

ENSEIGNER LA STATISTIQUE : DES MATHEMATIQUES MIXTES POUR PENSER LA VARIABILITÉ

Abstract. The aim of this workshop was to analyse the teaching of statistics in a class of 15-year old secondary school students. Central to the work done was the analysis of the “mixed” mathematics involved in the study of variability, construed as the true object of statistical studies.

1. INTRODUCTION

L’objectif de cet atelier, pensé et réalisé dans une perspective d’analyse écologique et anthropologique, était l’étude exploratoire de deux aspects non indépendants de tout enseignement de la statistique : d’une part, la place qui y est allouée aux objets, connaissances et savoirs *extramathématiques* et les fonctions que ces objets, connaissances et savoirs y assument, d’autre part la place qui y est faite au concept de *variabilité* ainsi que les modalités de présence concrète de la variabilité.

Cette première rencontre s’est faite autour de l’observation et de l’analyse de l’enseignement de la statistique dans une classe de seconde : l’étude de la mixité de l’organisation mathématique enseignée (ou à enseigner) s’est faite à l’aide d’extraits du manuel de la classe ³ ; l’étude de la prise en charge de la variabilité et de sa conceptualisation s’est réalisée à travers l’examen du cahier d’un élève ⁴, dans une plus grande proximité à l’activité effective de la classe.

2. UNE ORGANISATION MATHÉMATIQUE MIXTE ?

2.1. Analyse du caractère mixte d’une organisation mathématique

Comme l’a illustré le cours auquel se rattache ce TD, il n’y a pas de naturalisation du monde qui permettrait de s’en approcher la « tête vide ». Ainsi, lorsque la statistique est conçue comme une organisation de savoir essentiellement *mixte*, et plus particulièrement comme une organisation mathématique mixte (OMM) articulant objets mathématiques et objets extramathématiques, son enseignement doit-il se construire dans un commerce constant avec un certain *domaine de réalité extramathématique* (DREM). En pratique, cela suppose chaque fois que soit envisagé, dans le DREM considéré, l’accomplissement d’une certaine tâche « matricielle » (appelée « tâche ✓ ⁵ » ici) comportant des aspects tenus pour problématiques et dont l’ingrédient essentiel est une tâche mathématique *t* que rend seule réalisable la construction (ou la mobilisation) d’un modèle mathématique du type de situations du monde à

¹ UMR ADEF - IUFM d’Aix Marseille.

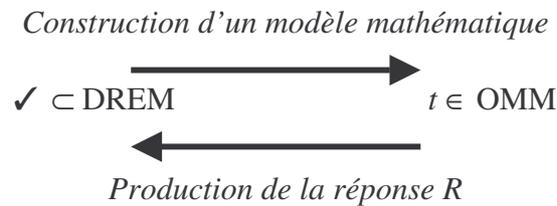
² UMR ADEF - IUFM de Lyon.

³ Misset, L. *et al.* (2000), *Maths Seconde*, Paris : Hachette Education (Collection Déclic). Les extraits étudiés sont les pages 176 à 187 de ce manuel.

⁴ Une copie se trouve dans le CD-ROM d’accompagnement.

⁵ Lire « tâche coche ».

propos duquel la question initiale « matricielle » est posée – comment accomplir ✓ ? Ainsi le fonctionnement du modèle, construit à partir des connaissances du DREM dont il modélise certains aspects, permet-il de produire la connaissance clé pour apporter réponse à la question initiale. La prise d'informations dans le DREM permet de construire un modèle mathématique mixte, lui-même validé à travers la vérification des inférences qu'il permet à propos du DREM, cependant que la construction de la réponse se fait par le seul travail (mathématique) du modèle. Ce qui conduit au schéma ci-après.



Tout cela précisé, nous parlerons alors d'*occasionnalisme* chaque fois que le DREM convoqué n'intervient qu'à titre de décorum, l'enjeu objectif de l'étude n'étant plus la résolution d'un problème permettant d'apporter une réponse effective à la question extramathématique initialement posée (« Comment accomplir ✓ et donc comment accomplir t ? »), mais visant comme fin certains moyens d'apporter une telle réponse – création ou manipulation de la technique requise par l'accomplissement des tâches du type de t notamment. Les connaissances extramathématiques évoquées constituent alors un simple arrière-plan d'une étude mathématique quasi « pure ».

L'étude de la mixité de l'OM examinée s'est réalisée en quatre temps, autour d'une liste de questions d'observation, d'analyse, d'évaluation, de développement.

2.1.1. Observation

- Quelle est la question étudiée ? Identifier la tâche coche ✓ .
- De quel domaine de réalité extramathématique (DREM) relève ✓ ?
- Quels sont les objets extramathématiques évoqués dans le texte ? Ces connaissances sont-elles réputées connues des élèves ?
- Quelle attention, et sous quelle forme, est donnée aux objets extramathématiques (indication des sources, explicitation du vocabulaire spécifique au DREM, etc.).

2.1.2. Analyse

- L'étude proposée est-elle engendrée par une question clairement énoncée ou présentée comme à étudier ?
- Quel statut pour l'extramathématique : ces objets, savoirs ou connaissances sont-ils indispensables ou forment-ils un simple arrière-plan inerte de l'étude ?
- Quel est l'enjeu de la situation, que doit en retenir l'élève ? La tâche coche ✓ est-elle un « alibi » ou doit-elle être « sue » ?

2.1.3. Évaluation

Quel niveau, quel degré de mixité épistémologique ? A-t-on affaire à un fait d'occasionnalisme ou rencontre-t-on une authentique OMM ?

2.1.4. Développement

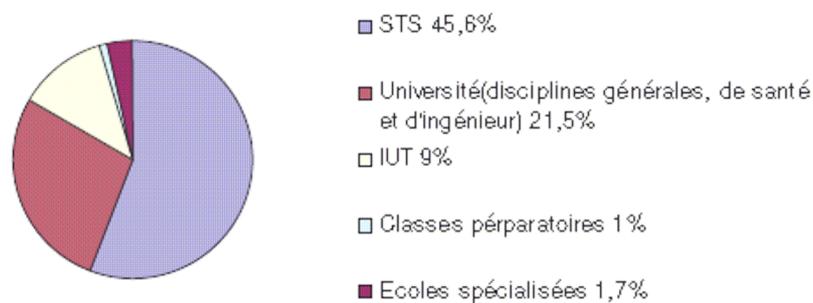
Quelle modification pourrait-on apporter pour améliorer les choix faits par les auteurs du manuel ?

2.2. Étude d'un exemple : les « travaux dirigés 3 »

Dans le manuel de la classe (p. 178), le contenu des « Travaux dirigés 3 » – intitulés *Chercher l'erreur...* – s'inscrit dans une problématique générale *a priori* pertinente : comment les mathématiques permettent-elles de contrôler l'information chiffrée qui nous parvient ? C'est l'activité sociale – à teneur mathématique – consistant à tirer des conclusions d'une information chiffrée qui est ici visée : il s'agit de contrôler, ou de critiquer, la réponse apportée à une certaine question concernant la représentation graphique ou l'interprétation de données numériques. Pour cela, une praxéologie à teneur mathématique doit être construite qui permette de contrôler les mathématiques utilisées.

Notons que, s'il existe bien des questionnements sur les phénomènes sociaux qui mettent en jeu de l'information chiffrée et qui, par ce biais, relèvent de la statistique, toute information chiffrée n'est pas nécessairement du ressort de la statistique : le royaume de l'information chiffrée est plus vaste que celui de la statistique. En fait, on découvre que l'activité proposée dans ces travaux dirigés n'est pas véritablement du domaine de la statistique...

On peut distinguer deux sortes d'erreurs : celles qui sont détectables grâce à des connaissances extramathématiques et celles qui le sont grâce aux connaissances mathématiques. Tel est le cas dans la situation de l'exercice 1, page 178 :



Doc. 1 : Le choix des bacheliers technologiques de 1998.

- Il y a manifestement une erreur. Pourquoi ?
- On fait la supposition que le diagramme est correct. Relever les valeurs des angles, et, à l'aide du tableau de listes de la calculatrice, calculer les bonnes valeurs des pourcentages. (Mettre les angles en liste 1 et définir la liste 2 par la formule adaptée.)

Le type de tâches *T* présent dans cet exercice peut être formulé ainsi : contrôler la cohérence de données numériques et de leur représentation graphique. La tâche coche ✓ consiste à rechercher une erreur dans une représentation graphique – sous la forme d'un diagramme en secteurs – des fréquences des choix d'orientation des bacheliers technologiques une certaine année. Le DREM, présent sous la forme d'une représentation d'éléments d'enquête de conjoncture⁶, est celui de l'institution scolaire et plus particulièrement de l'enseignement supérieur.

⁶ Les enquêtes de conjoncture font partie du travail de divers organismes de statistique de l'État, comme l'INSEE par exemple.

Les connaissances extramathématiques présentes portent sur diverses institutions d'enseignement post-baccalauréat (présentes notamment par leur sigle : STS, IUT). Il n'est pas assuré que des élèves de seconde disposent effectivement de telles connaissances. Par ailleurs, on constate que les sources des données ne sont pas précisées (ce qui pose la question de la façon dont ces données ont été construites). Enfin, aucune définition du vocabulaire employé n'est fournie.

La question étudiée – comment représenter des pourcentages par un diagramme en secteurs ? – est clairement énoncée. Mais les connaissances extramathématiques évoquées ne sont pas indispensables pour l'étude. L'enjeu de la situation porte sur la technique τ de représentation de données numériques par un diagramme en secteurs (appelé aussi diagramme circulaire ou, familièrement, camembert) : chaque secteur a un angle α_i proportionnel à la fréquence f_i de la modalité qu'il représente : $\alpha_i = f_i \times 360^\circ$.

Nous avons là, à plusieurs égards, un exemple clair d'occasionalisme : les connaissances extramathématiques évoquées constituent seulement l'arrière-plan de l'étude mathématique ; l'enjeu de l'activité est le travail de la technique de représentation graphique de données numériques. Par ailleurs la structure de l'étude est donnée par la formulation des questions, ce qui place l'élève dans la position toute instrumentale d'aide mathématicien : il n'y a pas de place pour la construction d'une analyse critique et la technique à mettre en œuvre est soufflée.

3. QUELLE PLACE POUR LA VARIABILITE ?

3.1. Pourquoi s'intéresser à la notion de variabilité ?

La reconnaissance des phénomènes aléatoires est considérée comme acquise en seconde. Le document d'accompagnement du programme de cette classe constate : « Au collège, les élèves se sont familiarisés avec les phénomènes variables et ont appris des éléments du langage graphique (représentations diverses, « camemberts », diagrammes en bâtons) qui permettent de visualiser un série de données expérimentales » (MEN 2001, p. 11). Mais qu'en est-il exactement ?

Tout au long du collège, si le domaine d'études ne change pas de dénomination – il est appelé « Organisation et gestion de données. Fonctions » –, le changement d'intitulé du secteur d'études en cause exprime une certaine évolution : en 6^e, aucune sous-rubrique n'apparaît ; en 5^e apparaît la sous-rubrique « relevés statistiques » qui devient « statistiques » en 4^e et « statistique » en 3^e. Ces changements dans les intitulés manifestent assez clairement le passage qui s'opère au collège du traitement de l'information chiffrée vers la statistique, ce qui est confirmée par la présentation de chacune de ces rubriques :

En 6^e : Organisation et gestion de données. Fonctions

Cette rubrique a pour objectif d'initier à la lecture, à l'interprétation et à l'utilisation de diagrammes, tableaux et graphiques et d'en faire l'analyse critique. La réalisation de tels objectifs contribue à l'éducation civique. (MEN 1996a, page 38)

En 5^e : Organisation et gestion de données, fonctions

3. Relevés statistiques

La partie statistique a pour objectif d'initier à la lecture, à l'interprétation, à la réalisation et à l'utilisation de diagrammes, tableaux et graphiques et d'en faire l'analyse critique. (MEN 1997a, p. 9)

En 4^e : Gestion de données, fonctions

3. Statistiques

Les notions essentielles relatives à cette rubrique ont été introduites ou approfondies en 6^e et 5^e. (MEN 1997a, p. 17)

En 3^e. Organisation et gestion de données – Fonctions

3. Statistique

L'éducation mathématique rejoint ici l'éducation du citoyen : prendre l'habitude de s'interroger sur la signification des nombres utilisés, sur l'information apportée par un résumé statistique et donc sur la perte d'information, sur les possibilités de généralisation, sur les risques d'erreurs d'interprétation et sur leurs conséquences possibles. (MEN 1998a, p. 7)

Tout cela est, au reste, explicité dans les documents d'accompagnement :

Au cycle central (5^e - 4^e)

Statistique

Au collège, l'enseignement de statistique descriptive a pour objectif de familiariser progressivement les élèves avec la démarche consistant à synthétiser, sous forme numérique ou graphique, des informations recueillies sur l'ensemble des éléments d'une population. L'essentiel de l'activité des élèves consiste à exploiter, de façon raisonnée, des documents adaptés à chaque classe, afin de développer leur autonomie dans ce domaine ; ces documents gagnent à être choisis en concertation avec d'autres disciplines. (MEN 1997b, pp. 8-9)

En 3^e

Représentation et organisation de données ; statistiques

En classe de 3^e, il s'agit d'aider les élèves à franchir une nouvelle étape dans le développement de leur autonomie de jugement à propos d'informations qui peuvent être nombreuses. (...). Dans ce premier contact, le programme se limite à l'étendue d'une série statistique ou à l'étendue d'une partie donnée de celle-ci ; cela permet, sans difficulté technique, de familiariser les élèves avec une démarche habituelle en statistique : procéder à une synthèse de l'information sous la forme de nombres mesurant respectivement la position et la dispersion de la série étudiée. (MEN 1998b, p. 4)

En conclusion, les outils statistiques, notamment les résumés, sont progressivement introduits pour permettre la présentation, la synthèse et l'analyse critique de données numériques issues de l'information chiffrée. Mais on ne trouve ici aucune référence explicite à la notion de variabilité. C'est en seconde que les élèves abordent la statistique entendue comme domaine des mathématiques mixtes (*i.e.* « appliquées ») qui vise à traiter *des* statistiques. Le programme de seconde précise ainsi :

Les choix, traduits en termes de programme pour la classe de seconde, sont guidés par les perspectives suivantes pour le lycée : « acquérir une expérience de l'aléatoire et ouvrir le champ du questionnement statistique ». (MEN 2001, p.11)

Un enseignement de la statistique en Seconde doit donc permettre aux élèves d'appréhender la variabilité.

3.2. Place et modalités de présence de la variabilité dans la séquence observée

Rencontrer la variabilité, c'est rencontrer la raison d'être de la distribution des fréquences. L'intérêt pour cette notion procède en effet de ce que la plupart des grandeurs sont aléatoires,

en sorte que, connaître telle grandeur de tel objet, répondre à telle question à son propos oblige en règle générale à considérer la distribution des fréquences des diverses valeurs de cette grandeur. Ainsi ne suffit-il pas de percevoir qu'il y a « du variable » : encore faut-il identifier que cette variation suit une certaine « loi », celle de distribution, qu'elle n'est pas « n'importe quoi »...

Appréhender la variabilité, c'est donc percevoir que, derrière les singularités apparentes, il existe une loi de variation (représentée par l'histogramme de la distribution de fréquences par exemple), avec généralement une tendance centrale et une dispersion, ce que les « singularités » observées ne font qu'exprimer de façon déformée – il ne s'agit pas de singularités « incomparables » mais de cas individuels qu'il faut situer par rapport à un ensemble statistique et à sa tendance centrale.

Afin de déterminer si la reconnaissance et la gestion de la variabilité apparaissent déterminantes pour la réussite de l'élève dans la séquence observée, les participants à l'atelier ont étudié le cahier d'un élève à partir des questions suivantes :

- Où, dans l'activité de la classe, l'élève rencontre-t-il de la variabilité et sous quelle forme ?
- Quels sont les types de rencontre avec la variabilité ?
- Quel est l'enjeu de connaissance ? Pour l'élève seulement ou pour la personne évoquée dans la situation du monde étudiée ?
- Les épisodes identifiés font-ils l'objet d'une mise en forme dans la synthèse, et laquelle ?

Notre étude nous a permis de faire de premiers constats. Tout d'abord, aucun problème, aucune question ne motive l'enseignement de la statistique dans cette séquence. Une enquête, par exemple, ne se réduit pas à la seule collecte des données : elle est motivée par une question génératrice qui détermine en grande partie le type de données à recueillir, la manière de les recueillir, etc. – toutes choses à peu près absentes ici.

Ensuite, un « résumé de cours » indique qu'une série statistique se résume, entre autres choses, par son « titre ». L'indication d'une population sur laquelle un certain caractère serait défini et étudié, est introuvable : le mot même de population est absent de l'activité et de la synthèse qui ouvrent la séquence. Tout se passe, ici, comme si le seul titre donné à une série statistique suffisait à désigner la population considérée ! L'absence d'interrogation à propos de la « genèse » des séries statistiques étudiées est corrélée avec l'absence de référence à la population dont ces séries pourraient être regardées comme des échantillons. On a là une autre forme de dénégation de la variabilité : que faire d'une série statistique qui n'est l'échantillon de rien ?...

Les trois premières séries statistiques présentes dans l'activité et la synthèse ont, sans doute, des distributions de fréquences non uniformes. Mais l'absence de questions motivant leur étude empêche la rencontre avec la raison d'être de l'examen de ces distributions : la rencontre « authentique » avec la variabilité laisse place, ici, à un simple regard sur la contingence du monde, une contingence dont on peut penser alors qu'elle est toujours et partout « sans loi ».

Enfin, le type de variabilité rencontré est très particulier : on étudie des situations dans lesquelles la variabilité est en quelque sorte « naturalisée » et « va de soi ». Chacun sait bien, en effet, que le lancer d'un dé amène des résultats différents, que les gens ont des yeux de

couleur différente, des tailles diverses, un nombre de paires de chaussures qui lui aussi varie. Bref, la rencontre avec la variabilité, ici, n'est la clé de rien : ainsi la fluctuation d'échantillonnage ne sera-t-elle abordée qu'à propos du lancer de dé, sans enjeu de connaissance véritable...

4. EN GUISE DE CONCLUSION

Si une certaine orthodoxie scolaire encore mal assurée voudrait que l'étude de la statistique se nourrisse d'extramathématique, l'enseignement aujourd'hui encore dominant paraît bien ne pas se construire à partir de questions génératrices portant sur des domaines de réalité extramathématiques pris au sérieux. C'est presque toujours dans une perspective *applicacionniste* qu'un tel enseignement est assumé : ainsi en va-t-il, du moins, dans la séquence analysée dans cet atelier. Et cette perspective débouche presque irrémédiablement sur la *réduction arithmétique* de la statistique, laquelle perd alors son identité scientifique, celle de science de la variabilité.

5. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Ministère de l'Education Nationale. (1996a). *Programme de mathématiques de la classe de 6^e* [en ligne]. Paris : CNDP. [réf. 2000-09-14]. Disponible sur l'internet : http://www.cndp.fr/textes_officiels/college/programmes/bprg_6/maths6.pdf

Ministère de l'Education Nationale. (1996b). *Accompagnement du programme de mathématiques de la classe de 6^e* [en ligne]. Paris : CNDP. [réf. 2000-09-14]. Disponible sur l'internet : http://www.cndp.fr/textes_officiels/college/programmes/bacc_6/maths_6.pdf.

Ministère de l'Education Nationale. (1997a). *Programmes de mathématiques du cycle central* [en ligne]. Paris : CNDP. [réf. 2000-09-14]. Disponible sur l'internet : http://www.cndp.fr/textes_officiels/college/programmes/bprg_54/math.pdf.

Ministère de l'Education Nationale. (1997b). *Accompagnement du programme de mathématiques du cycle central* [en ligne]. Paris : CNDP. [réf. 2000-09-14]. Disponible sur l'internet : http://www.cndp.fr/textes_officiels/college/programmes/bacc_54/maths_54.pdf.

Ministère de l'Education Nationale. (1998a). *Programme de mathématiques de la classe de 3^e* [en ligne]. BO hors série n. 10 du 15 octobre 1998. Paris : CNDP. [réf. 2000-09-14]. Disponible sur l'internet : http://www.cndp.fr/textes_officiels/college/programmes/bprg_3/maths.pdf.

Ministère de l'Education Nationale (1998b). *Accompagnement du programme de mathématiques de la classe de 3^e* [en ligne]. Paris : CNDP. [réf. 2000-09-14]. Disponible sur l'internet : http://www.cndp.fr/textes_officiels/college/programmes/acc_prg3_maths.pdf.

Ministère de l'Education Nationale (1999a). *Programme de mathématiques de la classe de seconde* [en ligne]. Paris : CNDP. [réf. 2000-09-14]. Disponible sur l'internet : http://www.cndp.fr/textes_officiels/lycee/maths/sec/p_maths.htm.

Ministère de l'Education Nationale. (2001). *Accompagnement des programmes. Mathématiques. Classe de Seconde*, Paris : CNDP.