

## Sur les praxéologies de recherche en didactique

2014-2015

Séance 2 (19 novembre 2014)

### Le travail du didacticien

1. Le chercheur  $\xi$  formule une question  $Q$  à laquelle son travail de recherche vise à apporter une réponse  $R^\heartsuit$ . Ou plutôt : à apporter une *contribution* à la fabrication d'une réponse  $R^\heartsuit$ , par exemple en fabriquant une réponse  $R_k^\heartsuit$  à l'une des questions  $Q_k$  apparaissant dans le schéma herbartien développé, que l'on rappelle ici :

$$[S(X; Y; Q) \rightsquigarrow \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, O_{n+2}, \dots, O_m, Q_{m+1}, Q_{m+2}, \dots, Q_p \}] \rightsquigarrow R^\heartsuit.$$

Dans ce qui suit, pour simplifier les notations,  $Q$  et  $R^\heartsuit$  pourront désigner aussi bien  $Q_k$  et  $R_k^\heartsuit$ .

2. Pour aller plus loin, nous relisons le passage suivant de la troisième des leçons 2013-2014 sur les *Fondements et méthodes de la recherche en didactique* :

---

1.1. On a vu que certaines conditions de possibilité d'une recherche en didactique des mathématiques semblent être satisfaites : l'existence du mathématicien, l'existence du didacticien, notamment relatif au mathématicien, sont de telles conditions, même si le didacticien est, d'une façon générale, soumis à un processus immémorial de refoulement, donc de très large *mise en invisibilité*, avec *péjoration culturelle* de ce qui cependant s'en laisse voir. On a noté aussi que l'idée même de recherche, la réalité de l'existence de chercheurs, leur visibilité et leur acceptation sociale et culturelle semblait, elle, plus problématique, et supposait un combat séculaire, qui, bien que dans des formes renouvelées, ne cesse pas aujourd'hui.

1.2. Dans ce qui suit, nous envisagerons le scénario suivant : on imagine une personne notée  $\xi$  – le chercheur ou l'apprenti chercheur en didactique des mathématiques – et on explorera alors les conditions et contraintes d'un engagement de  $\xi$  dans une activité qui *pourrait* être dite de « recherche en didactique des mathématiques ». D'une manière générale, pour entrer en contact avec un domaine d'activité, il faut en passer par l'assujettissement à – par le fait de

se faire le sujet de – une ou plusieurs institutions *ad hoc* : un individu est fort rarement à lui tout seul « toute une institution » ! Ici, on supposera que  $\xi$  s’assujettit à une équipe, un groupe, un collectif – si peu structuré soit-il – supposé être de « recherche en didactique des mathématiques ». Cette institution, qu’on notera  $\Xi$ , pourra assumer des visages bien différents. On envisagera en outre que  $\Xi$  « vive » dans le voisinage d’un regroupement plus vaste, qu’on notera  $\Xi^*$  (par exemple une communauté scientifique au niveau national), celui-ci à son tour se situant par rapport à un regroupement  $\Xi^{**}$  (situé par exemple au niveau international), etc. Ce qu’il importe de souligner à ce stade est que les liens de  $\xi$  avec  $\Xi$ ,  $\Xi^*$  ou  $\Xi^{**}$  lui permettent de « bénéficier » de conditions  $C_\xi$  mais lui imposent en même temps des contraintes  $K_\xi$  qui détermineront au moins en partie l’activité de  $\xi$  en matière de recherche en didactique des mathématiques, si une telle activité vient à se produire.

1.3. Imaginons un instant que le chercheur  $\xi$  ait commencé par « suivre des cours de didactique des mathématiques », par exemple dans le cadre d’un master... En ce cas *comme en tout autre*, on pourra entendre dans la noosphère correspondante des jugements erratiques ou massifs tels ceux-ci : « Cette formation, ce n’est pas de la didactique ! » ; « Si c’est de la didactique, en tout cas ça n’est pas de la didactique des mathématiques ! », et cela, répétons-le, de la même façon que d’aucuns pourraient brocarder un cours supposé de « littérature comparée », par exemple, en disant que tout comparatisme en est absent et qu’on n’y traite pas davantage de littérature ! Même si l’on perçoit derrière de tels décrets une attitude polémique, il s’agit là d’un questionnement *auquel on n’échappe pas* et avec lequel il nous faudra vivre, ici, indéfiniment. De la même façon, tel ou tel observateur, qui en général est aussi un acteur – parfois perfide – de  $\Xi$ ,  $\Xi^*$  ou  $\Xi^{**}$ , pourra décréter que tel travail présenté comme un travail « recherche » *n’est en fait pas de la recherche* ! Ou que, s’il s’agit peut-être de recherche, ce n’est à coup sûr pas une recherche en didactique des mathématiques ! Tout cela est en effet quasi quotidien – quoique non public en général – dans la vie d’une communauté de recherche un tant soit peu étendue.

1.4. Pour aborder ces problèmes et bien d’autres encore, nous devons disposer d’un outillage praxéologique qui se complètera au fur et à mesure. Nous aurons en perspective l’élaboration solidaire

– d’un modèle de *l’équipement praxéologique institutionnel*  $\mathcal{P}$  de qui occupe une *position*  $\rho$  de chercheur en didactique des mathématiques en telle ou telle institution de la société (plus exactement : de telle ou telle société) ;

– d'un modèle du *rapport institutionnel*  $\mathcal{R}$  à la recherche en didactique des mathématiques pour une personne occupant ladite position  $\rho$ .

Bien entendu, on se réfèrera aussi à la modélisation de l'équipement praxéologique *personnel* de tel chercheur en didactique des mathématiques  $\xi$  et à la modélisation de son *rapport personnel* à la recherche en didactique des mathématiques. L'activité concrète de recherche en didactique des mathématiques sera regardée comme un *déploiement* du rapport (institutionnel ou personnel) à la recherche en didactique des mathématiques résultant de la *mise en œuvre* de l'équipement praxéologique (personnel ou institutionnel), sous des contraintes et dans des conditions déterminées : on parlera à cet égard du *fonctionnement praxéologique* du chercheur ou de l'équipe de recherche.

1.5. On mettra d'abord dans le modèle du rapport  $\mathcal{R}$  le fait qu'un sujet  $\xi$  en position  $\rho$  *se pose une question*  $Q$  – une question « de recherche », donc ; et qu'il mette en œuvre à son propos une *dialectique de l'étude et de la recherche*, où l'étude de  $R^\diamond$  (et d'autres œuvres) est un moyen de la recherche, laquelle vise à élaborer  $R^\heartsuit$ . En cela, le chercheur  $\xi$  est un personnage *herbartien*, qui doit s'efforcer – seul ou au sein d'un collectif  $\Xi$  – de « fabriquer » une réponse  $R^\heartsuit$  à la question  $Q$ . Plus précisément,  $\xi$  devra pour cela réaliser les cinq « gestes de base » de l'étude d'une question  $Q$ , c'est-à-dire devra (1) *observer* les réponses  $R^\diamond$  déposées dans la « littérature » écrite et orale, (2) *analyser*, au double plan expérimental et théorique, ces réponses  $R^\diamond$ , (3) *évaluer* ces mêmes réponses  $R^\diamond$  (c'est-à-dire estimer la valeur qu'elles pourraient avoir pour sa recherche), (4) *développer* sa réponse propre  $R^\heartsuit$  et (5) *diffuser et défendre* la réponse  $R^\heartsuit$  ainsi produite. S'agissant de la fabrication de  $R^\heartsuit$  et de sa diffusion-défense écrite, nous distinguerons ci-après les *notes de travail* de  $\xi$  (par exemple dans un carnet ou un cahier de bord), les *écrits* de  $\xi$  (qui sont des exposés, « privés » ou « publics », rédigés sur tel ou tel aspect d'un travail de recherche) et les *publications* de  $\xi$  (ou de  $\Xi$ , avec  $\xi \in \Xi$ ), quel qu'en soit le support.

1.6. Le rapport  $\mathcal{R}$  comporte cette exigence que la réponse  $R^\heartsuit$  à une question de recherche  $Q$  soit *vraie* ; ou, du moins, qu'elle soit une conjecture que la *dialectique des médias et des milieux* n'aura pas permis de rejeter... [Une étude lexicographique montrerait] que la vérité est un « quelque chose » qui est d'aplomb, bien calé, une flèche qui ne rate pas sa cible ; et aussi quelque chose de solide, de ferme, de difficile à ébranler. On retrouve là les attributs de ce qui résiste – ou plutôt de ce qui a *jusqu'ici* résisté – aux assauts de la dialectique des médias et des milieux.

1.7. Pourquoi insister sur ce truisme apparent que la réponse  $R^\heartsuit$  visée par la recherche doit tendre vers la vérité ? En principe, en effet, un chercheur est par définition un *chercheur de vérités*. Mais de multiples obstacles s'élèvent sur le chemin de la vérité. L'un d'eux concerne moins les *chercheurs* que les « sages » qui, au sein de la noosphère, croient avoir tôt trouvé la vérité, d'un seul coup d'un seul, et passent alors le reste de leur âge à juger chacun, et les chercheurs en particulier, à leur aune. Ce n'est là que l'une des multiples contraintes de tous niveaux pesant en tous lieux sur l'activité du chercheur, contraintes qui risquent pourtant de le transformer, *volens nolens*, en un *chercheur de reconnaissance et de notoriété*. Au lieu de se demander si ce qu'il avance est *juste, exact*, d'équerre avec le réel, il se demandera si « c'est bien », si « cela passe bien », si cela « le fait connaître » (avantageusement), etc. Le passage de la recherche de la vérité à celle de la notoriété peut se produire très tôt dans une carrière de « chercheur » : la notoriété future est d'abord souci de plaire, ou déjà souci de ne pas déplaire, souci de complaire, *d'être conforme*. Plus tard, le souci de la notoriété se manifestera chez quelques-uns qui se pensent « arrivés » par le privilège donné *par eux* à ce qu'ils « croient », à ce qu'ils « pensent », etc., sur la vérité à rechercher. Le système des « milieux » que doit interroger un chercheur dans le cadre de la dialectique des médias et des milieux tend alors à se réduire à une instance unique : *lui-même*.

1.8. Il y a la notoriété individuelle – celle de  $\xi$  – et il y a la notoriété collective – celle de  $\Xi$ , de  $\Xi^*$  ou de  $\Xi^{**}$ . L'objet idéal de l'activité collective de  $\Xi$ , de  $\Xi^*$  ou de  $\Xi^{**}$  et de leurs membres est, certes, la recherche de la vérité. Mais parmi les moyens de la notoriété figurent classiquement le fait de transformer les collectifs  $\Xi$ , de  $\Xi^*$  ou de  $\Xi^{**}$  en ce que Henry David Thoreau (1817-1862) a appelé une « société d'admiration mutuelle » (*mutual admiration society*). Une telle situation engendre une contrainte que l'on peut d'ores et déjà noter : l'obligation de citer tel ou tel auteur dans une publication rendant compte d'une recherche qui ne s'est nullement appuyée sur les publications (ou les écrits, ou les travaux) de cet auteur. Dans le principe, la liste des références figurant à la fin d'un article doit se rapporter strictement aux réponses  $R^\diamond$  et aux œuvres  $O$  qui apparaissent dans le schéma herbartien développé qui résume la recherche :

$$[S(X; Y; Q) \rightsquigarrow \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, O_{n+2}, \dots, O_m, Q_{m+1}, Q_{m+2}, \dots, Q_p \}] \rightsquigarrow R^\heartsuit.$$

Les pressions exercées par les revues scientifiques pour que les articles qu'elles publient citent leurs auteurs « favoris » – ce qui fait monter l'*impact factor* de la revue (voir l'article « Facteur d'impact » de *Wikipédia* par exemple) – sont bien connues. Elles ont été récemment

mises en évidence par deux chercheurs américains, Allen W. Wilhite and Eric A. Fong, dans un article rendant compte d'une enquête auprès de chercheurs en sciences sociales, publié dans la revue *Science* et intitulé « Coercive Citation in Academic Publishing ». Ces auteurs écrivent dans leur conclusion :

Although most of our respondents condemn coercion, less than 7% thought an author would refuse to add superfluous citations if coerced to do so. Thus, an author can become both a victim and a conspirator in the self-citation game; they are rewarded for acquiescing because their manuscript is published, and their gratuitous citations help to boost the impact factor of the journal in which they published.

Ils rappellent à cet égard le principe directeur, qui semble pourtant n'être guère respecté :

The American Psychological Association Publication Manual states, "Cite the work of those individuals whose ideas, theories, or research *have directly influenced your work*" (emphasis added)...

(La citation de l'*American Psychological Association Publication Manual* se trouve page 169 de l'édition de 2010.) En fait, lorsqu'on s'efforce de vérifier si ce principe – ne citer que les auteurs qui, en quelque façon, ont influencé directement la recherche présentée – est bien respecté, on tombe généralement sur des surprises. D'une manière plus générale, nous serons attentifs aux diverses formes d'*emprises*, de domination intellectuelle qui, comme autant de filets lancés sur lui pour le subjuguier, menacent la liberté scientifique du chercheur.

---

### **Le chercheur et la « preuve » (suite)**

On poursuit ici l'examen des principes présentés et commentés lors de la séance du 12 juillet 2013 du Séminaire TAD/IDD, principes dont un premier bloc a été examiné, dans le cadre du présent enseignement, lors de la séance 1 du 5 novembre 2014.

---

c) Voici maintenant un deuxième bloc de principes :

5. La technique d'enquête mise en œuvre par  $\xi$  s'appuie sur la *dialectique* des études *exploratoires* et des études *confirmatoires*

6. Dans une étude *exploratoire*, on suppose d'abord l'*inertie relative* des conditions ambiantes et la faible *variabilité* ou la *quasi-invariance* des conditions examinées.

7. Lors des *prises d'information* relatives à des personnes ou des institutions, le chercheur s'efforce de faire fonctionner ces *médias* occasionnels comme des *milieux* (adidactiques) relativement à la question *Q* étudiée.

① [...] Sauf exception justifiée, on commence par faire comme si les conditions examinées *c* et les conditions ambiantes *ĉ* étaient (très) faiblement variables sur la population étudiée, au besoin en reformulant ces conditions, par exemple par disjonction :  $c = c_1 \vee c_2 \vee \dots \vee c_n$ , où les conditions  $c_i$  sont supposées compatibles. [...] Le *progrès de l'enquête* verra ensuite de telles conditions disjonctives être décomposées en sous-conditions qui pourront alors être confrontées les unes aux autres [...].

② Faire parler une personne comme un milieu adidactique ne va pas de soi. Il y a même là quelque chose d'impossible, pour des raisons qui, dans l'échelle de codétermination didactique, pourraient bien toucher au niveau de l'*humanité*. Voici sur ce point un extrait d'un texte récent du neurologue Laurent Naccache intitulé *De quoi prenons-nous conscience ?* (Éditions Manucius, 2013) :

*Une fiction-interprétation-croyance « en liberté »*

Comme très souvent la découverte d'un principe général du fonctionnement de l'esprit est plus aisée à réaliser en l'observant chez des patients neuropsychologiques où il s'exprime de manière « caricaturale ».

La démonstration clinique à mon sens la plus forte du caractère fictionnel de notre réalité psychique provient des travaux que Sperry et Gazzaniga ont initiés dès la fin des années 1970 en étudiant des malades neurologiques souffrant d'épilepsie sévère dont les deux hémisphères ont été anatomiquement séparés du fait d'une section chirurgicale des voies nerveuses qui les font normalement communiquer. Chez de tels malades, au « cerveau divisé » ou *split brain*, le corps calleux – le nom de la structure de projection des fibres blanches qui unit nos deux hémisphères cérébraux – a été sectionné par un neurochirurgien dans l'objectif de réduire le retentissement de leurs crises d'épilepsie quotidiennes. Chez les malades de Sperry et Gazzaniga, la section du corps calleux a brisé l'unité de leur pensée, ils ont deux esprits conscients sous un seul crâne ! Deux hémisphères conscients qui ne peuvent communiquer ensemble, et dont un seul des deux (en règle générale, l'hémisphère gauche) contrôle l'appareil du langage et est seul donc capable de tenir une conversation. Gazzaniga s'est intéressé à cette condition neurologique exceptionnelle, afin de révéler le rôle fondamental des mécanismes d'interprétation fictionnelle dans notre fonctionnement conscient. Plus spécifiquement, il a

élaboré de nombreuses situations expérimentales dans lesquelles il demandait à l'un des deux hémisphères seulement de réaliser un comportement précis, puis demandait ensuite à l'autre hémisphère l'explication de ce comportement dont il ignorait l'origine véritable. Dans toute une série d'expériences neuropsychologiques, Gazzaniga a fait cette stupéfiante découverte : lorsque l'on soumet ainsi l'hémisphère interrogé à d'insolubles énigmes, ce dernier répond très souvent en inventant une explication imaginaire et fictive, en l'occurrence fausse, à laquelle il croit en toute bonne foi ! Sans d'ailleurs avoir conscience d'avoir élaboré un tel scénario explicatif. Indice suggérant que la première couche interprétative opère ici en amont de la prise de conscience. Dans l'une de ses observations les plus saisissantes, Gazzaniga demande à l'un de ces malades de fixer un écran situé droit devant lui. Soudain, sans en avoir averti le patient, un verbe apparaît quelques dixièmes de seconde à la gauche de l'écran WALK (« marchez »). Cet ordre verbal présenté dans le champ visuel gauche du patient n'est reçu que par les régions visuelles de son hémisphère droit du fait de l'organisation anatomique croisée des voies visuelles. Autrement dit, l'hémisphère gauche n'a pas reçu cette consigne. L'hémisphère droit est capable de comprendre, sans pouvoir le lire à voix haute, cet ordre qui tenait en un seul mot. Gazzaniga reste silencieux. Le patient se lève et se met à marcher vers la porte de la pièce. Arrivé au pas de la porte, Gazzaniga l'interpelle soudain, et lui demande : « Où allez-vous ? » Il faut bien réaliser que la réponse verbale que le malade va alors formuler n'est que celle de son hémisphère gauche, celui qui a le contrôle du langage parlé. Nous allons donc avoir accès à l'opinion de cet hémisphère gauche sur le comportement du corps auquel il appartient. Cet hémisphère gauche ignore ce que sait et ce qu'a ordonné l'hémisphère droit. En réalité, Gazzaniga pose là à l'hémisphère gauche déconnecté du patient une question insoluble. Ce dernier va-t-il alors adopter une attitude cartésienne et rationnelle et tenir un discours tel que : « À vrai dire, je ne sais pas, je constate simplement que je ne connais pas l'origine de ce comportement... » ? Loin de là ! Le patient répond du tac au tac quelque chose comme par exemple : « Je vais à la maison chercher un jus de fruit ». Au-delà du cadre « autoritaire » de l'expérimentation, au-delà de la question inductrice d'une réponse, au-delà de l'histoire individuelle du malade qui peut sans doute contribuer au choix de cette réponse précise parmi un immense répertoire de réponses possibles, il faut bien réaliser que ce qui est ici stupéfiant, c'est que le malade produise, à son insu, une explication, une signification, et qu'il y croie consciemment avec une conviction assez forte. Plutôt qu'un regard lucide porté sur une question dont il ignore la réponse « objective » – « Je n'en ai pas la moindre idée ! » –, le malade étudié par Gazzaniga produit un sens fictif à ce qui lui arrive. (pp. 13-16)

(Pour un exemple de séance de travail de Michael S. Gazzinaga avec un patient au cerveau divisé, on pourra visionner la vidéo qu'on trouvera en ligne à l'adresse <http://hypnosisschool.org/hypnotic/brain-areas.php>.) Nous serions donc façonnés par l'évolution pour « répondre de nos actions », quelque illusoires que soient nos explications. Si l'on s'arrête sur l'exemple donné par Laurent Naccache, toutefois, on doit souligner ceci : le sujet observé donne un motif à sa conduite alors même qu'il en ignore la vraie raison ; mais son explication n'est pas délirante et, en fait, *nous informe sur le monde où il vit*, où l'on peut choisir d'aller chez soi pour y chercher un jus de fruit. C'est là un exemple de *lecture écologique* des énoncés qui nous fournit une condition du type : « dans le monde où évolue le témoin, il est possible de choisir d'aller chez soi pour y chercher un jus de fruit ». Le sujet témoigne de cette condition en cela qu'il rend non déraisonnable la conjecture qu'elle serait avérée. En d'autres termes, le *média* qu'est le sujet « parle faux » quant au mobile de son action ; mais il « parle vrai » quant au monde où il évolue : il fonctionne à son endroit comme un *milieu adidactique*. Il est un tel milieu pour certaines questions, et il ne l'est pas pour d'autres questions : telle est la loi générale de la clinique didactique. Bien entendu, faire le départ entre les déclarations d'un témoin donné qui seraient sujettes à caution et celles qui peuvent être reçues pour véridiques est *toujours* entaché de risques.

d) Voici enfin un troisième bloc de principes :

8. Dans l'exploitation de données recueillies (par le chercheur ou par autrui), on se restreint le plus possible à celles de ces données qui apparaissent *a priori* comme *les moins susceptibles* d'altérations liées aux conditions de leur recueil.

9. Le chercheur s'efforce d'analyser les données obtenues pour y guetter l'apparition de *régularités* dont il cherche la *confirmation empirique* et l'*explication théorique* tout en se gardant énergiquement de la tentation de *surexploiter* ses données – la tentation du *data snooping* (voir ci-après).

① Le principe 8 *ne signifie pas* que le recueil des données doit viser à ne modifier en rien les conditions courantes de la situation observée : *rien* modifier n'est, au vrai, pas possible. Mais, dans la perspective dessinée par les remarques précédentes, ce principe énonce simplement que l'on recherche les conditions qui paraissent *non altérées* par cette modification de certaines conditions ambiantes. On est donc ramené aux remarques ci-dessus sur l'art subtil de ne retenir d'un témoignage que ce qui ne dépend pas des altérations engendrées par le recueil lui-même.

② Le principe 9 met en garde contre le *data snooping*. Celui-ci est défini ainsi dans le *Dictionary of Psychology* déjà cité :

**data snooping** Laboratory jargon for “scattershot” [= generalized and indiscriminate] rummaging [*fouiller*] through one’s data looking for statistically significant effects without an a priori rationale. The “significant” findings that emerge from such operations are likely to be spurious [= fallacious] and due merely to random fluctuations, particularly when the data base is large or the number of factors high. To a certain extent such snooping [*furetage*] is carried out by nearly all researchers but the responsible course is to use any adventitious [*fortuit*] findings as heuristics for future experimentation and not to report them as robust effects based on the original study. (p. 175)

On aura noté la référence quasi explicite à la *dialectique des études exploratoires et des études confirmatoires*. On notera encore l’usage de l’adjectif *robuste* : le problème posé à  $\xi$  est celui de la « robustesse » des conclusions de ses analyses de données. (En statistique, précise l’article « Robustesse » de *Wikipédia*, « la robustesse d’un estimateur est sa capacité à ne pas être modifié par une petite modification dans les données ou dans les paramètres du modèle choisi pour l’estimation ».) Notons ici, à propos de la tentation de « fureter dans ses données », ce fait fondamental auquel toute enquête renvoie : toute prise d’information sur un « système » (personnel ou institutionnel) suppose une perturbation et une tension, un *rapport de forces*.

③ Le réel, donc, ne se laisse pas connaître aisément, « comme par enchantement ». Les verbes *to snoop*, *to pry* (et les noms *snoop* et *pry*, l’adjectif *snoopy* « offensively curious or inquisitive ») le disent en anglais. (L’adjectif *inquisitive* est défini par le dictionnaire Macmillan en ligne comme le fait de « asking a lot of questions about things, especially things that people do not want to talk about ».) En français nous avons les adjectifs *curieux*, *interrogateur*, *inquisiteur*, *inquisitorial* (qui existe aussi en anglais) et les verbes *fouiner*, *fureter*, *fourrer son nez dans*, *arracher les vers du nez à qqn*, etc. Noter que *inquisitorial*, d’après le *TLFi*, est dérivé du latin médiéval *inquisitorius* « qui interroge ; d’enquête » [...].

e) On illustrera maintenant sur un exemple quelques aspects de l’activité de chasseur-cueilleur du chercheur  $\xi$ . Je suppose une recherche visant à expliquer la formation du rapport institutionnel  $R_I(p ; \mathfrak{I})$  aux mathématiques  $\mathfrak{I}$  pour une position  $p$  dans une institution  $I$  (celle d’élève de lycée par exemple). Dans ce but,  $\xi$  s’est procuré un exposé qui est en fait un article paru dans le quotidien *Libération* du lundi 13 mai 2013. Cet article se présente comme

restituant des propos recueillis par une journaliste de ce quotidien, Catherine Mallaval, auprès de « Magalie Chauvigny, 35 ans, professeure de maths au lycée Alfred-Kastler de Cergy-Pontoise ». En voici le contenu :

### **J'avais envie de changer l'image des maths**

« J'ai toujours voulu enseigner, être au contact d'élèves qui bossent ou non, avoir la chance de voir l'étincelle dans leurs yeux quand ils comprennent... J'aurais pu choisir d'être prof d'histoire ou de français, mais j'ai préféré les maths. J'avais envie de changer l'image de cette matière, souvent la bête noire des élèves. Dans les téléfilms, le prof de maths est toujours le méchant ! Et puis j'aime cette discipline : on démontre, on prouve. Je ne regrette pas. Même si certains nous traitent de fainéants, je m'en moque. J'ai ma conscience pour moi, tant je passe de temps à peaufiner mes cours. « Cette année, je me partage entre une classe de seconde "classique" et deux premières dans le cadre du Lycée de la nouvelle chance qui vient d'ouvrir au sein de l'établissement. Nous y accueillons des jeunes de 18 à 23 ans qui ont décroché, certains depuis six mois, d'autres depuis trois ans. Il y a beaucoup d'absentéisme. Parfois, je fais cours à deux, trois élèves. Il y a les cours à 9 h 30 ou 10 h 30. Beaucoup ne se lèvent pas. Ils en ont perdu l'habitude. Il va falloir réfléchir à cela. Au fait aussi que quand ils sont peu nombreux, 15 au maximum par classe, il peut y avoir des crispations plus fortes entre eux. On ne l'avait pas prévu. L'hiver a été dur. Je demandais à quoi je servais, comment les mener au bac. Maintenant, je me dis qu'il n'y a pas que le bac. On les aide à reprendre confiance, à se socialiser. Je ne vois pas mes élèves uniquement à travers le prisme des maths. Avant cette expérience, cela me désolait de voir que certains décrochaient dès la seconde. « L'essentiel des réformes est centré sur le primaire, avec le projet louable d'alléger les journées. Mais nous, dans le secondaire, nous courons après les heures d'enseignement. On a parfois l'impression d'aller trop vite dans les programmes. Or il est important de faire des cours qui profitent à tous. » (p. 4)

Je n'entrerai pas ici dans le détail d'une analyse didactique. Je m'arrêterai seulement sur cette question : que peut-on dire de ces déclarations attribuées à une professeure de mathématiques ? Tout d'abord, redisons-le, le recueil de cet « exposé » (comportant une mise en abyme : la journaliste expose ce que la professeure lui aurait exposé) relève typiquement du paradigme du chasseur-cueilleur. Étant donné le média qui parle (un quotidien généraliste), on doit interroger l'authenticité de cet « exposé » : on peut juger vraisemblable que le texte ci-dessus, dont l'auteure est, officiellement, la journaliste, soit une création de cette journaliste à partir de propos réellement proférés par la professeure  $y_0$  plutôt qu'une version *ne varietur* de propos que celle-ci aurait réellement tenus. Mais cet exposé nous renseigne sur la société française, *même s'il avait été en partie inventé par la journaliste*. (Le propos prêté à  $y_0$  selon

lequel d'aucuns traiteraient les professeurs de mathématiques de fainéants pourrait par exemple passer pour apocryphe.) Cette société est telle que, dans un quotidien national connu, de centre gauche, orné de vestiges d'une ancienne idéologie soixante-huitarde, une journaliste peut présenter le texte ci-dessus comme recueillant les propos d'une certaine professeure de mathématiques trentenaire. Même si cette professeure semble singulière (on va voir pourquoi), son statut (de professeure de mathématiques) l'autorise à tenir un discours regardé *a priori* comme *légitime* sur les mathématiques et leur enseignement, bien que la force de ses propos soit minorée du fait de se situer à mi-chemin entre énoncé objectif et énonciation subjective. Quelle est cependant la singularité de  $y_0$  – que l'on peut aussi bien regarder comme un personnage de fiction en partie créée par la journaliste ? L'héroïne de la journaliste semble mue par une pulsion caritative qui la porte à aider les « défavorisés ». C'est là que nous apprenons quelque chose de son rapport personnel aux mathématiques,  $R(y_0 ; \mathcal{M})$  : à ses yeux, les mathématiques feraient partie de ces défavorisés ; dans la société française actuelle, les mathématiques « souffriraient ». Dans le même mouvement, l'héroïne se donne pour capable de « sauver » les mathématiques de ce mauvais sort. Notons que, étrangement, elle aurait pu choisir, lui fait-on dire, de « sauver » d'autres matières, comme si sa liberté avait été pleine et entière de choisir d'enseigner l'histoire ou le français, par exemple – élément biographique qui participe aussi de sa singularité. Mais une chose surtout doit être soulignée : la vision rédemptrice, hyperbolique, disproportionnée que confesse  $y_0$  n'est pas, peut-on penser, celle du professeur de mathématiques « ordinaire », qui s'efforce simplement de faire de son mieux pour s'acquitter de sa charge. S'il en était ainsi, nous tiendrions, me semble-t-il, une découverte : le travail d'entretien de  $\xi$  avec des professeurs  $y_1, y_2, \dots, y_n$  de  $\mathcal{M}$ , qui pourrait prolonger le « geste » supposé de la journaliste, mettrait-il au jour les mêmes thèmes – et notamment le désir héroïque de sauver les mathématiques ? (Notons qu'il en va autrement, certes, dans la noosphère, dont nombre d'acteurs, par ailleurs professeurs de mathématiques, disent d'une façon ou d'une autre travailler pour la gloire des mathématiques avant même de travailler pour la réussite des élèves.) Cela noté, la suite du propos fait écho à ce qui apparaît, au contraire, comme des « vérités » portées par la *civilisation* ambiante. La professeure y énonce en effet 1) que l'explication du comportement de  $x$  se trouve *dans*  $x$  ; et 2) que l'interaction adéquate de  $y_0$  avec  $x$  pourrait modifier  $x$  d'une façon souhaitée. Comme souvent, on atteint au général par le truchement du particulier.

---

### Un exercice pour la séance du 19 novembre 2014

1. Rappelons l'énoncé de l'exercice proposé.

1. Le statisticien Francis Galton (1822-1911) a publié dans le numéro 1949, vol. 75, pp. 450-451, de la revue *Nature*, un article intitulé « Vox populi ». On trouvera cet article en ligne, notamment à l'adresse <http://wisdomofcrowds.blogspot.fr/2009/12/vox-populi-sir-francis-galton.html>.

2. Étudier les questions suivantes :

a) En quoi le contenu de l'article a-t-il à voir avec l'adage *Vox populi, vox Dei* ? (On pourra consulter notamment l'article « Vox populi » de *Wikipédia*.)

b) On considère l'assertion suivante : « La voix du peuple est généralement fiable dans ses jugements. » Comment Galton opère-t-il pour éprouver la valeur de vérité de cette assertion ? Précisez les aspects théoriques et les aspects pratiques de la praxéologie de recherche mise en œuvre.

c) Existe-t-il en matière d'éducation des phénomènes analogues à celui mis en évidence par Galton ? Lesquels ?

2. Éléments de réponse (1<sup>re</sup> partie)

a) En quoi le contenu de l'article a-t-il à voir avec l'adage *Vox populi, vox Dei* ?

① D'après l'article « Vox populi » de *Wikipédia*, la locution latine *vox populi* apparaît dans l'adage *Vox populi, vox Dei*, qui intervient dans un contexte que l'article décrit ainsi :

Elle apparaît d'abord pour désigner le mode de reconnaissance des saints dans l'Église catholique : c'est la réputation de sainteté dans le peuple chrétien qui fait le saint jusqu'au XIII<sup>e</sup> siècle. Ensuite, l'Église soumet le cas à un procès en canonisation, dans lequel l'argument de la popularité du saint est une condition indispensable : le rayonnement spirituel du candidat est un signe de sa participation à la sainteté de Dieu et apporte la certitude que son exemple est accessible au reste du peuple chrétien. Dans ce cadre-là, elle signifie plutôt : « Si le peuple pense qu'il est saint, c'est que Dieu doit aussi le penser ».

Galton, lui, parle de « popular judgments » ou de « democratic judgments » pour affirmer que, en démocratie, « any investigation into the trustworthiness and peculiarities of popular judgments is of interest ». Il conclut son article en écrivant que son étude renforce l'hypothèse de la *trustworthiness of a democratic judgment* – la fiabilité des jugements collectifs. Cette étude redonnerait donc vigueur à un aphorisme antique, têt vilipendé, au moins depuis Alcuin (v. 732-804), qui, en 798, écrivait – en latin – dans une lettre à Charlemagne : « Et ces gens

qui continuent à dire que la voix du peuple est la voix de Dieu ne devraient pas être écoutés, car la nature turbulente de la foule est toujours très proche de la folie. »

② On trouve sur *Wikipedia* un article intitulé « Wisdom of the crowd » qui indique d'abord : « The *wisdom of the crowd* is the process of taking into account the collective opinion of a group of individuals rather than a single expert to answer a question. »

① Interroger un collectif plutôt qu'un expert conduirait à la conclusion suivante :

A large group's aggregated answers to questions involving quantity estimation, general world knowledge, and spatial reasoning has generally been found to be as good as, and often better than, the answer given by any of the individuals within the group.

② Une raison avancée pour expliquer le phénomène de « sagesse des foules » est celle-ci :

An intuitive and often-cited explanation for this phenomenon is that there is idiosyncratic noise associated with each individual judgment, and taking the average over a large number of responses will go some way toward canceling the effect of this noise.

③ Un type de situations où le principe de « sagesse de la foule » pourrait s'appliquer aujourd'hui est lié à Internet et aux réseaux sociaux : « This process, while not new to the information age, has been pushed into the mainstream spotlight by social information sites such as *Wikipedia*, *Yahoo! Answers*, *Quora*, and other web resources that rely on human opinion. »

③ Le même article précise encore ceci : « In the realm of justice, trial by jury can be understood as wisdom of the crowd, especially when compared to the alternative, trial by a judge, the single expert. » En matière politique, le recours au *tirage au sort* (en anglais, *sortition*) peut également être regardé comme relevant du principe de la sagesse des foules : « In the political domain, sometimes *sortition* is held as an example of what wisdom of the crowd would look like. Decision making would happen by a diverse group instead of by a fairly homogenous political group or party. » En matière économique, un livre a mis en avant le principe de la sagesse des foules : il s'agit de l'ouvrage de James Surowiecki intitulé *The Wisdom of Crowds* (2004), dont le sous-titre est : *Why the Many Are Smarter Than the Few and How Collective Wisdom Shapes Business, Economies, Societies and Nations*. On se reportera à ce propos à l'article de *Wikipedia* intitulé « The Wisdom of Crowds ».

b) On considère l'assertion suivante : « La voix du peuple est généralement fiable dans ses jugements. » Comment Galton opère-t-il pour éprouver la valeur de vérité de cette assertion ? Précisez les aspects théoriques et les aspects pratiques de la praxéologie de recherche mise en œuvre.

① Galton soumet cette assertion à une épreuve particulière, que l'article « Wisdom of the crowd » de *Wikipedia* résume ainsi :

At a 1906 country fair in Plymouth, eight hundred people participated in a contest to estimate the weight of a slaughtered and dressed ox. Statistician Francis Galton observed that the median guess, 1207 pounds, was accurate within 1% of the true weight of 1198 pounds.

Dans ce cas, la conclusion est que la « foule » (les quelque 800 participants au concours) était « sage » (à propos de la question posée).

② Le *type* de dispositif de recherche mis en jeu par Galton résout le problème « méthodologique » suivant : déterminer une quantité qui puisse être *mesurée* (par exemple le poids d'un tas de pierres) ainsi qu'un collectif de personnes ayant à *estimer, de visu*, cette quantité et dont les estimations *individuelles* puissent en outre être recueillies par le chercheur. Voici la narration qu'en propose Galton :

A weight-judging competition was carried on at the annual show of the West of England Fat Stock and Poultry Exhibition recently held at Plymouth. A fat ox having been selected, competitors bought stamped and numbered cards, for 6d, each, on which to inscribe their respective names, addresses, and estimates of what the ox would weigh after it had been slaughtered and "dressed." Those who guessed most successfully received prizes. About 800 tickets were issued, which were kindly lent me for examination after they had fulfilled their immediate purpose.

❶ On voit que, dans ce cas, le *prélèvement* des données se fait par *cueillette* sur la « nature » : la recherche s'inscrit de ce point de vue dans le *paradigme du chasseur-cueilleur paléolithique*. En désignant par  $\gamma$  Francis Galton, on peut dire que les conditions  $C_\gamma$  et les contraintes  $K_\gamma$  sont en un tel cas minimales.

❷ Galton ébauche alors une analyse des conditions  $\check{C}$  ( $\supset C_\gamma$ ) et des contraintes  $\check{K}$  ( $\supset K_\gamma$ ) :

The judgments were unbiassed by passion and uninfluenced by oratory and the like. The sixpenny fee deterred practical joking, and the hope of a prize and the joy of competition promoted each competitor to do his best. The competitors included butchers and farmers, some

of whom were highly expert in judging the weight of cattle; others were probably guided by such information as they might pick up, and by their own fancies. The average competitor was probably as well fitted for making a just estimate of the dressed weight of the ox, as an average voter is of judging the merits of most political issues on which he votes, and the variety among the voters to judge justly was probably much the same in either case.

③ Un lecteur de l'hebdomadaire *Nature*, qui est aussi un chercheur avec lequel Galton a travaillé, F. H. Perri-Coste, qui habite le village de Polperro en Cornouailles, adresse à Galton cette critique (formulée en termes de conditions et contraintes appartenant à  $\check{C} \setminus C_\gamma \cup \check{K} \setminus K_\gamma$ ) :



These competitions are very popular in Cornwall; but I do not think that Mr. Galton at all realises how large a percentage of the voters—the great majority, I should suspect—are butchers, farmers, or men otherwise occupied with cattle. To these men the ability to estimate the meat-equivalent weight of a living animal is an essential part of their business; and, as an instance of their training, I may mention

that one of the butchers here has a son under thirteen years of age who is an adept at this work, and is already, I am told, one of the best weight-judges in the district. This boy has been trained to it by his father, and already surpasses his instructor. Moreover, many of the competitors doubtlessly compete frequently, compare notes afterwards, and correct future estimates by past experience. Now the point of all this is that, in so far as this state of things prevails, we have to deal with, not a *vox populi*, but a *vox expertorum*. I am afraid that the majority of such competitors know far more of their business, are far better trained, and are better fitted to form a judgment, than are the majority of voters of any party, and of either the uneducated or the so-called “educated” classes. I heartily wish that the case were otherwise.

④ À cela, Galton répond ainsi :

I INFERRED that many non-experts were among the competitors, (1) because they were too numerous (about 800) to be mostly experts; (2) because of the abnormally wide vagaries of judgment at either end of the scale; (3) because of the prevalence of a sporting instinct, such as leads persons who know little about horses to bet on races.

Scientifique rigoureux, Galton ajoute cependant : « But I have no facts whereby to test the truth of my inference. »

④ On notera que Galton propose alors un aménagement du concours : « It would be of service in future competitions if a line headed “Occupation” were inserted in the cards, after those for the address. » On passerait alors, de façon plus ou moins subreptice, du paradigme de la cueillette au paradigme de la récolte. Comme toujours, le changement préconisé par Galton pourrait en provoquer d’autres, relatifs à la participation ou au comportement des compétiteurs.

③ Par rapport à l’assertion générique évoquée dans l’énoncé de l’exercice – « la voix du peuple est généralement fiable dans ses jugements » –, l’assertion mise à l’épreuve par Galton apparaît d’un *type* particulier. Des travaux divers ont tenté de mettre en évidence des grands paquets de conditions pour qu’une « foule » se comporte d’une manière « sage ». L’article « The Wisdom of Crowds » (sur le livre de James Surowiecki) explicite « four elements required to form a wise crowd » ; les voici :

Criteria	Description
Diversity of opinion	Each person should have private information even if it’s just an eccentric interpretation of the known facts.
Independence	People’s opinions aren’t determined by the opinions of those around them.
Decentralization	People are able to specialize and draw on local knowledge.
Aggregation	Some mechanism exists for turning private judgments into a collective decision.

(On pourra notamment relier le critère de « diversité » à la procédure de tirage au sort évoquée plus haut.)

3. D’autres éléments de réponse seront examinés *lors de la troisième séance, le mercredi 17 décembre 2014*. Ils concerneront notamment (mais pas seulement) l’analyse du travail *statistique* réalisé par Galton dans son article. On pourra éventuellement s’aider pour cela de l’article que l’on trouvera en ligne à l’adresse <http://arxiv.org/pdf/1410.3989.pdf>.

## Séminaire

1. Rappelons les indications fournies par les participants à ce séminaire :

**Grégoire Chaperot** (Teresa Assude)

« J'ai choisi de parler des narrations de recherche en collège et d'étudier plus particulièrement la question suivante : En quoi les récits sont-ils des outils pour faire vivre les éléments technologiques dans les classes ? »

**Laure Guérin** (Yves Matheron)

Procédés de contrôle et moyens de vérification.

**Karine Saada** (Michèle Artaud)

Les praxéologies de reprise de l'étude d'un thème. Quelles sont-elles ? Quelles sont les conditions et contraintes de leur existence, de leur diffusion ?

2. Ceci est un commentaire qui concerne, à des titres et des degrés divers sans doute, les thèmes de recherche mentionnés ci-dessus. Dans chaque cas, en effet, on s'intéresse à des dispositifs didactiques soit génériques (narrations de recherche, reprises d'études), soit plus spécifiques (outils de vérification) qui, semble-t-il, en sont encore au stade de l'innovation. Dans un tel cas, les données que l'on peut prélever auprès des acteurs (personnels ou institutionnels) de ces innovations ont de fortes chances de porter la marque d'une volonté, de la part des personnes et institutions concernées, soit de louer, soit de décrier le projet d'innovation et ses réalisations partielles éventuelles. Un tel phénomène peut bien être étudié pour lui-même : il participe en effet du système des conditions et contraintes sous lesquelles le dispositif didactique étudié est susceptible de vivre (et de mourir). Mais, tel l'arbre cachant la forêt, il ne doit pas masquer l'ensemble des conditions et contraintes coextensives aux essais effectifs de mise en œuvre de l'innovation, et *en particulier* les conditions et contraintes dont le siège se trouve au niveau des systèmes didactiques (voir ci-dessous).

Civilisation

↓↑

Société

↓↑

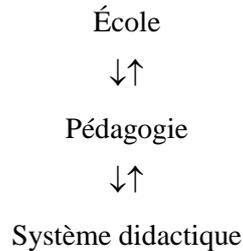
École

↓↑

Pédagogie

↓↑

↓↑



Les données recueillies, en outre, sont, du fait de la situation historique d'innovation, plutôt *rare*s. On doit donc se défier de la tendance à la *surexploitation des données disponibles* et, en particulier, ne pas céder à la tentation du *data snooping*.

3. À ce qui précède on peut ajouter des informations concernant le thème de travail d'un quatrième participant, thème que je reformule ici librement (cela ne l'engage pas : comme chacun de vous, il n'est engagé que vis-à-vis de son directeur ou sa directrice de mémoire) :

**Sébastien Velon** (Michèle Artaud)

Écologie et économie didactiques des mathématiques financières et économiques

Rappelons à ce propos les notions de problématique *primordiale* et de problématique *interventionniste*, en commençant par la problématique primordiale :

La problématique *primordiale* a pour objet de déterminer, pour une instance (personnelle ou institutionnelle)  $U$  donnée, l'*équipement praxéologique* de  $U$  qui serait jugé adéquat, par une instance  $V$  (avec éventuellement  $V = U$ ), sous des contraintes  $K$  et dans des conditions  $C$ , à la conception et à la réalisation de tel ou tel projet de connaissance et d'action  $\Pi$ . Ce type de questionnement vise donc à déterminer l'ensemble des praxéologies  $\wp$  vérifiant la relation  $\mathfrak{S}(\wp, K, C, \Pi, U, V)$ , où la relation  $\mathfrak{S}$  est satisfaite si la praxéologie  $\wp$  est jugée, par l'instance  $V$ , *utile ou indispensable* à  $U$  pour s'engager dans le projet  $\Pi$  sous les contraintes  $K$  et dans des conditions  $C$ .

Sur le thème précisé plus haut, on peut imaginer une recherche partant de la formulation d'un projet de formation  $\Pi$  en matière de *phénomènes financiers et économiques*, qui conduirait à choisir une sélection de phénomènes qui ne puisse guère être récusée en elle-même comme objectif de formation (même si elle peut l'être lorsqu'elle est mise en rivalité avec une sélection de phénomènes « purement » mathématiques traditionnellement étudiés au niveau d'études concerné). En ce cas, *la recherche participerait de la problématique primordiale* : on y étudierait l'écologie et l'économie de praxéologies mathématiques  $\wp$  telles que  $\mathfrak{S}(\wp, K, C, \Pi, U, V)$ , en donnant aux paramètres  $K, C, U, V$  des valeurs appropriées. Pour y parvenir, le

chercheur  $\xi$  – ou plutôt l'équipe de recherche  $\Xi$  – doit cependant mettre à distance une problématique « réflexe » qui n'est rien d'autre que la problématique *interventionniste*, dont on rappelle d'abord la présentation :

La problématique *duale* de la problématique primordiale est la problématique *interventionniste*, qui appelle l'étude de l'ensemble de projets  $\{\Pi / \mathfrak{S}(\wp, K, C, \Pi, U, V)\}$  : il s'agit des projets  $\Pi$  pour la conception et la réalisation desquels la disponibilité de la praxéologie  $\wp$  est jugée par une certaine instance  $V$  utile ou indispensable à  $U$  sous les contraintes  $K$  et dans des conditions  $C$ . Cette problématique est au cœur de la théorie des AER : en ce cas,  $\wp$  est une entité praxéologique ayant – aux yeux de  $V$  au moins – le statut d'*enjeu didactique*, le projet  $\Pi$  étant alors le projet  $\Pi_{pr}$  de résoudre un certain problème *pr* tel que l'on ait  $\mathfrak{S}(\wp, K, C, \Pi_{pr}, U, V)$ .

Ce n'est pas trop dire que la problématique interventionniste fonctionne « à l'envers » de la problématique primordiale : au lieu de fixer *d'abord* le projet de formation  $\Pi$  et d'en tirer alors le répertoire des praxéologies mathématiques  $\wp$  utiles (et, donc, à « enseigner »), ainsi que le veut la problématique primordiale, on y observe le répertoire existant des praxéologies mathématiques  $\wp$  traditionnellement enseignées et l'on s'efforce alors de leur associer des objectifs de formation extra-mathématiques (ici, en matière économique et financière) qui s'articuleraient d'avance avec ce répertoire (au prix de minuscules retouches mathématiques). On sait que les contraintes écologiques et économiques de l'enseignement courant tendent à faire disparaître rapidement ce qui n'est guère vu alors que comme un choix secondaire d'objectifs de formation extra-mathématiques dont l'unique rôle est de mettre en valeur – s'il en était besoin – les mathématiques usuellement enseignées. On doit ajouter en ce point que la problématique interventionniste est souvent « mitée » par le désir de montrer des « tours de force » mathématiques, merveilles qu'il est possible de faire avec le répertoire mathématique courant, où, à nouveau, l'extra-mathématique devient le faire valoir du mathématique et, en conséquence, se fragilise. Pour cette raison, il semble plus prudent de choisir pour « terrain » le collège plutôt que le lycée, lequel offre l'occasion de quelques morceaux de bravoure mathématiques sans grand intérêt pour la recherche en didactique considérée. L'intitulé déployé plus haut pourrait donc être réécrit ainsi : « Écologie et économie didactiques des mathématiques financières et économiques au collège. »