Ostensifs et non-ostensifs dans l’activité mathématique

par Yves Chevallard

(IUFM et IREM d’Aix-Marseille)

N.B. Les formulations ci-après demanderaient d’amples commentaires pour en justifier le contenu et en préciser la signification. La forme de résumé donnée à cette présentation ne permettra pas, cependant, de satisfaire sur ces deux points la légitime curiosité du lecteur.

1. Concepts de base

1.1. On présente dans ce qui suit un certain nombre de postulats d’un modèle de l’activité humaine.

a) Toute *activité* humaine se laisse décomposer en un certain nombre de *tâches*.

b) Concrètement, une tâche d’un *type* donné (ouvrir la porte, se laver les dents, monter un escalier, résoudre une équation du second degré, élaborer une axiomatique de la géométrie du plan, donner une leçon d’orthographe, etc.) se présente, dès lors qu’elle est *routinière* pour le sujet qui l’accomplit, comme la mise en œuvre d’une *technique* déterminée.

c) Pour être viable, une technique doit apparaître comme *compréhensible et justifiable*. Cette double fonction est prise en charge par un « discours » spécifique, la *technologie* de la technique.

d) À son tour, la technologie d’une technique donnée doit apparaître comme compréhensible et justifiable : on appelle *théorie* la technologie d’une technologie.

1.2. La hiérarchie technique-technologie-théorie est *relative* au type de tâche considéré. Ainsi, l’élaboration d’une technologie (ou d’une théorie) suppose elle-même une technique, etc. L’arrêt au niveau de la théorie de ce qui se présente *a priori* comme une régression à l’infini apparaît comme un *donné* du fonctionnement des institutions : étant donné une tâche quelconque accomplie dans une institution déterminée, le questionnement à propos de la technique correspondante s’épuise avec le niveau de la théorie, lui-même fréquemment « évanouissant ».

1.3. L’exemple suivant illustrera les postulats ci-dessus.

a) Dans une classe de mathématiques, la tâche consistant à démontrer l’égalité $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ peut être accomplie à l’aide de la *technique* connue sous le nom de « raisonnement par récurrence » :

Posons $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$. On a : $S_1 = 1$ et donc $S_1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Supposons alors que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et montrons que $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. On a : $S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+\frac{2}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Par suite, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

b) Une *technologie* classique de cette technique est fournie par l’assertion suivante :

Soit $S \subseteq \mathbb{N}$. Si $0 \in S$ et si on a : $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$, alors $S = \mathbb{N}$.

c) La justification de cette assertion, c'est-à-dire la *théorie* de la technique considérée, peut consister en une axiomatique de $\mathbb{N}$ incluant l'assertion indiquée à *titre d'axiome* (tel fut autrefois le choix de G. Peano), *augmentée* de considérations sur « l'évidence » de cette assertion (semblables à celles développées un peu plus tard par H. Poincaré dans son livre *La science* et *l'hypothèse*).

d) Mais la théorie peut aussi consister à *démontrer* l'assertion technologique indiquée, à partir de l'énoncé *théorique* suivant :

$\mathbb{N}$ est bien ordonné, *i.e.* toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

Dans ce cas, l'assertion technologique n'est plus un *axiome* (Peano), ou un *principe* (Poincaré), mais un *théorème*. La théorie inclut en outre une justification de l'énoncé théorique mis en jeu (« $\mathbb{N}$ est bien ordonné »), énoncé qui sera supposé par exemple « évident ».

e) D'autres *théories*, plus ambitieuses et repoussant plus loin la rencontre avec l'argument de l'évidence, peuvent être construites : c'est le cas avec la théorie des ensembles, dans le cadre de laquelle l'axiome selon lequel $\mathbb{N}$ est bien ordonné peut devenir à son tour un *théorème*, et où l'on regardera alors comme évident l'énoncé encore plus « primitif » suivant : « il existe un ensemble dont les éléments sont les entiers » (voir P. Halmos, *Naive Set Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton).

2. Tâches routinières, tâches problématiques

2.1. On se place ici dans le cadre de la culture mathématique de l'enseignement secondaire français. Soit la tâche consistant à résoudre (dans $\mathbb{R}$) l'équation $4x^2 + 11x - 3 = 0$. À partir d'un certain niveau d'étude, cette tâche peut être regardée comme routinière. On dispose en effet d'une technique, dont la mise en œuvre conduit ici au travail mathématique suivant :

On a : $4x^2 + 11x - 3 = \left(2x + \frac{11}{4}\right)^2 - \frac{121}{16} - \frac{3 \times 16}{16} = \left(2x + \frac{11}{4}\right)^2 - \frac{169}{16} = \left(2x + \frac{11}{4}\right)^2 - \frac{13^2}{4^2}$.

D'où : $4x^2 + 11x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(2x + \frac{11}{4}\right)^2 - \frac{13^2}{4^2} = 0 \Leftrightarrow \left(2x + \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{13^2}{4^2}$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{11}{4} = \pm\frac{13}{4} \Leftrightarrow x = \ldots = -3 \text{ ou } \frac{1}{4}.$$

2.2. Considérons maintenant la tâche suivante :

Résoudre dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ l'équation : $4x^2 + 11x - 3 = 0$.

La technique précédemment utilisée ne peut plus en ce cas être mise en œuvre : la division par 4, qui est l'une des clés du travail mathématique effectué plus haut, devient impossible (4 n'a pas d'inverse dans l'anneau $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$, puisque $4 \times 4 = 0$ dans cet anneau) .La tâche assignée apparaît alors comme *problématique*.

2.3. Pour faire que cette tâche cesse d'être problématique, il convient alors de créer *une technique* (avec son environnement technologico-théorique) qui permette d'accomplir des tâches de ce type.

a) On peut pour cela tenter de mettre en œuvre l'idée suivante : en multipliant par 4 l'équation on obtient une équation du *premier degré*, *a priori* plus simple. On a :

$$4x^2 + 11x - 3 = 0 \Rightarrow 44x - 12 = 0 \Leftrightarrow 12x - 12 = 0 \Leftrightarrow 12(x - 1) = 0.$$

On est ainsi ramené à résoudre dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ l'équation $12y = 0$, ce qu'on peut envisager de faire par vérification exhaustive. On a :

$12\cdot 0 = 0$; $12\cdot 1 \neq 0$; $12\cdot 2 \neq 0$; $12\cdot 3 \neq 0$; $12\cdot 4 = 0$; $12\cdot 5 \neq 0$; $12\cdot 6 \neq 0$; $12\cdot 7 \neq 0$;
$12\cdot 8 = 0$; $12\cdot 9 \neq 0$; $12\cdot 10 \neq 0$; $12\cdot 11 \neq 0$; $12\cdot 12 = 0$; $12\cdot 13 \neq 0$; $12\cdot 14 \neq 0$; $12\cdot 15 \neq 0$.

Il vient donc : $S \subseteq \{ 1, 5, 9, 13 \}$. Le cardinal de l'ensemble des solutions *a priori* possibles a été ainsi réduit de 16 à 4. On a :

pour $x = 1$, $4x^2 + 11x - 3 = 12 \neq 0$;
pour $x = 5$, $4x^2 + 11x - 3 = 8 \neq 0$;
pour $x = 9$, $4x^2 + 11x - 3 = 4 \neq 0$;
pour $x = 13$, $4x^2 + 11x - 3 = 0$.

Finalement, $S = \{ 13 \}$.

b) La technique (ou plutôt la prototechnique) qui émerge dans le travail réalisé est encore très primitive. La seconde étape, notamment, soit la résolution de $12y = 0$, recourt à une technique des plus rudimentaires, que l'on peut songer à améliorer. On peut par exemple observer que, pour que y soit solution, il faut et il suffit que y soit divisible par 4. Cette observation conduit immédiatement aux solutions : $y = 0, 4, 8, 12$, soit donc aux solutions possibles $x = 1, 5, 9, 13$, etc.

c) Mais la première étape elle-même pose problème : elle ne peut être accomplie que lorsque le coefficient de x^2 est un diviseur de 0 dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$. La technique employée a ainsi une *portée* très limitée. Lorsque ce coefficient n'est pas un diviseur de 0, une autre « manière de faire » doit être inventée.

d) Plus largement encore, on peut vouloir disposer d'une technique permettant de résoudre *a priori* toute équation du second degré, non dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$, mais dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où n est un entier quelconque. On remarquera en ce point, toutefois, que toute technique a nécessairement une portée limitée. Ainsi la technique classique de résolution des équations du second degré dans $\mathbb{R}$ échoue-t-elle pratiquement sur l'équation

$$1234567890\, x^2 + 2345678901\, x - 3456789012 = 0,$$

qui a pourtant deux racines réelles distinctes puisque

$$\Delta = 2345678901^2 + 4 \times 1234567890 \times 3456789012 > 0.$$

2.4. Dans l'exemple précédent on a présenté une technique (rudimentaire) dont la technologie n'a pas été explicitée, et qui n'a guère besoin de l'être pour le lecteur ayant une certaine culture mathématique : cette technique se comprend d'elle-même et se justifie d'elle-même. L'exemple suivant mettra l'accent, en sens contraire, sur le *besoin de technologie* que peut faire naître la présentation d'une technique. On admet ici le résultat suivant : si PGCD(a, b) = d, il existe x et $y \in \mathbb{Z}$ tels que $ax + by = d$. Considérons alors la tâche consistant à trouver un tel couple d'entiers (x, y).

a) On présente sur un exemple une technique pour accomplir cette tâche. Soit $a = 112$ et $b = 70$; on pourra vérifier que PGCD(112, 70) = 14. On a alors :

$$\frac{70}{112} = \frac{1}{1+\frac{42}{70}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{28}{42}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{14}{21}}} = \; = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}} \to \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+0}}} = \ldots = \frac{2}{3}.$$

Prenons $x = 2$ et $y = -3$; il vient : $112x + 70y = 14$.

b) La technique précédemment mise en œuvre s'apprend très rapidement. En la répétant sur d'autres exemples, on peut vérifier qu'elle semble donner à tout coup le résultat cherché. Mais *comment* peut-on s'assurer qu'il en est bien ainsi ? Et *pourquoi*, si c'est le cas, en est-il ainsi ? C'est à ces questions que la technologie de la technique (que nous ne présenterons pas ici) devrait idéalement pouvoir répondre.

2.5. Lorsqu'on dispose d'une technique efficace, de portée suffisante, et bien maîtrisée, pour accomplir des tâches d'un type donné, ces tâches deviennent *routinières*. Elles cesseront même d'être regardées comme des tâches lorsque, à la *routinisation*, succède l'étape de la *naturalisation* (respirer, ou descendre un escalier, etc. nous apparaît *naturel*, et nous ne considérons plus, en général, l'activité correspondante comme une tâche). Lorsque, en revanche, aucune technique ne répondant aux spécifications précédentes n'existe, la tâche est *problématique*, et il convient alors de *créer une technique*.

a) Telle est la situation dans laquelle se trouve l'élève chaque jour. On notera ici que c'est, non pas à l'élève, ou aux élèves, qu'il revient de créer des techniques, mais bien à *la classe*, y inclus *le professeur*. La *production* de techniques apparaît ainsi comme une tâche *coopérative*, alors que la *mise en œuvre* des techniques produites est généralement à la charge de l'élève travaillant en autonomie.

b) Soulignons encore qu'une tâche routinière peut tout à coup apparaître à nouveau problématique, et donc imposer la création d'une technique *nouvelle*. Il en va ainsi, dans la vie quotidienne, lorsque, après une blessure au pied, nous devons réinventer une technique de marche. De même, la tâche consistant à calculer le discriminant d'une équation du second degré est routinière s'il s'agit d'équations à « petits » coefficients (comme dans le cas de $4x^2 + 11x - 3 = 0$) ; mais cette tâche redevient problématique le jour où nous rencontrons l'équation vue plus haut, pour laquelle on a :

$$\Delta = 2345678901^2 + 4 \times 1234567890 \times 3456789012.$$

3. Objets ostensifs, objets non ostensifs

3.1. Les développements précédents conduisent à poser la question suivante : de quoi est faite une technique donnée ? de quels « ingrédients » se compose-t-elle ? Et encore : en quoi consiste la « mise en œuvre » d'une technique ?

3.2. L'observation de l'activité humaine amène à répondre en établissant une distinction fondamentale entre deux types d'objets : les objets *ostensifs*, d'une part, les objets *non ostensifs*, d'autre part.

a) On appelle *ostensifs* les objets qui ont pour nous une forme *matérielle*, *sensible*, au demeurant quelconque. Un objet matériel (un stylo, un compas, etc.) est un ostensif. Mais il en va de même

– des gestes : nous parlerons d'ostensifs *gestuels* ;
– des mots, et, plus généralement, du discours : nous parlerons ici d'ostensifs *discursifs* (ou langagiers) ;
– des schémas, dessins, graphismes : on parlera en ce cas d'ostensifs *graphiques* ;
– des écritures et formalismes : nous parlerons alors d'ostensifs *scripturaux*.

Le propre des ostensifs, c'est de pouvoir être *manipulés*, ce mot étant entendu en un sens large : manipulation au sens strict (celle du compas, ou du stylo, par exemple), mais aussi bien par la voix, le regard, etc.

b) Au contraire des ostensifs, les *non-ostensifs* – soit ce que l'on nomme usuellement *notions*, *concepts*, *idées*, etc. – ne peuvent pas, à strictement parler, être manipulés : ils peuvent seulement être *évoqués*, à travers la manipulation d'ostensifs associés. Ainsi, pour pouvoir dire que, pour résoudre l'équation $2^x = 10$ « on prend le logarithme des deux membres », il convient que le *non-ostensif* qu'est le concept de logarithme existe, mais on ne peut le dire que parce que *l'ostensif* (langagier) « *logarithme* » est disponible. Pour réaliser l'action correspondante, en outre, il faudra disposer d'ostensifs *scripturaux* adéquats, qui permettront par exemple *d'écrire* :

$$2^x = 10 \Leftrightarrow \ln 2^x = \ln 10 \Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 10 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 10}{\ln 2}.$$

La technique de résolution des équations de la forme $a^x = b$ mise en œuvre ici suppose ainsi, à côté d'un certain nombre de non-ostensifs (concept de logarithme), *un système d'ostensifs articulés à ces non-ostensifs*.

3.3. Toute technique suppose l'activation d'un complexe d'objets, les uns ostensifs (ils seront manipulés), les autres non ostensifs (ils seront évoqués). La manipulation des ostensifs est réglée à l'aide notamment des non-ostensifs, et ces derniers, inversement, sont évoqués à l'aide des ostensifs. Il y a ainsi *une dialectique nécessaire entre ostensifs et non-ostensifs*.

a) Le problème de la construction, à la règle et au compas, de la bissectrice d'un angle ne peut être résolu, et ne peut être *pensé*, qu'à l'aide de ces ostensifs *matériels* que sont encore, à un niveau élémentaire d'instruction mathématique, « une règle » et « un compas », sans lesquels les concepts de compas et de règle ne pourraient exister.

b) De la même façon, le non-ostensif « produit de deux matrices » ne peut exister (toujours à un niveau élémentaire) sans cet ostensif qu'est le *geste* consistant à mettre en relation une *ligne* de la première matrice avec une *colonne* de la seconde :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = ?$$

L'un des ingrédients de la technique de multiplication (comme il en va souvent en matière de *calcul*) est donc ici un certain *geste*, sans lequel cette technique n'existerait pas. (Il en va de même, à un niveau plus humble encore, avec la technique dite des « produits en croix » dans la comparaison des fractions.)

c) Les ostensifs *discursifs* sont eux aussi essentiels. Avec les ostensifs *gestuels* et *graphiques*, ils constituent le matériel le plus primitif de toute activité humaine. Dans l'exemple suivant on a ainsi souligné (en italique) *certains* ostensifs discursifs fondamentaux dans la technique élémentaire traditionnelle pour résoudre des problèmes de proportionnalité (simple et directe) :

> *Problème.* 5 bonbons coûtent 6 F. Combien coûteront 7 bonbons ?
>
> *Solution.* 5 bonbons coûtent 6 F. Donc 1 bonbon coûte 5 *fois moins*, soit 6 : 5 = 1,20 F ; et 7 bonbons coûtent 7 *fois plus*, soit $7 \times 1{,}20 = 8{,}40$ F.

3.4. Une certaine vision *idéaliste* de l'activité humaine, et en particulier de l'activité mathématique, conduit à « oublier » le rôle des ostensifs. Cette vision courante amène à regarder les non-ostensifs (le *concept* de logarithme, par exemple) comme nécessaires et essentiels, alors que les ostensifs (la *notation* ln, par exemple) seraient contingents et inessentiels.

a) À cela s'oppose une vision *matérialiste* qui rappelle que l'activité mathématique est, comme toute activité humaine, une activité *matérielle*, et que les non-ostensifs ne sauraient exister sans les ostensifs, non plus d'ailleurs que ceux-ci sans ceux-là.

b) Ce changement de regard sur l'activité mathématique a des conséquences immédiates, comme le montre l'exemple suivant. Le signe d'équivalence, $\Leftrightarrow$, est aujourd'hui banni de l'enseignement secondaire français jusqu'à un niveau relativement élevé, au motif que les élèves *ne comprendraient pas la notion d'équivalence* et seraient donc conduits à utiliser ce symbole *sans le comprendre*. L'idée sous-jacente est ici qu'il convient d'abord de comprendre (« abstraitement ») la *notion* d'équivalence avant d'utiliser (« concrètement ») le *signe* d'équivalence. À l'inverse, on peut soutenir que la notion d'équivalence et l'emploi réglé du signe d'équivalence *s'élaborent ensemble*, dans une dialectique où le signe joue un rôle non moins important que le concept : la notion d'équivalence émerge de l'emploi, chaque fois rectifié, du signe d'équivalence.

c) Plus généralement, la « compréhension » d'un concept dépend de la technique où ce concept est mis en jeu ; elle dépend donc du *système* des objets non ostensifs et ostensifs tout entier que cette technique active. Comprendre la notion de proportionnalité, par exemple, ce sera savoir mettre en œuvre de manière pertinente au moins une technique de résolution des problèmes de proportionnalité. Aussi, la compréhension de la notion diffèrera selon que l'on utilise la technique rappelée plus haut, ou l'une ou l'autre des techniques suivantes :

> *Technique XVIII^e siècle.* On a : 5 : 6 : : 7 : *x*. D'où : $\dfrac{6 \times 7}{5} = \ldots$
>
> *Technique XX^e siècle.* On a : $f(5) = 6$ avec f linéaire. D'où : $f(7) = 7f(1) = \dfrac{7}{5} f(5) = \dfrac{7}{5} \times 6 = \ldots$

4. Les ostensifs et le progrès en mathématiques

4.1. Un objet ostensif apparaît comme possédant deux valences : une valence *instrumentale*, d'une part, une valence *sémiotique*, d'autre part, ces deux valences apparaissant, *au sein* d'une *technique donnée*, associées comme le recto et le verso d'une feuille.

a) Dire qu'un ostensif a une valence *instrumentale* signifie qu'il permet d'agir, de travailler. On a vu plus haut (premier exemple de proportionnalité) que, en mathématiques comme ailleurs, on est notamment amené à *travailler avec des mots*. Le discours, ici, n'a pas simplement une fonction de communication : *il est un outil qui permet un travail*. Il en va de même avec les autres registres ostensifs (matériel, gestuel, graphique, scriptural).

b) Dire qu'un ostensif a une valence *sémiotique* signifie qu'il permet de voir, d'apprécier de manière sensible, le travail *fait*, le travail en *train de se faire,* et d'envisager le travail à *faire* – et cela aussi bien pour le sujet que pour l'observateur. Soit par exemple à encadrer le réel $a = \sqrt{3}$ par des rationnels. On peut procéder ainsi :

$$a = \sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a^2 - 1 = 2 \Rightarrow (a - 1)(a + 1) = 2 \Rightarrow a = 1 + \frac{2}{a+1}.$$

$$a > 1 \Rightarrow a < 1 + \frac{2}{1+1} = 2 \Rightarrow a > 1 + \frac{2}{2+1} = \frac{5}{3} \Rightarrow a < 1 + \frac{2}{\frac{5}{3}+1} = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3} < a < \frac{7}{4}.$$

Si l'encadrement obtenu ne suffit pas, on peut reprendre le travail et le poursuivre :

$$a < \frac{7}{4} \Rightarrow a > 1 + \frac{2}{\frac{7}{4}+1} = \frac{19}{11} \Rightarrow a < 1 + \frac{2}{\frac{19}{11}+1} = \frac{26}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{19}{11} < a < \frac{26}{15}\text{ ; etc.}$$

4.2. Le travail mathématique se fait donc avec des ostensifs, manipulés adéquatement. Les non-ostensifs règlent ces manipulations, en même temps que celles-ci donnent aux non-ostensifs un « contenu » déterminé. Considérons par exemple l'expression algébrique $E(x) = (x^3 - 2x - 1) - 4(x^2 - 1)$.

a) Nous observons deux sujets, qui, respectivement, effectuent les manipulation suivantes :

Sujet 1. $E(x) = (x + 1)\left(\frac{x^3 - 2x - 1}{x + 1} - 4(x - 1)\right) = (x + 1)\left(\frac{x(x^2 - 1) - (x + 1)}{x + 1} - 4(x - 1)\right)$

$= (x + 1)(x(x - 1) - 1 - 4(x - 1)) = (x + 1)(x^2 - 5x + 3).$

Sujet 2. $E(x) = 3 - 2x + x(-4x + x^2)$.

b) Le travail du sujet 1 s'effectue selon une technique qui suppose vraisemblablement l'activation de l'objet non ostensif « factorisation », ainsi que de quelques autres non-ostensifs. On laissera le lecteur deviner quel non-ostensif peut, de même, expliquer les manipulations ostensives constitutives du travail du sujet 2... Et on notera simplement que, selon une dialectique déjà évoquée, les non-ostensifs correspondants (factorisation et ?) se construisent (ou se renforcent) à partir de ces manipulations, qu'en même temps ils règlent.

4.3. Le travail mathématique *concret* (et non pas *idéalisé*) que suppose l'accomplissement d'une tâche donnée selon une technique déterminée varie en fonction du système des non-ostensifs et des ostensifs que cette technique active.

a) Ainsi, chacune des trois techniques présentées plus haut pour résoudre le problème des bonbons induit un travail mathématique *spécifique*, où les ostensifs manipulés, comme les non-ostensifs évoqués, *diffèrent fortement*. On peut être capable de mettre en œuvre la technique « XX^{e} siècle », par exemple, sans pour autant maîtriser la technique « XVIII^{e} siècle » ; et inversement.

b) Considérons le problème suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} ; A^{-1} = ?$$

On reproduit ci-après les *traces ostensives écrites* du travail engendré par la mise en œuvre de trois techniques différentes.

$*$ Det A = $2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 6 + 4 = 10 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/10 & -2/5 \\ 1/10 & 1/5 \end{bmatrix}$

$*$ $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 5\lambda + 10 \Rightarrow 10\,A^{-1} = 5\,I - A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/10 & -2/5 \\ 1/10 & 1/5 \end{bmatrix}$

$*$ $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} = \lambda\,A + \mu\,I = \begin{bmatrix} 2\lambda + \mu & \bullet \\ -\lambda & \bullet \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = 5 \Rightarrow \mu = -10 \Rightarrow 10\,A^{-1} = 5\,I - A$, etc.

On pourra expliciter ces techniques, en donnant pour chacune d'elles des exemples d'ostensifs et de non-ostensifs qu'elle active, mais qui sont *inertes* (absents) dans les deux autres techniques.

4.4. L'un des phénomènes les plus remarquables, dans la perspective ouverte jusqu'ici, est celui de la *sensibilité aux ostensifs* du travail mathématique. Le choix d'un ostensif peut ainsi conduire à des techniques peu fiables, comme il en allait autrefois avec le choix de la notation $\sqrt{-1}$, dont la manipulation s'est révélée incompatible avec certains *habitus* de calcul, ainsi que le montre le travail suivant :

$$1 = \sqrt{1^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = -1.$$

Inversement, dans l'enseignement secondaire français, le bannissement (induit par la réforme des mathématiques modernes) de la notation $y = f(x)$ a entraîné la *disparition* corrélative de certaines techniques.

a) Soit par exemple à calculer la dérivée de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Les élèves ne peuvent plus, aujourd'hui, opérer comme suit :

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y^2 = x^2 - 1 \Rightarrow 2yy' = 2x \Rightarrow y' = \frac{x}{y} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

b) Soit, de même, à déterminer les coordonnées du sommet de la parabole d'équation $y = 3x^2 - 12x + 17$. On pouvait autrefois procéder ainsi :

S(x, y) est le sommet de la parabole ssi l'équation

$$3x^2 - 12x + 17 = y$$

a une solution double en x. On a :

$$3x^2 - 12x + 17 = y \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + (17 - y) = 0.$$

Il vient : $\Delta(y) = 12^2 - 12(17 - y) = 12(y - 5) = 0 \Leftrightarrow y = 5$. Le sommet a pour ordonnée $y = 5$; son abscisse x est donnée par la racine double du trinôme

$$3x^2 - 12x + (17 - 5) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2.$$

On a donc $x = 2$. Finalement, le sommet est S(2, 5).

La technique mise en œuvre ici a, de fait, disparu en même temps que la notation $y = \ldots$

4.5. Comme en d'autres domaines de l'activité humaine, il existe, en mathématiques, un *progrès* : progrès des théories, des technologies, des techniques. L'un des facteurs de ce progrès se trouve indubitablement dans la *création d'ostensifs*, efficaces tant du point de vue instrumental que du point de vue sémiotique.

a) On doit constater, à cet égard, que les élèves ne profitent que de manière bien incertaine des progrès des mathématiques *savantes*. Nombre d'outils, en particulier ostensifs, créés par les mathématiciens restent longuement à la porte de la classe, au bénéfice d'instruments *archaïques*.

b) On peut voir en cela un effet d'hystérésis culturelle, symptôme d'un attachement à un passé par ailleurs ignoré comme réalité historique. Mais surtout, il convient d'y voir l'effet du caractère dominant de la vision *idéaliste* de l'activité mathématique. C'est ainsi par pure ironie que nous avons parlé plus haut de la technique « XX^{e} siècle » : car ce XX^{e} siècle-là est, pour l'élève d'aujourd'hui, encore à naître.

Torino, 3 febbraio 1994