

LES PROCESSUS DE TRANSPOSITION DIDACTIQUE ET LEUR THEORISATION

Yves CHEVALLARD *

1. DU SPECTACLE À L'OUTIL

J'ai introduit le thème de la *transposition didactique* dans la communauté française des didacticiens des mathématiques au tout début des années 1980. Ce thème, en vérité, avait émergé depuis quelques années dans divers travaux réalisés par l'équipe de recherche que j'animais alors à l'IREM d'Aix-Marseille ¹. Mais il y était présent, si je puis dire, en acte, et n'était guère apparu qu'à travers des études particulières où il constituait le fil rouge de l'enquête, conférant une perspective commune à des sujets de recherche par ailleurs divers. Un cours donné dans le cadre de la première école d'été de didactique des mathématiques, tenue à Chamrousse en juillet 1980, m'obligea à condenser, dans une forme délibérément fruste, ce que le travail collectif antérieur avait peu à peu porté à la lumière. De là sortit, quelques années plus tard, un petit ouvrage, qui força l'attention d'un cercle étroit de lecteurs ².

Il est bon, je crois, de s'arrêter un instant sur ce détail d'histoire. Ce que proposait le cours de Chamrousse, et qui diffusa ensuite par le canal de l'ouvrage publié en 1985, c'était au fond l'ébauche d'une *théorie* des processus de transposition didactique. Or, en une communauté scientifique naissante comme l'était la nôtre alors, le statut de la théorie est ordinairement rien moins qu'assuré. Nombre de lecteurs, sans doute, firent de cette esquisse théorique une lecture qui retrouvait sans le savoir l'origine grecque du mot. De la *theôria*, fête ou spectacle souvent empreint de solennité (le mot désignait, en particulier, le défilé des députations des villes grecques à Delphes), en passant par l'usage platonicien, qui ennoblit le vocable et renvoie à l'idée d'une contemplation de l'esprit – d'une spéculation « théorique » –, jusqu'à l'acception aujourd'hui communément reçue, il paraît en effet trop évident qu'une même problématique culturelle est engagée.

Exposer la théorie d'un objet, c'est, culturellement, *donner un spectacle*. Spectacle de discours, qui se mue parfois, lorsque les dieux sont avec nous, en une fête de l'esprit. De cette fête discursive, le lecteur, alors, se fait *theôros* – spectateur. Toute une logique culturelle trouve là son point de départ et son lieu de cristallisation. Un spectacle s'apprécie ou vous irrite. On en discute ; on le commente. On aime ou on n'aime pas. Certains se piquent au jeu, montent sur les planches, et de spectateurs se changent en acteurs. (L'esquisse proposée fournissait une matière qui, en divers enseignements, fit l'objet de mises en scène renouvelées.) D'autres encore s'instituent *critiques*, font la théorie de la théorie, bâtissent un spectacle sur le spectacle.

Dans l'acception scientifique du terme, une théorie, pourtant, est autre chose qu'un spectacle. Sans doute, comme tout objet qui s'offre à la transmission, se donne-t-elle à entendre, à lire, à

* IUFM d'Aix-Marseille et IREM d'Aix-Marseille.

¹ Voir ainsi Schneider 1979 et Tonnelle 1979.

² Voir Chevallard 1985. Ce petit monde s'est avéré, au fil des années, être en expansion lente : une deuxième édition de l'ouvrage, sensiblement augmentée, a paru en 1991.

« voir ». Telle est bien la forme de notre première rencontre avec elle. Telle est sa valeur faciale – sur laquelle, pourtant, un esprit avisé ne saurait se déterminer. Car ce déploiement discursif, qu’il soit brillant ou nous paraisse terne, n’est qu’une partie de l’histoire. Le chercheur, qui n’est pur spectateur que par distraction, ne s’y laisse pas prendre. Il juge la théorie aux *usages* qu’il en saura faire. Il voudra en évaluer *l’instrumentalité*. Et, pour tout dire, il la servira *en s’en servant*. Loin de l’esthétisme vague qui gagne parfois le scientifique au repos, une théorie, ainsi, n’est jamais qu’un *instrument*. C’est une chose toute « concrète ». C’est, d’abord, une machine, et dont il faut apprendre à se servir. Une machine à *produire des connaissances* ³. Le rendement de cette machine pourra bien décevoir, en qualité comme en quantité. Mais on juge l’arbre à ses fruits, non à ses frondaisons ; et, pour se faire juge, il vaut mieux avoir pris la peine de goûter.

La théorie de la transposition didactique nous parle d’un objet : *les phénomènes de transposition didactique*. Elle joue d’abord, à leur endroit, son simple rôle de théorie : elle ne nous en parle, répétons-le, que pour nous permettre de les « arraisonner », d’en rendre raison, de produire des connaissances à leur propos. Rien d’original en cela. Le seul défaut, répétons-le aussi, est que, trop souvent, on ne se soit intéressé à elle que comme à un *objet*, en oubliant que cet objet est d’abord, par nature, *outil*. Outil de travail du chercheur s’entend.

Mais sa puissance d’élucidation – sa *portée* – s’est très vite révélée plus ample. Pour une raison précise, et qui mérite explicitation. Toute science, sans doute, vise à éclairer le réel. Mais nulle science n’y parvient sans emprunter le détour préalable, et indéfiniment repris, d’un *brouillage* du réel. Pour le dire autrement : tout projet de science est indissociablement tentative continuée de *problématiser* le réel ; de le faire apparaître comme *problématique*, je veux dire *comme posant problème*. Toute science, pour cela, s’inscrit en faux contre l’illusion de transparence qui imprègne notre rapport *culturel* au monde.

En toute entreprise de science, la recherche des voies de la problématisation constitue le premier effort, mobilise les premières énergies, et peut seule assurer le décollage de l’œuvre collective. Le drame, au demeurant, se revit à chaque instant, dès que l’on quitte les larges boulevards des interrogations convenues. *Quelle question se poser ?* Telle est bien la question que le chercheur se pose d’abord face à son objet, et qui d’abord le laisse coi. Parvenir à formuler une question, une seule question peut-être, mais une bonne question : telle est aussi la meilleure récompense de son effort.

Or il est une maladie infantile des sciences, ou plutôt des sciences qui n’en sont pas encore, et qui peinent à le devenir ; une maladie à laquelle bien peu échappent, et qui consiste à reprendre tout uniment ces questions toutes faites que la culture, trompeusement, vous apporte. On peut questionner un chercheur sur les *résultats* qu’il aura obtenus. On doit questionner une science sur les *questions* que l’on s’y pose. À cette aune se mesure la *rupture épistémologique* sans laquelle aucune science ne saurait naître.

L’interrogation autour du thème de la transposition didactique, précisément, eut cette vertu d’ouvrir une nouvelle voie de problématisation, de frayer une piste à l’enquête à partir d’un point de départ qui n’avait pas été reconnu comme tel, et que tout nous poussait, culturellement, à méconnaître. Divine surprise, elle fournissait le chercheur en questions inédites, décalées par rapport à la culture de l’institution. Cela seul, je crois, suffirait à expliquer l’engouement suscité autant que les résistances qui, d’emblée, se firent jour.

³ Sur cette métaphore, voir Chevallard 1992.

2. DISSONANCES

Je reprendrai ici des formulations anciennes. Des mathématiques des mathématiciens aux mathématiques enseignées – à l'école primaire et ailleurs, jusqu'à l'Université même – il y a une « distance ». On peut être d'accord là-dessus. C'est alors qu'entre en jeu l'illusion de la transparence, qui ferme la question avant même qu'elle ait été posée. Car, pour chacun de nous, culturellement, cette distance *va de soi*. Elle n'aurait d'autre signification que celle-ci, qui se donne à son tour pour inobjectable – culturellement s'entend. Un enfant de dix ans, arguera-t-on, n'est pas un mathématicien dans la force de son art ; les mathématiques que l'on prétend enseigner à l'un ne peuvent être celles qui vivent entre les mains de l'autre. Entendez ici : votre cause ne vaut rien ; passons à autre chose.

Insistons pourtant. Soit deux exemples. Le premier, précisément, est celui de la notion de... *distance*, au sens mathématique actuel du terme : E étant un ensemble, une distance sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant certains axiomes. Cette notion s'introduit dans l'enseignement français à l'occasion de la réforme des mathématiques modernes, qui connaît son apogée au début des années soixante-dix. Elle est présentée à des élèves de treize ans comme une notion de topologie *de la droite réelle*. Or les mathématiciens l'ont forgée, au début du siècle, afin d'étendre aux espaces fonctionnels, soit à des espaces généralement *de dimension infinie*, les notions de topologie acquises depuis longtemps pour les espaces de dimension finie ⁴.

Le hiatus est ici flagrant. On peut gager *a priori* qu'à peu près rien de la *problématique* qui a guidé les mathématiciens dans l'élaboration de la notion de distance ne pourra se retrouver à ce niveau des études. Ainsi, l'une des idées directrices de la construction est-elle que la distance de deux « objets » – de deux fonctions par exemple – doit mesurer la *ressemblance* qui est entre eux (ou plutôt : *une certaine ressemblance*, portant sur les « traits » auxquels on s'intéresse). Notion totalement absente de l'appréhension courante de l'espace géométrique ordinaire : deux points ne se ressemblent pas davantage pour être plus proches l'un de l'autre ! Entre le concept de distance des mathématiciens du début du siècle (et d'aujourd'hui), et celui qui est alors présenté à l'élève, un écart s'est creusé.

Second exemple. Le XIX^e siècle, on le sait, est parcouru par un grand mouvement *d'arithmétisation de l'analyse*, qui concrétise une volonté de reconstruire et de fonder l'édifice mathématique à partir de ce qui apparaît alors le plus solide : les nombres entiers « naturels ». L'entreprise se heurte à plusieurs problèmes techniques, formulés et résolus au cours du siècle ⁵. Comment, par exemple, ramener les nombres complexes aux nombres réels ? Hamilton répond (à peu près) : en considérant les complexes comme des *couples* de réels ⁶. L'idée de regarder, à leur tour, les entiers relatifs comme des couples d'entiers naturels, et les rationnels comme des couples d'entiers relatifs, apparaît chez Weierstrass et trouve sa meilleure expression chez Peano. Quant à l'arithmétisation des réels, il faudrait citer ici, outre Hamilton, précurseur comme toujours, Richard Dedekind et sa technique des « coupures » dans l'ensemble des rationnels : calquée sur la construction eudoxienne des rapports de grandeurs, sa solution paraît en 1872.

Cela noté, quel était, globalement, le problème à résoudre ? Selon une ruse dont l'histoire a le secret, ce problème ne devait être véritablement compris qu'un peu plus tard, à la lumière de

⁴ Voir Chevallard et Johsua 1982.

⁵ Voir, 1à-dessus, Kline 1972, notamment chapitre 41.

⁶ Kline 1972, pp. 775-776.

l'idée d'*axiomatique* (développée par l'école, dite formaliste, de Hilbert) et des notions de *syntaxe* et de *sémantique*, essentielles en logique mathématique et précisées dans le premier tiers du XX^e siècle (notamment par les travaux d'Alfred Tarski). La notion cruciale est ici celle de *consistance relative*. Il s'agissait de montrer, au fond, que si la théorie des entiers naturels est consistante (c'est-à-dire dénuée de contradiction), alors il en est de même en ce qui concerne la théorie des entiers relatifs, celle des rationnels, des réels, des complexes, etc. Si, un instant, on identifie, comme pouvait le faire l'école formaliste, « non-contradiction » et « existence », le problème prend une formulation accélérée : démontrer que, si les entiers (naturels) existent, alors il en est de même des relatifs, des rationnels, des réels, des complexes. Ou encore, en prenant cette fois le parti du point de vue « sémantique » (une théorie est non contradictoire si elle a un modèle) : montrer que si l'on dispose d'un modèle de la théorie des entiers (naturels), alors on peut *construire* un modèle de la théorie des relatifs, des rationnels, etc.

Par rapport à ce problème de « fondement », les solutions proposées avaient d'abord une valeur technique, donc relative : d'autres solutions techniques existent presque toujours. Ainsi, les réels étant supposés « exister », on peut *aussi bien* construire le corps des complexes comme l'ensemble, convenablement structuré, des couples de réels (solution d'Hamilton), *ou* comme le quotient, par l'idéal principal engendré par le polynôme $1 + x^2$, de l'anneau $\mathbb{R}[x]$ des polynômes à coefficients réels (solution de Cauchy), *ou encore* – ainsi qu'on le fit un temps dans notre enseignement secondaire – comme un certain sous-anneau de l'anneau des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, etc. De même, la dérivation des réels à partir des rationnels, qui peut se faire à l'aide de la notion de « coupure » (solution de Dedekind), peut s'obtenir aussi par le biais des « suites de Cauchy » (solution de Cantor et de Méray). Et d'autres solutions encore sont possibles⁷.

Voilà donc ce qu'était l'enjeu du travail mathématique dont la Réforme, un siècle plus tard, va se faire l'écho. Or c'est là que se creuse un écart entre mathématiques savantes et mathématiques enseignées, alors même que la Réforme, très explicitement, prétend réduire cette distance. Par un paradoxe typique des processus de transposition didactique, en effet, le chambardement curriculaire qu'elle promeut aboutit à faire vivre, dans la classe de mathématiques, la *solution* (technique) à un *problème* (métamathématique) qui, lui-même, *n'y aura jamais été posé !* Ainsi introduisit-on, un temps, dès le Collège, les entiers relatifs comme « classes d'équivalence de couples de naturels »⁸.

3. LA PROBLÉMATIQUE ÉCOLOGIQUE

Les deux exemples invoqués jusqu'ici, on n'aura pas manqué de l'observer, se découpent sur le fond d'un épisode *a priori bien particulier* de notre histoire récente. Cette puissante commotion que fut la Réforme, cette perturbation violente imprimée à un système en équilibre dynamique aura créé un formidable laboratoire à ciel ouvert. Aux yeux du chercheur, elle eut, en effet, l'immense mérite de rendre visibles, soudainement, une foule de

⁷ Sur ce thème, voir par exemple Dhombres 1985.

⁸ On peut observer, au demeurant, pour souligner ce paradoxe, que, s'il s'était agi simplement de satisfaire à l'air du temps, imprégné de « génétisme » (selon la pente de l'épistémologie piagétienne, alors triomphante) et imbu de « rigueur » (l'une des valeurs fondamentales promues par la Réforme), une autre construction était possible et à portée de la main, qui se fût approchée au mieux de l'idée que nous nous faisons tous des entiers relatifs : entiers (naturels), *précédés d'un signe*. Il eût suffi pour cela, en effet, de définir l'ensemble des relatifs comme le quotient de l'ensemble $\{ +, - \} \times \mathbb{N}$ par la relation d'équivalence qui se contente d'identifier... les couples $(+, 0)$ et $(-, 0)$. Solution technique mathématiquement aussi valable qu'une autre, et sans doute plus proche de la pratique, non seulement des élèves, mais de chacun d'entre nous. On ne le fit pas.

phénomènes que nous côtoyons ordinairement sans les voir. Les processus de transposition didactique furent de ceux-là. Encore fallait-il, pour les apercevoir alors, avoir su conserver une prudente distance face à l'événement, en n'étant ni farouchement « pour », ni furieusement « contre ». Il fallait aussi – et il faut toujours – ne pas succomber à cette variante courante de l'historicisme pour laquelle l'événement ne renvoie qu'à lui-même – « Ce fut ainsi parce que ce fut ainsi » – et qui porte à ne voir, en chaque conjoncture historique particulière, qu'une singularité isolée, un « bibelot historique », le produit erratique d'une histoire tératogène, artiste baroque qui toujours nous surprend mais jamais ne nous instruit. Car s'il est vrai qu'on n'*explique* pas « l'histoire », l'histoire, pourtant, se construit par le fonctionnement de *systèmes*, qui naissent, vivent, disparaissent, et qui, quant à eux, *ont leurs lois*. Qui ont leurs modes de fonctionnement, *et qui s'expliquent*.

Hypothèse métathéorique, sans doute ! Mais si de telles lois sont une chimère, alors toute science des hommes et des sociétés est vaine, et ne l'est pas moins pour diriger son regard sur le présent plutôt que vers le passé. Des lois qui ne seraient pas, d'une certaine manière, *invariantes dans la durée*, ne sont pas des lois. Que l'état d'un système, à tel instant, nous apparaisse comme une singularité historique, est une chose. Que l'analyse de cet état ne puisse rien nous apprendre *sur ce système*, sinon sur « l'histoire », est autre chose. Des phénomènes de transposition didactique, la Réforme, épisode historique qui constitua un moment « critique » de la vie du système d'enseignement, nous montrait d'abord l'un des aspects les plus manifestes, même dans les périodes « normales » : l'*arrivée*, dans le système d'enseignement, de *nouveaux objets de savoir*.

Les écologues distinguent, s'agissant d'un organisme, son *habitat* et sa *niche*. Pour le dire en un langage volontairement anthropomorphe, l'habitat, c'est en quelque sorte *l'adresse*, le lieu de résidence de l'organisme. La niche, ce sont les fonctions que l'organisme y remplit ; c'est en quelque façon la *profession* qu'il y exerce. La Réforme, donc, nous montrait des objets de savoir *en train de changer d'habitat*, de s'établir en une résidence nouvelle : l'enseignement général du second degré. Or une analyse même rudimentaire (nous en avons vu plus haut deux échantillons) permettait de soupçonner qu'avec ce changement d'habitat se produisait aussi un *changement de niche*. Que les objets de savoir nouvellement introduits, plongés tout à coup dans un écosystème différent, allaient changer de « profession », pour s'adapter à un environnement neuf où ils devraient entrer en interrelation avec de nouveaux « partenaires », pour composer avec eux des « associations » jusque-là inédites.

Cette simple observation est, au fond, à l'origine de ce vaste domaine de recherche auquel j'ai donné le nom *d'écologie didactique des savoirs*. Avec ce domaine, à vrai dire, c'est une certaine manière de problématiser le réel didactique qui s'introduisait. La *problématique écologique*, encore largement implicite dans le livre de 1985, apportait avec elle un flot de *questions*, auxquelles leur apparente naïveté faisait rendre un son culturellement étrange. D'où viennent ces nouveaux objets enseignés ? Comment sont-ils arrivés là ? Quelles interrelations, avec quels autres objets, y nouent-ils ? Et, aussi, surtout : *pourquoi* sont-ils arrivés jusque-là ?

Arrêtons-nous un instant sur la *forme* de cette dernière interrogation. Le petit mot par lequel elle s'ouvre, *pourquoi*, que la culture abandonne volontiers aux enfants, spécialistes du « pourquoi-isme », se révèle être en fait une extraordinaire matrice de questions, le moteur d'une véritable déconstruction du réel, le moyen d'une subversion des évidences et un outil de notre propre déconditionnement. Plus étrange encore, il permet de s'interroger, non seulement sur ce qui est – pourquoi, par exemple, existe-t-il de nos jours un enseignement des

mathématiques dans l'enseignement secondaire général ?⁹ –, mais encore de se demander pourquoi ce qui n'est pas, n'est pas... Un seul exemple¹⁰. Soit les deux « objets » suivants, qui vivent aujourd'hui dans le curriculum du premier cycle de l'enseignement secondaire français. Le premier est un *problème*, un problème de *construction géométrique* :

Étant donné une droite D et un point P n'appartenant pas à D , construire, à la règle et au compas, la parallèle à D passant par P .

Le second est un *théorème*, cas particulier du théorème de Thalès appelé quelquefois « *théorème des milieux* » :

Étant donné un triangle ABC , soit M et N les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$. Alors la droite (MN) est parallèle au troisième côté, $[BC]$.

La solution apportée au *problème* dans la période récente, c'est-à-dire le *procédé de construction* enseigné aux élèves, se fonde sur un *théorème* relatif aux parallélogrammes : si l'on définit un parallélogramme comme un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles, ce théorème affirme simplement *qu'un quadrilatère convexe qui a ses côtés opposés de même longueur est un parallélogramme*. Le procédé de construction est alors le suivant : marquez sur la droite D deux points distincts S et R , puis marquez le point Q , intersection du cercle de centre P et de rayon SR et du cercle de centre R et de rayon SP située du même côté que P par rapport à D et du même côté que R par rapport à (PS) . Par construction, le quadrilatère $PQRS$ est convexe et a ses côtés opposés (soit $[PQ]$ et $[SR]$ d'une part, $[SP]$ et $[RQ]$ d'autre part) *de même longueur*. C'est donc un parallélogramme, et l'on a en particulier $(PQ) \parallel (SR) = D$.

Ainsi existe-t-il, dans le curriculum mathématique aujourd'hui enseigné, une certaine *interrelation* entre le théorème sur les parallélogrammes et le problème de la construction de la parallèle à une droite donnée passant par un point donné. On notera en outre que, au cours de l'évolution du curriculum qui a marqué ces dernières décennies, d'autres interrelations, liant le problème examiné à d'autres théorèmes et produisant d'autres *solutions*, ont pu exister. Un procédé, classique avant la Réforme, est par exemple le suivant : on trace un cercle C de centre P coupant D en R et R' ; on trace alors le cercle de centre R et de même rayon : soit S son point d'intersection avec D situé du même côté que R' par rapport à R ; soit enfin Q l'intersection, avec le cercle C , du cercle de centre R et de rayon SP située du même côté que P par rapport à D . Les triangles PRQ et RPS , qui sont ici isocèles, sont égaux comme ayant leurs côtés homologues égaux. Par suite les angles en P et R de ces triangles sont égaux. En d'autres termes, les angles alternes-internes formés par les droites (PQ) et $(SR) = D$ et la sécante commune (PR) sont égaux : les droites (PQ) et D sont donc parallèles, en vertu d'un théorème qui caractérise le parallélisme de deux droites par l'égalité des angles alternes-internes qu'elles forment avec une sécante (quelconque).

On pourrait, bien entendu, citer nombre d'autres solutions, prenant appui sur autant d'interrelations différentes entre autant d'autres théorèmes et le problème de la parallèle. En revanche, semblable interrelation *n'existe pas* entre le problème cité et le *théorème des milieux*. Ou, pour le dire en termes subjectifs : quand un élève (ou un professeur) rencontre le problème de la construction de la parallèle, *il ne songe pas à le mettre en relation avec le théorème des milieux*. Pourtant, à ne considérer que la dimension *mathématique* de la question, on voit immédiatement qu'une telle interrelation pourrait fort bien exister. En d'autres termes, le théorème des milieux est susceptible de fonder un procédé, non moins

⁹ Voir Chevallard 1989.

¹⁰ Pour l'intelligence de ce qui suit, le lecteur aura avantage à exécuter par lui-même les figures auxquelles nous nous référons ci-après.

intéressant qu'un autre, et au demeurant très simple, de construction de la parallèle : tracez (avec la règle) une droite passant par P et sécante à D en M ; puis marquez (avec le compas) le point A symétrique de P par rapport à M ; tracez ensuite (à la règle) une autre droite passant par A, sécante à D en N ; enfin marquez (avec le compas) le point Q symétrique de A par rapport à N ; la droite (PQ) est la droite cherchée.

Pourquoi *cette* interrelation *n'existe-t-elle pas* ? Est-ce simplement qu'elle n'existe pas *encore* ? Mais alors sous quelles conditions *pourrait-elle se créer* ? Et ferait-elle alors disparaître l'ancienne interrelation ? Il est évidemment impossible, ici, d'aller beaucoup plus loin sur ce sujet. Une première analyse montrerait surtout que la réponse à ces questions n'engage pas que les deux objets à partir desquels celles-ci se formulent : ceux-là sont pris, chacun de leur côté, dans des « tous structurés », où ils vivent, et dont il faudrait d'abord étudier les conditions de formation et d'évolution. Le « savoir enseigné », le « choix » des objets qui le composent (et la liste de ceux qui ne parviennent pas durablement à y vivre), celui des interrelations qui s'établissent entre eux (et la liste de celles qu'on y chercherait en vain), sont ainsi la résultante d'un système complexe *de conditions et de contraintes*, d'une *écologie* spécifique qui, pour chaque question posée, appelle un examen particulier.

4. SAVOIRS À ENSEIGNER

La première théorisation – celle de 1980 – étudiait deux des grandes contraintes *internes* qui imposent leur tyrannie féconde dans les contrats didactiques contemporains : contrainte *chronogénétique*, d'une part ; contrainte *topogénétique*, d'autre part. Mais, à côté de ces contraintes « endogènes », elle énonçait une contrainte « exogène », explicative *de l'existence même* des processus de transposition didactique. Si, en certains moments historiques, le curriculum « bouge » ; si, régulièrement, il absorbe des flux de savoir venus de l'extérieur (et dont l'intégration réussie s'accompagne fréquemment de la création endogène d'objets de savoir « secondaires » et d'interrelations spécifiques constitutives d'associations inédites), c'est qu'entre le savoir enseigné et le savoir « laïque » dont il se réclame, *il convient que la distance soit assez courte*. Il convient, en d'autres termes, que le savoir enseigné et le savoir qui lui sert, en quelque sorte, de caution épistémologique au regard de la Société, *se ressemblent suffisamment*.

Une première question peut ici venir à l'esprit : pourquoi cette distance doit-elle être assez petite ? La réponse se condense en une formule lapidaire : parce que *nul savoir enseigné ne saurait s'autoriser de lui-même*. Pour bien entendre cet axiome de l'écologie didactique des savoirs, toutefois, il n'est pas inutile de se situer un instant dans une perspective *génétique*, en examinant pour cela la conjoncture sociale dans laquelle un savoir se change, historiquement, en un « savoir enseigné ».

Une distinction apparemment subtile constitue la clé de l'analyse. L'expression *savoir enseigné* – soulignons-le ici – n'est pas d'un emploi culturel courant : l'usage veut que l'on parle de *l'enseignement des mathématiques* (ou de *l'anglais*, etc.), non des *mathématiques enseignées* (ou de *l'anglais enseigné*, etc.). En vérité, toutes ces expressions, de même que la forme générique *savoir enseigné*, appartiennent en propre à la théorie de la transposition didactique : inusuelles, elles ne peuvent que paraître « gauches », et impropres, à qui ne veut connaître que la culture courante. Leur absence même du lexique de l'École est, à cet égard, un indice et un aveu : ce n'est pas par hasard qu'on ne parle pas de « mathématiques enseignées ». Toute la théorie de la transposition didactique repose, au fond, sur cette intuition.

L'enseignement d'un savoir, en effet, est toujours la réalisation d'un *projet social*, plus ou moins largement partagé, porté par au moins certains groupes sociaux. Or un tel projet, lorsqu'il n'est encore que projet, se formule essentiellement *hors de l'École*¹¹, et toujours à *l'adresse de la Société*, afin de gagner son consentement. C'est que l'École est la chose de la Société ; et que, pour cela, elle n'a pas de véritable autonomie *politique*. Soit, au XVIII^e siècle, l'exemple de D'Alembert militant, dans l'article EXPERIMENTAL qu'il rédige pour *l'Encyclopédie*, en faveur d'une réforme de l'Université de Paris. Écoutons-le :

L'étude de la géométrie et de la physique *expérimentale* commence à y régner. Plusieurs jeunes professeurs pleins de savoir, d'esprit et de courage (car il en faut pour les innovations même les plus innocentes), ont osé quitter la route battue pour s'en frayer une nouvelle ; tandis que dans d'autres écoles, à qui nous épargnerons la honte de les nommer, les lois du mouvement de Descartes, et même la physique péripatéticienne, sont encore en honneur.

Les savoirs dont l'auteur chante ici la louange, « géométrie » et « physique expérimentale », existent d'abord *hors de l'École*. Ce sont en essence des savoirs « laïques », et que l'auteur fait paraître en sa plaidoirie comme savoirs *à enseigner*. En vérité même, que ces savoirs soient ou non d'ores et déjà enseignés *importe peu*. Car jamais il n'est question ici des savoirs *effectivement enseignés* qui leur correspondent, « géométrie enseignée » ou « physique expérimentale enseignée ». Et, même quand il prétend dénoncer l'enseignement qui a majoritairement cours, D'Alembert se garde de mentionner ce qui s'enseigne véritablement sous le nom de physique : il s'en prend directement aux savoirs *extrascolaires* dont ces enseignements se réclament et s'autorisent. C'est la caducité de la physique de Descartes (sans parler de l'aristotélicienne...) qui illégitime *a priori* l'enseignement qu'on en donne, *quel qu'il soit*. Le débat, donc, porte bien sur des savoirs « laïques », même s'ils comparaissent ici comme savoirs *à enseigner*. Les savoirs *enseignés* sont, en tant que tels, *hors jeu*. Ce qui est en cause, c'est la congruence sociale de tel ou tel savoir. La physique de Descartes est devenue, aux yeux de D'Alembert, une incongruité. C'est pourquoi il ne faut pas l'enseigner. Elle ne saurait plus longtemps être comptée au nombre des savoirs *à enseigner*.

D'Alembert dénonce la physique de Descartes. Descente infinie : Descartes n'en usait pas autrement avec les savoirs de son temps. « Quand je commençai à m'appliquer aux disciplines mathématiques », écrit-il, quelque dix ans avant le *Discours de la méthode*, dans les *Regulae ad directionem ingenii*, « je me mis à lire la plupart des œuvres de ceux qui les ont cultivées. J'étudiai surtout l'arithmétique et la géométrie, parce qu'elles étaient, dit-on, les plus simples, et comme une voie pour arriver aux autres sciences. Mais ni dans l'une ni dans l'autre, je ne rencontrai un auteur qui me satisfît pleinement. » Voici donc Descartes, noosphérien d'occasion, mais opiniâtre, se portant contre Clavius : Clavius, le célèbre réformateur des études scientifiques chez les jésuites, novateur en mathématiques, mais pour le reste traditionaliste, et fidèle au Stagirite ; Clavius, auprès de qui s'était formé le père Jean François, bon scientifique, que Descartes eut pour maître à La Flèche, et qu'il tentera plus tard, au prix de quelques flatteries, de gagner à sa propre doctrine, sans grand succès.

Éternels recommencements ! L'intrigue est toujours la même. Le savoir enseigné y est, ordinairement, épargné. On n'en parle pas. La Société, au fond, s'en désintéresse. Toute une fiction se crée, qui rend possible *une stratégie d'évitement*. Les savoirs, objet du débat réformateur, doivent exister hors de l'École. Quand ils n'existent pas, *on les invente*. La

¹¹ Il se formule exactement, et par définition, dans cet espace mitoyen, entre Société et École, que j'ai nommé *la noosphère*. On prendra garde toutefois que la noosphère est faite de nombreuses sphères « emboîtées ».

réforme des mathématiques modernes en est la parfaite illustration. Deux personnages s'y affrontent qui ont nom « mathématiques classiques » et « mathématiques modernes ». Si l'École des années soixante est bien jugée coupable, son unique faute pourtant est de s'être arrêtée sur un choix devenu erroné. On ne condamne pas les mathématiques enseignées en elles-mêmes, mais le savoir « savant » dont elles procèdent, ces « mathématiques classiques » dont on fait alors le repoussoir de la modernité et dont bientôt – sitôt le combat gagné – on n'entendra plus parler...

Exquise courtoisie ! Ce que la Société désavoue n'est pas tant son École que l'image d'elle-même qu'elle se surprend à y lire. C'est elle-même qu'elle condamne. L'École n'est qu'un miroir. Miroir déformant sans doute ; mais qui doit se faire oublier comme miroir. Afin que la fiction ait son plein rendement, la « chose représentante », loin d'oblitérer la « chose représentée », doit s'effacer devant elle, et la désigner sans l'opacifier. Telle est la condition *sine qua non* pour que le procès qui se joue *autour* de l'École ne voie comparaître l'École qu'à titre de témoin, et de victime peut-être ; pour que le savoir enseigné ne fasse figure d'accusé. Voilà pourquoi la « distance » doit être assez courte, et la « ressemblance » suffisamment bonne. Pour que, voyant le savoir enseigné, on ne voie à travers lui que le savoir *à enseigner*. Pour que le savoir *enseigné* fonctionne comme signe pur, qui renvoie *immédiatement*, sans vacillation, au savoir *à enseigner*. Pour qu'en lui, la chose représentante s'abolisse comme chose ¹².

5. LE MIRACLE TRANSPOSITIF

Pourquoi, demandera-t-on peut-être, toute cette mise en scène ? Pourquoi cet évitement entêté du savoir enseigné ? Tout simplement parce que, si on allait y regarder de trop près, *tout* projet social d'enseignement serait voué à l'échec. Ou encore, positivement : parce qu'alors la transposition didactique ne pourrait accomplir presque aucun des « miracles » qu'elle réalise pourtant comme par routine. Nous sommes tout près, ici, de la question de la ressemblance. Il y a bien un miracle de la transposition didactique. Soit par exemple la théorie des ensembles. Elle émerge entre les mains de Cantor au début des années 1870, alors qu'il travaille sur des questions difficiles touchant aux séries de Fourier ; se heurte d'abord – trop longtemps, à l'échelle d'une vie humaine – à l'incrédulité, voire à l'hostilité de quelques-uns des mathématiciens les plus influents (au nombre desquels il faut citer au moins Leopold Kronecker, Felix Klein, Henri Poincaré et Hermann Weyl) ; parvient à se faire partiellement reconnaître alors qu'approche la fin du siècle (le premier Congrès international des mathématiciens, tenu à Zurich en 1897, lui assure un début de respectabilité) ; puis, dans les décennies qui suivent, s'installe lentement, mais définitivement, dans l'univers mathématique. Zermelo en donne bientôt une formalisation à laquelle, ensuite, Fraenkel ajoutera son nom, et sur quoi nous vivons encore. En 1926, Hilbert, la plus haute figure du monde mathématique depuis la mort, en 1912, d'un Poincaré jusqu'au bout dubitatif, la consacre quasi officiellement : « Personne, écrit-il alors, ne nous chassera du paradis que Cantor a créé pour nous. »

Or voici que tout à coup, moins d'un demi-siècle plus tard, le bruit court que la « théorie des ensembles » s'enseigne dès l'école primaire ; que la reconstruction de l'édifice mathématique, dont elle avait été l'instrument entre les mains des savants, se réalise *dans l'École même*. Elle avait fourni un *nouveau fondement* aux mathématiques ; elle nous est alors présentée comme la *base* d'une nouvelle éducation mathématique. Son empire s'étend en écho, hors de l'École,

¹² Sur les notions qui soutiennent cette analyse, voir Récanati 1979, notamment pp. 31-34.

et change la culture ¹³ : « La théorie élémentaire des ensembles, pourra-t-on lire, fait partie du bagage culturel minimal de l'homme contemporain. » Le « miracle » s'est produit.

Ce miracle est-il singulier, et presque unique de son espèce ? Nullement. Il est la loi du genre. L'histoire, en ces affaires, indéfiniment se répète. En 1975, Benoît Mandelbrot introduit un mot nouveau dans le langage de la tribu mathématique et de ses commensaux : *fractale*. Il prend même la peine d'en donner une définition (dont, au demeurant, il reviendra bientôt) : un ensemble, partie d'un espace métrique séparable, est dit *fractal* si sa dimension de Hausdorff-Besicovitch est strictement supérieure à sa dimension topologique. Cette définition vous impressionne ? Vous n'avez peut-être pas tout à fait tort. Mais ne doutez pas, pourtant, que la transposition didactique puisse, ici comme ailleurs, faire merveille. Ne soyez pas surpris si, demain, les fractales se mettent à vivre à l'école *primaire* ; si votre enfant vous dit un jour, comme si de rien n'était : « Qu'est-ce qu'on a fait aujourd'hui ? Ben... on a fait des fractales ! ». Sans doute, LOGO aidant, y apparaissent-elles déjà, erratiquement, dès aujourd'hui.

Les exemples proposés jusqu'ici semblent avoir ceci de limitatif qu'ils se réfèrent à certains des « hauts faits », réels ou virtuels, du processus de transposition didactique. Ils ne font cependant qu'illustrer, d'une manière plus spectaculaire, la fonction essentielle de la transposition didactique : *accomplir des miracles*. Car il nous faut apprendre à voir que ce qui pour nous va de soi *tient en fait du prodige*. Considérez ainsi l'enseignement d'une langue étrangère – de l'anglais par exemple. Prenez des commençants, élèves de sixième. Voici venue la fin du premier trimestre. Que savent-ils de cette langue ? Un peu de vocabulaire sans doute, et quelques structures syntaxiques simples peut-être. Pourtant, de même qu'il y a de bons et de moins bons anglicistes, il y aura de bons et de moins bons élèves en anglais. En cette fin de premier trimestre, et alors même qu'on est encore fort loin de pouvoir échanger même quelques mots en cette langue, *on pourra être déclaré « bon en anglais » !*

L'exemple, cette fois, est générique. Quel subtil trébuchet permet donc de marquer des différences là où, observateurs profanes, nous ne verrions même rien à soupeser ? Le miracle s'accomplit, mais il garde ses mystères. Les assistants retiennent leur souffle, ou bien tournent ailleurs leurs regards. La sagesse commande qu'on n'y aille pas voir. Pas de trop près du moins. Telle est l'une des conditions de possibilité de toute transposition didactique. La Société a, en général (mais non toujours), le tact qui convient. Le contrôle épistémologique qu'elle exerce suit un plan de progressif *désintéressement*. « Leur enseigne-t-on encore les nombres complexes ? », demande l'ingénieur, nostalgique de ses jeunes années et, avec cela, soupçonneux, à l'enseignant d'une de nos actuelles classes de terminale C. « Bien sûr ! », s'entend-il répondre. « Et leurs applications à la géométrie ? » « Certainement. » « Ah, très bien !... » Voilà l'affaire jugée. Voilà notre homme *désintéressé*, et sa créance sur l'École, annulée. L'inspection, le contrôle social, se font ainsi, parfois, simple formalité. Il ne serait pas réaliste, il pourrait être criminel d'insister. L'enchantement est à ce prix.

6. LA RESSEMBLANCE ET LE LEXIQUE

Une deuxième question peut maintenant être abordée : en quoi consiste la ressemblance que mesurerait la distance entre savoir enseigné et savoir à enseigner ? Réponse : cette ressemblance, qui est le but des « manœuvres transpositives », et qui fonde le jugement de conformité du savoir enseigné au savoir à enseigner, ne peut être qu'assez grossièrement mesurée ; elle s'évalue à la présence de certains *emblèmes*, et d'abord d'un certain *lexique* – si

¹³ Verley 1985, p. 1148.

l'on donne à ce mot une acception étendue, qui inclue au plus large formalismes et graphismes. Ce langage partagé, sans doute, n'est pas tout ; mais il commande la négociation. Il est utile autant par ce qu'il permet d'évoquer que par les limites qu'il impose bien vite à l'investigation indiscreète. C'est par son truchement, en effet, qu'on pourra orienter l'interrogatoire, montrer ce que l'on souhaite faire voir, dissimuler ce qu'il serait inopportun d'exposer. Dispositif transactionnel, il dévoile et en même temps opacifie.

Reprenons ici l'exemple abandonné un peu plus haut. Prolongeons-le ; poursuivons l'interrogatoire. Revoici donc notre ingénieur, et qui s'entête : « Ah, très bien ! Donc vous enseignez les applications des nombres complexes à la géométrie... Traitez-vous les similitudes par ce moyen ? » Son interlocuteur est ici tout à fait à l'aise : les similitudes ne sont-elles pas le couronnement de l'étude ? Mais le questionneur insiste : « Les similitudes... Les similitudes inverses aussi ? » Notre professeur est embarrassé, et contraint à une réponse ondoyante : oui ; sans doute ; enfin, certainement ! Tout à coup, en vérité, il n'est à vrai dire plus sûr de rien. Heureusement, je l'ai noté, il est douteux qu'on en arrive là. L'inquisition, pourtant, pourrait-elle se poursuivre ? Notre enseignant, pour l'heure, pêche surtout par omission. Les similitudes inverses, après tout, ne sont peut-être pas totalement absentes de sa classe. Imaginons-le du moins, même si programmes et manuels ne laissent guère de doute à cet égard. Mais il ne faudrait pas que l'investigateur s'entête.

Comment le pourrait-il ? Les mots, jusqu'ici, lui arrivaient aisément : « applications géométriques », « similitudes », « similitudes directes », « similitudes inverses ». Comment aller plus profond dans la vie mathématique de la classe ? Il faudrait, pour cela, aller au-delà du simple lexique, et, pénétrant dans la chair même de l'activité de la classe, il conviendrait d'examiner les *types de problèmes* qui y vivent, ou n'y vivent pas. Donnons une dernière fois la parole à notre obstiné curieux : « Je me souviens d'un problème... Qu'est-ce que c'était déjà ? Ah, voilà ! On a deux figures inversement semblables, deux points homologues A et A' , et deux droites homologues D et D' passant par A et A' ; et il fallait trouver le lieu géométrique de leur intersection quand elles variaient... Vous leur faites ça ? » L'enseignant, devant ce nouveau coup, doit biaiser : « Des choses comme ça... Oui. » Mais cette fois, *il ment*. On ne peut en douter.

Ment-il tout à fait pourtant ? La question était directe ; sa réponse est beaucoup plus floue : *Des choses comme ça...* Seule chance pour lui d'échapper encore à l'imposture ! Car ce flou, à vrai dire, se justifierait presque. C'est qu'en effet les mots, en cette étape de l'enquête, *ne sont même plus partagés*. Il y a belle lurette qu'on ne parle plus – ainsi que le firent les enseignants presque un siècle durant¹⁴ – de « figures inversement semblables » quand on pourrait parler, tout de go, de similitudes inverses – ce dont, au demeurant, on ne parle pas non plus ! Et l'enseignant peut alors, à bon droit, feindre de ne pas comprendre tout à fait (mais d'ailleurs comprend-il vraiment ?). Ou plutôt, il peut prétendre dénoncer, par le flou de sa réponse, l'imprécision de la question : une imprécision que le questionneur n'y avait pas mise. Le « contrôle social » s'achève ainsi dans un jeu de dupes.

La réalité cependant est autre : on ne rencontre guère, on ne rencontre pas, aujourd'hui, dans notre enseignement secondaire, de similitudes inverses. Mais l'enquêteur, pour aboutir sur ce point, devrait ici s'armer d'un autre langage, et procéder autrement que par simple interrogatoire. Car – servitude du métier ! – les enseignants, lorsqu'ils sont ainsi traqués, deviennent souvent de terribles, d'effrontés menteurs, qui s'ignorent comme tels. On pourra le comprendre : ainsi défendent-ils, à leur insu, le produit d'un difficile travail transpositif.

¹⁴ L'énoncé précédent est emprunté à Deltheil et Caire 1951, p. 39.

Produit toujours imparfait à leurs yeux mêmes, mais dont ils sont les servants. Et qui a surtout l'immense mérite d'exister.

7. VERS LA RESSEMBLANCE

Le contrôle social sur la chose enseignée ne passe pas seulement, bien sûr, par ces rencontres de hasard que l'exemple précédent illustre. Il est le fruit de mille interactions, dont la plupart resteront, à cet égard, infécondes. Mais son verdict est porté comme une rumeur à travers le corps social. Et il arrive un jour qu'un murmure contestataire s'enfle jusqu'à ne plus pouvoir être ignoré. Le curriculum, tout à coup, perd de sa crédibilité. La matière enseignée, brusquement, est frappée d'obsolescence. Les négociations doivent être rouvertes. La noosphère, qui ronronnait, en un instant se réveille. Les noosphériens entrent en lice, accourant des deux côtés à la fois. De l'intérieur du système d'enseignement : c'est la masse des anonymes, que le grand public, sauf exception, ignore. De l'extérieur aussi, je veux dire de la sphère savante : et c'est la rare élite de ceux qui, ayant assez de légitimité pour cela, osent proposer un nouveau contrat, et prétendent montrer la voie de la réconciliation entre École et Société. Ceux-là exercent à proprement parler une fonction de *leadership*. Notons-le en passant : la période actuelle souffre d'un manque sévère de *leadership* – pour les mathématiques comme, semble-t-il, pour nombre d'autres disciplines ; et les négociations, alors, deviennent interminables, rampantes, chroniques. C'est pourquoi d'ailleurs je choisirai ici, en guise d'illustration, un épisode un peu ancien, dont les effets didactiques sont toutefois très actuels.

Il faut, pour cela, remonter à l'année 1968. L'enseignement des mathématiques est alors à la veille d'un profond bouleversement. Mais la réforme des mathématiques modernes – c'est bien sûr d'elle qu'il s'agit – n'aura qu'un temps. Années baroques, magiques, irréelles, à quoi succède, moins de deux lustres plus tard, le style nouille et les mièvreries pédagogiques de la Contre-réforme. La crise, sans doute, est profonde. Et, aussi radicale soit-elle, la Réforme, qui fait exploser l'ancien monde, ne parvient pas à re-stabiliser le curriculum ; lequel, à partir de là, ne cessera plus de bouger, périodiquement, jusqu'à nos jours. Aussi, souterrainement, dans le temps même où la Réforme s'impose, les changements futurs se préparent. Quelques-uns des plus ardents réformateurs œuvrent déjà – le savent-ils alors ? – pour des temps encore à venir.

Soit ainsi l'enseignement de l'analyse prodigué, au Lycée, dans les classes de mathématiques. Voici qu'en 1968 exactement, au plus fort de l'épopée moderniste, un gros livre paraît, sous un titre ascétique – *Calcul infinitésimal* –, que signe Jean Dieudonné. L'homme, autant que le mathématicien, est incontournable dans le monde des mathématiques françaises. Noosphérien occasionnel mais véhément, il s'est fait entendre, quatre ans auparavant, sur le thème de la géométrie élémentaire¹⁵. Les quelque 450 pages de mathématiques qu'il publie cette fois sont destinées, nous dit-on, aux étudiants des deux premières années d'Université. De fait, à peu près *rien* de ce qu'elles contiennent n'appartient à l'univers familier des professeurs des lycées. Elles sont précédées d'une courte préface, forte et incisive, bien dans la manière de l'auteur. La querelle des « mathématiques modernes » et des « mathématiques classiques » – dont Dieudonné affirme l'inanité – en est l'arrière-plan obligé. Et c'est alors que se produit un événement dont l'écho se fait entendre jusqu'à aujourd'hui.

L'un des emblèmes traditionnels de l'analyse, on le sait, c'est le « calcul ». Le praticien de l'analyse *calcule* (des intégrales, des séries, etc.). « Il faut donc, écrit l'auteur, “savoir

¹⁵ Dieudonné 1964.

calculer”, avant que de prétendre accéder à l’Analyse moderne. » Mais, se demande-t-il alors, « qu’est-ce que calculer ? ». Question d’apparence anodine, qui va pourtant tout changer. C’est en ce point, en effet, que s’introduit un léger *clinamen*, qui modifie brusquement les conditions de la négociation. Sur la page suivante, en milieu de page, et en gros caractères, s’étalent trois mots nouveaux, trois mots magiques, qui vont devenir emblématiques ¹⁶ :

MAJORER, MINORER, APPROCHER

« Savoir calculer », en analyse, c’est – résume Dieudonné – savoir « majorer, minorer, approcher ». Le mot d’ordre est lancé. Il va faire son chemin à travers la noosphère.

Cheminement souterrain. La résurgence se fait dans le programme arrêté pour les nouvelles classes de seconde, dites secondes de détermination, le 26 janvier 1981, avec effet à la rentrée : 1968-1981, le délai entre l’ébranlement initial et l’*aggiornamento* scolaire est ici remarquablement court ¹⁷. Le programme rénové comporte, à titre de thèmes d’étude, la *majoration* et la *minoration* « d’une fonction sur un intervalle », ainsi que l’étude du problème « d’*approximation* locale par une fonction affine », et l’utilisation « de *majorations* dans le calcul approché des valeurs d’une fonction et le calcul d’erreurs » ¹⁸. Les élèves, indique-t-on, devront être entraînés « à trouver des conditions suffisantes pour la mise en place d’une majoration ». Majoration, minoration, approximation. Les mots emblèmes sont tous là. Les nouveaux lycéens vont majorer, minorer, approcher. Et leurs professeurs avec eux. L’enseignement de l’analyse recherchera une plus grande légitimité épistémologique en se parant de ces trois plumes prises au monde savant. Les dés ont été jetés. Le pari a été pris.

Ce pari ne va pas sans risques. Mais il en est *toujours* ainsi. Sans doute le nouveau mot d’ordre est loin d’être arbitraire : Dieudonné, plus attentif que d’autres mathématiciens aux choses de l’enseignement, l’a seulement articulé plus fort, et plus distinctement aussi. Il en fait, à son insu peut-être, *l’ingrédient essentiel de la nouvelle ressemblance*. Pour les noosphériens, qui ont en charge le devenir du système d’enseignement, c’est là une aubaine. Négociateurs intuitifs, ils saisissent la chance qui s’offre à eux, affectent de voir en Dieudonné un interlocuteur légitime, feignent de le croire muni des pleins pouvoirs, et, selon une technique toute traditionnelle, adoptent son point de vue comme incontestable. L’histoire, répète la sagesse populaire, ne repasse pas deux fois les plats ; et ce n’est pas tous les jours qu’on se refait une légitimité avec trois petits mots. Dans un premier temps, d’ailleurs, cette naïve stratégie s’avoue sans façon. Tel manuel d’analyse pour les classes de terminales Cet E, fleurons du Lycée, mentionne encore, en 1983, quoique sous une forme semi-légendaire, et sibylline sans doute pour beaucoup de lecteurs, l’origine du nouveau mot d’ordre ¹⁹. L’un de ses chapitres – le neuvième – s’ouvre par une section intitulée, précisément, *Majorer, minorer, encadrer*. Les auteurs écrivent ²⁰ : « La résolution de nombreux problèmes d’analyse passe par des majorations, des minoration, des encadrements de nombres, de suites ou de fonctions. » Notons, en passant, la substitution terminologique : *approcher* est remplacé par *encadrer*. Or « encadrer », « encadrement » sont des mots qu’ignore la langue mathématique savante : créations lexicales endogènes, que les programmes ont rendu familières aux professeurs, ils attestent le travail accompli dans la noosphère à partir de l’original savant. L’infidélité est significative ; mais elle se dissimule aussitôt derrière l’aveu d’allégeance, qui

¹⁶ Dieudonné 1968, p. 9.

¹⁷ Voir le *Bulletin officiel de l’Éducation nationale* daté du 5 mars 1981.

¹⁸ C’est moi qui souligne – Y.C.

¹⁹ Gautier, Royer et Thierce 1983. Je remercie Jacques Tonnelle d’avoir attiré mon attention sur ce point.

²⁰ *Op. cit.*, p. 247.

trouve sa place en une note infrapaginale appendue au titre de la section, et se formule dans les termes d'un humour bon enfant²¹ :

« *C'est ainsi que Dieu a donné la définition de l'analyse* » comme a pu le dire Jean Dieudonné, mathématicien contemporain de renom.

Le bon mot, dont la paternité est douteuse, permet d'allier subtilement le léger et le grave. D'un côté, on se légitime par la référence à un « mathématicien contemporain de renom ». De l'autre, par une plaisanterie de potache, on tire sa révérence, tout en rendant hommage. Ultime écho d'une histoire qui s'achève en s'annulant. Car désormais une telle référence deviendra inutile, et à vrai dire presque impensable. La matière enseignée, ses divisions, ses emblèmes anciens et nouveaux, sont naturalisés. Et le curriculum retrouve son apparence familière, qui anonyme ses producteurs. Quand, du moins, l'entreprise réussit.

8. EFFETS PERVERS

La ressemblance, pourtant, ne se décrète pas. La recherche de la ressemblance, qui est la « quadrature du cercle » de la noosphère, est chose aventureuse. On peut... l'approcher, on ne saurait l'atteindre exactement. L'investiture épistémologique qu'il s'agit d'obtenir, pour un temps au moins, n'est jamais tout à fait acquise. Car la puissance d'investiture ne saurait ici être unique et souveraine. Ses arrêts eux-mêmes sont incertains. Vous croyez accomplir ses volontés, elle vous dénonce ! Au demeurant, ce que l'un accorde aujourd'hui, un autre demain le refusera. Le débat est cacophonique. Le risque de dissonance est de tous les instants.

Ce n'est pas tout. N'est pas mime qui veut. Le système d'enseignement n'a pas toujours les moyens d'assumer la ressemblance un instant entrevue. Le programme de 1981 est ainsi retouché en cours d'année. C'est qu'il se voulait trop naïvement fidèle à un original encore trop proche : la distance qu'il crée *est trop courte*. La transplantation opérée a méconnu trop de facteurs contraires. Les changements qu'il suppose – implicitement mais, si l'on peut dire, mécaniquement – sont trop profonds. Les perturbations qu'il engendre risquent de faire implorer l'écosystème où on prétend l'introduire. Rien ici n'est anodin. Rien ne va de soi. Tout désir de transposition rencontre ainsi *l'ordre didactique*, je veux dire *les lois de l'écologie didactique du savoir*. Il arrive même que l'effet contraire à celui recherché soit obtenu. À trop viser la ressemblance, *on engendre de la dissemblance*.

Revenons ici au thème majorer-minorer-approcher et examinons, ne serait-ce qu'un instant, l'obstacle qui s'élève devant le désir de mimétisme auquel la noosphère a cru pouvoir succomber. Reprenons l'ouvrage de Dieudonné. Passé le chapitre 0 (*Préliminaires*), qui comporte quelque douze pages fort denses, s'ouvre le chapitre 1 : *Majorer, minorer*. Ce chapitre couvre lui-même dix-huit pages bourrées de résultats (dont certains sont refoulés dans la section des problèmes). Au début de la huitième page, l'auteur écrit²² :

De l'inégalité (3.1.1) découle le procédé *le plus important de l'Analyse* pour obtenir des majorations et des minoration, le *théorème de la moyenne*...

Or l'élève de lycée ne rencontrera ce théorème qu'à la fin de ses études mathématiques. Si, du moins, il suit le cursus des études scientifiques. Mais alors comment faire vivre, *dès la classe de seconde au moins*, un type d'activité dont l'outil principal restera aussi tardivement inaccessible ?

²¹ *Ibid.*

²² *Op. cit.*, p. 42.

Insistons. Ouvrons maintenant un ouvrage que ses auteurs destinent (avec, sans doute, quelque irréalisme) aux deux premières années des études scientifiques qui suivent le baccalauréat : je veux parler du livre que signent en 1983 Jean-Louis Ovaert et Jean-Luc Verley, et qu'ils intitulent sobrement *Analyse vol. 1* ²³. L'emblème apparaît explicitement deux fois dans le sommaire : au chapitre III (*Comportement global et local des fonctions*), dont la section A s'intitule précisément *Majorations, minoration, encadrements* ; puis au chapitre V (*Interventions du calcul différentiel*), section A encore : *Obtention de majorations et d'encadrements*. Citons, presque au hasard ²⁴ :

Les majorations jouent encore un rôle essentiel dans les problèmes de convergence et d'évaluation asymptotiques d'intégrales et de séries (...), dans les problèmes d'analyse fonctionnelle...

Et encore ²⁵ :

Les méthodes d'obtention de majorations sont très variées. Nous traitons ici des méthodes élémentaires. Nous approfondirons celles qui s'appuient sur le calcul différentiel et la convexité (...) au chapitre 5. La technique très importante des *passages aux bornes supérieures et inférieures dans les inégalités* est esquissée dans les exercices...

« Méthodes élémentaires ». Sans doute. Mais aucune pourtant qui s'intègre *immédiatement* dans l'enseignement des classes de seconde, où *aucun* des outils présentés (inégalités de Cauchy-Schwarz et de la moyenne géométrique, considération des bornes supérieures et inférieures de fonctions continues, etc.) n'est encore disponible ! Le spectacle est le même, à cet égard, en tel autre ouvrage, pour le premier cycle des universités encore, mais de plus modeste ambition ²⁶. Son dernier chapitre, au titre emblématique : *Majorer, minorer*, et qui constitue à lui seul une des parties de l'ouvrage, contraste tout autant avec le paysage mathématique de l'enseignement des lycées. Comment alors faire vivre au Lycée une pratique (majorer, minorer, encadrer) dont l'écologie « naturelle », savante ou universitaire, est *a priori* toute différente ? Tel est le problème transpositif posé : celui de la construction d'un écosystème « artificiel », qui rende viable la pratique visée.

On peut croire que tout problème de transposition didactique a sa solution. La construction d'un artefact didactique ne va pourtant pas de soi. De ce point de vue, la naïveté ou, si l'on veut, la foi qui soulève les montagnes est la force essentielle des novateurs en matière curriculaire. La chose vaut d'autant plus d'être soulignée ici que l'artisan *principal* de la réforme de 1981 n'est autre que l'un des auteurs cités plus haut, et qui sait fort bien, au plan mathématique, à quoi s'en tenir ²⁷. Est-il possible de majorer, de minorer et d'encadrer *en classe de seconde* ? Le miracle, encore une fois, va-t-il s'accomplir ? Oui, sans doute. Les programmes réformés, les manuels, et la vie concrète des classes à partir de 1981 en portent témoignage. Mais, si je puis dire, il ne s'agit là *que d'un miracle*, dont on peut toujours craindre qu'il ne soit qu'illusion. En l'espèce, les craintes vont se révéler fondées.

Comment faire, en effet, pour majorer, quand on est élève de lycée ? Les outils manquent. Du moins ne peut-on réunir, en cette étape de la formation mathématique, que quelques outils très *élémentaires*. Le caractère élémentaire du matériel mathématique disponible est, bien sûr, toujours *relatif*. Mais le travail transpositif prend ainsi, presque toujours, la forme consciente, délibérée, d'une opération d'*élémentarisation*. Or, parler d'élémentarisation, soit d'une opération regardée culturellement comme essentiellement *anodine*, c'est précisément *nier* les

²³ Ovaert et Verley 1983.

²⁴ *Op. cit.*, p. 76.

²⁵ *Ibid.*, pp. 76-77.

²⁶ Délédicq et Fluet 1982, pp. 233-241.

²⁷ Il s'agit de Jean-Louis Ovaert.

phénomènes de transposition didactique et le changement *radical* qu'ils réalisent du point de vue de l'écologie du savoir. Cette dénégation doit être payée à son prix. Je m'écarte un instant de mon sujet pour faire entendre ce point.

L'élémentarisation n'est en fait pas toujours possible. Faisons l'expérience mentale suivante : supposons une théorie mathématique constituée axiomatiquement, et qu'il s'agit d'élémentariser. Supposons en outre que, dans sa version savante (supposée unique, pour simplifier), cette théorie comporte une vingtaine d'axiomes – ce qui est le cas par exemple de l'axiomatique hilbertienne de la géométrie euclidienne²⁸. Pour l'élémentariser, on voudra alors, en particulier, *réduire le nombre d'axiomes*. Mais si l'on s'avise pour cela de *supprimer* quelques-uns des axiomes formant l'axiomatique savante de départ, on perd l'idée même d'axiomatique : ensemble d'énoncés d'où se déduisent *tous* les théorèmes de la théorie considérée²⁹.

Ce n'est pas que l'on n'aboutisse par là à rien de significatif – notamment au plan *didactique*. Considérons ainsi tel ouvrage de géométrie élémentaire destiné aux *high schools* américaines et intitulé tout bonnement : *Geometry – A High School Course*³⁰. Les auteurs – c'est là un trait qui explique notre choix – en sont un enseignant praticien (Gene Murrow) et un éminent mathématicien américain d'origine française, Serge Lang. L'ouvrage bénéficie donc en principe d'un fort contrôle « savant ». L'exposé proposé se développe en prenant appui sur deux piliers, distincts mais solidaires : l'exploration « expérimentale » des phénomènes géométriques, d'une part ; l'énoncé d'axiomes formant l'infrastructure de la théorie géométrique dégagée, d'autre part. Les axiomes, au nombre de douze, simples et intuitifs, sont introduits progressivement, à l'instar des « expériences graphiques » qui les motivent. Pourtant l'axiomatique ainsi constituée est *mathématiquement non satisfaisante*. Non pas bien sûr parce qu'elle ne comporte que douze axiomes ! Simplement parce que, se référant – comme c'est encore l'usage dans notre enseignement secondaire – à une version très anciennement transposée d'une théorie savante mathématiquement dépassée (soit, essentiellement, le « corpus » géométrique euclidien), elle ignore tout un ensemble de théorèmes – constituant ce qu'on nomme aujourd'hui la *géométrie de l'ordre*³¹ – que la tradition euclidienne n'avait pas enregistrés comme tels, jusqu'à ce que des mathématiciens de la fin du siècle dernier (dont Hilbert), dénonçant cette bévue historique, l'annulent en produisant une axiomatique dûment « complétée ».

Mathématiquement insuffisante, la construction proposée par Lang et Murrow n'est pas pour cela didactiquement inintéressante. Elle fournit des moyens substantiels en vue de l'initiation à ce qui est un élément crucial de toute éducation scientifique : le jeu entre *l'expérimentation*, qui suggère les hypothèses (les axiomes) constituant le *modèle* de la réalité étudiée, l'élaboration de ce modèle (la formulation et l'organisation des axiomes), et le « travail du modèle », qui permet, déductivement, d'enrichir sa connaissance de la réalité visée par la démonstration de *théorèmes*.

Mais cette construction ne saurait pourtant être regardée comme valide du point de vue, certes *très partiel*, de la notion d'axiomatique. Viable dans les conditions ordinaires de l'enseignement secondaire – lequel « bénéficie », en matière de géométrie, d'une formidable

²⁸ Voir Hilbert 1899.

²⁹ Si du moins, bien entendu, les axiomes de départ formaient un ensemble d'énoncés *indépendants*.

³⁰ Lang et Murrow 1983.

³¹ L'expression « géométrie de l'ordre » est due à Emil Artin ; les travaux pionniers sur ce thème sont ceux de Moritz Pasch (1882). Voir par exemple Coxeter 1961.

inertie culturelle à vertu pérennisante –, elle serait balayée si la notion moderne d'axiomatique venait à être mise au premier rang des préoccupations noosphériques. Ainsi en alla-t-il, on le sait, dans la période qui précéda la réforme des mathématiques modernes.

Celle-ci fit disparaître brutalement les constructions traditionnelles jusqu'alors en usage, en même temps qu'elle dut se nourrir d'élaborations inédites, axiomatiquement impeccables, qui supposaient chez leurs créateurs un vrai talent de mathématicien en même temps qu'une attention approfondie à un certain nombre au moins de contraintes didactiques. C'est ainsi par exemple que, en marge de ses travaux savants, Gustave Choquet était intervenu dans la noosphère au début des années soixante : son livre, *L'enseignement de la géométrie*³², est essentiellement l'exposé d'une telle axiomatique, augmentée de diverses variantes satisfaisant à certains ensembles de contraintes spécifiques.

Dans tous les cas, on l'imagine, un tel travail touche à *la substance même du savoir à transposer*. Mais je reviens maintenant à la question dont nous sommes partis. Rappelons d'abord que la volonté d'introduire, dans l'enseignement secondaire, majorations, minoration et approximations (ou plutôt « encadrements ») procédait du désir – plus ou moins impensé – de faire diminuer la distance entre savoir savant et savoir enseigné en augmentant la *ressemblance* du second au premier. En quoi, dans ce cas, le processus d'élémentarisation posait-il problème ? Prenons l'exemple de la majoration : les outils pour ce faire, on l'a dit, sont de faible puissance. Illustrons-en l'usage. Soit à étudier la suite de terme général $\frac{n-2}{n^2+1}$.

On majore une fraction rapport de deux expressions positives en majorant son numérateur et en minorant son dénominateur. On aura donc ici : $\frac{n-2}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. On conclura de là, par

exemple, que la suite étudiée, qui est majorée par la suite de terme général $\frac{1}{n}$ (dont on sait par

ailleurs qu'elle converge vers 0), converge elle-même vers 0. Fort bien. L'outil mis en œuvre (majorer le numérateur, minorer le dénominateur) permet tout aussi facilement de régler le cas de suites dont le terme général a une allure bien plus complexe. Par exemple on aura $\frac{n^2-5}{3n^4+7} <$

$\frac{n^2}{3n^4} = \frac{1}{3n^2}$. Tout cela est bel et bon. Mais voici alors où surgit le problème : il suffit d'un

infime changement, insignifiant *aux yeux du mathématicien*, pour que cette technique de majoration perde son efficacité. Il suffit par exemple de passer de $\frac{n-2}{n^2+1}$ à $\frac{n+2}{n^2-1}$ pour qu'elle devienne inopérante, sauf à compliquer beaucoup les majorations et minoration opérées.

Ainsi pourrait-on écrire, du moins pour $n > 1$: $\frac{n+2}{n^2-1} = \frac{n+2n}{n^2-\frac{n^2}{2}} = \frac{3n}{\frac{n^2}{2}} = \frac{6}{n}$. Mais cette manière de

faire suppose un « doigté » que, dans la période considérée, on n'ose pas requérir de l'élève. L'aurait-on fait que l'on se serait de toute façon éloigné de la pratique du mathématicien, lequel procède tout autrement, parce qu'à ses yeux les deux expressions $\frac{n-2}{n^2+1}$ et $\frac{n+2}{n^2-1}$ sont essentiellement (c'est-à-dire, en l'espèce, asymptotiquement) *la même chose* – toutes deux, en effet, étant équivalentes à $\frac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini. Conséquence : la transposition

³² Choquet 1964.

didactique crée ainsi une différence presque absolue là où le savoir savant continue de reconnaître une quasi-identité...

Ainsi, selon un paradoxe qui n'est qu'apparent, le geste transpositif qui devait produire de la ressemblance engendre, de manière imprévue mais non improbable, *de la dissemblance*. L'opération de charme a manqué son but. Au fil des années, les professeurs – qui, en ces matières, ne voient que d'un œil peut-être, mais ne sont pas tout à fait aveugles –, en tireront les conclusions pratiques. Et on abandonnera progressivement, dans la vie concrète de la classe, un type d'activité qui n'aura pas su tenir ses promesses. Il ne suffit pas de bonne volonté pour renouer le pacte social.

9. UNE THÉORIE, DITES-VOUS ?

La problématique de la transposition didactique s'est développée à propos de l'enseignement général du second degré, en partant d'une discipline *a priori* bien particulière (les mathématiques), examinée en une période critique de son histoire de discipline enseignée (la réforme des mathématiques modernes). Ces circonstances ont pu faire douter de la généralité des propositions avancées ; ou plutôt, pour parler en termes dynamiques, de leur *généralisabilité*.

Une première difficulté, à cet égard, tenait sans doute à l'apparence simplificatrice du cadre théorique présenté. Le scénario proposé mettait en scène deux personnages principaux, dont on se bornait, sans autre précision, à considérer la « distance » qui est entre eux, distance dont un troisième personnage, sorti de nulle part, s'occupait non sans déboires à contrôler les variations. Tous trois, au demeurant, se voyaient affublés de noms ou inconnus (la « noosphère »), ou inutiles (le « savoir enseigné »), ou ambigus et prétentieux (le savoir « savant »). Pouvait-on, avec cela, attendre quoi que ce soit de neuf et de vrai ?

La réponse à cette interrogation est contenue dans un mot, celui de théorie. Ce qui était proposé, avec la mise en évidence des *phénomènes* de transposition didactique, se voulait bien une *théorie* de ces phénomènes. Mais encore fallait-il s'entendre sur le mot, et sur la chose à laquelle il renvoie. Une théorie, je l'ai noté, n'est pas une *description*, une *image* plus ou moins imparfaite de la réalité théorisée³³. Ce n'est qu'une *machine à produire des connaissances d'un certain type* à propos de la réalité soumise à la question. D'où ce paradoxe, sur lequel achoppe le sens commun, mais que toute l'histoire des sciences confirme : la réalité étudiée peut nous paraître fort complexe et se laisser prendre pourtant au piège d'une théorie *rudimentaire*. Si je commence à théoriser la géométrie de l'espace ordinaire en posant l'axiome que *par deux points distincts il passe une droite et une seule*, j'ai déjà une petite machine à connaissances, qui me permet notamment d'établir que *deux droites distinctes se coupent en un point au plus*³⁴.

L'exemple précédent vaut d'être poursuivi un instant. Tout d'abord, si pauvre soit-elle (elle ne comporte qu'un axiome !), ma théorie géométrique des droites me permet de produire des connaissances à leur endroit. C'est là un aspect fondamental de toute *pratique théorique*, et qu'il faut constamment garder à l'esprit. Mais surtout, il serait vain d'espérer obtenir, en rajoutant « suffisamment » d'axiomes, une « image théorique » *parfaite* de ce *qu'est* une droite, c'est-à-dire de ce que *je perçois* comme étant une droite. Aucune axiomatique n'y pourrait suffire, quel qu'en soit le nombre d'axiomes ! Pourquoi cela ? Considérez une

³³ Sur ce thème, voir Chevallard 1992.

³⁴ Sinon, ayant au moins deux points distincts communs, les « deux » droites seraient en fait *la même droite*.

supposée « bonne » axiomatique, celle de Hilbert, ou celle de Choquet, ou toute autre que vous voudrez. Cette axiomatique ne vous permettra pas de *caractériser* la famille des droites du plan. Autrement dit, *d'autres familles de parties du plan la satisferont aussi*. Il suffira pour s'en convaincre de considérer la famille des « courbes » qui sont les transformées des droites (usuelles) par une *bijection* quelconque du plan, $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$. Cette famille de parties du plan aura *exactement les mêmes propriétés* que les droites usuelles (par deux points distincts il ne passera qu'une courbe de la famille, etc.). En prenant par exemple $x' = x^{1/3}$ et $y' = y$, vous obtiendrez une famille de *cubiques*³⁵ qui auront toutes les propriétés des droites que votre théorie vous permet d'envisager. Sauf, bien sûr, le fait d'être « droites » (rectilignes), au sens usuel du terme...

L'exemple précédent illustre à merveille, je crois, une donnée de base de toute activité scientifique. La science, avec ses théories et ses modèles, ne recrée pas le monde. Comme toute activité humaine, elle ne fait que lui *ajouter des objets*. Et cela, spécifiquement, pour tenter de *comprendre le monde*. La méditation de cet axiome aurait permis sans doute de faire tomber l'accusation de manque de réalisme que l'on formula quelquefois. Où étaient, dans le tableau que je brossais, me demanda-t-on un jour, les inspecteurs généraux ? Bien entendu, je n'avais nullement prétendu brosser quelque « tableau » que ce soit !

Il est vrai que cette difficulté à comprendre la nature du travail de théorisation se mêlait à quelques autres. À considérer cette fois le *contenu* de ce que j'avais avancé, d'autres interrogations pouvaient surgir. Qu'il puisse s'agir, formellement, d'une théorie, et que cette théorie ne soit en vérité qu'une *première* théorie, et pour cela quelque peu fruste, soit ! Mais cette théorie en était-elle bien une ? S'imposait-elle de rendre raison de ce qui est ? Ou bien exprimait-elle, obliquement, ce que l'on voudrait qui soit ? N'était-elle pas, bien plutôt, une simple doctrine, et à fort relents conservateurs par-dessus le marché ? Et ne cherchait-elle pas, enfin, sournoisement, à nous faire prendre les désirs de son auteur pour des réalités de chaque jour ?

Le point sensible du débat, à cet égard, fut la notion même de « savoir », à laquelle je donnais sans vergogne la première place. Le *retour aux savoirs*, coextensif à l'entreprise didacticienne dans son ensemble, mais que la théorisation proposée illustrait avec insistance, apparaissait alors ambigu, dans un temps – le début des années 80 – où la « relation enseignant-enseigné », si oublieuse des savoirs, achevait à peine son parcours de gloire au sein de la noosphère. Pour cela déjà, la réception de la théorie ne pouvait être que polémique.

La question la plus chaude fut celle du « savoir savant »³⁶. D'aucuns, pour des raisons d'idéologie plus que de science, prirent l'idée en horreur. Sans doute révélait-elle trop clairement certaines des sources du pouvoir noosphérique. L'adjectif sonnait élitiste, et pour tout dire indécent, sinon tout à fait obscène. Il prenait à contre-pied ceux pour qui le contrôle épistémologique que la Société exerce, à travers ses communautés savantes, sur les savoirs enseignés, constitue un obstacle à leur appétit de rêve, d'action, de puissance. En une époque où quelques cercles de pédagogues proclamaient, à travers le slogan de l'autonomie à l'École, leur désir d'autonomie de l'École, soit leur volonté de mettre fin à l'allégeance de l'École à la Société pour lui substituer leur propre régence pédagogique – au nom d'arguments populistes opposant la froide mécanique *top-down* des systèmes établis à la chaude générosité *bottom-up*

³⁵ Une droite d'équation $y = ax + b$ se transforme en la cubique $y = ax^3 + b$; les droites d'équation $x = p$ sont en revanche (globalement) invariantes.

³⁶ Sur le sens de cette notion, voir Chevallard 1991.

des avant-gardes novatrices ³⁷ –, l'affirmation *théorique* de la dépendance entre savoir savant et savoir enseigné, la subordination, inscrite dans la théorie, du second au premier, tout cela irritait. Ici ou là, on le fit savoir.

10. SAVOIRS ET INSTITUTIONS

Une théorie est un objet socialement produit, qui s'inscrit comme tout autre dans les rapports de force qui travaillent la Société. Il y avait donc là un remue-ménage fort banal, dont le chercheur n'a guère à s'émouvoir. Beaucoup plus pertinentes ont été d'autres interrogations (qu'elles fussent ou non intéressées : en certains cas, elles le furent) dès lors que l'on prenait la théorie proposée au sérieux. Restons sur la question du savoir savant. On a pu dire : s'agissant des mathématiques, la chose semble claire ; mais où trouver le « savoir savant » dont s'autoriserait par exemple l'enseignement de l'anglais, ou celui des activités physiques et sportives, les APS ? Bonnes questions. C'est, je crois, par ce genre de questionnement qu'une théorie progresse ; qu'elle se perfectionne comme machine à produire des connaissances ; qu'elle peut augmenter sa puissance et étendre sa portée. Ce type d'objection, en fait, devait conduire à un progrès considérable de la théorisation.

Comment répondre à l'interrogation précédente ? À examiner un savoir enseigné, on découvre que son enseignement renvoie à *autre chose que lui-même* ; à un savoir « laïque », c'est-à-dire supposé vivre *en-dehors de l'École*. Et cela, même dans les périodes où la tentation de l'autonomie épistémologique est la plus forte ; même s'agissant de savoirs inventés quasiment de toutes pièces *pour l'École*, voire *par l'École*. (Je songe, ici, à la *pédagogie*, puis à la *psychopédagogie* qui s'enseignaient naguère dans les écoles normales d'instituteurs et d'institutrices.) En d'autres termes, l'École, ou plutôt le discours apologétique qui en soutient l'action, réalise une *mise en scène sociale* des savoirs enseignés, où paraît toujours, de manière parfois bien furtive, un personnage apparemment indispensable qui, au pire, n'est présent qu'*in absentia* : un savoir éponyme, supposé *exister déjà hors de l'École*. Ce n'est que dans la noosphère de l'École, non dans l'École *stricto sensu*, que, en de rares moments d'égarement, on ira à son endroit jusqu'à la dénégation pure et simple.

Qu'il y ait *affirmation théorique* d'un tel lien, cependant, ne préjuge pas de la nature de ce lien, non plus que du savoir laïque effectivement élu comme garantie épistémologique. Ce « savoir laïque éponyme » a été nommé aussi *savoir de référence*. L'expression est juste. Mais elle peut faire oublier la question du caractère, savant ou non, culturellement reconnu à ce « savoir de référence ». Or le point important est précisément là : l'enseignement d'un savoir demi-savant, d'un savoir *moyen* pâtit du manque de noblesse épistémologique et culturelle du savoir laïque auprès duquel un soutien est ainsi recherché. Et il y a toute une pathologie spécifique de l'enseignement des savoirs faiblement savants. La preuve en est dans les mécanismes spontanés de « savantisation », dans ces processus par lesquels on tente de maquiller un savoir moyen en un savoir « savantoïde ». L'opération, sans doute, réussit rarement. Mais elle est constamment tentée. En tout cas atteste-t-elle la vassalité *épistémologique* de l'École par rapport au corps social et à ses valeurs. L'École peine à accomplir sa mission lorsqu'elle est trop faiblement soutenue par la Société ³⁸.

Il est aussi des missions impossibles. Non seulement le savoir à enseigner peut manquer de crédibilité épistémologique et culturelle, mais il arrive en certains cas que ce savoir *n'existe pas*. La question de l'existence a une grande analogie avec la question du caractère savant. Un

³⁷ Voir ainsi Freudenthal 1986.

³⁸ Sur tous ces aspects, voir Chevallard 1991.

savoir n'est pas savant *en soi*. C'est la Société qui le fait tel. D'où la vanité des tentatives volontaristes de savantisation. Les mathématiques, au contraire de l'astrologie par exemple, n'étaient pas un savoir savant au xv^e siècle ; c'est aujourd'hui l'inverse qui est vrai. De même, s'agissant de *l'existence* d'un savoir : afin d'exister pour l'École, il convient qu'un savoir existe *pour la Société*, c'est-à-dire soit reconnu par elle. Et, déjà, qu'il soit culturellement reconnu qu'un tel savoir *est possible*. Sur ces obstacles butent aujourd'hui l'enseignement du français ou celui des APS. Je le note en passant, faute de pouvoir en dire plus ici ³⁹.

La petite machine théorique permettait – et permet toujours – de comprendre bien des choses. Mais sa mise en fonctionnement montrait aussi ses limites. Lorsque, comme je l'ai noté plus haut, le savoir à enseigner n'existe pas, on ne peut plus parler, en toute rigueur, ni de savoir à enseigner, ni de savoir enseigné... Le français, par exemple, est-il véritablement un savoir ? Et les APS ? « L'enseignement de... » ne renvoie plus alors qu'à ce que le lexique de l'École nomme une *matière*, ou une *discipline*. Qui, dès lors, n'est plus tout à fait une discipline *de savoir*.

Comment remanier la théorie afin de rendre raison de tels cas, somme toute communs ? Dès avant 1985 le cadre théorique avait été élargi dans une perspective globalisante qui donnait une assise à l'idée d'une *anthropologie des savoirs* et, plus particulièrement, d'une anthropologie *didactique* des savoirs (ou *didactique des savoirs*, ou *didactique*, tout court), que la théorie initiale portait en elle de manière encore largement implicite ⁴⁰. La notion de savoir y apparaissait toujours comme une notion primitive, mais elle était désormais explicitement articulée à une constellation de notions qui, souvent, avaient été présentes, mais en germe seulement, dès les formulations originaires : notions *d'institution*, de *sujet* d'une institution, d'*objet* et de *rapport* institutionnels, de *rapport personnel* à un objet, etc. Dans ce cadre, la problématique de la transposition didactique pouvait recevoir une extension décisive. Le fait principal était le suivant : un savoir *S* déterminé ne vit pas seulement sous les trois espèces d'abord repérées – celles du savoir savant, du savoir à enseigner et du savoir enseigné. Ou, pour le dire dans des termes nouvellement disponibles : il ne vit pas seulement dans ces institutions particulières que sont la *communauté savante*, la *noosphère* (de l'École) et *l'École*. Il vit dans tout un ensemble d'institutions à la fois. Il y a, à de rares exceptions près, *multilocation institutionnelle* des savoirs.

La réflexion qui avait conduit à la théorie de la transposition didactique devenait généralisable. Étant donné un savoir *S* et une institution *I* où vit *S* (par exemple une institution où vivent des mathématiques, si *S* = les mathématiques), comment *S* s'est-il introduit dans *I* ? Ou, du moins, comment se fait-il qu'il y soit présent ? Dans cette voie de développement, les difficultés qu'avait rencontrées la théorie originarie se trouvent reconduites. Comment sait-on par exemple qu'il s'agit du *même* savoir *S* vivant en *plusieurs* institutions différentes ? Réponse : tout simplement par le *lexique* de ces institutions, qui indique qu'on y trouve des mathématiques, ou de la chimie, ou de l'anglais. (L'anglais, ainsi, vit largement en toute institution scientifique quelque peu développée : d'aucuns voient même en cela un problème...). Mais affirmer (ou nier) la présence d'un savoir donné en une institution donnée est nécessairement *polémique*. Ce que dans l'on nomme mathématiques, est-ce *vraiment* des mathématiques ? Cette polémique, cependant, *n'est en rien un artefact théorique*. Elle est déjà dans la réalité étudiée. Il n'y pas, à cet égard, de point de vue absolu, privilégié, qui

³⁹ Pour l'enseignement du français, voir Chevallard 1991.

⁴⁰ Voir Chevallard 1986, 1989, 1991, 1992. Pour une présentation d'ensemble dans un contexte plus large, voir Arsac 1992.

permettrait de trancher. Il n'y a que des rapports de force *entre institutions*, voire à l'intérieur des institutions, et qui engendrent des attitudes d'exclusion et de désaveu, ou au contraire de vassalisation, d'aveu, de dépendance, d'ancillarité, etc. Ce constat généralise l'analyse des rapports – subsumés à l'origine sous les métaphores de la distance et de la ressemblance – entre savoir savant et savoir enseigné. Et c'est ce constat qu'il s'agit alors d'élaborer théoriquement.

Dans cette perspective, la première théorie de la transposition didactique sert, non seulement de point de départ, mais de point d'appui et de guide. Soit un savoir S dont un certain nombre d'institutions reconnaissent qu'il vit en leur sein. Je suppose en ce point qu'existe une institution privilégiée par rapport à S , qui tient le rôle naguère dévolu au savoir savant : l'institution $P(S)$, institution de *production* du savoir S . Cet « axiome » peut sembler restrictif, autant que l'était celui du savoir savant. Une fois de plus, il heurtera les tenants de l'autonomie épistémologique et de la *polygenèse institutionnelle* des savoirs. Ainsi, argueront ceux-là peut-être, des mathématiques ne naissent-elles pas *aussi* en des institutions autres que la communauté mathématique – la communauté *officiellement* productrice de mathématiques ? Où sont nés, par exemple, la fonction delta de Dirac ou, plus récemment, l'algorithme de Bézier, les ondelettes, le chaos, voire les fractales elles-mêmes ? Et encore, plus anciennement, une grande partie de la statistique mathématique ? Bézier travaillait chez Renault, et Mandelbrojt chez IBM. Au XIX^e siècle, celui qui signait *Student* (William Gossett), et dont un test statistique nous a conservé le nom de plume, n'était-il pas employé chez... Guinness ? La litanie pourrait être presque indéfiniment prolongée.

On voit cependant que tous ces cas rentrent dans un schéma commun : leur investiture épistémologique, soit le fait que, en l'espèce, ces élaborations de savoir soient reconnues comme étant *des mathématiques*, suppose leur *reprise* par la communauté mathématique, qui, par un travail propre, opère leur intégration dans le savoir mathématique. Il y a là, tendanciellement, un phénomène universel. Des élaborations de savoir qui relèvent *en puissance* d'un savoir S culturellement reconnu, et concrétisé en une institution de production $P(S)$, peuvent bien naître – ou plutôt *germer* – en des institutions *a priori* quelconques ; mais c'est leur assumption par $P(S)$ qui assurera la reconnaissance pleine et entière de leur appartenance à S . La communauté des producteurs de S se voit ainsi chargée d'une double tâche d'investiture épistémologique et de gestion, réelle et symbolique à la fois, du savoir S présent dans les différentes institutions de la Société. À la polygenèse institutionnelle des savoirs se substitue ainsi une *monogenèse tendancielle*.

Cette évolution, qui privilégie $P(S)$ parmi l'ensemble des institutions où vit S , dépend bien sûr de différents facteurs. Le rôle de centralisateur dévolu à $P(S)$ par la théorie peut être, dans la réalité, inégalement développé. L'un des facteurs, à cet égard, n'est rien d'autre, précisément, que la crédibilité épistémologique et culturelle reconnue à S . Plus un savoir est savant, plus l'hégémonie de $P(S)$ est étendue, plus il est facile à $P(S)$ de jouer son rôle d'arbitre du savoir. Plus, enfin, les institutions I qui se réclament, dans leur fonctionnement, du savoir S doivent développer des relations organiques avec $P(S)$. Autant de considérations qui suggèrent une reprise fondamentale de la théorisation.

11. LES SAVOIRS COMME MÉTONYMIE

Le perfectionnement de la machine théorique suppose en ce point que soit posée une question jusqu'alors éludée : *qu'est-ce qu'un savoir* ? Bien entendu cette question n'est ici qu'un aiguillon et un repère. Elle conduit à introduire une autre notion primitive qui, dans la logique

de l'exposé théorique, vient prendre place *avant même* celle de savoir : la notion de *pratique sociale*. Toute activité humaine est pratique sociale. Conduire une voiture, transporter des briques à l'aide d'une brouette, morigéner un enfant qui s'est mal conduit, danser le rock, faire la cuisine, étudier une question de mathématiques, faire un cours, acheter un journal : autant de pratiques sociales. Chacune de ces pratiques sociales prend place à l'intérieur d'une institution, qui, si l'on peut dire, en est le siège. C'est pourquoi je parle encore, de manière équivalente, de pratiques *institutionnelles*. Ou, pour faire court, de pratiques, tout simplement.

Cela noté, comment les pratiques s'articulent-elles aux savoirs ? Telle est maintenant la question centrale. J'y répondrai en m'appuyant sur une distinction de langage qui aura surtout, ici, une vertu heuristique. Imaginez que vous observiez quelqu'un en train de faire quelque chose ; et plus précisément quelque chose qui ne vous soit pas familier, et que vous vous pensiez incapable de faire. (Chacun a ici le choix de son exemple.) Vous pourrez dire alors, à propos de cette pratique, que, pour y réussir, il faut « s'y connaître » ; et que celui que vous observez, quant à lui, « s'y connaît » (ou, au contraire, « ne s'y connaît pas »). Notons que le sens du verbe *connaître* dans ce type d'emploi est celui-là même que retient la théorie anthropologique de la connaissance⁴¹ : la pratique sociale observée met en jeu certains *objets* – matériels et immatériels, visibles et invisibles –, et le fait de s'y connaître revient à entretenir avec ces objets des *rapports personnels* idoines, conformes à certains *rapports institutionnels* définis par une institution qui, peut-être, ne vous est pas spontanément apparente.

Voici alors comment peut être posée, dans une formulation naïve, la question des savoirs : pour s'y connaître dans la pratique considérée, *y a-t-il quelque chose à savoir* ? Ou, pour nous rapprocher du langage de la théorie : l'exercice réussi de cette pratique suppose-t-il *des savoirs*, des savoirs *pertinents* au regard de la pratique sociale considérée ?

On ne saurait attendre ici de réponse « objective », qui, en quelque sorte, transcende les institutions et leurs sujets. *Toute réponse à la question des savoirs est nécessairement polémique et dépend de l'institution depuis laquelle elle se formule*. Y a-t-il quelque chose à savoir pour faire la vaisselle ? Y aurait-il des savoirs pertinents pour faire la cuisine ? Pour repasser du linge ? Pour pousser une brouette lourdement chargée ? Pour conduire une voiture ? Pour élever un enfant ? Pour *enseigner* les mathématiques ? Pour *produire* des mathématiques ?

À cette question générique il existe un petit nombre de réponses culturellement convenues. On vous dira par exemple que, pour utiliser une brouette, *il n'y a rien à savoir*, et *qu'il suffit de le faire*. Telle est la limite inférieure dans la hiérarchie des réponses possibles : soit ce que j'ai appelé *la présomption de non-savoir*. Il en ira de même à propos de la vaisselle – la « plonge ». Vous pouvez multiplier les exemples vous-mêmes. Mais d'autres cas de figure surgissent, où la *présomption de savoir* se fait plus insistante. Soit la pratique sociale – récente – consistant à utiliser tel logiciel. Alors que quelques-uns, qui s'y connaissent, vous diront, non parfois sans une certaine morgue, qu'elle ne suppose aucun savoir, c'est-à-dire qu'il n'y a rien à savoir pour utiliser ce logiciel, d'autres, impressionnés par la relative nouveauté culturelle de ce type d'objet, suspecteront obscurément qu'elle requiert des savoirs déterminés, qui leur sont inconnus et dont ils ne pourraient d'ailleurs préciser la nature. Ceux-là, pour cette raison déjà, craindront parfois de « s'y lancer », de « s'y mettre », convaincus qu'ils ne sauraient y réussir.

⁴¹ Voir Chevallard 1992.

Ce dernier exemple suggère assez, je crois, le caractère sensible de la question posée. Sensibilité au plan individuel, celui des personnes. Sensibilité aussi, et surtout, au plan institutionnel. Faut-il par exemple, pour enseigner les mathématiques, ou du moins faudrait-il, pour les enseigner *mieux*, savoir quelque chose d'autre que « les mathématiques » ? La didactique des mathématiques, notamment, serait-elle un *savoir pertinent* pour cette pratique sociale qu'est l'enseignement des mathématiques ? La réponse actuelle, que la culture courante charrie de manière implicite mais entêtante, est qu'il n'y aurait rien (d'autre) à savoir que « les mathématiques ». Du moins est-ce cette « évidence » qui a imposé jusqu'à présent sa logique à notre société. On mesure à cet exemple le caractère non anodin de la réponse qu'une institution ou une société apporte à une telle interrogation.

Il n'est pas sans conséquence, en effet, d'accepter l'idée qu'une pratique sociale donnée, assignée à une institution déterminée, suppose certains savoirs comme condition de possibilité. Quelques institutions s'y refusent durablement : l'institution enseignante est de celles-là. L'admettre, en effet, c'est se rendre dépendant des savoirs reconnus comme pertinents et des communautés qui les produisent et les régissent. C'est, du même coup, s'exposer aux regards extérieurs, critiques ou malveillants. Par le biais de ces savoirs, dont les contenus, discursivement exprimés, ne tardent pas à s'imprimer et sont dès lors largement accessibles, chacun pourra à l'occasion s'octroyer un droit de regard qui fait violence à l'intimité institutionnelle. L'ésotérisme de la pratique cède du terrain devant l'exotérisme obligé des savoirs ; d'où, en ces cas, une attitude de dénégation des *besoins en savoirs*, des *besoins épistémologiques* propres à la pratique sociale à laquelle on se voue ⁴².

Le mouvement contraire s'observe aussi. Car, à se prévaloir d'un système de savoirs, une pratique sociale gagne en noblesse ce qu'elle perd en intimité. Telle est la pente que suivent nombre d'institutions, et notamment de professions, qui cherchent à se repositionner dans l'échelle des valeurs culturelles. Cette bonne volonté épistémologique va parfois jusqu'à la pathologie. Il s'agit moins alors d'identifier les savoirs (potentiellement) pertinents – qui, parfois, *n'existent pas*, et qu'il s'agirait de créer – que de se barder de savoirs existants, reconnus, à forte cote épistémologique, même quand leur pertinence reste douteuse.

Ces extrêmes pourtant ne doivent pas masquer le problème principal. Toute pratique non figée engendre virtuellement des besoins en savoir, qui ne sont pas seulement le fruit de stratégies d'ennoblissement culturel. Encore faut-il que ces besoins soient reconnus, et que la nature des savoirs susceptibles d'aider à les satisfaire soit identifiée au plus juste. Tout indique pourtant qu'il y a là un problème majeur de la vie des institutions ⁴³.

⁴² Un exemple : l'institution $P(S_e)$, où S_e désigne la science économique, a-t-elle besoin de ce savoir que sont les mathématiques ? Une réponse traditionnelle émanant de $P(S_e)$ est la suivante : « $P(S_e)$ utilise des mathématiques, sans doute ; mais les mathématiques y sont mises en jeu non comme un savoir, mais un comme “simple” langage »... On pourrait montrer que cette forme classique de dénégation s'agissant de l'appel aux mathématiques est à l'origine de nombreuses difficultés dans $P(S_e)$ et dans les institutions connexes : voir Artaud 1993.

⁴³ Un exemple à nouveau. À la veille de la seconde guerre mondiale encore, on pouvait croire que, pour déchiffrer un message codé, le mieux était de recourir à de savants épigraphistes, hellénistes, latinistes et autres spécialistes des langues anciennes. Pour des raisons culturelles, l'activité de cryptanalyse – spécialité mathématique qui n'existait pas comme telle et qu'Alan Turing contribua à créer en travaillant pour le chiffre britannique (voir Hodges 1983) – était alors identifiée aux exploits d'un Champollion ou d'un Thureau-Dangin... Une telle méprise, en ce cas spectaculaire, est en fait banale dans la vie des institutions et fait qu'une masse énorme de besoins épistémologiques restent, à un moment donné, largement insatisfaits.

Cela noté, toutefois, un schéma s'est établi et généralisé dans les sociétés contemporaines. Lorsqu'une pratique sociale est supposée requérir des savoirs, la formation à cette pratique passe de plus en plus fréquemment par une formation *scolaire* préalable, dans le cadre d'une école spécialisée où les futurs acteurs de la pratique considérée, futurs sujets de l'institution *I* qui en est le siège, *étudient* les savoirs *S* tenus pour pertinents. La transposition institutionnelle de *P(S)* dans *I* est alors médiée par une transposition *didactique* de *P(S)* dans *E_I*, l'école associée à *I*. Les éléments de savoir relevant de *S* qui pourraient germer dans *I* sont alors « re-traités » dans *P(S)*, avant de revenir dans *I* par l'intermédiaire de *E_I*. Tel est le schéma de base par rapport auquel de nombreux problèmes peuvent être posés.

Je n'en signalerai ici qu'un seul. Lorsqu'on approche en *outsider* une pratique sociale, on est facilement porté à y saisir l'écho de divers savoirs – quand même les acteurs de cette pratique clameraient-ils qu'il n'en est rien, et dès lors du moins que la cote culturelle de la pratique observée est suffisamment élevée. Pourquoi cela ? Il me faut introduire en ce point un ultime concept : celui de *domaine de réalité*⁴⁴. La capacité qu'a un profane d'identifier, fût-ce grossièrement, une pratique sociale donnée tient à sa capacité de reconnaître le domaine de réalité sur lequel porte cette pratique. Cette capacité elle-même est liée au fait que l'une au moins des institutions auxquelles l'observateur est assujetti admet ce domaine de réalité comme objet institutionnel. Ainsi savons-nous tous, en principe, reconnaître ces domaines de réalité que sont « les jardins », ou « les travaux » (dans les villes), ou « les sports »⁴⁵.

Toutefois, cette reconnaissance est en même temps, et tout aussi généralement, *méconnaissance*. En d'autres termes, le rapport institutionnel dont procède notre rapport personnel à cet objet qu'est le domaine de réalité d'une pratique sociale donnée peut différer notablement du rapport institutionnel qui soutient la pratique observée. Celle-ci, à l'évidence, suppose l'existence d'une foule d'objets qui n'existent pas pour nous, ce qu'atteste à nos oreilles le lexique de l'institution, son « jargon » – celui du jardinier, du chef de chantier, du sportif. Et, derrière cet idiome que nous n'entendons pas, nous sommes enclins, sous certaines conditions culturelles, à percevoir l'écho d'un monde immatériel d'objets, d'interrelations, de rapports : l'écho, peut-être, d'un savoir, et qui réglerait les gestes de l'acteur que nous observons...

L'ambiguïté quant à l'existence de savoirs pertinents soutenant la pratique observée vient de là. Tout savoir est, pour l'acteur, d'abord *savoir en acte*. Tout savoir est pratique sociale. Ne nous étonnons pas alors si tel mathématicien s'étonne de nous voir regarder comme un savoir « les mathématiques » – ce qui est pour lui, d'abord, un *faire*. Ne nous étonnons pas même si, en de certains moments, nous l'entendons nous dire que ce faire mathématique *ne suppose aucun savoir* ! Les mathématiques, en fin de compte, sont-elles bien un savoir ? Ne se laisseraient-elles pas décrire exhaustivement comme un domaine de réalité – « l'univers mathématique » – donnant lieu à certaines pratiques sociales – les pratiques « mathématiques » ? La chose, en vérité, ne va nullement de soi. Une réponse positive, ici comme ailleurs, procède d'un point de vue partiel, et spécifique. Toute présomption de savoir exprime la conjecture d'un besoin, et d'un manque : celui d'une chose absente – le « savoir » – qui viendrait, par définition si l'on peut dire, combler ce besoin. Tout savoir est ainsi un « supposé savoir ». La problématique des savoirs est le fruit d'une extériorité par rapport aux pratiques. Il est normal qu'elle s'impose comme à nul autre au didacticien, à l'enseignant, ou

⁴⁴ Sur cette notion, voir Chevallard 1986.

⁴⁵ On notera, à propos de ces deux derniers exemples, que les mêmes mots ou expressions renvoient en même temps au *domaine de réalité* et à la famille de *pratiques* auxquelles ils donnent lieu dans une organisation sociale donnée.

à qui doit apprendre, qu'il soit élève ou chercheur ; à ceux, donc, dont le problème est d'organiser ou de vivre, en première personne, le passage de l'extériorité à l'intériorité.

La difficulté est bien qu'en posant ainsi le problème nous sommes au risque d'oublier *qu'on ne parle jamais de savoir que par métonymie*. La partie – le savoir – désigne un tout qui inclut aussi domaine de réalité et pratique sociale. Ce que nous nommons savoir *représente*, au sens diplomatique du terme, un domaine de réalité et ses sous-domaines en même temps qu'un système de pratiques sociales, dont ce savoir est à la fois un émergent et une condition ; et il les représente *sans toutefois les annuler*. En faisant donc du savoir une hypostase de cette trinité, nous poserions mal, au double niveau théorique et pratique, le problème de la transposition didactique. Ce qui doit être transposé est bien cette « trinité » – domaine de réalité, pratique, savoir – dont l'ensemble ne peut exister, à l'instar d'un nœud borroméen, si l'un quelconque de ses éléments se perd.

Or c'est en ce point, précisément, que surgissent deux difficultés essentielles. Le premier obstacle est lié à un choix : quel domaine de réalité, et quelles pratiques, vivant en quelle institution, transposer ? Car, pour un savoir S donné, plusieurs institutions s'offrent généralement en modèles à suivre. Dans le cas *a priori* le plus simple à cet égard, celui de l'école E_I associée à une institution I , I et $P(S)$ déjà sont rivaux : toute transposition dans E_I risque à tout moment d'être dénoncée par l'une et l'autre institutions, dès lors qu'elles ont assez de force pour faire entendre leur voix. La difficulté s'accroît immensément s'agissant de l'enseignement général. La recherche d'une transposition *optimale* est ici plus qu'ailleurs toujours à reprendre. Le consensus, à l'échelle de l'histoire, ne dure qu'un instant. Le curriculum ne cesse de bouger. La transposition didactique est pour cela un processus continué, dont il serait naïf de penser qu'il permette une stabilisation prolongée du curriculum. Là encore, la réforme des mathématiques modernes fournit un exemple de ce qui arrive quand on se laisse prendre au piège.

Il est toutefois un second obstacle, et plus redoutable encore. La transposition didactique bute quasiment toujours sur le roc du *domaine de réalité*. Tel est, *structurellement*, le maillon faible de la chaîne transpositive. La chose est bien connue s'agissant par exemple des sciences expérimentales. Comment reconstituer dans la classe le domaine de réalité en lequel opère, hors École, le physicien, le chimiste, le biologiste ? Mais la chose, en vérité, est trop connue pour n'être pas méconnue. Ainsi invoquera-t-on comme une excuse, ou pour accuser, les difficultés *matérielles*, et l'absence corrélatrice de « moyens » adéquats, qui, laisse-t-on entendre, effaceraient le problème. Les mathématiques, en ce point, apportent leur contre-exemple. Car c'est bien, ordinairement, d'un déficit du domaine de réalité que naît la dissemblance des pratiques à quoi se mesure l'écart du savoir enseigné à son patron laïque. Que l'on revienne ici à un matériel engrangé plus haut : on transpose la notion de distance, non le domaine de réalité – les espaces de fonctions – qui en avait suscité l'émergence ; on transpose l'idée des couples de nombres, mais on « oublie » le vaste chantier numérique qui lui donnait son ancrage. On transpose – autre cas, et non des moindres⁴⁶ – le calcul algébrique, lequel, faute qu'on ait reconstitué *aussi* le champ des problèmes qui lui donnait sa fonctionnalité, ne se déploie qu'en des pratiques formelles, trop éloignées du travail algébrique du mathématicien.

On peut saisir à ces exemples l'essence de la difficulté. Si le domaine de réalité ne se transpose pas aisément, ce n'est pas parce qu'il serait de la nature des choses matérielles : en mathématiques, il ne l'est quasiment jamais. L'erreur est ici de croire que la réalité est un

⁴⁶ Voir Chevallard 1985.

donné. Or ce donné est un *construit social*, et qui résulte toujours d'un *immense travail préalable de construction*, impossible à reprendre dans son entier. L'École, ici, navigue entre Charybde et Scylla. On la voit hésiter entre deux partis également dangereux. Soit tenter, mais en vain, de tout reconstruire (que l'on songe, à nouveau, à la Réforme), au risque d'y passer son temps sans que nulle pratique authenticatrice n'émerge. Soit – c'est le cas usuel – feindre d'ignorer le problème, ou le traiter paresseusement ; mais on sait alors ce qu'il en coûte. Le vice, si l'on peut dire, est toujours le même : pas davantage que la théorie, l'École ne saurait prétendre recréer le Monde et ses domaines de réalité. Elle aide à les explorer. Elle nous propose de les comprendre. Elle reçoit les construits sociaux comme tels. Ni comme des donnés allant de soi, transparents, non problématiques. Ni comme des réalités à construire (ils le sont déjà). Mais bien comme des existants, donnés d'une certaine manière, et qu'elle nous convie à étudier.

RÉFÉRENCES

- ARSAC G. (1992) L'évolution d'une théorie en didactique : l'exemple de la transposition didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 12, n° 1, pp. 7-32.
- ARTAUD M. (1993) *La mathématisation en économie comme problème didactique – Une étude exploratoire*, thèse d'université, Université d'Aix-Marseille II.
- CHEVALLARD Y. (1985) *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée sauvage, Grenoble, deuxième édition augmentée, 1991.
- CHEVALLARD Y. (1986) Esquisse d'une théorie formelle du didactique, *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique [16-21 novembre 1986]*, textes réunis et présentés par Colette Laborde, La Pensée sauvage, Grenoble, 1988, pp. 97-106.
- CHEVALLARD Y. (1989) Pourquoi enseigne-t-on les mathématiques ? *Actes du colloque « Finalités des enseignements scientifiques » (Marseille, 10-12 janvier 1989)*, CCSTI de Marseille, pp. 41-45.
- CHEVALLARD Y. (1991) *Didactique, anthropologie, mathématiques*, in Chevallard 1985, postface à la deuxième édition, pp. 199-233.
- CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 12, n°1, pp. 73-112.
- CHEVALLARD Y. et JOHSUA M.-A. (1982) Un exemple d'analyse de la transposition didactique – La notion de distance, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 3, n° 2, pp. 157-239 ; reproduit in Chevallard 1991, pp. 125-198.
- CHOQUET G. (1964) *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, Paris.
- COXETER H.S.M. (1961) *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, deuxième édition, 1969.
- DÉLÉDICQ A. et FLUET J. (1982) *Mathématiques, savoir & savoir-faire en 1^{re} année*, CEDIC/Fernand Nathan, Paris.
- DELTHEIL R. et CAIRE D. (1951) *Compléments de géométrie*, Baillière et fils, Paris.
- DHOMBRES J. (1985) REELS (NOMBRES), *Encyclopaedia Universalis*, vol. 19, pp. 749-758.
- DIEUDONNÉ J. (1964) *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris.
- DIEUDONNÉ J. (1968) *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris.
- FREUDENTHAL H. (1986) Book Reviews, *Educational Studies in Mathematics*, 17, 3, pp. 323-327.

- GAUTIER C., ROYER P. et THIERCE C. (1983) *Mathématique Terminales C et E – Analyse et statistique*, Hachette, Paris.
- HILBERT D. (1899) *Les fondements de la géométrie*, édition critique avec introduction et compléments préparée par Paul Rossier, Dunod, Paris, 1971.
- HODGES A. (1988) *Alan Turing ou l'énigme de l'intelligence*, Payot, Paris.
- KLINE M. (1972) *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York.
- LANG S. et MURROW G. (1983) *Geometry – A High School Course*, Springer-Verlag, New York.
- OVAERT J.-L. et VERLEY J.-L. (1983) *Analyse vol. 1 avec commentaires et notes historiques*, CEDIC/Fernand Nathan, Paris.
- RÉCANATI F. (1979) *La transparence et l'énonciation*, Le Seuil, Paris.
- SCHNEIDER O. (1979) *Le passage des équations numériques aux équations paramétriques en classe de seconde*, IREM d'Aix-Marseille et IREM de Bordeaux.
- TONNELLE J. (1979) *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*, IREM d'Aix-Marseille et IREM de Bordeaux.
- VERLEY J.-L. (1985) ENSEMBLES (THEORIE DES) – A. Théorie élémentaire des ensembles, *Encyclopaedia Universalis*, vol. 6, pp. 1148-1156.