Les mathématiques dans les formations universitaires : un schéma alternatif

Yves Chevallard
IUFM d'Aix-Marseille

1. Dans *Que faire des universités ?* (Bayard Éditions, 2002), Alain Renaut note :

> Plus d'un tiers des étudiants des cursus de lettres et sciences humaines (500 000), contre un peu moins de 350 000 en droit et sciences économiques, un peu plus de 200 000 en sciences et 140 000 dans les secteurs de santé : répartition là encore très inégale, où la proportion des inscrits en lettres et en sciences humaines, même si elle diminue quelque peu depuis un sommet atteint en 1994-1995 (38 %), est étonnamment forte dans des filières sans beaucoup de débouchés professionnels directs.

Le même auteur précise un peu plus loin :

> … les filières les plus peuplées sont devenues celles où l'ouverture sur des professions liées au contenu des études est par définition la moins évidente. Ainsi y a-t-il actuellement plus de 13 000 étudiants en philosophie inscrits dans nos universités, dont plus de 2 000 entament leur quatrième année…

2. À suivre Alain Renaut, une telle évolution, qui, du côté des « sciences dures » (et des mathématiques) est regardée d'abord comme engendrant une *pénurie d'étudiants « scientifiques »*, avait été anticipée dès 1970 par Antoine Prost :

> Peut-être la réflexion, et la politique qui s'en devrait déduire, gagneraient-elles ici en efficacité si, plutôt que de chercher à corriger à tout prix la distorsion démographique entre les filières en favorisant celles qui seraient capables d'inclure dès les premières années l'optique de la professionnalisation, elles s'appliquaient d'abord à comprendre les raisons de cette si forte distorsion.
>
> De ce point de vue, la question la plus pertinente me paraît avoir été posée dès 1970 par Antoine Prost, quand il se demandait dans un article si « un enseignement supérieur de masse peut ne pas être massivement *littéraire* ? » [« De quelques problèmes universitaires en France et aux États-Unis », *Esprit*, février 1970]. De fait, c'est aux formations « littéraires » (au sens large des humanités) que l'explosion démographique des universités a le plus largement « bénéficié », en accroissant leur public dans des proportions sans commune mesure avec celles qu'ont pu enregistrer les autres formations : comment, dès lors, ne pas envisager une corrélation et ne pas se demander « si la croissance des enseignements supérieurs littéraires n'est pas, précisément, le signe d'une mutation irréversible dans la fonction même de l'enseignement supérieur » ? Il se pourrait même, me semble-t-il, que la manière dont l'élargissement exponentiel du public universitaire a concentré ses effets dans le domaine des humanités tienne, non pas à l'illusion selon laquelle les diplômes y seraient davantage accessibles à une population plus diversifiée que dans l'université d'autrefois, mais à une profonde transformation de la demande adressée à l'institution universitaire par ce public élargi. S'essayant à cerner cette transformation, Antoine Prost formulait en 1970 une hypothèse qu'il est désormais possible d'approfondir à l'aide de ce que nous ont mieux fait percevoir encore les trois dernières décennies : « L'enseignement supérieur deviendrait un complément de culture générale sans finalité professionnelle explicite, une sorte d'équivalent de ce qu'étaient les lycées de 1920 ».

3. Du côté de la *famille mathématique*, la situation objective créée par *l'excentration progressive des mathématiques* au sein du système éducatif primaire-secondaire-supérieur a renforcé jusqu'à présent, pour l'essentiel, le souhait, naguère encore marginalisé, de créer, devant l'effondrement de l'ancien monde, une *« arche de Noé » mathématique* (ou mathématico-scientifique), au prix d'une rupture franche du système éducatif en filières

hétérogènes, celui-ci constituant alors une image jugée indépassable d'un monde social lui-même fragmenté. Il y a là une *régression* marquée au sceau d'une *nostalgie narcissique*, naïve, qui conduit aujourd'hui tel mathématicien, et non des moindres, à conclure que l'enseignement qu'il a connu (celui, en gros, issu de la réforme des mathématiques modernes) était encore de grande valeur, ou du moins d'une grande sagesse, ce qu'atteste à ses yeux, peut-on supposer, sa propre réussite en tant que mathématicien (Jean-Pierre Demailly, *Revendiquer une place réelle pour l'enseignement des sciences*, conférence à la Table Ronde organisée par la SMF et la SMAI à l'ENS de la rue d'Ulm le 12 janvier 2002) :

> C'est un fait patent que la durée d'études disponible est aujourd'hui dramatiquement insuffisante pour combler les multiples lacunes des étudiants, au niveau où ils sortent de l'enseignement secondaire. Un exemple typique en mathématiques est l'enseignement de la géométrie en liaison avec l'algèbre linéaire. Celui-ci, pour être compris et assimilé, nécessite l'application de plusieurs « couches » ou « teintures successives », illustrées par des points de vue variés venant s'enrichir mutuellement. À une époque ancienne, les élèves de collège et de lycée recevaient une solide formation de géométrie euclidienne traditionnelle, qui leur était ensuite très utile pour l'acquisition de l'algèbre linéaire à l'université. À une époque plus récente (1972-1988 environ), l'enseignement de l'algèbre linéaire a été avancé au lycée (ce qui a pu entraîner un certain nombre de problèmes liés à un enseignement parfois un peu trop formel, et une perte du sens géométrique à partir du moment où le collège n'apportait plus une préparation suffisante). Mais le fait est que la première couche était appliquée dès les classe de seconde ou de première, avec l'introduction de concepts essentiels comme ceux de linéarité et de dépendance linéaire, voire d'espace vectoriel et d'application linéaire, etc. Des couches successives étaient appliquées jusqu'au niveau de la Licence et la Maîtrise, et la plupart des étudiants d'alors, même moyens, parvenaient à acquérir en définitive une bonne compréhension des concepts. Aujourd'hui, la première teinture a été repoussée au DEUG, et le temps de maturation nécessaire n'existe plus.

4. Un tel *réflexe obsidional* n'ouvre sans doute pas une voie d'avenir (même si certaines des analyses qui l'accompagnent ne sont pas à négliger), et surtout fait apparemment sans regret ni remords le sacrifice de la *diffusion des connaissances mathématiques hors du cénacle des mathématiciens*, dans la foule bigarrée et innombrable des non-mathématiciens. Du même coup, il renonce à examiner et à affronter le problème posé par la dérive du continent mathématique pour se contenter de tenter d'en compenser localement – et momentanément – les effets. C'est en tout cas ce problème que l'on examinera dans les développements qui suivent.

5. Le mouvement de repli vers *l'ombilic mathématique* est sans doute, ainsi que je viens de le suggérer, une réaction au lent mouvement d'excentration des mathématiques au sein du système éducatif français. Mais elle en est aussi, au moins autant, l'une des causes. Du moins doit-on noter la corrélation entre les deux ordres de faits : la dérive centrifuge du continent mathématique va de pair avec une propension – au moins idéologique – à l'*autarcie épistémologique* et une attitude d'*autisme disciplinaire* : les mathématiques, rien que les mathématiques ! Mais pas – il convient de le souligner – *toutes* les mathématiques. Car ce mot d'ordre de pureté épistémologique exclut, on va le voir, une bonne part des mathématiques *in statu nascendi*, nées de l'union métisse du mathématique et du non-mathématique.

6. À cet égard, l'artefact que constitue le choix des sujets abordés dans ce séminaire ne doit pas tromper : le développement des mathématiques *par leur périphérie*, au contact des problèmes soulevés en d'autres champs disciplinaires, est, aujourd'hui comme d'hier, un fait bien réel, comme l'illustre entre autres exemples l'histoire récente – on peut en fixer le point de départ autour de 1973 – de la *modélisation financière*. Mais ce phénomène de création mathématique reste minoré, voire frontalement refusé, par nombre de membres de la famille

mathématique. L'argumentaire est à cet égard relativement limité. J'extrais d'un plaidoyer *contre* l'introduction des probabilités en CPGE rédigé par un ancien président de l'UPS, Denis Monasse, professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis le Grand, qui prévient : « Personnellement, la simple perspective d'un problème de probas à l'ENS Ulm me ferait changer de carrière ». Le texte cité réagit à une réunion de travail tenue à l'ENS de la rue d'Ulm le 8 juin 2000 sur le thème *Quelles mathématiques enseigner en classes préparatoires aux grandes écoles ?*. On y trouve en particulier le double argument typique selon lequel enseigner les probabilités en CPGE serait *à la fois trop et… trop peu* :

> Depuis que le débat a été lancé, je me suis plongé dans divers ouvrages de probabilités. Disons que l'on peut les classer en deux catégories : les ouvrages de modélisation, les ouvrages de théorie. Les premiers (correspondant en gros au programme de probas en prépas commerciales), s'ils sont intéressants du point de vue des activités de modélisation, n'apportent strictement rien du point de vue des objectifs d'apprentissage de la démonstration et de la rigueur dont je parlais ci-dessus ; ils consistent à reconnaître sur un problème donné un cadre probabiliste déjà rencontré (probabilités indépendantes, probabilités conditionnelles, lois de Bernoulli, normale, hypergéométrique, de Poisson, uniforme, gaussienne) et à appliquer les formules correspondantes, avec éventuellement à la fin une réflexion sur la pertinence de la modélisation. Quant aux ouvrages de théorie ils dépassent de loin en abstraction et en prérequis les possibilités de nos élèves (théorie de la mesure, espaces de Hilbert, chaînes de Markov, martingales, mouvement brownien, calcul différentiel stochastique, etc.). Ni les uns, ni les autres ne correspondent à nos besoins (sauf les premiers pour certains TIPE).

7. On notera ici l'usage stigmatisant du terme *modélisation* : dans la perspective obsidionale qu'illustre le texte précédent, la modélisation est présentée comme une activité périphérique, *didactiquement peu pertinente* car elle vient *toujours trop tôt* dans les cursus de formation, et *mathématiquement ambiguë*, voire *malsaine*, car on y manipule par force des mathématiques peu solides.

8. Les germes de mathématiques nouvelles apparaissent d'abord, en effet, cristallisées dans des *modèles* de phénomènes en général extramathématiques, d'où ils émergent en principe peu à peu pour s'étoffer et se déployer en autant de nouvelles *théories mathématiques*, que leurs servants tenteront alors de faire reconnaître comme participant authentiquement du continent mathématique. C'est là un aspect fondamental des processus historiques de création de mathématiques, sur lequel je reviendrai plus loin [à propos de la dialectique des problèmes et de la synthèse]. C'est en tout devant ces mathématiques tard venues, ces mathématiques de la frontière, et qui voudraient s'installer benoîtement dans l'hinterland mathématique, que font éternellement barrage les gardiens du sanctuaire.

9. Il s'agit là d'une attitude dont la généralisation est toutefois un fait récent. Pour voir la chose, revenons quelques siècles en arrière, exactement au début du XVII^e siècle, dont j'emprunte à un historien la rapide peinture suivante (Jean Rohou, *Le XVII^e siècle, une révolution de la condition humaine*, Éditions du Seuil, Paris, 2002, p.) :

> C'est au début du XVII^e siècle que l'on construit de nouveaux cadres de pensée, dans une nouvelle perspective : le droit, la politique et surtout la science et la philosophie se libèrent de la théologie, des autorités traditionnelles et plus généralement d'une rationalité de soumission pour élaborer des méthodes destinées à satisfaire les intérêts temporels des hommes. Désormais, il s'agit moins de s'intégrer à l'ordre des choses que d'en maîtriser le fonctionnement à son profit, et les principes comptent moins que les effets, vérifiés par l'expérience. En 1600, l'Anglais Gilbert dédie son ouvrage sur le magnétisme aux « véritables philosophes […], qui ne cherchent pas le savoir seulement dans les livres, mais dans les choses elles-mêmes ».

Cette révolution scientifique est illustrée d'abord en Angleterre par Bacon et en Italie par Galilée : leurs publications vont de 1605 à 1627 et de 1610 à 1638 […].

Autant ou plus que la Renaissance, la première moitié XVII^e siècle européen est marquée par un effort exceptionnel des hommes pour s'approprier leurs conditionnements. Peut-être n'y avait-il pas eu, depuis l'Antiquité, de savant, de philosophe, d'homme politique ou de juriste aussi importants, aussi novateurs que Galilée, Descartes, Richelieu ou Grotius. Les principaux penseurs ne sont plus des héritiers – théologiens, philosophes contemplatifs, sages, érudits, lettrés –, propagateurs ou restaurateurs de l'ordre originel, comme ce fut le cas de Thomas d'Aquin à Calvin et d'Érasme à Montaigne. Ce ne sont pas encore des politiques, comme le seront Hobbes, Spinoza, Locke, Voltaire et Rousseau : il n'est pas encore possible de prétendre changer l'ordre social – surtout dans la France absolutiste. Mais on peut déjà chercher à maîtriser la nature. Ce sont donc des savants – Bacon, Galilée, Descartes, Gassendi –, ardemment engagés dans une activité dont leurs prédécesseurs réprouvaient la prétention et dédaignaient les applications. C'est avec eux qu'apparaît la science moderne.

10. On connaît la déclaration programmatique de Galilée (1564-1642) dans son essai de 1618 intitulé *Il Saggiatore* (« L'Essayeur »)[1] :

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere si prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne unamente parola ; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Le fait crucial est le suivant : pour Bacon, ses contemporains et ses successeurs, le continent mathématique est essentiellement ouvert sur des aventures scientifiques allogènes, selon une perspective de développement qui se cristallise dans une expression clé, celle de mathématiques *mixtes*, que l'on oppose alors à celle de mathématiques *pures*. (L'expression « mathématiques mixtes » ne sera remplacée qu'au XIX^e siècle par l'expression, aujourd'hui courante, de mathématiques *appliquées*). Voici par exemple comment, dans *The Advancement of Learning* (1605), Francis Bacon (1561-1626) présente les choses[2] :

---

[1] La philosophie est écrite dans ce grand livre qui continuellement est ouvert devant nos yeux – je veux dire l'univers –, mais qui ne se peut comprendre si l'on n'apprend pas d'abord la langue et les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langue mathématique, et les caractères sont des triangles, des cercles et d'autres figures géométriques, sans l'aide desquels il est impossible d'en comprendre un seul mot ; sans lesquels on ne fait que s'agiter en vain en un obscur labyrinthe.

[2] « Les mathématiques sont soit pures soit mixtes [c'est-à-dire mêlées de matière]. Appartiennent aux mathématiques pures les sciences qui traitent de la quantité définie, absolument séparée de tout axiome de philosophie naturelle ; il y en a deux, la géométrie et l'arithmétique. La première traite de la quantité continue, la seconde de la quantité discrète. Les mathématiques mixtes ont pour objet quelques axiomes ou parties de la philosophie naturelle, et elles s'occupent de la quantité déterminée en tant que celle-ci leur est annexe et secondaire. Car nombreuses sont les parties de la nature qui ne peuvent être découvertes de manière suffisamment sagace, ni mises en évidence de manière suffisamment fine, ni adaptées à l'utilité d'une manière suffisamment adroite, sans l'aide et l'intervention des mathématiques. De cette espèce sont l'optique, la musique, l'astronomie, la géographie, l'architecture, la science des machines, et quelques autres. Pour les mathématiques, je ne relève aucune lacune. À ceci près que les hommes ne comprennent pas assez quel usage excellent les mathématiques pures peuvent avoir en ce qu'elles apportent remède et guérison à de nombreux défauts de l'esprit et des facultés intellectuelles. Car si l'esprit est trop obtus, elles l'aiguisent ; s'il a trop tendance à vagabonder, elles le fixent, s'il est trop plongé dans le sensible, elles le rendent abstrait. Ainsi, il en est des mathématiques comme du tennis, qui est un jeu en lui-même sans utilité, mais qui est fort utile en tant qu'il rend l'œil rapide et le corps prêt à se plier à toutes sortes de postures ; l'utilité qu'ont les mathématiques, de façon accessoire et latérale, a tout à fait autant de valeur que leur utilité principale et voulue. Quant aux mathématiques mixtes, je me permettrai simplement cette prédiction : de plus nombreuses espèces de ces mathématiques ne peuvent manquer d'apparaître à mesure que la nature sera davantage découverte. En voilà

> The mathematics are either pure or mixed. To the pure mathematics are those sciences belonging which handle quantity determinate, merely severed from any axioms of natural philosophy ; and these are two, geometry and arithmetic ; the one handling quantity continued, and the other dissevered. Mixed hath for subject some axioms or parts of natural philosophy, and considereth quantity determined, as it is auxiliary and incident unto them. For many parts of nature can neither by invented with sufficient subtilty, nor demonstrated with sufficient perspicuity, nor accomodated unto use with sufficient dexterity, without the aid and intervening of the mathematics ; of which sort are perspective, music, astronomy, cosmography, architecture, enginery, and divers others.
>
> In the Mathematics I can report no deficience, except it be that men do not sufficiently understand the excellent use of the Pure Mathematics, in that they do remedy and cure many defects in the wit and faculties intellectual. For if the wit be too dull, they sharpen it; if too wandering, they fix it; if too inherent in the sense, they abstract it. So that as tennis is a game of no use in itself, but of great use in respect it maketh a quick eye and a body ready to put itself into all postures; so in the Mathematics, that use which is collateral and intervenient is no less worthy than that which is principal and intended. [--] And as for the Mixed Mathematics, I may only make this prediction, that there cannot fail to be more kinds of them, as nature grows further disclosed. Thus much of Natural Science, or the part of nature speculative. »

11. La notion de mathématiques mixtes figure en bonne place dans l'article MATHEMATIQUE OU MATHEMATIQUES rédigé par d'Alembert pour l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* (1751-1772) qu'il dirige avec Diderot :

> Les Mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle *Mathématiques pures*, considère les propriétés de la grandeurs d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second, par l'étendue : dans le premier cas, les Mathématiques pures s'appellent Arithmétique, dans le second, Géométrie [...] La seconde classe s'appelle *Mathématiques mixtes* ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire, de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers [...]. Du nombre des Mathématiques mixtes, sont la Méchanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, &c.

Elle sera formalisée dans le même d'Alembert, dans l'article APPLICATION de l'*Encyclopédie*, et à propos de la catoptrique (l'optique des miroirs), où son existence apparaît liée à ce fait que l'interrogation expérimentale du réel peut, en certains domaines, être réduite *à très peu de choses* :

> Une seule observation ou expérience donne souvent toute une science. Supposez, comme on le sait par l'expérience, que les rayons de lumière se réfléchissent en faisant l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion, vous aurez toute la Catoptrique [...]. Cette expérience une fois admise, la Catoptrique devient une science purement géométrique, puisqu'elle se réduit à comparer des angles et des lignes [...]. Il en est de même d'une infinité d'autres.

En cela, le domaine des mathématiques mixtes peut être étendu presque indéfiniment, et c'est donc à juste titre que, dans le passage cité plus haut, Bacon affirmait : « Quant aux mathématiques mixtes, je me permettrai simplement cette prédiction : de plus nombreuses espèces de ces mathématiques ne peuvent manquer d'apparaître à mesure que la nature sera davantage découverte ». Les mathématiques « mixtes » n'ont fait depuis lors qu'étendre leur

---

assez de la science naturelle, ou de sa partie spéculative. » (Francis Bacon, *Du progrès et de la promotion des savoirs*, traduction de Michèle Le Dœuff, Gallimard, Paris, 1991, p. 130-131).

empire, entraînant avec elles les mathématiques pures, même si celles-ci trouvent en elles-mêmes certaines des raisons de leur progrès. Le besoin de mathématiques engendré par le souci de penser mathématiquement le réel (naturel, social ou... mathématique) constitue le moteur principal du processus historique de création et de développement des mathématiques.

12. L'idée même que le mathématique naît du non-mathématique est demeurée longtemps présente et active dans la culture de la famille mathématique. Au plus niveau, je prendrai ici l'exemple que donne Henri Lebesgue (1875-1941), à propos des débuts de l'arithmétique, dont il souligne l'origine empirique :

> L'arithmétique [...] n'utilise qu'un très petit nombre d'expériences, dont chacune a été répétée un nombre prodigieux de fois par chaque homme, depuis qu'il y a des hommes. Aussi nous savons, sans hésitation, dans quels cas elle ne s'applique pas. Dans ces derniers cas, l'idée d'appliquer l'arithmétique ne nous effleure pas un instant ; nous ne pensons à appliquer l'arithmétique que lorsqu'elle s'applique, si bien que nous oublions qu'il y a des cas où elle ne s'applique pas : deux et deux font quatre, affirmons-nous. « Dans un verre je verse deux liquides, dans un autre deux liquides. Je verse le tout dans un vase, contiendra-t-il quatre liquides ? – C'est de la mauvais fois, dites-vous, ce n'est pas une question d'arithmétique.
> – Dans une cage je mets deux animaux, puis encore deux animaux ; combien la cage contient-elle d'animaux ? – Votre mauvais foi, dites-vous, est plus éclatante encore ; cela dépend de l'espèce de ces animaux, l'un d'entre eux pourrait dévorer les autres ; il faut aussi savoir si le décompte doit avoir lieu immédiatement ou dans un an, alors que les animaux pourraient être morts ou avoir eu des petits. En somme, vous parlez de collections desquelles on ne sait si elles sont immuables, si chaque objet y garde son individualité, s'il n'y a pas des objets qui apparaissent ou qui disparaissent.
> – Qu'est-ce à dire, sinon que certaines conditions doivent être remplies pour que l'arithmétique s'applique ? Quant à la règle, pour reconnaître si elle s'applique, que vous venez de me donner, elle est certes excellente pratiquement, expérimentalement, mais elle n'a aucune valeur logique. Elle est l'aveu que l'arithmétique s'applique quand elle s'applique. Et c'est pourquoi on ne peut pas démontrer que deux et deux font quatre, ce qui est pourtant la vérité par excellence, car jamais nous ne nous trompons en l'utilisant.

Bien sûr Lebesgue n'ignore pas que, en dépit de sa base expérimentale, l'arithmétique s'est constituée en une organisation mathématique autonome, axiomatique et formelle. Mais même lorsqu'on en arrive à ce niveau d'élaboration mathématique, la base expérimentale reste active, non plus alors dans l'organisation mathématique elle-même, mais bien dans l'organisation didactique nécessaire pour la constituer :

> Dans les exposés purement logiques, où l'arithmétique s'occupe de symboles vidés de toute signification, c'est grâce seulement à un axiome que deux et deux font quatre. Je n'ai pas à parler ici de ce genre d'exposés, mais je puis bien dire que, si leur importance mathématique est considérable, s'ils nous ont beaucoup appris, ils me paraîtraient voués à un insuccès absolu si on voulait les considérer comme élucidant la notion de nombre sans faire appel à l'expérience. Dans ces jeux logiques, il faut, en effet, manier des collections de symboles, réalisés ou pensés peu importe, et c'est alors qu'interviennent toutes nos connaissances, acquises grâce à l'expérience, relatives aux collections, c'est-à-dire aux nombres.

13. Dans l'enseignement scolaire, primaire et secondaire, les mathématiques mixtes restèrent longtemps fort bien implantées. Il y a cinquante ans, par exemple, la *statique* figurait au programme de mathématiques des classes terminales, avec, notamment, le thème des *machines simples* (levier, treuil, cabestan, bascule du commerce, poulies, palan, moufle), qui ne disparaîtra des programmes de mathématiques qu'au début des années 1960. Cette tradition d'*ouverture épistémologique* est bien illustrée par le programme de mathématiques du 10

juillet 1925 pour les « classes de mathématiques », c'est-à-dire pour les *classes terminales scientifiques*. Ce programme est divisé en huit domaines. Les quatre premiers (arithmétique, algèbre, trigonométrie, géométrie) relèvent pour l'essentiel des mathématiques dites *pures*, tout en contenant certains thèmes *appliqués* traditionnels, relevant en particulier des mathématiques *financières* (intérêts composés, annuités, etc.). Les quatre autres domaines seraient vraisemblablement regardés aujourd'hui par les professeurs de mathématiques comme étrangers à leur compétence : *géométrie descriptive et géométrie cotée*, *cinématique*, *statique*, *cosmographie*.

14. Sur la carte des mathématiques enseignées, à vrai dire, certaines des régions précédentes étaient d'ores et déjà en difficulté. Les auteurs (anonymes) d'un ouvrage (s.d.) de préparation au baccalauréat publié au début des années 1940 notaient par exemple :

> Le programme relatif à la Géométrie Descriptive et à la Géométrie Cotée du Cours de Mathématiques Élémentaires est très restreint et prête peu aux problèmes. En fait, depuis 10 ans, le nombre de problèmes donnés sur ce sujet aux Examens est à peu près nul. Il faut cependant en prévoir de possibles…

Mais d'autres régions du continent mathématique résistèrent plus longuement au processus de purification. Ainsi la cinématique survécut-elle jusqu'au milieu des années 1980. Quant à la cosmographie, rebaptisée astronomie, elle demeurera longtemps présente dans les classes terminales littéraires, pour n'en disparaître qu'avec les programmes de 1994.

15. Une remontée dans un passé plus lointain confirmerait cette longue présence, à côté des domaines traditionnels de mathématiques pures, de domaines tout aussi traditionnels relevant des mathématiques mixtes. Un exemple qu'il faut citer entre tous est celui de la *topographie*, présente dans les programmes de mathématiques tout au long du XIX^e siècle et au-delà, sous des noms variables – *arpentage* ou *levé de plans* surtout[3]. La grande réforme de 1902, qui met en place l'enseignement secondaire « moderne » dont nous sommes les héritiers, n'abolit pas cette tradition. Les programmes de 1905, qui, pour ce qui est des mathématiques, retouchent les programmes de 1902 sans doute trop vite rédigés, soulignent l'importance de l'étude *in situ* de la topographie en même temps que sa fonction de motivation de l'étude de la géométrie :

> Dans le même ordre d'idées, il est recommandé d'exercer les élèves à l'exécution de levés de plan, ce que l'on pourra faire sans sortir de l'établissement. Il est facile de tracer une droite joignant deux points situés dans des salles différentes, de mesurer la distance de ces points, etc. ; on insistera d'ailleurs sur l'intervention, dans ces applications, des théorèmes qui ont pu sembler être d'ordre purement spéculatif.

Lorsque, au début du XX^e siècle, Jacques Hadamard (1865-1963) publie sa *Géométrie dans l'espace* (1901), deuxième volume de ses *Leçons de géométrie élémentaire* (dont le premier volume, intitulé *Géométrie plane*, avait paru en 1898), il consacre encore tout un « livre », divisé en trois chapitres (relatifs respectivement à la *planimétrie*, au *nivellement* et à l'*arpentage*), à des *Notions sur la topographie*[4]. Pourtant la topographie disparaîtra des

---

[3] Tel dictionnaire de la langue française définit l'*arpentage* comme « l'évaluation de la superficie d'un terrain ». Le même ouvrage précise que le *levé de plan* consiste en « l'ensemble des opérations de mesure nécessaires à l'établissement d'un plan », et ajoute que la *topographie* a pour but « la description détaillée d'un lieu », la « représentation graphique d'un lieu avec indication de son relief ».

[4] *Op. cit.*, p. 282-313. La topographie, qui est « l'art de déterminer la forme d'un terrain », suppose le levé de plan, que le grand mathématicien présente ainsi : « Lever le plan d'un terrain, c'est noter tous les éléments qui

programmes de mathématiques dans les premières décennies du XX^e^ siècle[5], après un compagnonnage de plus d'un siècle. Globalement, la longue tradition d'ouvrir la classe de mathématiques à des savoirs que nous ne savons plus penser comme mathématiques a aujourd'hui vécu, victime de la fureur purificatrice que, sans aucun doute, la « révolution des mathématiques modernes » contribua à accélérer et à rendre irréversible dans ses effets – même si nombre des artisans de cette révolution, formés dans un autre état historique du système scolaire, n'en imaginaient pas toute la puissance destructrice à cet égard.

16. La rétraction du corpus « mathématique » sur le pré carré des mathématiques pures, c'est-à-dire « purifiées », va de pair avec un phénomène plus fondamental, plus subtil, mais non moins ravageur. Je ferai référence ici à la description du travail mathématique qu'a donné autrefois un mathématicien non négligeable, Georges Bouligand (1889-1979) en soulignant la nécessaire tension existant entre d'une part l'activité de *résolution de problèmes*, qu'il note act.(P), et d'autre part l'activité d'élaboration d'une *« synthèse »*, qu'il note act.(S), et qui consiste en la « mise en forme » d'une certaine organisation mathématique[6]. Ainsi écrivait-il (Bouligand 1962, p. 534) :

> L'évolution globale des mathématiques [apparaît] comme la résultante à chaque époque de deux formes d'activité, soient act.(P) et act.(S) orientées, la première vers les problèmes (P), la seconde vers la synthèse (S).

17. Bouligand inscrit sa formule du « dualisme problèmes-synthèse » dans un schéma historique simplifié que l'on peut décrire rapidement comme suit, en utilisant le vocabulaire propre à l'auteur cité.

1) Une *activité mathématique* (autonome) émerge sur la base d'une activité originellement située à mi-chemin entre expérimentalisme et déductivisme lorsque apparaissent des lacunes à première vue infranchissables mais que le mathématicien va pourtant s'efforcer de combler. Ainsi en va-t-il, historiquement, avec les découvertes « critiques » qui ont marqué les mathématiques grecques : découverte de l'infini (en liaison avec le problème des quadratures), qui oblige à franchir un premier seuil, *S* ; découverte, aussi, des difficultés de la mesure (en liaison avec le problème de la diagonale du carré), qui pousse au-delà, appelant à franchir un nouveau seuil, *S*'.

2) Dès lors, physique et mathématique se séparent, « en dépit de leurs objets communs ». La mathématique s'arrête sur des difficultés que la physique ignore (ou croit pouvoir ignorer), s'en empare, mène la chasse aux faux concepts qu'elle s'efforce de remplacer par une conceptualisation propre. Ainsi établit-elle un premier *répertoire* où se rangent côte à côte, sinon pêle-mêle, *notions*, *méthodes*, *résultats* – répertoire qui, cependant, n'est pas encore « la synthèse ».

3) Cette dernière résulte de *refontes*, de réorganisations du répertoire, lesquelles portent autant sur les *concepts* et les *axiomes* (l'axiomatique est l'étape ultime de la synthèse) que sur les *groupements de problèmes*.

---

déterminent la forme et les dimensions de ce plan. Lorsqu'on a levé le plan d'un terrain, on est à même de construire, sur le papier, une figure semblable à la projection horizontale de ce terrain, avec un rapport de similitude donné ».

[5] Elle ne figure plus, on l'a vu en passant, dans le programme de 1925 pour les classes terminales scientifiques.

[6] Bouligand G. (1962), Regards sur la formation mathématique. In Le Lionnais F. (éd.) *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 532-542). Paris : Albert Blanchard.

4) La synthèse, cependant, *est toujours à reprendre*. Sous l'impulsion de nouveaux problèmes, qui se présentent d'abord isolés, et sont souvent issus de la physique (avec laquelle la mathématique est en perpétuelle interaction), un matériel opératoire, emprunté à la synthèse disponible, est mobilisé afin de construire la solution des problèmes repérés. Mais les impulsions ainsi apportées par les problèmes relancent alors la synthèse en une dialectique dont Bouligand propose une analyse fine des conditions de possibilité et des mécanismes concrets, analyse dans laquelle on n'entrera pas ici.

18. Bien entendu, dans ce qui précède, la référence à la physique doit être généralisée à tout l'extramathématique – y compris donc aux sciences de l'homme et de la société. La *tension dialectique* entre problèmes et synthèses, pourtant, existe surtout pour le créateur et pour l'utilisateur. Pour ce passeur qu'est l'enseignant, une telle tension n'est pas de mise et a tôt fait de se dissoudre par la *disparition des problèmes*, au bénéfice – si l'on peut dire – des synthèses. Les problèmes, qui sont le nerf de la guerre de la science en train de se faire, et qui font la valeur d'usage de la science faite, ne sont plus alors, au mieux, que des *« applications » de la science faite*, c'est-à-dire de synthèses que nombre d'enseignements se contentent de faire visiter soigneusement, méthodiquement, scrupuleusement, au lieu d'en montrer les *raisons d'être* en partant des *problèmes générateurs*.

19. Lorsque les choses ainsi s'inversent, il semble qu'on en finisse jamais de mettre en place ce qui n'est déjà plus la synthèse d'un outillage conceptuel et technique spécifique et des réponses qu'ils permettent d'apporter à certaines questions prises comme problèmes, mais une *« théorie » contemplative qu'on n'a jamais fini d'installer dans sa gloire*. De manière caractéristique, le plaidoyer contre les « probas » fournit de ce mécanisme une excellente illustration :

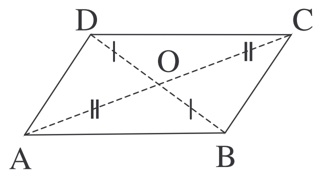
> La déstabilisation des programmes entraînée par l'introduction des probabilités se payera cher au niveau des écoles : comment parler de mouvement brownien à des gens qui ignorent les espaces de Hilbert ou les fonctions continues non dérivables limites uniformes de suites de fonctions, comment parler de calcul différentiel stochastique à des gens qui ne maîtrisent pas le calcul différentiel et les équations différentielles ordinaires, comment parler d'intégrale de Ito à des gens qui ne connaissent rien à celle de Stieltjes, comment parler de processus de Markov à des gens qui ne maîtrisent pas l'algèbre linéaire et les itérations de matrices, comment faire de la théorie de la mesure à des gens qui ne maîtrisent pas la topologie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$. Laissons les professeurs de prépas se centrer sur les apprentissages fondamentaux des mathématiques : arithmétique, algèbre générale, algèbre linéaire et bilinéaire, suites et séries numériques, fonctions d'une variable, suites et séries de fonctions, calcul et géométrie différentielles. Ainsi, les enseignants des cycles suivants disposeront de bases solides pour les approfondissements, y compris en probabilités.

Lorsqu'une synthèse a émergé, le passage du temps est terriblement ravageur, tuant la féconde naïveté, et je dirai même l'habile amateurisme sans lesquels elle ne se fut pas construite. Présentant un cours sur les intégrales stochastiques donné dans le cadre du Séminaire de probabilités de l'Université de Strasbourg en 1974-1975, Paul André Meyer commence par brosser une rapide chronique (qui commence avec Wiener, se poursuit avec Doob, Itô, Skorokhod, McKean, Kunita, Watanabe, etc.) de l'évolution de la théorie, dont il note alors qu'elle « semble avoir atteint une forme à peu près définitive ». Mais il ajoute aussitôt [7] :

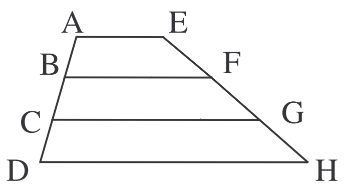
[7]. Meyer (1975).

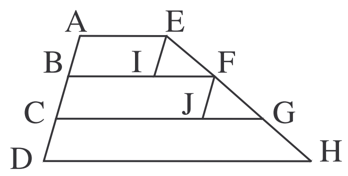
> Seulement, alors qu'autrefois il suffisait de deux heures d'exposé pour traiter l'intégrale d'ITO, et qu'ensuite les belles applications commençaient, il faut à présent un cours de six mois sur les définitions. Que peut-on y faire ? Les mathématiques et les mathématiciens ont pris cette tournure.

20. Les synthèses, qui étaient des *réponses* mises en forme aux *questions* qui faisaient problème, bientôt ne répondent plus à rien : désormais, elles *sont*, et ne renvoient plus qu'à elles-mêmes. *On a les réponses, mais on a perdu les réponses*. Tout notre enseignement secondaire, et notre enseignement supérieur en grande partie sans doute, est atteint profondément par ce mal, que j'illustrerai sur un exemple simple (du niveau du cycle central du collège : 5^e et 4^e). Le parallélogramme est l'une des figures emblématiques de la géométrie élémentaire. Son étude systématique se fait en 5^e, classe où les élèves étudient notamment les propriétés « caractéristiques » du parallélogramme : dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles et de même longueur, et, réciproquement, un quadrilatère convexe dans lequel deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur est un parallélogramme ; dans le parallélogramme ABCD les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu O, et, réciproquement, un quadrilatère dans lequel les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme ; etc. Mais pourquoi étudier cela ? Quelles raisons avons-nous de le faire ? Question cruciale dans une culture mathématique vivante, non réduite à des rites dont on n'entend plus le sens ! Les manuels d'autrefois posaient la question et y apportaient une réponse simple, fondamentale, sobrement mathématique (et non bêtement esthétisante : « Le parallélogramme, c'est une jolie figure, il est formateur d'en étudier les propriétés, etc. »). Ainsi l'auteur d'un *Traité de géométrie élémentaire* publié en 1885 note-t-il dans le chapitre intitulé *Des parallèles et des parallélogrammes*, sous le titre *Utilité des théorèmes concernant les parallélogrammes*, que ces théorèmes servent essentiellement à démontrer que deux segments sont de même longueur, ou que deux angles sont égaux, ou que deux droites sont parallèles. Plus explicitement, un manuel de collège des années 1950 fait, à l'intention de ses jeunes lecteurs, l'évocation suivante : « Au cours d'un problème nous arrivons, par exemple, à prouver que le quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu. Immédiatement nous tirons de ce fait les conséquences suivantes : 1) ABCD est un parallélogramme ; 2) Par suite : AD et BC sont égaux et parallèles, AB et DC sont égaux et parallèles, $\hat{A} = \hat{C}$; $\hat{B} = \hat{D}$ ».



21. Je complète la leçon de ce manuel par un exemple plus développé. Sur la figure ci-dessous à gauche, les droites (AE), (BF), (CG), (DH) sont parallèles et les segments [AB], [BC], [CD] sont de même longueur ; on veut démontrer que les segments [EF], [FG] et [GH] sont de même longueur. La chose peut se faire ainsi. On considère (ci-dessous, à droite) les points I et J, avec (EI) et (FJ) parallèles à (AB).





Les quadrilatères AEIB et BFJC sont donc des parallélogrammes (d'après la définition usuelle du parallélogramme). Il en résulte que l'on a d'une part EI = AB, d'autre part FJ = BC, en sorte que, puisque AB = BC, on a EI = FJ. Les segments [EI] et [JF] ayant même longueur et même direction, le quadrilatère convexe EIJG est un parallélogramme (d'après une propriété caractéristique du parallélogramme rappelée plus haut). Il en résulte que EF = IJ et que (IJ) est parallèle à (FG) : le quadrilatère FIJG est donc un parallélogramme. Par suite, on a IJ = FG, et donc EF = IJ = FG, CQFD.

22. Contre le processus dégénératif que l'on voit à l'œuvre à travers l'exemple précédent, j'invoquerai ici un tout autre schéma épistémologique et didactique, implicite dans les développements qui précèdent. Ce schéma suppose avant toute chose une *question* Q à étudier, une équipe X qui *étudie* Q, une équipe Y qui *dirige* l'étude de Q par X : soit au total un système *didactique* $S(X ; Y ; Q)$. Le fonctionnement de $S(X ; Y ; Q)$ engendre alors *une réponse* R, fragment d'une synthèse en construction : $S(X ; Y ; Q) \Rightarrow R$. La production de la réponse R suppose des *savoirs*, anciens et nouveaux, $R_1, \ldots, R_n$, selon le schéma :

$$S(X ; Y ; Q)_{|R_1, R_2, \ldots, R_n} \Rightarrow R$$

On notera ici que cette production (re)*motive* les « synthèses » $R_1, \ldots, R_n$ et la réponse R elle-même, en ce sens que ces organisations de savoir trouvent là une possible *raison d'être* – une raison d'être étudiées en particulier…

23. La création de R procède généralement d'une *hétérogenèse* disciplinaire au moins relative. Même lorsque Q est une question « purement » mathématique, de même que les savoirs outils $R_1, \ldots, R_n$, il se peut fort bien que plusieurs domaines des mathématiques soient mis à contribution – selon une combinaison spécifique de la question Q étudiée. *C'est là, pour l'essentiel, qu'une discipline déterminée, doit en dernière instance trouver la justification de sa présence dans un curriculum de formation.* Il en résulte que, pour se garder du schéma dégénératif, un curriculum doit être organisé à partir de *quelques grandes questions* $Q_{01}, \ldots, Q_{02}, \ldots, Q_{0p}$, dont l'étude va engendrer une arbre (ou plutôt une *forêt*) de questions relevant de domaines disciplinaires plus ou moins différenciés, dont les mathématiques.

24. De manière plus complète, une formation doit permettre, non seulement de construire des réponses aux *questions vives* du champ d'activité auquel on prétend former, mais encore, de manière concomitante, de *déconstruire les réponses institutionnelles existantes*, voire de *déconstruire le questionnement dominant*, dès lors qu'il fait obstacle à l'émergence d'un questionnement idoine. Là encore, dans ce travail de déconstruction, les mathématiques auront à intervenir pour permettre d'identifier et de traiter les mathématiques cristallisées, devenues invisibles, mais opérantes dans la fabrication de la réponse , dans les réponse apparemment les plus innocentes de mathématiques.

25. La mise en œuvre du schéma indiqué bute aujourd'hui sur plusieurs obstacles. Le premier est le pli anciennement pris, mais délétère entièrement, qui a figé l'organisation curriculaire autour de la présentation muséographique d'œuvres coupées en général de leurs origines pour être appréciée dans la pureté de leur éclat singulier. C'est ce pli que l'on retrouve semble-t-il dans les cartels présentant les matières étudiées lors du 1er semestre de la maîtrise MASS du Département de sciences humaines dans les termes suivants :

E.14 : Optimisation et Programmation Mathématique [50 h]
E.15 : Analyse de données [25 h]
E.16 : Relations, Graphes et Hypergraphes [25 h]
E.17a : Calculabilité et Complexité [25 h]
E.17b : Décidabilité [25 h]
E.17c : Complétude [25 h]
E.17d : Langages et Grammaires [25 h]

E.17e : Théorie de l'Information [25 h]
E.17f : Combinatoire [25 h]
E.18 : Exemple de recherche : Usages et gestion de l'eau [50 h]
E.19 : Techniques d'enquête et méthodologie [50 h]
E.20 : Description et interprétation en Sciences Sociales [50 h]

Les matières au choix (E 17a à f) pourraient par exemple traduire le fait que, parmi les q questions génératrices du curriculum, certaines d'entre elles (disons de Q_{m+1} à Q_p) sont « au choix » et que, selon le choix fait, les savoirs utiles varieront ; que, par exemple si l'on étudie la question Q_{m+3}, on aura besoin d'un outillage que fournit tel module d'enseignement, etc. Je suppose qu'il n'en est rien. Je suppose aussi que l'on ne prétend pas que la *seule* grande question digne de figurer dans le répertoire des *questions vives du champ d'activité* auquel on forme et *génératrices du curriculum de formation* n'est pas celle des usages et de la gestion de l'eau, qui est sans doute, au reste, une grande question.

26. Un deuxième obstacle est plus actuel, et davantage consonant avec les temps que nous vivons. Il y a aujourd'hui toute une *pathologie du rapport à la connaissance* qui, je pense, imprègne profondément l'épistémologie dominante, celle de l'homme de la rue, et qui s'affiche avec vigueur et arrogance dans les médias : d'un côté, du côté par exemple des jeux télévisés ou du *« Trivial Poursuite »*, la connaissance, instrumentalisée, s'exhibe sans motif, en pure perte de factice érudition ; d'un autre côté, la connaissance utile à l'intelligence du monde, jugée trop complexe, est presque à tout coup volontairement bannie par exemple des magazines télévisées et autres, en vertu de l'inepte postulat que le monde serait immédiatement visible, lisible, dicible. À bien des égards, l'enseignement muséographique auquel j'ai fait allusion apparaît comme une préparation subreptice à l'épistémologie des jeux télévisés. Ce n'est qu'en dépassant ce formidable épistémologique que nous pourrons consentir à repenser ce qui n'est pas que le problème du Département de sciences humaines de Luminy