, …, S_n antérieurement élaborés et socialement disponibles, je n'ai pas à maîtriser personnellement les savoirs S_i à l'instar de ceux qui les ont produits ou qui les reproduisent. Ce qui importe c'est que je puisse justifier le savoir S produit, même si je ne prends pas à ma charge de justifier les outils qui auront permis de le produire.

• Voici un exemple très simple du schéma précédent. Le logiciel Géoplan permet de mettre en évidence un fait que les moyens traditionnels d'expérimentation en géométrie ne permettent guère de montrer aussi facilement. Marquons sur une feuille trois points A, B, C, puis construisons le centre de gravité G de ABC, le centre du cercle inscrit I, le centre du cercle circonscrit O, enfin l'orthocentre H. Si nous refaisons la figure un grand nombre de fois en déplaçant chaque fois le point A sur la feuille, on peut faire en sorte que les points O et H s'éloignent l'un de l'autre et s'éloignent des points G et I, mais il semble qu'on ne puisse pas éloigner beaucoup G et I l'un de l'autre.

– C'est du moins ce que semble montrer le logiciel par le truchement des figures reproduites ci-après, qui ne sont, certes, que la forme visuelle sous laquelle le logiciel nous communique l'information numérique découlant de calculs conformes à la théorie algébrique du plan.



– Si l'on veut *démontrer* – de façon indépendante du logiciel – qu'il en est bien ainsi (en un certain sens à établir !), on pourra *par exemple* utiliser le fait (connu) que G = $\frac{1}{3}$ A + $\frac{1}{3}$ B + $\frac{1}{3}$ C et le fait (moins connu, à établir) que I = $\frac{a}{a+b+c}$ A + $\frac{b}{a+b+c}$ B + $\frac{c}{a+b+c}$ C. Dans ce dernier cas, on pourra d'ailleurs, pour plus de sûreté, *vérifier* à l'aide du logiciel que le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des poids $\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}$ et $\frac{c}{a+b+c}$ est bien le centre du cercle inscrit. Le reste du travail est laissé au lecteur intéressé.

d) Comme le suggère la dernière des trois questions examinées, tout milieu risque de se transformer en un média – aux réponses duquel on prête ou on refuse certaines intentions – dès lors qu'on « le fait parler » et qu'on tente d'interpréter ce qu'il dit. Plusieurs problèmes se posent à cet égard.

1) Même si le « message » que nous recevons d'un milieu paraît dénué d'intention, nous avons, nous, une intention en interrogeant le milieu, en interprétant son « message ». De cette intention nous pouvons être la dupe : nous pouvons, parce que notre travail interprétatif est intéressé, comprendre « de travers ». Tel est le premier danger, dont un exemple bien connu est la « torture des données », le *data torturing*, dénoncé notamment à propos des études statistiques qui fleurissent dans la recherche biomédicale. *If you torture your data long enough, they will tell you whatever you want to hear*, dit-on à propos de pratiques sur lesquelles on trouvera des précisions dans l'article disponible à l'adresse suivante : http://www.chups.jussieu.fr/polys/biostats/poly/POLY.Chp.9.4.html. Dans un tel cas, le milieu reste dénué d'intention dans ses réponses : c'est nous qui, en imposant nos propres intentions, le faisons fonctionner comme un média.

2) Une autre façon de faire d'un milieu un média est de lui prêter une intention qu'il n'a pas. Le cas est classique avec la calculatrice. On demande à une calculatrice de donner la valeur de l'expression $9x^4 - y^4 + 2y^2$ lorsque $x = 10\,864$ et $y = 18\,817$. On a en réalité : $9 \times 10864^4 - 18817^2 \times (18817^2 - 2) = 1$. Mais sur une calculatrice de collège, les choses ne se passent pas toujours ainsi. Telle calculatrice répond par exemple $9 \times 10864^4 - 18817^2 \times (18817^2 - 2) = 0$, tandis que telle autre répondra $9 \times 10864^4 - 18817^4 + 2 \times 18817^2 = -141022$, etc. Or c'est nous qui prêtons à la calculatrice l'intention d'afficher la valeur vraie de l'expression. Car la calculatrice, elle, se borne à afficher la valeur *qu'elle trouve*. Dans tous les cas, il faut prendre sa réponse comme un *fait* en principe dénué d'intention mais non pas d'une genèse singulière, un fait dont il faut confronter le contenu à d'autres milieux : il est par exemple facile, ici, d'établir « de tête » que le chiffre des unités de la vraie valeur est 1 ou 9, ce qui éconduit les deux valeurs trouvées par des calculatrices.

3) La difficulté précédente se complique du fait que la calculatrice est un milieu fabriqué par des hommes, qu'elle est le fruit d'un *projet* porté par des *intentions*. Ces intentions ont été au moins partiellement intégrées aux lois objectives qui gouvernent le milieu obtenu – lois que, en règle générale, nous connaissons mal. Dans un logiciel de géométrie, par exemple, il est vraisemblable que l'affichage graphique des figures participe de l'intention de faire croire à la « continuité » des tracés, alors que la situation à cet égard est rien moins que claire.

• Un repère orthonormal étant fixé, le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et la droite d'équation $y = 2x$ se coupent aux points de coordonnées $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}} ; \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Ces points sont dans le plan *réel* $\mathbb{R}^2$, mais pas dans le plan rationnel $\mathbb{Q}^2$ ni, à plus forte raison, dans $\mathbb{D}^2$. Or, classiquement, les constructeurs du logiciel veulent simuler les phénomènes du plan $\mathbb{R}^2$, non de $\mathbb{Q}^2$: leur logiciel devra « répondre » ici que le cercle et la droite *se coupent*, non qu'ils ne se coupent pas ! Et cela alors même que l'affichage graphique procède d'un codage numérique limité, puisqu'on n'y dispose pas même de tous les décimaux. On peut imaginer qu'un logiciel qui prétendrait afficher conventionnellement que tel point a ou n'a pas ses coordonnées dans $\mathbb{Q}^2$ devrait procéder autrement que ne le font les logiciels actuels.

• L'intention « réaliste » adoptée par les auteurs du logiciel doit donc être connue de celui qui interroge le logiciel en tant que milieu : sur l'écran, la droite et le cercle *paraissent* (en général) se couper. Ces courbes se coupent dans $\mathbb{R}^2$, mais pas nécessairement dans $\mathbb{Q}^2$. À cet égard, le logiciel ne peut être utilisé pour « démontrer » que des courbes se coupent (par exemple en relation avec le « théorème des valeurs intermédiaires »), ou, de façon largement équivalente, que deux suites adjacentes convergent : ce serait prendre pour une preuve – ou du moins pour un « résultat » suggestif – ce qui est en fait une *convention de représentation*.

2. À propos de statistique : les fluctuations d'échantillonnage

a) Plusieurs questions ont été soulevées, à propos du programme de 2de, sur les notions de simulation et de fluctuation d'échantillonnage. Les voici.

> 1. Les fiches de statistique accompagnant le programme de 2de sont basées, pour la plupart, sur des théories mathématiques (probabilités, théorèmes de statistique…) qui sont à « cacher » aux élèves. Quelles réponses peut-on donner aux élèves à des questions sur cette théorie cachée ? Peut-on leur apporter des éléments de réponse, ou doit-on les laisser attendre les classes supérieures ? (AC, OS, 2de, 13)
>
> 2. Doit-on parler de probabilités (et *a fortiori* de théorie des ensembles) à l'occasion du travail sur les fluctuations d'échantillonnage comme cela est suggéré dans les fiches de statistique ? (JG, OS, 2de, 13)
>
> 3. Les documents d'accompagnement de statistique en 2de incitent à parler de probabilité alors que ce n'est pas demandé dans le programme. Quel est alors le but des activités proposées ? (DV, CR, 2de, 13)
>
> 4. Qu'est-ce que les fluctuations d'échantillonnage et quel est leur avenir ? Dans quelle théorie s'inscrivent-elles ? (GF, MJ, 2de, 16)
>
> 5. Au moment de la deuxième partie de la statistique en 2de, au sujet des fluctuations d'échantillonnage, on parle de fréquence d'un événement. L'idée de probabilité émerge avant de faire les simulations (on peut « prévoir » le résultat de la simulation). Doit-on en parler aux élèves sous cette forme ? (GF, MJ, 2de, 19)

b) Le programme de seconde, on le sait, se scinde en trois *domaines d'études* (que les rédacteurs du programme appellent des « chapitres ») : *Statistique*, *Calcul et fonctions*, *Géométrie*. Le premier de ces domaines d'études, la statistique, est organisé en deux *secteurs d'études*.

1) Le premier secteur ne porte pas de nom officiel, mais on peut raisonnablement l'intituler *Résumés statistiques*. Le programme en fournit la description suivante, sur laquelle on ne s'arrêtera pas davantage ici.

> **Contenus**
>
> Résumé numérique par une ou plusieurs mesures de tendance centrale (moyenne, médiane, classe modale, moyenne élaguée) et une mesure de dispersion (on se restreindra en classe de seconde à l'étendue).
> Définition de la distribution des fréquences d'une série prenant un petit nombre de valeurs et de la fréquence d'un événement.
>
> **Capacités attendues**
>
> Utiliser les propriétés de linéarité de la moyenne d'une série statistique.
> Calculer la moyenne d'une série à partir des moyennes de sous-groupes.
> Calcul de la moyenne à partir de la distribution des fréquences.
>
> **Commentaires**
>
> L'objectif est de faire réfléchir les élèves sur la nature des données traitées, et de s'appuyer sur des représentations graphiques pour justifier un choix de résumé.
> On peut commencer à utiliser le symbole $\sum$.
> On commentera quelques cas où la médiane et la moyenne diffèrent sensiblement.
> On remarquera que la médiane d'une série ne peut se déduire de la médiane de sous-séries. Le calcul de la médiane nécessite de trier les données, ce qui pose des problèmes de nature algorithmique.

2) Le deuxième secteur peut être désigné par le libellé de son « contenu » : *Simulation et fluctuation d'échantillonnage*. En voici la présentation.

Contenus

Simulation et fluctuation d'échantillonnage.

Capacités attendues

Concevoir et mettre en œuvre des simulations simples à partir d'échantillons de chiffres au hasard.

Commentaires

La touche « random » d'une calculatrice pourra être présentée comme une procédure qui, chaque fois qu'on l'actionne, fournit une liste de n chiffres (composant la partie décimale du nombre affiché). Si on appelle la procédure un très grand nombre de fois, la suite produite sera sans ordre ni périodicité et les fréquences des dix chiffres seront sensiblement égales.

Chaque élève produira des simulations de taille n (n allant de 10 à 100 suivant les cas) à partir de sa calculatrice ; ces simulations pourront être regroupées en une simulation ou plusieurs simulations de taille N, après avoir constaté la variabilité des résultats de chacune d'elles. L'enseignant pourra alors éventuellement donner les résultats de simulation de même taille N préparées à l'avance et obtenues à partir de simulations sur ordinateurs.

c) La description précédente semble faire apparaître deux *thèmes d'étude*, dont l'un – la *simulation* – paraît « dominant », et l'autre – la *fluctuation d'échantillonnage* – dominé (ou, du moins, minoré). Le préambule au descriptif reproduit ci-dessus paraît, lui, rétablir un certain équilibre entre les deux thèmes. On y lit en effet ceci.

En seconde le travail sera centré sur :

– la réflexion conduisant au choix de résumés numériques d'une série statistique quantitative ;

– la notion de fluctuation d'échantillonnage vue ici sous l'aspect élémentaire de la variabilité de la distribution des fréquences ;

– la simulation à l'aide du générateur aléatoire d'une calculatrice. La simulation remplaçant l'expérimentation permet, avec une grande économie de moyens, d'observer des résultats associés à la réalisation d'un très grand nombre d'expériences. On verra ici la diversité des situations simulables à partir d'une liste de chiffres.

1) Le document d'accompagnement *stricto sensu* (hors les « fiches de statistique », sur lesquelles on va revenir) comporte des développements plus importants relatifs à la notion de fluctuation d'échantillonnage. Des indications essentielles sont données en particulier dans le passage suivant.

L'esprit statistique naît lorsqu'on prend conscience de l'existence de fluctuations d'échantillonnage ; en seconde, l'élève constatera expérimentalement qu'entre deux échantillons, de même taille ou non, les distributions des fréquences fluctuent ; la moyenne étant la moyenne pondérée des composantes de la distribution des fréquences est, elle aussi, soumise à fluctuation d'échantillonnage ; il en est de même de la médiane.

On tient là en effet le principe fondamental : la statistique, c'est la *science de la variabilité*. L'éducation prodiguée aux citoyens en formation doit mettre en avant le fait de la variabilité d'à peu près *tous* les phénomènes naturels ou humains. Notons dès maintenant – on y reviendra plus loin – que, dans l'expression « science de la variabilité », il existe une tension entre « science » et « variabilité », tension dont le risque ne saurait trop être souligné : le « placage » trop rapide, dans l'enseignement du lycée, des « outils » (probabilistes) de la *science* (statistique) tend en effet à occulter l'*objet* même de cette science, la *variabilité*.

2) Le premier élément d'une éducation statistique tient dans le fait de *voir* la variabilité – *au lieu de la nier*, par exemple en réduisant le caractère (variable) considéré à sa valeur moyenne. Cette éducation commence dès la considération de valeurs isolées d'un certain caractère X, c'est-à-dire d'échantillons de taille $n = 1$! Un élève d'une classe de seconde mesure 1,81 m, un autre 1,68 m, un troisième 1,73 m, etc. Le pourcentage de reçus (par rapport aux présents) au bac professionnel en 2005 vaut 70,7 % dans l'académie d'Aix-Marseille, 84 % dans l'académie de Rennes, 60,2 % dans l'académie de Créteil, etc.

3) Le deuxième élément d'une saine éducation statistique a trait, plus généralement, au fait que, lorsqu'une population Ω n'est pas connue exhaustivement, ou lorsque (pour des raisons quelconques d'économie, en matière de saisie des données par exemple), on s'arrête à l'étude d'un échantillon « limité » extrait de cette population, E, on obtient une distribution de fréquences qui n'est pas, sauf exception, celle qui sera observée sur un autre échantillon E' extrait – de la même façon ou non – de la *même* population. L'idée commune contre laquelle il faut ici lutter *avec force* est qu'un échantillon serait, à peu de chose près, une image en réduction de la population totale.

• Considérons la population des 794 notes évoquée lors de la séance 19 du séminaire.

– On en tire l'échantillon de taille 20 suivant : 14 ; 7 ; 10 ; 20 ; 15 ; 8 ; 18 ; 9 ; 7 ; 11 ; 10 ; 0 ; 20 ; 10 ; 11 ; 15 ; 12 ; 9 ; 9 ; 13. Cet échantillon a pour médiane 10, pour moyenne 11,4. Le premier quartile est 7, le troisième quartile, 14.

– Voici un autre échantillon de même taille extrait de la même population : 13 ; 2 ; 14 ; 11 ; 19 ; 13 ; 8 ; 12 ; 15 ; 9 ; 11 ; 5 ; 7 ; 7 ; 9 ; 7 ; 13 ; 20 ; 13 ; 13. Cette fois, la médiane est 11 (> 10) et la moyenne 11,05 (< 11,4). Le premier quartile est 9 (> 7), le troisième quartile est, à nouveau, 14.

– Dans le cas examiné ici, on peut examiner la population tout entière : sa médiane est 12 (> 10 & 11), sa moyenne 11,7 (> 11,05 & 11,4). Son premier quartile est 9, son troisième quartile est 15 (> 14).

• Dans certains cas, la population est infinie « virtuelle » : c'est le cas de la population des lancers que l'on peut réaliser avec une pièce de monnaie donnée. Cette fois, on ne peut examiner que des échantillons plus ou moins longs.

– On lance 20 fois une pièce de monnaie, et on obtient ceci : F ; P ; P ; F ; P ; F ; F ; F ; P ; F ; F ; P ; P ; P ; F ; F ; P ; P ; F ; F. Ici, le nombre de faces est 11, le nombre de piles est 9. On notera qu'il n'existe aucune série de sorties consécutives d'un même côté (pile ou face) de longueur strictement supérieure à 3.

– Considérons cette autre série : P ; F ; P ; F ; P ; F ; F ; F ; F ; F ; F ; F ; F ; F ; P ; F ; P ; P ; P ; P. Le nombre de faces est 12, le nombre de piles, 8. Il existe une série de sorties consécutives du côté face de longueur 9 et une série de sorties consécutives du côté pile de longueur 4.

– Voici une troisième série de 20 lancers : P ; F ; P ; P ; P ; P ; P ; F ; P ; P ; F ; F ; P ; P ; F ; P ; P ; F ; F ; P. Le nombre de faces est 7, celui des piles est 13. On observe une série de 4 sorties consécutives de pile.

4) Les exemples ci-dessus sont éclairés par ce passage du document d'accompagnement, qui précise quelque peu les choses.

Nous appellerons échantillon de taille n d'une expérience la série des résultats obtenus en réalisant n fois cette expérience ; on dira aussi qu'un échantillon est une liste de résultats de n expériences identiques et indépendantes ; on se limite en seconde aux échantillons d'expériences ayant un nombre fini d'issues possibles. La distribution des fréquences associée à un échantillon est le *vecteur* dont les composantes sont les fréquences des issues dans l'échantillon ; on ne donnera pas de définition générale de la notion de distribution des fréquences, on se contentera de la définir comme liste des fréquences dans chacune des situations que l'on traitera. Les distributions des fréquences varient d'un échantillon à l'autre d'une même expérience : c'est ce qu'on appellera en classe de seconde la fluctuation d'échantillonnage.

d) Si, dans le cas des lancers d'une pièce, on croit – pour quelque raison que ce soit – qu'un échantillon « assez long » *devrait* contenir à peu près autant de faces que de piles disposées « assez régulièrement », on vient de voir qu'on devra réviser sa croyance – ce qui est le début de toute éducation scientifique possible. Or de tels types de situations (lancers de pièce, de dés, etc.) sont placés au cœur du travail sur les fluctuations d'échantillonnage par le document d'accompagnement dans cet autre passage.

Aborder la notion de fluctuation d'échantillonnage se fera en premier lieu dans des cas simples (lancers de dés, de pièces), où la notion d'expériences identiques et indépendantes est intuitive et ne pose pas de problème ; l'élève reprendra ainsi contact avec des expériences aléatoires familières (lancer de dés équilibrés) et les enrichira. Historiquement, l'honnête homme du XVII^{e} siècle s'est familiarisé à l'aléatoire en pratiquant les jeux de hasard ; maintenant, les calculatrices et les ordinateurs permettent la production aisée de listes de chiffres au hasard ; la production de telles listes fera partie, à côté des lancers de dés ou de pièces équilibrés, à côté de tirage de boules dans des urnes, du bagage d'expériences de référence de l'élève. L'étude de ces expériences de référence sera ainsi à la base de la formation sur l'aléatoire des élèves.

1) Sans écarter l'*expérimentation* sur le mécanisme considéré – lancer de dé, etc. –, le programme de seconde pousse en avant le recours à la *simulation*. Deux questions se posent à ce propos : dans une simulation, que simule-t-on ? Et par quoi le simule-t-on ?

2) Voici d'abord ce que dit l'auteur – Klaus Krickeberg – d'un *Petit cours de statistique* (Springer-Verlag, Berlin, 1996), en ouvrant le chapitre 3 intitulé « Simulation de données » de son ouvrage (*op. cit.*, p. 17) :

Les données qui forment l'objet de l'analyse statistique sont engendrées par des mécanismes que nous ne contrôlons pas du tout ou seulement en partie. La première situation est présente dans les études ou enquêtes dites d'*observation*, et la deuxième dans les études *expérimentales*. Cependant, pour beaucoup de raisons, il peut être utile de créer des données par un mécanisme complètement connu et contrôlé. Ceci nous permet d'illustrer et de mieux comprendre les procédures statistiques, et d'étudier éventuellement leurs propriétés par des expériences lorsqu'elles sont inaccessibles à la théorie.

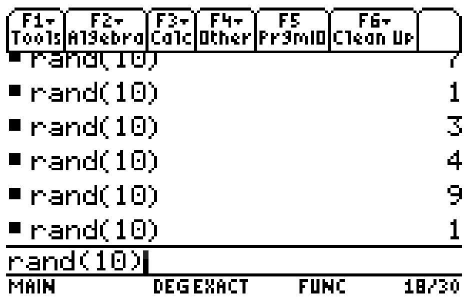
3) En fait, dans l'optique « savante » (qui ne saurait être celle de la classe de seconde, puisque cette vision des choses reste à construire), on simule une *loi de probabilité* ou, ce qui revient au même, sa *fonction de répartition*, ce que l'auteur présente ainsi (*ibid.*) :

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. […] *Simuler F* une fois veut dire créer un nombre x qu'on puisse regarder comme une réalisation de X. Parlant d'une façon plus précise, il s'agit de construire un mécanisme aléatoire qui engendre une variable aléatoire X' telle que X' et X suivent la même loi, et d'observer une réalisation de X'. Comme ceci ne dépend que de la loi de x, pour simplifier l'écriture nous pouvons supposer d'emblée que $X' = X$. Par exemple, si la loi en cause est la loi uniforme sur l'ensemble $\{ 0, 1 \}$ ou $\{ 1, \ldots, 6 \}$, un tel mécanisme peut consister dans le jet d'une pièce de monnaie, respectivement d'un dé.

4) Le document d'accompagnement du programme rappelle d'abord, en bonne doctrine, qu'on simule une *loi de probabilité* (ou sa fonction de répartition), c'est-à-dire un *modèle* (probabiliste) d'une expérience aléatoire : « Formellement, y lit-on en effet, simuler une expérience, c'est choisir un modèle de cette expérience puis simuler ce modèle : cet aspect sera introduit ultérieurement en première. » Prenons un exemple : l'*expérience* consistant à faire rouler un dé (supposé) équilibré est *modélisée* par la loi uniforme sur l'ensemble { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } ; on peut alors *simuler* cette loi en lançant trois fois successivement une pièce de monnaie, en écartant les cas représentés par FFF et PPP, et en adoptant la correspondance suivante : PFF $\mapsto 1{\cdot}2^0 + 0{\cdot}2^1 + 0{\cdot}2^2 = 1$; FPF $\mapsto 0{\cdot}2^0 + 1{\cdot}2^1 + 0{\cdot}2^2 = 2$; FFP $\mapsto 0{\cdot}2^0 + 0{\cdot}2^1 + 1{\cdot}2^2 = 4$; PPF $\mapsto 1{\cdot}2^0 + 1{\cdot}2^1 + 0{\cdot}2^2 = 3$; PFP $\mapsto 1{\cdot}2^0 + 0{\cdot}2^1 + 1{\cdot}2^2 = 5$; FPP $\mapsto 0{\cdot}2^0 + 1{\cdot}2^1 + 1{\cdot}2^2 = 6$.

5) En seconde, donc, on simule « directement » *une expérience par une autre* – un « mécanisme » par un autre. C'est ainsi que le lancer d'un dé pourrait être simulé par trois lancers successifs d'une pièce de monnaie, selon la correspondance que l'on vient de voir. Inversement, le lancer d'une pièce de monnaie pourra être simulé par le lancer d'un dé, en adoptant par exemple la correspondance suivante : 1 ou 2 ou 3 $\mapsto$ face ; 4 ou 5 ou 6 $\mapsto$ pile. Même si le « mécanisme simulant » est bien, en un certain sens, un *modèle* du « mécanisme simulé », on évite par là le recours – impossible encore – à un modèle *probabiliste*, comme semble le demander le document d'accompagnement, où on lit par exemple : « En seconde, […] il n'est pas nécessaire, dans un premier temps, de lier les premiers pas vers la simulation de l'aléatoire à l'introduction de concepts théoriques difficiles tel celui de modèle. »

6) L'usage de « chiffres » au hasard extrait d'une calculatrice est le mécanisme « standard » de simulation prévu par le programme de seconde, qui, comme on l'a vu, précise : « La touche "random" d'une calculatrice pourra être présentée comme une procédure qui, chaque fois qu'on l'actionne, fournit une liste de *n* chiffres (composant la partie décimale du nombre affiché). » En pratique, on peut regarder les « chiffres » affichés comme le résultat de lancers successifs d'un *dé équilibré à 10 faces* numérotées de 0 à 9. Si, par exemple, on veut simuler avec ce dé le tirage dans une urne contenant 3 boules rouges et 4 jaunes, on pourra faire correspondre respectivement les chiffres 1, 2, 3 aux rouges, et 4, 5, 6, 7 aux jaunes, en écartant les chiffres 0, 8, 9 ; etc. La suite de nombres ci-après (7, 1, 3, 4, 9, 1…) se codera ainsi : JRRJJR…



La simulation se ramène donc à cette formule du document d'accompagnement : « Dans le cadre du programme de seconde, simuler une expérience consistera à produire une liste de résultats que l'on pourra assimiler à un échantillon de cette expérience… »

7) Bien entendu, on n'est jamais sûr que la simulation soit « correcte ». Mais il en va de même pour la modélisation d'un mécanisme aléatoire par une certaine loi de probabilité, comme le note l'auteur – Michel Lejeune – d'un ouvrage intitulé *Statistique. La théorie et les*

applications (p. 68) à propos de l'hypothèse d'indépendance des épreuves successives (le sigle « v.a. i.d.d. » désigne une *v*ariable *a*léatoire *i*ndépendantes et *i*dentiquement *d*istribuées) :

> Le statut de v.a. i.d.d. exige que le phénomène soit invariant au cours des observations successives et que ces observations n'exercent aucune influence entre elles. Il s'agit bien souvent d'une profession de foi, ces conditions n'étant généralement pas rigoureusement vérifiables, ni rigoureusement vérifiées.

• On ne peut, au commencement de la construction d'une science, disposer des résultats de cette science. La mathématisation probabiliste de la variabilité s'appuie sur une « protothéorie » du hasard qui conduit par exemple à penser que le mécanisme de lancer d'un dé à 6 faces, d'une part, et le mécanisme de tirage dans un chapeau contenant 6 plaques marquées respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, d'autre part, sont des mécanismes « équivalents » du point de vue des « listes de résultats » qu'on peut en obtenir : on suppose ou plutôt on *pose* que, étant donné un échantillon issu de l'un d'eux, il ne nous est pas possible de l'assigner à l'un plutôt qu'à l'autre. Plus exactement, la mathématisation que l'on réalisera ultérieurement devra être compatible avec cette thèse de non-distinction…

• Quels outils fournit cette protothéorie (non mathématique) du hasard ? D'abord, bien sûr, la notion de hasard elle-même ; ensuite, la notion de *chances*, ou plutôt d'*égalité des chances*. Lorsqu'on lance un dé non truqué, on pensera que chacune des issues possibles a la même chance de se réaliser ; que la sortie de 1, 2 ou 3 a autant de chances d'être observée que celle de 4, 5 ou 6 ; etc. On en tirera la conséquence qu'on peut simuler le tirage dans une urne contenant 2 boules noires et 3 boules blanches en codant les deux boules noires par 1 et 2 et les trois blanches par 3, 4 et 5, et en ignorant les lancers amenant le 6. Ou que l'on simulera le lancer d'une pièce en codant « face » par les 1, 2 et 3 et « pile » par 4, 5 et 6. Etc.

• Est-il clair que l'on peut simuler le lancer d'un dé en lançant trois fois successivement une pièce de monnaie, ainsi qu'on l'a affirmé plus haut ? Sans doute atteint-on là une limite de notre protothéorie du hasard, limite au-delà de laquelle des erreurs grossières pourraient être engendrées. (Ce sont de telles erreurs – celles commises par Antoine Gombaud, chevalier de Méré (1607-1684) notamment – qui furent à l'origine des premiers travaux de Pascal sur la « géométrie du hasard ».) On doit pouvoir conclure en effet que chacun des 8 triplets de résultats possibles (FPF, FFP, FFF, PPP, PPF, etc.) a la même chance d'apparaître que chacun des autres, ce qui suppose une analyse (le premier élément du triplet a la même chance de sortir que l'autre issue possible, et de même pour le deuxième, etc.) qui sera plus tard mathématisée au prix d'un travail subtil et complexe. C'est en fait l'impuissance et la non-fiabilité relatives de la protothéorie du hasard qui conduiront à l'effort – de longue durée – visant à construire une théorie *mathématique* du hasard. En attendant, le document d'accompagnement note que cette limite, dont le franchissement sera amorcé dès la classe de 1re, ne devrait pas être dépassée en classe de seconde :

> … le langage des probabilités présenté en première S, ES et en option de première L formalisera le langage naïf des *chances* et du *hasard* employé en seconde ; le calcul des probabilités permettra ensuite d'expliquer certains phénomènes observés.

e) Plusieurs des questions reproduites plus haut soulignent que, contre le point de vue que l'on vient de préciser, les « fiches de statistique » introduiraient subrepticement (voire ouvertement) les notions clés d'une théorie probabiliste de la variabilité : l'examen qui suit va confirmer ce sentiment.

1) Ces fiches sont précédées d'un texte « doctrinal » qui reprend pourtant les points de vue explicitées dans le programme et son document d'accompagnement.

• Ce texte rappelle d'abord que le but de l'étude de la statistique en seconde est l'initiation à la variabilité et à la « fluctuation d'échantillonnage » :

> L'objectif du chapitre de statistique, en classe de seconde, est de sensibiliser les élèves à l'aléatoire et plus particulièrement de leur faire prendre conscience de l'existence de la fluctuation d'échantillonnage dans des cas simples : cette fluctuation est ici celle de distributions des fréquences entre des séries obtenues par répétition d'expériences identiques. La moyenne, la médiane, le maximum, le minimum se calculant à partir de cette distribution des fréquences sont aussi soumis à la fluctuation d'échantillonnage.

• À nouveau se trouve précisé qu'il s'agit d'aborder les faits de variabilité par l'observation et l'expérimentation, et non par la théorie mathématique qui en rendra raison plus tard. (On notera la notation « psychologique » finale à propos « des enfants ou des adolescents », là où on attendrait une notation *épistémologique*, valable aussi bien pour l'*adulte* profane en la matière…)

> Le choix pédagogique de ce programme est d'aller de l'observation vers la conceptualisation et non d'introduire d'abord le langage probabiliste pour constater ensuite que tout se passe comme le prévoit cette théorie ; pour des enfants ou des adolescents, le langage des probabilités ne préexiste pas à la perception de l'aléatoire.

• La seule conceptualisation admissible, rappelle le texte que nous suivons, est celle de la « protothéorie » du hasard, combinée à la notion de série statistique associée à une certaine expérience aléatoire.

> Le langage utilisé est celui de la vie courante : égalité des chances, pièce ou dé équilibré, choix au hasard dans un ensemble fini, etc. Une série statistique dont les termes sont les résultats issus de la réplication d'une même expérience sera appelée un échantillon de cette expérience (ou plus simplement échantillon si cela ne prête pas à confusion) ; par exemple : les résultats de n lancers d'un dé, les couleurs de n boules tirées au hasard dans une urne, l'opinion de n personnes choisies au hasard dans une population bien définie (l'expérience que l'on répète est ici le recueil de l'opinion d'une personne choisie au hasard), la taille de n personnes choisies au hasard dans une population bien définie (l'expérience que l'on répète est ici la mesure de la taille d'une personne choisie au hasard), etc.

• C'est alors que s'introduit une ambiguïté qui, en effet, on va le voir, aura des effets sensibles sur le contenu des études statistiques proposés dans les « fiches » : il semble, à lire le passage suivant, que la stabilisation des fréquences arrive très vite, et soit la chose à observer et à expliquer, comme si ce phénomène *annulait* celui des fluctuations d'échantillonnage, comme si l'on ne savait pas résister au passage à la limite – et… en classe de première !

> Les situations traitées mènent à l'observation de résultats qui appellent une explication ; par exemple, si on lance deux pièces équilibrées et qu'on regarde le nombre de *pile* obtenus, la distribution des fréquences de 0, 1, 2 semble voisine de (1/4, 1/2, 1/4) ; « pourquoi en est-il ainsi ? » est une question à adresser aux mathématiques, qui justifie de formaliser le langage utilisé et d'introduire à la théorie des probabilités. Le langage probabiliste permettra de se dégager de la polysémie des termes employés dans la vie courante (tels ceux de *chance* ou de *hasard*) ; des éléments simples de théorie des probabilités (introduits en classe de première) rendront intelligibles de nombreuses observations liées aux phénomènes aléatoires.

• La tension entre cette « tentation de l'infini », associée à demi-mot à la puissance des « outils de simulation », et le travail sur des échantillons de taille limitée se voit notamment dans le passage ci-après.

> On simulera les expériences de référence et on pourra ainsi étudier de longues séries ; on simulera aussi de nouvelles situations à l'aide de listes de chiffres au hasard. Les outils de simulation sont puissants, mais pour les élèves une première étape importante est d'établir un lien entre l'expérience et une simulation de cette expérience : quand les thèmes s'y prêtent (et c'est le plus souvent le cas), la classe pourra être partagée en deux groupes : dans un groupe, les élèves feront effectivement des expériences, dans l'autre les élèves simuleront l'expérience.

2) L'examen des fiches montre cette tension à l'œuvre : on en recense quelques témoignages, sans prétention d'exhaustivité.

• La 2^e fiche, intitulée *De plus en plus de lancers d'un dé*, comporte le résumé thématique suivant, où l'on saisit notamment la tension entre le 3^e et le 4^e points :

> • Échantillon de taille *n* d'une expérience.
>
> • Notion de distribution de fréquences et de fluctuation d'échantillonnage.
>
> • La distribution des fréquences de lancers d'un dé ***équilibré***, calculée sur une série de taille *n* varie d'une série à l'autre ; on observe que cette fluctuation est d'autant plus faible que *n* est grand ; quand *n* augmente, la distribution des fréquences se rapproche de (1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6).
>
> • La distribution des fréquences de lancers d'un dé ***non équilibré***, calculée sur une série de taille *n*, varie d'une série à l'autre ; on observe que cette fluctuation est d'autant plus faible que *n* est grand.

• La 3^e fiche, intitulée *Le lièvre et la tortue*, ne fait pas qu'apparaître en quelque sorte hypnotisée par le comportement « à l'infini » : elle évoque explicitement la théorie probabiliste et la notion de probabilité. Observant que, dans une suite de 10 000 parties, le lièvre bat la tortue dans environ 67 % des cas, le rédacteur de la fiche s'interroge :

> D'où sort ce 67 % ? On conçoit que ce pourcentage ne dépend que du fait que le dé est équilibré, donc calculable à partir de cette hypothèse, mais comment faire ce calcul ?

Voici la réponse :

> Expliquer le phénomène observé, c'est démontrer dans un cadre théorique que le lièvre gagne et calculer ses chances théoriques de gagner : mais pour cela, il faut donner une définition mathématique des hypothèses faites, à savoir que le dé est équilibré et les lancers indépendants les uns des autres. La théorie qui permet de démontrer tout cela est la théorie des probabilités. On montre que la « chance théorique » du lièvre est $1 - (5/6)^6$, soit à peu près 0,665. Voici de nouvelles simulations ; on pourra observer que quand n augmente, les fréquences se rapprochent des valeurs théoriques.

	f	$1 - f$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
10	**0.6100**	**0.3900**	**0.1356**	**0.1504**	**0.2116**	**0.1788**	**0.1713**	**0.1524**
1000	**0.6701**	**0.3299**	**0.1661**	**0.1662**	**0.1635**	**0.1656**	**0.1696**	**0.1689**
10000	**0.6667**	**0.3333**	**0.1667**	**0.1671**	**0.1660**	**0.1659**	**0.1668**	**0.1675**
100000	**0.6651**	**0.3349**	**0.1666**	**0.1667**	**0.1667**	**0.1669**	**0.1664**	**0.1671**

S'interrogeant ensuite sur la durée des parties, le même auteur indique que, pour 10 000 parties, la durée moyenne est 3,958 et note :

Là aussi, la seule hypothèse faite concerne les lancers de dés et il devrait y avoir une formule qui permette de calculer une valeur théorique μ pour cette moyenne. Cette formule existe bien et se démontre par le calcul des probabilités : $\mu = \sum_{i=1}^{i=5} i \times \frac{5^{i-1}}{6^i} + 6 \times \frac{5^5}{6^5} \approx 3{,}99$.

• La 5e fiche, *Politique nataliste*, est pareillement fascinée par le passage à la limite et à la théorie. Elle se conclut ainsi :

Les nombres moyens d'enfants observés dans cette simulation sont respectivement $m_4 = 1{,}90$, $m_5 = 1{,}84$, $m_6 = 1{,}95$. On pourrait s'attendre à ce que $m_6 > m_5 > m_4$. S'agit-il là d'un tour joué par la fluctuation d'échantillonnage ? On pourrait refaire d'autres simulations. Mais on peut démontrer, dans le cadre de la théorie des probabilités, une formule donnant la valeur théorique du nombre moyen d'enfants pour les trois cas envisagés :

$$\mu_4 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} \qquad \mu_5 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{16} \qquad \mu_6 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{6}{32}$$

On pourra comparer ces valeurs théoriques entre elles.

• La 6e fiche, *Faites vos jeux*, manifeste la même impatience « théoriciste », comme si la théorie – et non l'expérience – pouvait seule combler le désir de « certitude » du rédacteur.

La question posée au début de cette fiche concerne l'événement $\{ m \geq 6 \}$. Or sur les 2000 simulations, environ 82 % réalisent cet événement : on ne peut pas dire qu'un tel événement est exceptionnel ! La fréquence observée est bien sûr soumise à la fluctuation d'échantillonnage ; le calcul des probabilités permet de montrer que pour *n* expériences, lorsque *n* augmente, la fréquence observée se rapproche d'un nombre *p*, où $p \approx 0{,}8$.

En l'espèce, la « théorie » est ici celle des *chaînes de Markov*…

f) Dans l'enseignement prodigué en classe de seconde, on se défendra contre les tentations précédentes, moins peut-être pour ne pas empiéter sur ce qui viendra après – en première – que pour donner toute sa place à la fluctuation d'échantillonnage, et cela pour deux ordres de raisons, liés entre eux.

1) La première grande raison, c'est qu'il convient de se persuader que la distribution des fréquences d'*un* échantillon ne permet pas en général d'accéder à une connaissance « sûre » de la structure de la *population toute entière*, c'est-à-dire qu'un « sondage » – en particulier sur un échantillon qui n'a que le mérite d'être « disponible » – ne permet pas d'avoir une connaissance sûre de la population totale. On ne passe pas facilement d'échantillons en règle générale de taille limitée à une population de très grande taille.

• Pour aboutir à un tel enseignement, il n'est *nullement besoin* de connaître les « valeurs *théoriques* » : il suffit de constater que les fréquences *empiriques* diffèrent, et qu'elles ne « convergent » parfois que bien lentement !

• Voici par exemple un diagramme en bâtons donnant les fréquences d'apparition du numéro 2 lors de 20 séries de 20 lancers d'un dé à 10 faces :

0 ××

0,05 ××××
0,1 ×××××××
0,15 ×××××
0,2 ×
0,25 ×

L’étendue est ici de 0,25. Voici maintenant les fréquences d’apparition du 2 lors de 10 séries de 40 lancers du même dé. Cette fois, l’étendue n’est plus que 0,125 : elle est réduite de moitié. Mais, comme on le verra, la fréquence peut encore varier, d’un échantillon de taille 40 à l’autre, de 5 % à 17,5 %.

0,05 ××
0,075 ××
0,1 ×
0,125 ×××
0,15 ×
0,175 ×

Même si l’on dispose d’un échantillon de taille « assez grande », on ne peut pas davantage faire de conclusion tout à fait assurée : sur un échantillon de 100 lancers, la fréquence du 2 sera de 7 % ; sur un autre de même taille, elle sera de 13 % ; etc.

• Un résultat général, à propos d’un événement A de probabilité $p \in \,]0\,;1[$, quant à la taille $n_0(\varepsilon, \delta)$, où $0 < \varepsilon \leq p(1-p)$ et $\delta \in \,]0\,;1]$, telle que l’on ait

$$n \geq n_0(\varepsilon, \delta) \Rightarrow P^{(n)}(|f_{(n,\Sigma)}(\mathrm{A}) - p| \geq \varepsilon) \leq \delta$$

est le suivant (A. Rényi, *Calcul des probabilités*, Dunod, Paris, 1966, p. 366) :

$$n_0(\varepsilon, \delta) = \frac{9 \ln \frac{2}{\delta}}{8\,\varepsilon^2}.$$

Si l’on admet que la sortie du 2 lorsqu’on lance le dé à dix faces de l’exemple précédent a une probabilité $p = 0{,}1$, si l’on prend alors $\varepsilon = 1\,\% = 0{,}01$ et si l’on souhaite que la fréquence du 2 ne s’éloigne de $\varepsilon = 0{,}01$ ou plus de la fréquence théorique $p = 0{,}1$ sur en moyenne au plus un échantillon de taille n sur 50, c’est-à-dire si l’on prend $\delta = \frac{1}{50}$, il faut prendre $n \geq \frac{9 \ln 100}{8 \times 10^{-4}}$, soit $n \geq 51\,809$. Si l’on accepte de s’éloigner de 2 % de p sur en moyenne au plus un échantillon sur 10 ($\varepsilon = 2 \times 10^{-2}$ et $\delta = \frac{1}{10}$), il vient : $n_0(\varepsilon, \delta) = \frac{9 \ln 20}{32 \times 10^{-4}} \approx 8425{,}49\ldots$, ce qui suppose donc $n \geq 8426$, nombre qui reste considérable. Pour les « petits » échantillons que l’on obtient « à la main » ou que l’on peut observer dans le monde naturel ou social, le point de vue du passage « à la limite » est inadéquat.

• L’adéquation de ce point de vue avec certaines situations où le « grand nombre » l’emporte sera mise en valeur en classe de 1re, où l’on pourra s’inspirer notamment des considérations suivantes (Rényi, *op. cit.*, p. 366-367) :

> Dans beaucoup de phénomènes aléatoires de masse, il apparaît que certaines grandeurs, bien que dépendant du hasard, peuvent pratiquement être considérées comme constantes. Comme exemple d’une

> telle grandeur, considérons la pression d'un gaz enfermé dans un récipient. Cette pression est le résultat des chocs des molécules du gaz contre les parois du récipient. Le nombre des chocs et la vitesse des molécules dépendent du hasard, la pression résultante est cependant pratiquement constante quand le nombre de molécules est très grand. De tels phénomènes s'expliquent comme une réalisation de la loi des grands nombres.

2) Il existe une seconde grande raison, qui compte dans l'éducation d'un citoyen : si l'on extrait un échantillon d'une population de structure connue (ou supposée), à quoi peut-on s'attendre quant à cet échantillon ? Si je tire au hasard les noms de trois élèves d'une classe de 28 élèves composée de 16 filles et 12 garçons, puis-je parier que cet échantillon de taille 3 contiendra au moins un garçon et au moins une fille ?…

• On sait que le calcul des probabilités est né en partie de problèmes posés par les jeux d'argent. Dans une lettre fameuse, datée du 29 juillet 1654, Pascal écrit ainsi à Fermat :

> Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré ; car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre. C'est, comme vous savez, un grand défaut. Il me disait donc qu'il avait trouvé difficulté sur les nombres pour cette raison : Si on entreprend de faire un 6 avec un dé, il y avantage de l'entreprendre par quatre coups. Si on entreprend de faire « sonnez » avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en vingt-quatre coups, et néanmoins 24 est à 36, qui est le nombre des faces de deux dés, comme 4 est à 6, qui est le nombre des faces d'un dé. Voilà qui était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'Arithmétique se dément.

Si l'on fait rouler un dé équilibré, on peut « avoir avantage » à parier qu'on amènera un 6 en quatre lancers, c'est-à-dire que, plus d'une fois sur deux en moyenne, il se trouvera un 6 parmi les quatre sorties. La première chose à faire, *aujourd'hui*, c'est de tenter de vérifier cette « croyance » *par une simulation* : c'est ce qu'on fera en 2de. Voici par exemple 50 séries de quatre lancers d'un dé.

3 – 5 – 3 – 6 // 4 – 3 – 1 – 4 // 5 – 6 – 3 – 3 // 2 – 3 – 1 – 5 // 1 – 5 – 5 – 5 // 2 – 1 – 6 – 6 // 6 – 4 – 5 – 4 // 1 – 5 – 4 – 1 // 4 – 1 – 4 – 5 // 2 – 1 – 2 – 1 // 6 – 2 – 2 – 3 // 4 – 4 – 4 – 4 // 3 – 4 – 2 – 6 // 5 – 4 – 2 – 2 // 3 – 4 – 3 – 1 // 5 – 3 – 6 – 5 // 1 – 1 – 5 – 3 // 2 – 2 – 1 – 2 // 1 – 4 – 3 – 4 // 3 – 4 – 1 – 6 // 3 – 2 – 4 – 2 // 3 – 6 – 2 – 1 // 4 – 2 – 3 – 3 // 2 – 6 – 6 – 4 // 4 – 4 – 5 – 4 // 2 – 1 – 4 – 3 // 6 – 6 – 6 – 4 // 5 – 5 – 5 – 6 // 2 – 1 – 4 – 6 // 6 – 1 – 3 – 2 // 3 – 2 – 5 – 2 // 2 – 1 – 1 – 1 // 5 – 6 – 4 – 1 // 1 – 2 – 4 – 6 // 3 – 5 – 6 – 5 // 1 – 5 – 3 – 4 // 6 – 3 – 1 – 4 // 4 – 6 – 3 – 4 // 4 – 6 – 6 – 4 // 3 – 6 – 5 – 6 // 6 – 5 – 4 – 1 // 1 – 2 – 5 – 1 // 2 – 5 – 3 – 2 // 2 – 3 – 2 – 6 // 3 – 4 – 5 – 4 // 4 – 6 – 3 – 6 // 4 – 6 – 4 – 5 // 6 – 6 – 1 – 2 // 2 – 2 – 5 – 3 // 5 – 2 – 4 – 4

Parmi ces 50 séries, 24 contiennent un 6, ce qui est donc moins que « prévu » (ou qu'espéré) ! L'examen d'autres séries de quatre lancers permettrait de voir s'il s'agit là d'un fait un peu exceptionnel, ou bien s'il faut conclure par exemple que, s'il y a « avantage », celui-ci est fort limité… Si l'on avait parié d'obtenir un 6 en cinq lancers – mais il aurait fallu trouver un parieur qui relève le défi ! –, les 40 séries de 5 lancers ci-après semblent suggérer que l'affaire aurait été sensiblement plus avantageuse, puisqu'on y compte 23 séries (sur 40) contenant un 6.

3 – 5 – 3 – 6 – 4 // 3 – 1 – 4 – 5 – 6 // 3 – 3 – 2 – 3 – 1 // 5 – 1 – 5 – 5 – 5 // 2 – 1 – 6 – 6 – 6 // 4 – 5 – 4 – 1 – 5 // 4 – 1 – 4 – 1 – 4 // 5 – 2 – 1 – 2 – 1 // 6 – 2 – 2 – 3 – 4 // 4 – 4 – 4 – 3 – 4 // 2 – 6 – 5 – 4 – 2 // 2 – 3 – 4 – 3 – 1 // 5 – 3 – 6 – 5 – 1 // 1 – 5 – 3 – 2 – 2 // 1 – 2 – 1 – 4 – 3 // 4 – 3 – 4 – 1 – 6 // 3 – 2 – 4 – 2 – 3 // 6 – 2 – 1 – 4 – 2 // 3 – 3 – 2 – 6 – 6 // 4 – 4 – 4 – 5 – 4 // 2 – 1 – 4 – 3 – 6 // 6 – 6 – 4 – 5 – 5 // 5 – 6 – 2 – 1 – 4 // 6 – 6 – 1 – 3 – 2 // 3 – 2 – 5 – 2 – 2 // 1 – 1 – 1 – 5 – 6 // 4 – 1 – 1 – 2 – 4 // 6 – 3 – 5 – 6 – 5 // 1 – 5 – 3 – 4 – 6 // 3 – 1 – 4 – 4 – 6 // 3 – 4 – 4 – 6 – 6 // 4 – 3 – 6 – 5 – 6 // 6 – 5 – 4 – 1 – 1 //

2 – 5 – 1 – 2 – 5 // 3 – 2 – 2 – 3 – 2 // 6 – 3 – 4 – 5 – 4 // 4 – 6 – 3 – 6 – 4 // 6 – 4 – 5 – 6 – 6 // 1 – 2 – 2 – 2 – 5 // 3 – 5 – 2 – 4 – 4

En sens inverse, parier sur la sortie de 6 en trois coups apparaîtra nettement plus risqué… Bien entendu, on pourra aussi explorer par simulation la seconde « croyance » du chevalier de Méré – le fait qu'il y aurait avantage à parier sur la sortie de deux 6 (« sonnez ») en 24 lancers de deux dés.

• Examinons ici le problème évoqué plus haut : si l'on tire au hasard les noms de *n* élèves d'une classe de 28 élèves composée de 16 filles et 12 garçons, à partir de quelle valeur de *n* peut-on être « sûr » que l'échantillon tiré contiendra au moins un garçon et au moins une fille ? Traduisons « être sûr » par le fait que la non-réalisation de l'événement ne devrait se produire en moyenne qu'au plus une fois sur 20 (par exemple). On numérote les élèves de 1 à 28, les numéros de 1 à 12 correspondant aux garçons, les suivants aux filles. On verra rapidement qu'un échantillon de taille 3 n'a que bien peu de chances de satisfaire la condition attendue. Pour des échantillons de taille 4, on obtiendra par exemple ceci, qui montre qu'on n'y est pas encore :

6 – 14 – 15 – 3 // 2 – 25 – 5 – 16 // 24 – 18 – 26 – 27 // 27 – 4 – 26 – 18 // 13 – 10 – 5 – 3 // 5 – 23 – 4 – 16 // 11 – 8 – 7 – 2 // 9 – 23 – 16 – 21 // 28 – 4 – 20 – 18 // 21 – 28 – 10 – 15 // 19 – 18 – 20 – 3 // 9 – 10 – 6 – 27 // 7 – 19 – 25 – 14 // 19 – 4 – 2 – 12 // 3 – 5 – 9 – 12 // 10 – 9 – 15 – 8 // 5 – 9 – 18 – 4 // 11 – 22 – 27 – 20 // 26 – 22 – 23 – 27 // 22 – 7 – 19 – 21 // 26 – 13 – 16 – 24 // 27 – 5 – 19 – 10 // 19 – 13 – 20 – 27 // …

On verra ensuite qu'on se rapproche de la « certitude » que l'on souhaite en passant à $n = 5$:

6 – 14 – 15 – 3 – 2 // 25 – 5 – 16 – 24 – 18 // 26 – 27 – 4 – 18 – 13 // 10 – 5 – 3 – 23 – 4 // 16 – 11 – 8 – 7 – 2 // 9 – 23 – 16 – 21 – 28 // 4 – 28 – 20 – 18 – 21 // 28 – 10 – 15 – 19 – 18 // 20 – 3 – 9 – 10 – 6 // 27 – 7 – 19 – 25 – 14 // 19 – 9 – 4 – 2 – 12 // 3 – 5 – 9 – 12 – 10 // 9 – 15 – 8 – 5 – 18 // 4 – 11 – 22 – 27 – 20 // 26 – 22 – 23 – 27 – 7 // 19 – 21 – 26 – 13 – 16 // 13 – 24 – 27 – 5 – 19 // 10 – 19 – 13 – 20 – 27 // …

g) Le travail demandé en 2^de^ préfigure des développements à plus longs termes, qui relève de l'*inférence statistique* : d'une part, le fait d'inférer, de ce qu'on *observe* sur un ou plusieurs *échantillons*, ce qu'il en *est* de la *population* ; d'autre part, et comme on vient de le voir, le fait de « prévoir », lorsqu'on tire un échantillon à partir d'une population connue ou supposée telle, ce qu'il en sera de l'échantillon.

1) Dans son livre *Probabilités et statistique* (Masson, Paris, 2001), le biostatisticien Alain-Jacques Valleron note ceci au début du chapitre intitulé « Les tests statistiques : calcul du nombre de sujets nécessaires » (*op. cit.*, p. 81) : « La question la plus souvent posée au biostatisticien est “Combien faut-il de sujets dans mon étude pour répondre à ma question ?” » Sur la notion corrélative d'*intervalle de pari* (qui fait pendant à la notion d'intervalle de confiance), on pourra, outre la référence citée, se reporter par exemple à cette adresse : http://www.chups.jussieu.fr/polys/biostats/poly/POLY.Chp.9.4.html. D'une façon plus générale, on pourra également se pencher sur le contenu de l'article que l'on trouvera à l'adresse suivante : www.spim.jussieu.fr/IMG/doc/lecturestat-2.doc.

2) Si l'on choisit d'extraire un échantillon de taille 5 de la classe prise en référence plus haut (12 garçons, 16 filles), est-il raisonnable de parier qu'il y aura parmi les cinq au moins une fille et au moins un garçon, c'est-à-dire que l'échantillon ne sera pas composé que de garçons ou que de filles ? Plus généralement, dans quel intervalle situera-t-on, disons, la proportion

des filles dans l’échantillon de taille 5, sachant qu’elle est de 57 % environ dans la population totale (la classe) ? Les connaissances que l’auteur cité ci-dessus voudrait voir se répandre dans la culture biomédicale commune sont aussi à diffuser dans la culture du citoyen : cette diffusion devrait avoir son camp de base en seconde.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2005-2006

Séminaire de didactique des mathématiques

Addenda, 28e & 29e semaines

1. Les « thèmes de convergence »

1.1. Bilan d'étape

a) On part de l'interrogation suivante.

> Dans le nouveau programme de 5e on trouve mention de « thèmes de convergence ». Comment devront-ils être mis en œuvre dans la classe ? (CM, MJ, 5e, 20)

b) La question des *thèmes de convergence* a été évoquée plusieurs fois dans la formation, notamment dans deux des notices de l'*Encyclopédie du professeur de mathématiques*. On fait ici un rapide bilan d'étape du travail ainsi réalisé.

1) La notice *Le temps de l'étude* comporte notamment le développement suivant.

> L'observation montre que nombre de professeurs ont tendance à voir le programme comme *un ensemble de thèmes*, en oubliant *les niveaux supérieurs d'organisation* (secteurs et domaines), au point quelquefois de sembler ignorer, par exemple, que le programme de 2de se distribue en *trois* domaines, et non deux [8. Les élèves, quant à eux, ont tendance à s'arrêter aux ***sujets*** d'étude, sans doute parce que les évaluations scolaires portent aujourd'hui de manière presque exclusive sur ce niveau d'organisation mathématique.]. Cette réduction de la discipline se fait en outre, traditionnellement, sur la base d'un certain *enfermement disciplinaire*, contraire à l'évolution engagée depuis quelques années dans le sens d'une « recomposition » pluridisciplinaire, avec notamment la création d'un *« pôle disciplinaire »* relatif à la *« culture scientifique et technique »* rassemblant, au collège [9. Voir le « cahier des exigences pour le collégien », qu'on trouvera dans le document Qu'apprend-on au collège ? Le même texte intègre les mathématiques dans un second « pôle », celui de la « maîtrise des langages ».], en relation avec la mise en place des *itinéraires de découverte* (IDD) et, à partir de 200-2007 en 5e, celle des *thèmes de convergence* [10. Sur les thèmes de convergence, voir le document Nouveaux programmes de 5e et 4e.], les sciences de la vie et de la Terre, la physique-chimie, la technologie, les mathématiques, « auxquelles s'ajoutent l'éducation physique et sportive ainsi que la géographie ».

2) La notice *L'espace de l'étude* contient des développements déjà plus substantiels.

• Un premier passage décrit le travail spécifique d'organisation de l'étude attendu du professeur (agissant de concert avec ses collègues concernés).

> Le travail de *conception et d'organisation de dispositifs d'étude* assigné au professeur doit fréquemment être repris, soit parce que change la structure imposée de l'espace de l'étude, soit parce que se modifie le répertoire des *thèmes d'étude* qu'il convient d'y travailler. C'est ainsi que, à la rentrée 2006 pour la classe de 5e (et à la rentrée 2007 pour la classe de 4e), un programme « toiletté » introduira

une variété inédite de thèmes d'étude, les *thèmes de convergence* [44. Voir ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2005/hs5/annexe5.pdf.], au nombre de six, qui sont actuellement les suivants :

Thème 1. *Énergie*.
Thème 2. *Environnement et développement durable*
Thème 3. *Météorologie et climatologie*
Thème 4. *Mode de pensée statistique dans le regard scientifique sur le monde*
Thème 5. *Santé*
Thème 6. *Sécurité*

Ces thèmes ne font pas l'objet d'un enseignement spécifique qui appellerait un horaire supplémentaire. Obligatoirement travaillés dans la classe de mathématiques comme dans les autres disciplines scientifiques (physique et chimie, sciences de la vie et de la Terre), ils « concernent également, selon les thèmes, l'éducation physique et sportive, l'histoire et la géographie, l'éducation civique, la technologie ». Pourtant, s'il est vrai que, à l'instar des IDD et des TPE, l'étude de ces thèmes suppose une « pluridisciplinarité concertée » qui n'exclut *a priori* aucune discipline, « les thèmes choisis font appel séparément à chaque discipline à des degrés différents ». On retrouve ici le rôle assigné aux œuvres O_1, O_2, …, O_m évoquées à propos des IDD et TPE. Mais les couples (Q, R) ne sont pas moins importants : l'ambition des thèmes de convergence, indique en effet le texte mentionné plus haut, « est avant tout d'apporter un éclairage nouveau sur des sujets de grande importance en termes de culture générale ou d'enjeux de société ». Dans cette perspective, « pour chaque enseignement disciplinaire, il s'agit de contribuer, de façon coordonnée, à l'appropriation par les élèves de savoirs relatifs à ces différents thèmes, éléments d'une culture partagée ». Ainsi donc le travail mené à bien dans la classe de mathématiques devra-t-il contribuer à instruire les élèves en matière de sécurité, de santé, etc.

• La référence aux IDD et TPE renvoie à un passage antérieur de la notice, passage que l'on reproduit ici pour la commodité du lecteur.

TPE et IDD peuvent être regardées comme visant – sans toujours l'atteindre pleinement – la mise en œuvre d'un schéma épistémologique commun à l'ensemble de ces dispositifs, que la notion de *parcours d'étude et de recherche* (PER) concrétise [1] : partant d'une question Q, l'équipe X d'« étudiants » s'efforce de produire une réponse R en mobilisant les outils de tous ordres offerts par des « œuvres » O_1, O_2, …, O_m qu'il faudra pour cela identifier et étudier, voire partiellement créer… Processus que l'on note $S(X\,;Y\,;Q)|O_1, O_2, \ldots, O_m \rightarrow R$, où Y est l'ensemble des « aides à l'étude » : directeur de thèse, professeurs encadrant une équipe d'élèves de première effectuant leur TPE, etc.

• Le travail demandé suppose un examen des contenus possibles qu'un autre passage de la notice décrit en ces termes.

Le texte gouvernant le travail sur les thèmes de convergence évoque l'intérêt qu'il y aura à « mettre en œuvre, dans toute la mesure du possible, des interventions conjointes de deux professeurs devant un même groupe d'élèves ». Cette concertation pluridisciplinaire – et même, déjà, la simple contribution d'une discipline donnée – suppose, à propos de tel thème de convergence, l'identification de *sujets* mis sous forme de *questions* génératrices d'études et de recherches, plusieurs sujets possibles apparaissant, de fait, fortement *interthématiques*.

• La suite de ce passage esquisse un exemple pour la classe de 4e « nouvelle ».

Ainsi en va-t-il par exemple d'une question telle « Rouler vite, rouler lentement : quelles conséquences ? », qui touche à la dépense énergétique, à la pollution, à la sécurité, etc. Dans le domaine d'études *Grandeurs et mesures*, le programme de 4e comporte un secteur d'études intitulé « Grandeurs quotients » […]. Il est alors possible, à propos de la question évoquée, de mener à bien en 4e la mini-étude ci-après :

[1] Sur cette notion ainsi que sur le vocabulaire et le formalisme utilisés ci-après, voir la notice *Le temps de l'étude*.

Pour se rendre à un rendez-vous dans un lieu situé en ville à quelques centaines de mètres d'une sortie d'autoroute, un automobiliste doit parcourir 30 km de cette autoroute. Un embouteillage à la sortie fait que, entre l'instant où il quitte l'autoroute et le moment où, après avoir garé sa voiture, il pénètre dans le lieu du rendez-vous, il s'est écoulé 12 minutes. Prévoyant la possibilité d'un tel blocage, l'automobiliste a maintenu sur les 30 km à parcourir une vitesse moyenne de 120 km/h. Combien de temps a-t-il mis pour arriver à son rendez-vous ? Combien de temps a-t-il gagné par rapport au temps qu'il aurait mis s'il avait choisi de rouler à une vitesse moyenne de 100 km/h ? Exprimer ce gain en pourcentage. Faire de même pour l'augmentation de la distance de freinage évaluée (sur autoroute sèche) à 64,6 m à 100 km/h et à 93 m à 120 km/h. Qu'est-ce que cela suggère quant au choix de l'automobiliste ?

C'est de cela par exemple qu'il faudra organiser et gérer la réalisation dans l'espace de l'étude alloué : tout en prenant en compte attentivement les conditions générales de vie et de travail de la classe, la gestion de cet espace ne trouve en définitive son véritable sens qu'au service de l'étude – et des apprentissages visés.

• Pour mémoire, la description donnée dans le programme de 4^{e} rénové du secteur d'études concerné est reproduite ci-après.

Contenus	**Compétences**	**Exemples d'activités, commentaires**
4.2. Grandeurs quotients Vitesse moyenne [Thèmes de convergence]	 – Calculer des distances parcourues, des vitesses moyennes et des durées de parcours en utilisant l'égalité $d = vt$. – Changer d'unités de vitesse (mètre par seconde et kilomètre par heure). [Technologie, Physique…]	La notion de vitesse moyenne est définie. Les situations où interviennent les vitesses moyennes constituent des exemples riches où le traitement mathématique s'avère particulièrement pertinent, comme l'étude de la vitesse moyenne d'un trajet sur un parcours de 60 km, où l'aller se parcourt à 20 km·h^{-1} et le retour à 30 km·h^{-1}. Le vocabulaire « kilomètre par heure » et la notation km/h, issus de la vie courante, sont à mettre en relation avec la notation km·h^{-1}. Les compétences exigibles ne concernent que les vitesses mais d'autres situations de changement d'unité méritent d'être envisagées : problème de change monétaire, débit, consommation de carburant en litres pour 100 kilomètres ou en kilomètres parcourus par litre.

c) D'autres passages de textes officiels peuvent être cités touchant les thèmes de convergence.

1) Le texte intitulé *Introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques* mis en tête des programmes du collège relevant du « pôle sciences » indique ainsi :

L'élaboration d'une représentation globale et cohérente du monde passe par la mise en convergence des savoirs disciplinaires autour de thèmes, tels que l'énergie, l'environnement et le développement durable, la météorologie et la climatologie, la santé, la sécurité, le mode de pensée statistique dans le regard sur le monde. Cette construction commune nécessite de la part des enseignements disciplinaires des contributions coordonnées, explicitées dans la partie intitulée *thèmes de convergence*.

2) De façon plus spécifique, le texte intitulé *Mathématiques – Introduction pour le cycle central* comporte ce commentaire :

Les objectifs généraux et l'organisation de l'enseignement des mathématiques décrits dans l'introduction générale des programmes de mathématiques pour le collège demeurent valables pour le cycle central : consolider, enrichir et structurer les acquis des classes précédentes, conforter l'acquisition des méthodes et des modes de pensée caractéristiques des mathématiques, développer la capacité à utiliser les mathématiques dans différents domaines (vie courante, autres disciplines), notamment à l'occasion de l'étude de thèmes de convergence.

3) Le texte proprement intitulé *Thèmes de convergence* serait à citer *in extenso* ; à titre indicatif, on n'en a retenu ci-après, pour chacun des six thèmes, que les passages qui se réfèrent explicitement aux mathématiques.

THÈME 1 : ÉNERGIE

Les mathématiques enrichissent ce thème notamment par l'écriture et la comparaison des ordres de grandeur, l'utilisation des puissances de 10 et de la notation scientifique, la réalisation et l'exploitation graphique (diagrammes en bâtons) de données ainsi que la comparaison de séries statistiques concernant par exemple les réserves, les consommations, la prospective pour les niveaux locaux, nationaux, planétaire. L'utilisation de l'outil informatique (tableur-grapheur) est souhaitable.

THÈME 2 : ENVIRONNEMENT ET DÉVELOPPEMENT DURABLE

Les mathématiques fournissent les outils de traitement et de représentation qui permettent l'analyse de phénomènes complexes. De plus, la prise en compte d'un vaste domaine d'espace et de temps implique la manipulation des ordres de grandeur (en considérant date, durée, vitesse, fréquence, mais aussi masses, surfaces, volumes, dilutions…). L'ensemble des outils mathématiques et statistiques ainsi mobilisés permet de construire une démarche responsable allant de l'analytique au prévisionnel.

THÈME 3 : MÉTÉOROLOGIE ET CLIMATOLOGIE

De par la diversité des relevés qu'elle génère, les tracés de graphes, les exploitations de données statistiques [3. Voir le thème de convergence *L'importance du mode de pensée statistique dans le regard scientifique sur le monde.*], météorologie et climatologie mettent en synergie nombre de disciplines : mathématiques, physique et chimie, technologie, sciences économiques et sociales, géographie... Leur importance dans la gestion de l'environnement, des cultures, des épidémies ou des pandémies [4. Voir le thème de convergence *Santé.*] (grippe, SRAS) permet aux sciences de la vie et de la Terre et à la géographie d'y trouver matière à exploitation.

Les mathématiques trouvent dans la météorologie des possibilités d'application tout à fait intéressantes. A partir de relevés de mesures, l'élève s'investit dans la construction de graphiques, l'utilisation des nombres relatifs, le calcul de moyennes... Le recours à l'informatique est bien sûr possible voire recommandé pour réaliser ce type d'activités.

THÈME 4 : IMPORTANCE DU MODE DE PENSÉE STATISTIQUE DANS LE REGARD SCIENTIFIQUE SUR LE MONDE

Dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, les élèves s'initient aux rudiments de la statistique descriptive : concepts de position et de dispersion, outils de calcul (moyennes, pourcentages…) et de représentation (histogrammes, diagrammes, graphiques) et apprennent le vocabulaire afférent. Ainsi sont mis en place les premiers éléments qui vont permettre aux élèves de réfléchir et de s'exprimer à propos de situations incertaines ou de phénomènes variables, d'intégrer le langage graphique et les données quantitatives au langage usuel et d'apprendre à regarder des données à une plus grande échelle ; c'est ce regard qui permettra, plus tard, la découverte de régularités et la prévisibilité. L'utilisation de tableurs grapheurs dès la classe de 5^{e} donne la possibilité de traiter de situations réelles, présentant un grand nombre de données et étudiées, chaque fois que c'est possible, en liaison avec l'enseignement des autres disciplines dont les apports au mode de pensée statistique sont multiples et complémentaires.

L'histoire et la géographie utilisent également les séries, les tableaux statistiques et les représentations graphiques et contribuent ainsi au développement d'un mode de pensée statistique. Une synergie intéressante peut être trouvée avec les autres disciplines scientifiques, notamment les mathématiques, autour de la cartographie statistique : l'élaboration de croquis simples, à partir de données statistiques, montre aux élèves l'intérêt d'un usage conjoint de deux disciplines pour exprimer visuellement des phénomènes humains dans leur dimension spatiale.

THÈME 5 : SANTÉ

L'éducation à la santé, qui n'est pas une discipline en soi, dispose d'ancrages dans les programmes de physique-chimie, technologie et mathématiques. Elle trouve naturellement sa place dans les programmes de sciences de la vie et de la Terre qui donnent aux élèves les bases scientifiques et les moyens de comprendre les mécanismes en cause dans certains problèmes de santé, et finalement de faire des choix de manière éclairée.
A un énoncé de règles et d'attitudes, il convient de privilégier une approche éducative ; lors de la présentation des risques du point de vue médical, une démarche moralisatrice doit être évitée. Seule l'articulation entre les enseignements et le débat argumenté peut conduire le jeune à choisir un comportement adapté, basé sur le respect de soi et d'autrui, véritable éducation à la responsabilité individuelle. Elle nécessite l'éclairage spécifique de plusieurs disciplines d'une part (**sciences de la vie et de la Terre, éducation physique et sportive, physique-chimie, mathématiques, technologie**…), et d'autre part une démarche inter-catégorielle avec les personnels de santé, sociaux et les partenaires extérieurs agréés.

THÈME 6 : SÉCURITÉ

Les mathématiques, au travers d'un regard statistique, peuvent conduire les élèves à distinguer l'aléa, défini par sa fréquence et son intensité, du risque qui associe aléa et importance des enjeux humains. Par ailleurs l'information relative à la sécurité routière peut s'appuyer sur les connaissances mathématiques pour mettre en évidence les liens entre vitesse et distance d'arrêt, en tant qu'exemple de non proportionnalité, entre vitesse et risques de mortalité.

1.2. Que faire ?

a) L'organisation de l'étude des thèmes de convergence dans la classe de mathématiques *reste aujourd'hui à construire* : il s'agit là d'un grand *problème de la profession*, et on se méfiera des solutions trop rapides, trop vite « mutualisées ».

b) À l'occasion d'une journée de travail des inspecteurs généraux et des inspecteurs pédagogiques régionaux le 20 octobre 2004 (voir http://perso.orange.fr/jacques.moisan/IG-IPR_oct_2004.htm), diverses remarques ont été formulées qu'il est pertinent de connaître : on les reproduit ci-après (en les numérotant, pour une référence plus facile).

1) Il est important que les mathématiques s'impliquent sans retard dans ces thèmes de convergence. En effet, il faut profiter de la nouvelle dynamique liée aux changements de programmes pour sortir de l'isolement dans lequel se trouvent souvent les professeurs de mathématiques. Les thèmes de convergence fournissent des situations problèmes qui, en mathématiques, permettent de mettre en œuvre les concepts sur des situations « véritables ». Cela permettra d'apporter des réponses à la question récurrente des élèves : « à quoi ça sert ? ». Finalement, c'est dans la recherche et la mise en place d'exercices de mathématiques spécifiques aux thèmes que tout se jouera.

2) Il est nécessaire de travailler en équipe (équipe disciplinaire et équipe éducative) pour assurer la coordination des enseignements.

3) Il faut se méfier de l'effet de mode : avec le thème de l'environnement, l'enseignant ne doit pas devenir militant mais plutôt donner aux futurs citoyens les connaissances leur permettant de se faire une idée personnelle.

4) Un thème comme celui de la santé demande à être abordé avec prudence : en effet certains sujets comme l'obésité ou d'autres liés à l'image de soi peuvent perturber de jeunes adolescents, s'ils sont abordés sans précaution.

5) Il n'est pas indispensable que les notions permettant d'aborder les mêmes thèmes de convergence soient traitées de façon concomitante en mathématiques et dans les autres disciplines. En effet des notions abordées une année dans une discipline peuvent être exploitées en mathématiques une autre année. A contrario, rien n'oblige d'attendre qu'une notion soit intégralement traitée en SVT ou en Sciences physiques pour s'autoriser à l'évoquer en mathématiques. Cela suppose de travailler avec les tableaux synoptiques et les documents d'accompagnement des différentes disciplines.

6) Les contenus mathématiques qui peuvent être mis en jeu dans certains thèmes de convergence sont plus riches que ce que laissent penser les fiches. C'est le cas du thème de la sécurité qui peut être alimenté, en mathématiques, par les nombreux documents sur la sécurité routière mis en ligne sur Eduscol. De même les professeurs peuvent s'appuyer sur les documents d'accompagnement des classes de 5^e et 4^e en sciences physiques pour engager une réflexion sur le thème de la météorologie. Il semble nécessaire de mutualiser le travail déjà riche engagé au cours des parcours diversifiés, travaux croisés ou itinéraires de découverte.

7) Ces différents thèmes fournissent des occasions de mettre les élèves en situation de recherche.

c) Pour sortir de l'isolement scolaire, épistémologique et culturel dans lequel les mathématiques se trouvent aujourd'hui, les thèmes de convergence sont l'occasion ou jamais, pour la profession, d'enfin *prendre au sérieux* les situations du monde étudiées et les disciplines qui permettent de les éclairer de façon pertinente.

1) Travailler sur un thème donné (par exemple sur le développement « durable ») dans une classe de 5^e en convergence entre plusieurs disciplines devrait aboutir à l'émergence et à l'institutionnalisation, en la matière, d'une *culture commune*, partagée tant par les élèves que par les professeurs des différentes disciplines concernées. Cette construction collective d'un « socle commun » de connaissances à propos de l'ensemble des thèmes étudiés suppose à tout le moins une concertation pluridisciplinaire largement étrangère à la profession et dont le modèle reste donc à créer : là est *une partie importante* de la difficulté.

2) Dans cette perspective, un dispositif utile, propre à une classe de 5^e ou commun à plusieurs classes de ce niveau, pourrait être la création progressive au fil de l'année d'un *dictionnaire*, ou au moins d'un *glossaire*, cristallisant l'essentiel des connaissances utiles dans l'ensemble des disciplines relativement aux thèmes étudiés. Une telle entreprise suppose que les professeurs concernés se révèlent capables de passer de l'idionomie disciplinaire à laquelle ils sont accoutumés à une synnomie « locale », qui demande une généreuse attention co-disciplinaire et… un effort d'apprentissage personnel et collectif.

• En matière de développement durable, par exemple, le professeur de mathématiques devra apprendre ce qu'est le « rapport Brundtland » que mentionne le texte *Thèmes de convergence* à propos du thème 2, etc. Ce rapport, notons-le en passant, définit le « développement durable » – en anglais : *sustainable development* – comme une forme de *« development that meets the needs of the present without compromising the ability of future generations to meet their own needs.* » Bien entendu, cette formulation repose sur la notion de *besoins* (*needs*), qu'il resterait à préciser : on se rappellera, à cet égard, la remarque d'Aristote – dans les *Topiques* – qu'une définition est généralement plus facile à réfuter qu'à établir.

• Sur d'autres thèmes, et du moins dans les dernières classes du collège, certains constituants du « socle commun » sont en principe faiblement polémiques : il n'en faudra pas moins les identifier et en préciser le contenu. C'est ainsi que, sur le thème de l'*énergie*, il conviendra que le professeur de mathématiques – et pas seulement son collègue de physique-chimie – ait une idée précise des unités utilisées dans les différents domaines. À titre d'illustration, on reproduit ci-après un passage d'un ouvrage un peu ancien déjà, le *Calcul pratique* de Lucien Chambadal, publié en 1983 chez Hachette. Rappelons d'abord que l'unité de force est le *newton*, dont le symbole est N, défini par $1 \text{ N} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$: un newton est donc un *kilogramme-mètre par seconde carrée*. L'auteur de l'ouvrage mentionné comporte alors (*op. cit.*, p. 312-313) les indications suivantes – et bien d'autres encore, que l'on ne reprendra pas ici.

Énergie et travail

On appelle travail (dans un mouvement rectiligne) le produit d'une force par un déplacement dans la direction de cette force. L'unité de travail est le newton-mètre, appelé encore joule, et noté J.

$$\mathbf{1\ J = 1\ N{\cdot}m = 1\ m^2{\cdot}kg/s^2.}$$

Le multiple est le kilojoule, noté kJ.

$$\mathbf{1\ kJ = 10^3\ J.}$$

L'erg, égal à 10^{-7} J, *est lui aussi abandonné.*

On dit qu'un système contient de l'énergie s'il est susceptible de fournir un travail. L'énergie s'exprime également en joules.

Pour la consommation de l'énergie électrique, on emploie le kilowattheure, égal à 3,6 ×10^6 J (voir p. 316).

La calorie, notée cal, *est une ancienne unité d'énergie ; c'est la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température de* 1 g *d'eau de* 14,5 °C *à* 15,5 °C *sous la pression atmosphérique normale.*

$$\mathbf{1\ cal = 4{,}184\ J.}$$

Les multiples sont la kilocalorie (kcal) *et la thermie* (th).

$$\mathbf{1\ kcal = 10^3\ cal}$$

$$\mathbf{1\ th = 10^6\ cal = 10^3\ cal.}$$

La kilocalorie a été appelée aussi grande calorie, et notée alors Cal. *Cette unité a été utilisée pour les régimes diététiques. La thermie a servi conjointement au kilowattheure pour les factures de gaz et d'électricité. Toutes ces unités sont interdites depuis le* 1er *janvier* 1978. *(On trouve encore des kilocalories sur des emballages alimentaires, mais accompagnés obligatoirement de leur équivalent en joules.)*

Exemple Une confiture a une valeur énergétique de 240 kcal pour 100 g. L'équivalent en joules est :

$$\mathbf{240 \times 10^3 \times 4{,}184\ J = 1004\ kJ.}$$

La référence au kilowattheure renvoie au passage que voici.

Puissance

On appelle puissance le travail par unité de temps. L'unité principale est le joule par seconde, encore appelé watt, et noté W.

$$\mathbf{1\ W = 1\ J/s = 1\ m^2{\cdot}kg/s^3.}$$

On emploie souvent le kilowatt, noté kW.

$$\mathbf{1\ kW = 1000\ W.}$$

Le wattheure n'est pas une unité de puissance, mais d'énergie : c'est, comme son nom l'indique, l'énergie produite pendant une heure par une puissance d'un watt. On emploie surtout le kilowattheure, noté kWh.

$$\mathbf{1\ Wh = 3{,}6 \times 10^3\ J.}$$

$$\mathbf{1\ kWh = 3{,}6 \times 10^6\ J = 3{,}6 \times 10^3\ kJ.}$$

Le kilowattheure est l'unité employée pour mesurer l'énergie électrique.

d) En pratique, plus généralement, les remarques précédentes ouvrent un vaste chantier, dont certaines parties sont d'ores et déjà peu ou prou travaillées – on songe ici à la sécurité (routière) par exemple (voir le site http://eduscol.education.fr/D0159/accueil.htm) –, mais dont d'autres sont, en particulier du point de vue mathématique, *à investir* : l'essentiel reste à *développer*, et cela ne saurait être facile. Ainsi a-t-on vu ainsi, dans le séminaire, une amorce de ce qui pourrait être un PER *interthématique* engendré par la question « Rouler vite, rouler lentement : quelles conséquences ? ».

1) Les manuels récemment parus semblent n'avoir fait à cet égard qu'un effort limité, en proposant *quelques* « exercices » évoquant des situations du monde liées à l'un ou l'autre des six thèmes de convergence. On peut, à cet égard, mentionner le manuel Magnard de 5^e rédigé sous la direction de Jacqueline Borréani, dont, à titre d'exemple, l'énoncé suivant, mathématiquement très simple mais non moins significatif, est extrait :

Maths et santé

La boisson gazeuse préférée de Dorian contient 30 g de sucre pour 1,5 L de boisson. Il boit chaque jour 3 verres de 12,5 cL.

1. En combien de jours aura-t-il « bu » 1 kg de sucre ?

2. En une année, quelle masse de sucre aura-t-il absorbée, peut-être sans le savoir ?

C'est là une façon d'apporter son écot au travail sur les thèmes de convergence. Mais, même si cela n'est pas négligeable, cela risque d'être insuffisant pour que l'on voie se dessiner une « convergence » quelconque entre les divers enseignements.

2) Pour illustrer le travail à réaliser, considérons la question suivante, qui pourrait engendrer un mini-PER : « Pourquoi sale-t-on les routes en hiver ? Quels sont les effets positifs attendus ? Y a-t-il des effets négatifs ? De quelle nature ? ».

• Le fait physique de base est le suivant : ajouter du sel à de l'eau *fait baisser la température de solidification* de l'eau – phénomène sur lequel on peut trouver des propositions simples d'étude expérimentale (voir par exemple le document www2.ac-lyon.fr/etab/ecoles/ec-01/lamapa/eau/C3-maitre.PDF). Alors que l'eau pure gèle à 0 °C, l'eau mélangée à du sel (NaCl) ne se solidifie qu'à une température *inférieure*. Si la température ambiante est par exemple de –3 °C, et si l'on a suffisamment salé une route pour que le mélange d'eau et de sel ne se prenne en glace qu'à –3,1 °C, on évitera la formation de verglas : par là, la question proposée touche, bien entendu, à la *sécurité* (routière).

• Nombre de points seraient à clarifier qui touche à la physique et à la météorologie : notions de verglas, de surfusion, de fusion de la glace et de solidification de l'eau, etc. On pourra par exemple se reporter aux pages situées aux adresses suivantes :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Verglas,
http://fr.wikipedia.org/wiki/Surfusion,
http://fr.wikipedia.org/wiki/Glace,
http://www.meteofrance.com/FR/glossaire/designation/504_curieux_view.jsp,
http://www.meteofrance.com/FR/glossaire/designation/1228_curieux_view.jsp,

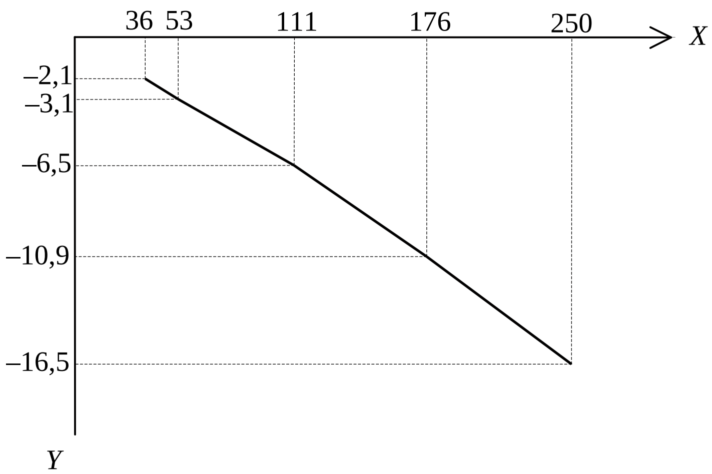
• En classe de mathématiques, on peut s'interroger sur la quantité de sel à épandre pour obtenir telle baisse de la température de solidification. Dans son livre *La physique de tous les jours* (Vuibert, 1996), István Berkes aborde cette question (*op. cit.*, p. 359-360) et fournit le tableau suivant :

g NaCl par litre d'eau	–Δ*t* en °C
36	2,1
53	3,1

111	6,5
176	10,9
250	16,5

Plus on veut faire baisser la température de solidification et plus il faut apporter de sel. Pour abaisser cette température à – 3,1 ºC il faut ajouter 53 g de sel par litre d'eau. Si l'on admet – avec l'auteur cité – que la masse du verglas est de 9 kg par mètre carré, il faudra apporter environ 53 g × 9 ≈ 480 g par mètre carré de chaussée verglacée. Connaissant le prix du sel utilisé (60 € la tonne environ), on peut calculer une partie du *coût* de l'opération…

• Si la température ambiante baisse encore, il faudra rajouter du sel. Pour passer d'une température de solidification de –2,1 ºC à –3,1 ºC, c'est-à-dire pour la faire diminuer d'un degré, il faut passer de 36 g de sel par litre à 53 g par litre, c'est-à-dire qu'il faut rajouter 17 g par litre. Est-il vrai que, pour passer à une température de solidification de –6,5 ºC, c'est-à-dire pour faire baisser la température de solidification de 3,4 ºC, il faut rajouter 3,4 × 17 g ≈ 58 g par litre ? Ou bien peut-être faut-il rajouter *davantage* de sel encore ? Ou *moins* de sel ? Le tableau permet de répondre : il faut rajouter 111 g – 53 g = 58 g ! Une représentation graphique donne ceci.



Les points ne sont pas à strictement parler alignés. Mais le graphique peut servir à déterminer approximativement la masse de sel à apporter. Si, par exemple, on veut faire descendre la température de solidification au-dessous de –8 ºC, une lecture graphique de conclure qu'il faut apporter environ 133 g par litre, et donc environ 133 g × 9 ≈ 1200 g par mètre carré de chaussée verglacée. Si, par exemple, on veut traiter une petite portion de chaussée de 10 m sur 3 m correspondant à une traversée de piétons, il faudra y déverser une quantité de sel d'environ 1,2 kg × 30 = 36 kg.

• La petite étude amorcée pourra être poursuivie de diverses façons, notamment dans le cadre du thème 2, *Environnement et développement durable*. Le salage des routes, en effet, répand du sel dans la nature environnante, dont les effets sont, semble-t-il, rien moins que bénéfiques. Il y a là matière à polémiques, sur lesquelles la classe pourra enquêter : pour un point de vue engagé, voir ainsi http://antivoitures.free.fr/2005/03/le-scandale-du-salage-des-routes.html.

e) Sans aller plus loin, on notera pour terminer que, du point de vue de l'apport des mathématiques à l'éducation « thématique » des élèves, c'est sans doute le thème 4 qui est le plus « sensible ». On en reproduit ci-après *in extenso*, sans commentaire, la fiche de présentation.

THÈME 4 : IMPORTANCE DU MODE DE PENSÉE STATISTIQUE DANS LE REGARD SCIENTIFIQUE SUR LE MONDE

L'aléatoire est présent dans de très nombreux domaines de la vie courante, privée et publique : analyse médicale qui confronte les résultats à des valeurs normales, bulletin météorologique qui mentionne des écarts par rapport aux normales saisonnières et dont les prévisions sont accompagnées d'un indice de confiance, contrôle de qualité d'un produit, sondage d'opinion…

Or le domaine de l'aléatoire et les démarches d'observations sont intimement liés à la pensée statistique. Il s'avère donc nécessaire, dès le collège, de former les élèves à la pensée statistique dans le regard scientifique qu'ils portent sur le monde, et de doter les élèves d'un langage et de concepts communs pour traiter l'information apportée dans chaque discipline [6. Cette analyse est confortée par l'Académie des Sciences qui dans un rapport de juillet 2000 note qu'« en France, à la différence d'autres pays européens, les citoyens n'ont pas une formation suffisante à la prise en compte du mode de pensée statistique ».]

Objectifs

La statistique est une science qui a pour but essentiel de construire, à partir de données recueillies, des modèles pour expliquer ou prévoir. On peut distinguer simplement deux composantes qui, dans la pratique, interagissent :

– la statistique exploratoire qui consiste à observer, recueillir, analyser et résumer les données de l'observation ;

– la statistique inférentielle qui utilise des modèles probabilistes pour expliquer et prévoir.

Au collège, la statistique exploratoire est la seule concernée et l'aspect descriptif constitue l'essentiel de l'apprentissage. Trois types d'outils peuvent être distingués :

– les outils de synthèse des observations : tableaux, effectifs, regroupement en classe, pourcentages, fréquence (pour la comparaison de populations d'effectifs différents), effectifs cumulés, fréquences cumulées,

– les outils de représentation : diagrammes à barres, diagrammes circulaires ou semi-circulaires, histogrammes, graphiques divers,

– les outils de caractérisation numériques d'une série statistique : caractéristiques de position (moyenne, médiane, quartiles), caractéristiques de dispersion (étendue).

Contenus

Dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, les élèves s'initient aux rudiments de la statistique descriptive : concepts de position et de dispersion, outils de calcul (moyennes, pourcentages…) et de représentation (histogrammes, diagrammes, graphiques) et apprennent le vocabulaire afférent. Ainsi sont mis en place les premiers éléments qui vont permettre aux élèves de réfléchir et de s'exprimer à propos de situations incertaines ou de phénomènes variables, d'intégrer le langage graphique et les données quantitatives au langage usuel et d'apprendre à regarder des données à une plus grande échelle ; c'est ce regard qui permettra, plus tard, la découverte de régularités et la prévisibilité. L'utilisation de tableurs grapheurs dès la classe de 5^{e} donne la possibilité de traiter de situations réelles, présentant un grand nombre de données et étudiées, chaque fois que c'est possible, en liaison avec l'enseignement des autres disciplines dont les apports au mode de pensée statistique sont multiples et complémentaires.

Deux modes d'utilisation des outils de statistique descriptive sont particulièrement mis en valeur :

– *Le recueil de données en grand nombre lors de la réalisation d'expériences et leur traitement*

Les élèves sont amenés à récolter des données acquises à partir des manipulations ou des productions effectuées par des binômes ou des groupes ; la globalisation de ces données au niveau d'une classe conduit déjà les élèves à dépasser un premier niveau d'information individuelle.

Mais ces données recueillies à l'échelle de la classe ne suffisent pas pour passer au stade de la généralisation et il est nécessaire de confronter ces résultats à d'autres réalisés en plus grand nombre, pour valider l'hypothèse qui sous-tend l'observation ou l'expérience réalisée.

Tout particulièrement dans le domaine de la biologie, de nombreux objets d'étude favorisent cette forme de mise en œuvre d'un mode de pensée statistique : la répartition des êtres vivants et les caractéristiques du milieu, la durée moyenne des règles et la période moyenne de l'ovulation, les anomalies chromosomiques… Les résultats statistiques permettent d'élaborer des hypothèses sur une relation entre deux faits d'observation et d'en tirer une conclusion pour pouvoir effectuer une prévision sur des risques encourus, par exemple en ce qui concerne la santé. Les résultats statistiques sont également utilisés pour indiquer la valeur de référence « standard » d'un paramètre physiologique : c'est la valeur la plus souvent rencontrée chez les individus en bonne santé. Autour de cette valeur repère, il existe des valeurs acceptables, légèrement inférieures ou supérieures, qui expriment des variations individuelles ; des intervalles de dispersion de référence sont souvent donnés.

L'histoire et la géographie utilisent également les séries, les tableaux statistiques et les représentations graphiques et contribuent ainsi au développement d'un mode de pensée statistique. Une synergie intéressante peut être trouvée avec les autres disciplines scientifiques, notamment les mathématiques, autour de la cartographie statistique : l'élaboration de croquis simples, à partir de données statistiques, montre aux élèves l'intérêt d'un usage conjoint de deux disciplines pour exprimer visuellement des phénomènes humains dans leur dimension spatiale.

En éducation physique et sportive, le recueil de données par les élèves peut avoir lieu au cours de certaines activités (prise de pouls, vitesse moyenne...), et contribuer ainsi à l'élaboration et la vérification d'hypothèses, à la comparaison à des données statistiques.

– Le problème de la variabilité de la mesure

De nombreuses activités dans les disciplines expérimentales (physique-chimie, sciences de la vie et de la Terre, technologie), basées sur des mesures, doivent intégrer la notion d'*incertitude* dans l'acte de mesurer et développer l'analyse des séries de mesures. Lors de manipulations, les élèves constatent que certaines grandeurs sont définies avec une certaine imprécision, que d'autres peuvent légèrement varier en fonction de paramètres physiques non maîtrisés. Plusieurs mesures indépendantes d'une même grandeur permettent ainsi la mise en évidence de la *dispersion naturelle des mesures*. Sans pour autant aborder les justifications théoriques réservées au niveau du lycée, il est indispensable de faire constater cette dispersion d'une série de mesures et d'estimer, en règle générale, la grandeur à mesurer par la moyenne de cette série.

2. Quelque part, l'an prochain

a) On prendra pour repère, ici, les questions suivantes.

1. Que faire pour préparer au mieux la rentrée de l'année prochaine ? Nous aurons davantage de cours à préparer mais nous ne saurons pas à l'avance quelles seront nos classes. Faut-il prévoir, par exemple, une progression pour chaque niveau ? (MK, OS, 2de, 23)

2. J'ai entendu dire que, en 2^{e} année, il y a des journées de formation. De quoi s'agit-il exactement ? (MK, OS, 2de, 22)

3. Quelles sont les possibilités de formation que nous aurons l'année prochaine ? (CM, MJ, 5^{e}, 23)

b) Dans le cas où l'on ne connaît pas les classes dont on aura la responsabilité, on peut en effet ne pas rester inerte en attendant d'être fixé. Une préparation active peut comporter notamment les initiatives suivantes.

1) Il est d'abord judicieux, quel que soit le cadre, collège ou lycée, de mettre à profit le silence de l'été pour effectuer une lecture cursive de l'ensemble des programmes que l'on pourrait avoir à enseigner : pour cela, on devra évidemment se rendre disponibles les programmes en question (sous forme électronique par exemple).

2) Ce travail premier permettra de parfaire le repérage des secteurs ou thèmes d'études avec lesquels on se sent actuellement le moins familier, soit du point de vue mathématique, soit du point de vue didactique, soit des deux points de vue.

3) Pour chacun des secteurs ou thèmes ainsi sélectionnés, on étudiera attentivement non seulement le programme, mais encore les documents d'accompagnement, disponibles en ligne

et souvent substantiels, en y dégageant des esquisses de réponses $R^{\lozenge}$ susceptibles d'apporter des matériaux à l'élaboration personnelle (ou en équipe : voir plus loin) des réponses $R^{\heartsuit}$ que l'on mettra en œuvre en classe, le cas échéant. Pour le collège, par exemple, on pourra étudier les *projets* de documents d'accompagnement intitulés respectivement *Du numérique au littéral* (11 p.), *Proportionnalité* (5 p.), *Organisation et gestion de données* (7 p.) et *Articulation école-collège* (9 p.), actuellement disponibles sur le site ÉduSCOL à l'adresse suivante : http://eduscol.education.fr/D0015/LLPHAG00.htm.

4) Pour bien situer les démarches d'information et de formation précédentes, on s'informera aussi de l'évolution des cadres plus généraux dans lesquels devront s'inscrire les enseignements à concevoir et à donner. Pour cela, on examinera en priorité la circulaire de rentrée 2006 (voir http://www.education.gouv.fr/bo/2006/13/MENE0600903C.htm), où l'on trouvera mention d'un certain nombre de confirmations ou de modifications : au collège, PPRE, note de vie scolaire, socle commun, etc. ; au lycée, nouveau programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques en classe terminale de la série littéraire, etc.

5) En dehors des textes « officiels », qui ont une valeur réglementaire même quand leur qualité laisse à désirer, on prendra le reste *cum grano salis* – voir ci-après.

c) La question de la poursuite de la formation est une question vive, qui n'aura pas de fin : elle se posera l'an prochain, dans cinq ans, etc.

1) Dans chaque académie est en principe prévu un dispositif de formation des néo-titulaires répondant aux spécifications de la circulaire de 2001 intitulée *Accompagnement de l'entrée dans le métier et formation continue des enseignants des 1^er^ et 2^nd^ degrés et des personnels d'éducation et d'orientation*, à laquelle on se reportera (on la trouvera dans le BO, à l'adresse suivante : http://www.education.gouv.fr/bo/2001/32/default.htm). On consultera également, sur le site ÉduSCOL, la rubrique « Entrée dans le métier d'enseignant » (à l'adresse http://eduscol.education.fr/D0033/FXNREF01.htm?rub=151). Pour ce qui est de l'académie d'Aix-Marseille, on se reportera au site correspondant, et plus particulièrement à la page http://www.ac-aix-marseille.fr/public/jsp/site/Portal.jsp?page_id=539.

2) Il ne faut cependant pas rêver : les problèmes de formation sont en règle générale des *problèmes de la profession*, pour lesquels cette dernière, par delà les prétentions individuelles de tel ou tel de ses membres, dispose rarement de solutions appropriées, qu'il reste généralement – sinon indéfiniment… – à *construire collectivement*. Les *types* de questions à affronter professionnellement ne changeront pas substantiellement par rapport aux situations rencontrées au cours de cette première année d'enseignement. Les types de réponses non plus. On ne saurait donc trop conseiller de se référer au schéma suivant, mis en œuvre au cours de l'année de formation initiale qui s'achève.

• Il convient d'abord d'être attentif, ouvert, réceptif aux difficultés qui peuvent surgir et de ne surtout pas s'enfermer dans un *déni de problématicité* (revoir à ce propos la notice *Questions & réponses*).

• Ayant repéré une question Q, il convient de chercher à y apporter une réponse $R^{\heartsuit}$ toujours regardée comme provisoire – mais non moins effective.

• L'élaboration de $R^{\heartsuit}$ suppose l'observation d'un certain nombre de réponses $R^{\lozenge}$ « toutes faites », observables autour de soi : la conception et la construction de $R^{\heartsuit}$ exploitera les matériaux matériels et immatériels apportés par les réponses $R^\lozenge$ observées, mais on s'efforcera de le faire de manière *critique* : les réponses $R^\lozenge$ devront être *analysées* et *évaluées*, et non *recopiées* servilement. À cet égard, on se méfiera du slogan facile de la « mutualisation » et on lui substituera le seul principe épistémologique sain, celui de la *mise en débat* des réponses $R^\lozenge$ (puis des réponses $R^\heartsuit$ elles-mêmes), c'est-à-dire de l'observation, de l'analyse et de l'évaluation de ces réponses.

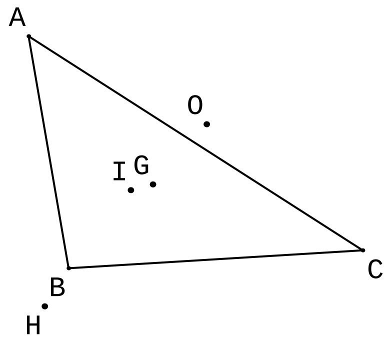
• S'agissant notamment des $R^\heartsuit$ produites, puis mises en œuvre en classe, on distinguera deux phases de l'*analyse*. Dans l'analyse *a priori*, qui précède la mise en œuvre dans le cadre institutionnel où la réponse construite est prévue pour fonctionner – ici, dans la classe –, on ne dispose que des outils d'analyse qu'apporte la science didactique que l'on maîtrise au moment d'effectuer cette analyse, laquelle est un point crucial pour le praticien (revoir à cet égard, dans les notes de la séance 22 du séminaire 2005-2006, les commentaires rectificatifs apportés à l'assertion « Il faudrait que les stagiaires puissent mettre à l'épreuve le développement construit pendant l'année de formation »). Dans l'analyse *a posteriori*, on enrichit sa science didactique des conclusions qui peuvent être tirées (par analyse et évaluation) de l'observation de la réalisation de $R^\heartsuit$, réponse qui devient maintenant un $R^\lozenge$, et qui aidera à « améliorer » $R^\heartsuit$ (à la façon dont la chose a été faite dans le processus du TER cette année) pour parvenir à une nouvelle réponse $R^\heartsuit$.

• Tout le travail précédent, on l'a suggéré, est une affaire de la profession, laquelle existe encore trop peu. On la fera exister davantage en lui donnant forme concrète par deux types de dispositifs : des *collectifs de travail* et une *mémoire*. La *mémoire* est celle des travaux jusque-là réalisés (et en particulier des réponses $R^\lozenge$ et $R^\heartsuit$ observées, analysées, évaluées) : l'exemple est ici, pour nous, celui des *archives du séminaire*, que l'on continuera de consulter et d'exploiter en priorité. Les *collectifs de travail* peuvent prendre différentes formes : équipe de travail autour d'une question *Q* particulière (par exemple, comment intégrer les thèmes de convergence en classe de 5^{e} ?…), à l'instar des équipes de TER ; *séminaires d'établissement*, à l'instar du séminaire du mardi matin ; etc. On n'oubliera pas, quel que soit le type de collectifs considéré, l'intérêt crucial d'une *supervision*, notion présentée lors de la séance 7 du séminaire et reprise lors de la séance 18 (à propos du C2i2e), qui permet de façon systématique de diffuser et défendre ce que l'on a développé.

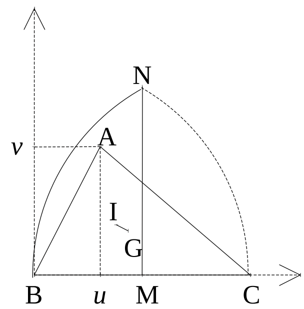
• Par contraste, et même s'il est douloureux de terminer par là, il faut souligner ce que l'on *s'efforcera d'éviter* – alors même que, aujourd'hui, on y arrive par une ligne de plus grande pente. Le pire, en effet, est le groupe de travail « acritique », fermé, qui tourne sur lui-même, dont le mot d'ordre est, métaphoriquement, « Passe-moi la moutarde, je te passerai le séné » et dont la pratique se limite essentiellement à un troc jovial, à l'enseigne de la « mutualisation », des productions individuelles de ses membres, lesquels se maintiennent ainsi dans le statut traditionnel de petit producteur indépendant, sans faire évoluer les normes de qualité de la profession. Tout le travail accompli cette année a tenté d'apporter les moyens d'échapper à ces pratiques d'un autre temps !

3. Un dernier exemple…

a) Dans le numéro 2 d'*Addenda* avait été ébauchée une petite étude mathématique utilisant un logiciel de géométrie, qui avait mis en évidence « expérimentalement » le fait suivant : si l'on trace un triangle ABC sur une feuille où l'on marque le centre de gravité G, le centre du cercle inscrit I, le centre du cercle circonscrit O, enfin l'orthocentre H relatifs au triangle ABC, il est possible, en faisant par exemple bouger le point A, d'éloigner les points O et H, alors que les points G et I restent « proches ».



b) Pour démontrer ce fait encore vaguement formulé, on suppose, sans restreindre la généralité de l'étude, que l'on a $a \geq b \geq c$, où, classiquement, a = BC, b = CA, c = AB. On cherche donc à majorer IG lorsque, B et C étant fixés, le point A de déplace dans la région située dans l'un des deux demi-plans déterminés par (BC), dans le demi-plan déterminé par la médiatrice de [BC] qui contient le point B, et dans le disque de centre C et de rayon BC (voir la figure ci-après)



1) On a : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\text{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OI} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$. Par suite, $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \left(\frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{c}{a+b+c} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{OC}$. Posons O = B ; il vient $\overrightarrow{GI} = \left(\frac{a}{a+b+c} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BA} + \left(\frac{c}{a+b+c} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC} = \alpha\,\overrightarrow{BA} + \gamma\,\overrightarrow{BC}$, où $\alpha = \frac{a}{a+b+c}\frac{1}{3}$ et $\gamma = \frac{c}{a+b+c} - \frac{1}{3}$.

2) En notant u et v les coordonnées de A par rapport au repère figuré plus haut, le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées (u ; v) et le vecteur $\overrightarrow{BC}$ (a ; 0), en sorte que $\overrightarrow{GI}$ a pour coordonnées ($\alpha u + \gamma a$; αv). On a donc : $GI^2 = (\alpha u + \gamma a)^2 + (\alpha v)^2 = \alpha^2 u^2 + \gamma^2 a^2 + 2au(\alpha\gamma) + \alpha^2 v^2 = \alpha^2(u^2 + v^2) + \gamma^2 a^2 + 2au(\alpha\gamma)$.

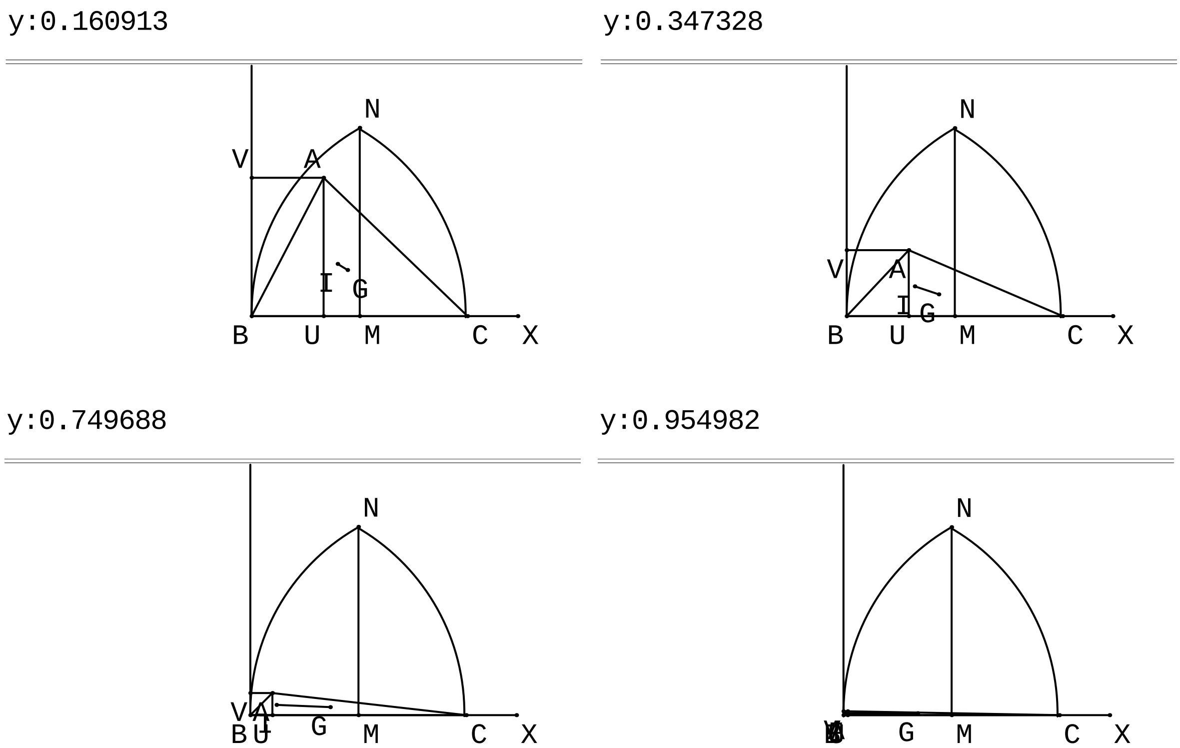
3) Comme $c^2 = BA^2 = u^2 + v^2$ on a $b^2 = (a - u)^2 + v^2 = a^2 + u^2 + v^2 - 2au = a^2 + c^2 - 2au$. On tire de là que $2au = a^2 + c^2 - b^2$, si bien que l'on a : $GI^2 = \alpha^2(u^2 + v^2) + \gamma^2 a^2 + 2au(\alpha\gamma) = \alpha^2 c^2 + \gamma^2 a^2 + (a^2 + c^2 - b^2)(\alpha\gamma)$.

4) Dans le cas de figure étudié, on a $\alpha = \dfrac{a}{a+b+c} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{(a-b)+(a-c)}{3(a+b+c)} \geq 0$ et $\gamma = \dfrac{c}{a+b+c} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{(c-a)+(c-b)}{3(a+b+c)} \leq 0$. On a donc d'abord $GI^2 = \alpha^2c^2 + \gamma^2a^2 + (a^2+c^2-b^2)(\alpha\gamma) = \alpha^2c^2 + \gamma^2a^2 - (a^2+c^2-b^2)(\alpha|\gamma|)$, expression qui permet la majoration grossière suivante : $GI^2 \leq \alpha^2c^2 + \gamma^2a^2$.

5) On a : $\dfrac{a}{a+b+c} = \dfrac{1}{2}\dfrac{a+a}{a+b+c} < \dfrac{1}{2}\dfrac{a+b+c}{a+b+c} = \dfrac{1}{2}$. Par suite, $\alpha < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$. Par ailleurs, $|\gamma| = \dfrac{1}{3} - \dfrac{c}{a+b+c} < \dfrac{1}{3}$. Il vient alors : $GI^2 \leq \alpha^2c^2 + \gamma^2a^2 \leq \alpha^2a^2 + \gamma^2a^2 < \left(\dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{9}\right)a^2 = \dfrac{5}{36}a^2$. On a finalement $GI < \dfrac{\sqrt{5}}{6}a \approx 0{,}373\, a$, ce qui explique le phénomène observé.

c) L'étude précédente peut être affinée.

1) Une exploration numérique à l'aide du logiciel déjà employé semble montrer qu'en fait on aurait $GI < \dfrac{1}{3}a \approx 0{,}333\, a$. Sur les figures suivantes, on a $y = IG \times \dfrac{3}{a}$.



2) Instruit par cette expérimentation, on peut reprendre les calculs précédents. Partons de $GI^2 = \alpha^2c^2 + \gamma^2a^2 + (a^2+c^2-b^2)(\alpha\gamma)$. On a $(\alpha c - \gamma a)^2 = \alpha^2c^2 + \gamma^2a^2 - 2ac(\alpha\gamma)$ et donc $\alpha^2c^2 + \gamma^2a^2 = (\alpha c - \gamma a)^2 + 2ac(\alpha\gamma)$. Or on a : $\alpha c - \gamma a = \dfrac{ac}{a+b+c} - \dfrac{1}{3}c - \dfrac{ac}{a+b+c} + \dfrac{1}{3}a = \dfrac{1}{3}(a-c)$. Il vient ainsi :

$$GI^2 = \frac{1}{9}(a-c)^2 + 2ac(\alpha\gamma) + (a^2+c^2-b^2)(\alpha\gamma) = \frac{1}{9}(a-c)^2 + ((a+c)^2-b^2)(\alpha\gamma)$$

$$= \frac{1}{9}\,(a - c)^2 - ((a + c)^2 - b^2)(\alpha|\gamma) \leq \frac{1}{9}\,(a - c)^2 \leq \frac{1}{9}\,a^2.$$

Finalement, $\mathrm{GI} \leq \frac{1}{3}\,a$.

3) Ce majorant ne peut pas être amélioré. Supposons en effet que c tend vers 0 ; comme $a < b + c \leq a + c$, il en résulte que b tend vers a. Dans ces conditions, $\alpha = \frac{a}{a + b + c} - \frac{1}{3}$ tend vers $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ et $\gamma = \frac{c}{a + b + c} - \frac{1}{3}$ vers $-\frac{1}{3}$. Par suite $((a + c)^2 - b^2)(\alpha|\gamma)$ tend vers 0 et GI^2 vers $\frac{1}{9}\,a^2$: pour $a > 0$ quelconque, GI est donc aussi proche que l'on veut de $\frac{1}{3}\,a$.

Voilà, c'est fini !