LES GRANDEURS EN MATHÉMATIQUES AU COLLÈGE

Partie II. Mathématisations

Yves CHEVALLARD
IUFM d'Aix-Marseille

Marianna BOSCH
Université Ramon Llull, Barcelone

Résumé. Ce travail poursuit l'étude dont la première partie a paru dans le numéro 55 de *Petit x*. Son objet principal est la mathématisation des notions d'*espèce* et de *système* de grandeurs, avec une attention particulière aux *besoins numériques* corrélatifs.

1. Objets, mesures, grandeurs

1.1. La pluralité des espèces de grandeurs

L'oubli de la notion de grandeur ferme les mathématiques sur elles-mêmes. En sens inverse, l'exploration de l'univers des grandeurs constitue le point de départ de l'exploration mathématique de la diversité du monde. L'introduction mathématique au monde qui nous entoure suppose donc prise de contact et familiarisation avec l'univers des grandeurs.

À cet égard, il est d'abord essentiel de rappeler qu'un *même* objet est en règle générale le support de grandeurs *d'espèces différentes*, usuelles ou non. La considération de chacune de ces espèces de grandeurs a ses raisons d'être que l'enseignement prodigué devra s'efforcer de faire émerger en situation, et que les professeurs doivent donc d'abord, pour leur propre compte, retrouver, en luttant contre les phénomènes de naturalisation qui tendent à nous faire confondre objet et grandeur. C'est ce que rappelle l'extrait suivant d'une brochure consacrée naguère par l'APMEP aux mots « Grandeur » et « mesure » (APMEP 1982, p. 105) :

> « À propos d'un même objet, plusieurs grandeurs peuvent être envisagées. Le type de manipulation à laquelle on soumet cet objet permet de préciser la grandeur dont il s'agit, ce qui conduit à un vocabulaire approprié :
>
> pour une feuille de papier : la longueur de son bord, ou périmètre, et l'aire de sa surface ; on suit le bord du bout du doigt, on balaie la surface de la paume de la main ;
>
> pour une portion de route, sa longueur s'il s'agit de la parcourir, son aire s'il s'agit de la goudronner, [...] sa pente s'il s'agit d'y faire passer de lourds convois [...]. »

L'abord de la notion de grandeur à partir des usages du langage ordinaire recèle quelques pièges qu'il convient de bien repérer. Considérons ainsi les deux cas suivants (*ibid.*, p. 106) :

> « "Ce récipient est plus grand que cet autre" : s'agit-il de sa hauteur, de sa plus grande dimension horizontale, de son volume intérieur ou capacité, de son volume extérieur ?
>
> "La planète Saturne est grosse comme 95 Terres" : s'agit-il de volumes, de diamètres, de masses ? »

Dans ce dernier cas, bien sûr, des données allogènes permettent de trancher (*ibid.*) :

« Le diamètre équatorial de Saturne, anneaux exclus, est 9,4 fois celui de la Terre : son volume est 745 fois celui de la Terre (et non $9{,}4^3$ [≈ 831], car elle est sensiblement plus aplatie que la Terre). Sa masse est 95 fois celle de la Terre. Les mots “grosse comme” signifiaient donc : “lourde comme”. »

1.2. De la mesure à la grandeur

Comment formaliser les observations précédentes [1] ? Considérons un ensemble non vide X d'objets x, et supposons définie sur X une application μ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. L'application μ définit sur X une relation d'équivalence par : $x \sim_\mu y \Leftrightarrow \mu(x) = \mu(y)$. Si $\mu(x) = \mu(y)$, on dira que x et y sont μ-équivalents. Appelons μ-grandeur de x la classe d'équivalence $\tilde{x} = \mu^{-1}(\mu(x)) = \{y \in X \,/\, \mu(y) = \mu(x)\}$. L'application μ est constante sur $\tilde{x}$; on appelle *mesure* de la μ-grandeur $\tilde{x}$, et on note $\mu(\tilde{x})$, le nombre $\mu(x)$: on a ainsi $\mu(\tilde{x}) = \mu(x)$. Pour tout $y \in \tilde{x}$, on a bien sûr $\mu(y) = \mu(x)$: tout $y \in \tilde{x}$ a même mesure de sa μ-grandeur, et deux objets x et y de X ont même μ-grandeur si, et seulement si, ils sont μ-équivalents.

Notons $X/\sim_\mu$ (et, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, $X/\sim$) ou $G(X, \mu)$ (et, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, G) l'ensemble des classes d'équivalence $\tilde{x}$ pour $x \in X$: $G = X/\sim = \{\, \tilde{x} \,/\, x \in X \,\}$. G est appelé, traditionnellement, une *espèce* de grandeurs. Un élément $g \in G$ est une μ-grandeur sur X. Si $g \in G$, le nombre $\mu(x)$ est indépendant de l'objet x choisi dans g : on l'appelle la *mesure* de la μ-grandeur g et on le note $\mu(g)$. Il est clair que l'application de G dans $\mathbb{R}_+$ ainsi définie est injective.

Le schéma précédent permet d'abord de préciser une remarque déjà faite : sur un ensemble X peuvent être définies *plusieurs* applications μ_0, μ_1, μ_2, etc., à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. À un *même* objet $x \in X$ peuvent ainsi être attachées *plusieurs* grandeurs $\tilde{x}_0$, $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$. En outre, étant donné deux objets x et y, il se peut que x et y aient *même* μ_0-grandeur sans être pour autant μ_1-équivalents. Le cas des aires et des périmètres des régions polygonales du plan, rappelé ci-après, est à cet égard bien connu.

1. Prenons pour X l'ensemble des rectangles du plan muni d'une unité de longueur. On définit l'application α comme associant à chaque rectangle x son aire $\alpha(x)$: on obtient ainsi une partition A de l'ensemble des rectangles du plan, deux rectangles x et y appartenant à une même classe d'équivalence $a \in A$ si et seulement si ces rectangles ont même aire : $\alpha(x) = \alpha(y)$.

2. Considérons ensuite l'application π de X dans $\mathbb{R}_+$ qui associe à chaque rectangle x son périmètre $\pi(x)$: on obtient ainsi une nouvelle partition P de X, deux rectangles x et y appartenant à une même classe d'équivalence $p \in P$ si et seulement si ces rectangles ont même périmètre : $\pi(x) = \pi(y)$. On sait que deux rectangles α-équivalents ne sont pas en général π-équivalents, et inversement.

3. Si on a $\alpha(x) = \alpha(y)$ et $\pi(x) = \pi(y)$, on vérifie aisément que x et y sont isométriques. Inversement, soit $x \in X$ et $p_0 \in \mathbb{R}_+$; cherchons s'il existe $y \in X$ tel que x et y aient même aire et que $\pi(y) = p_0$. Si x a pour mesures de ses côtés s et t, on cherche $u, v \in \mathbb{R}_+$ tels que $uv = st$ et $u + v = \frac{p_0}{2}$. Les nombres u et v cherchés sont les solutions, s'il en existe, de l'équation $U^2 - \frac{1}{2}p_0U + st = 0$. Comme le discriminant vaut $\Delta = \frac{1}{4}p_0^2 - 4st$, le rectangle y cherché existe, et est unique à une isométrie près, si $p_0^2 \geq 16st$. Ainsi, pour tout $p_0 \geq 4\sqrt{\alpha(x)}$ il existe y tel que $\pi(y) = p_0$ et $\alpha(y) = \alpha(x)$. On retrouve là que le rectangle d'aire donnée a_0 ayant le périmètre minimal est le carré de côté $\sqrt{a_0}$.

---

[1] Ce qui suit s'appuie sur divers travaux, notamment Bourbaki 1963 ainsi que Rouche 1992 et 1994.

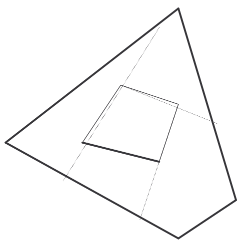
4. Soit $x \in X$ et $a_0 \in \mathbb{R}_+$; cherchons s'il existe $y \in X$ tel que x et y aient même périmètre et que $\alpha(y) = a_0$. Si x a pour mesures de ses côtés s et t, on cherche donc $u, v \in \mathbb{R}_+$ tels que $uv = a_0$ et $u + v = s + t$. Les nombres u et v sont les solutions, s'il en existe, de l'équation $U^2 - (s + t)U + a_0 = 0$. Comme le discriminant vaut $\Delta = (s + t)^2 - 4a_0$, le rectangle y cherché existe, et est unique à une isométrie près, si $a_0 \leq \left(\frac{s+t}{2}\right)^2$. On retrouve que le rectangle de périmètre p_0 donné ayant l'aire maximale est le carré de côté $\frac{p_0}{4}$.

1.3. Addition et comparaison des grandeurs

Soit X un ensemble non vide, μ une application de X dans $\mathbb{R}_+$ et soit $g_1, g_2 \in G = G(X, \mu)$. On pose $g_1 < g_2$ si et seulement si $\mu(g_1) < \mu(g_2)$: il est clair que, soit $g_1 < g_2$, soit $g_1 = g_2$, soit $g_2 < g_1$ (situation que, selon l'usage, on note $g_1 > g_2$). Si $x \in g_1$ et $y \in g_2$ et si $g_1 < g_2$ (respectivement, $g_1 > g_2$), on dira que x est moins μ-grand que y (resp., plus μ-grand que y). Si $g_1 = g_2$ on dit que x et y ont même μ-grandeur, ou qu'ils sont μ-équivalents. On dispose ainsi d'une relation d'ordre total sur G.

S'il existe $g \in G$ tel que $\mu(g) = \mu(g_1) + \mu(g_2)$, un tel élément est unique (puisque μ est injective sur G) et on peut poser $g_1 + g_2 = g$. Si, de même, il existe $g \in G$ tel que $\mu(g_2) = \mu(g_1) + \mu(g)$, avec $\mu(g) > 0$, g est unique, et on pose $g = g_2 - g_1$. On a alors $\mu(g_2 - g_1) = \mu(g) = \mu(g_2) - \mu(g_1)$. On dispose ainsi d'une addition et d'une soustraction *partielles* sur G. Si, maintenant, il existe $g \in G$, avec $\mu(g) \neq 0$, tel que $g_2 = g_1 + g$, on a $\mu(g_2) = \mu(g_1) + \mu(g) > \mu(g_1)$, et donc $g_1 < g_2$.

Comparer deux μ-grandeurs $g_1, g_2 \in G$, c'est déterminer si $g_1 < g_2$, ou $g_1 = g_2$, ou $g_1 > g_2$. Un cas particulier important de comparaison de μ-grandeurs est celui où, deux objets $x, y \in X$ étant donnés, on veut comparer les μ-grandeurs $g(x)$ et $g(y)$. La technique qui se laisse déduire du schéma de définition proposé jusqu'ici consiste évidemment à déterminer les μ-mesures $\mu(x)$ et $\mu(y)$ et à comparer ces nombres : cette technique est même, *a priori*, la *seule disponible*. Mais il existe souvent des critères permettant de conclure sans déterminer les μ-mesures : si x et y sont des régions rectangulaires du plan, et si $x \subset y$, on pourra conclure sans plus d'examen que $\alpha(x) < \alpha(y)$, c'est-à-dire que x a une aire inférieure à celle de y. D'une manière générale, la capacité à comparer les μ-grandeurs de deux objets x et y peut être regardée comme un indice de familiarité « empirique » avec la notion de μ-grandeur sur X. C'est ainsi que nous sommes sans doute moins familiers avec le périmètre des rectangles qu'avec leur aire : si deux rectangles x et y sont tels que $x \subset y$, peut-on conclure à tout coup que $\pi(x) < \pi(y)$?



La réponse est positive, certes. Mais, dans la culture mathématique scolaire d'aujourd'hui, elle est peut-être moins assurée que dans le cas de la comparaison des *aires*. Pour la justifier, on établissait autrefois, au collège, à l'aide de l'inégalité triangulaire, le théorème suivant : *La longueur d'une ligne polygonale convexe fermée est inférieure à celle de toute ligne polygonale fermée qui l'enveloppe.* La démonstration est laissée à la sagacité du lecteur (voir la figure).

Lorsque, sur l'ensemble X, sont définies deux applications μ_0 et μ_1 à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, la familiarité avec les μ_0-grandeurs se manifeste aussi dans le fait de ne pas conclure sans précaution que $\mu_0(x) < \mu_0(y)$ parce que, de manière « évidente », on aurait $\mu_1(x) < \mu_1(y)$: une « grosse » boule et une « petite » boule – en *volume* – peuvent avoir des *masses* que leur apparence ne laisse pas présager. Bref, il s'agit de ne pas confondre des *espèces* de grandeurs *différentes* – même quand leur « support » sensible est le même ! À cet égard, il n'est pas sans intérêt de rappeler que la capacité toute pratique d'évaluer *d'un coup d'œil* une grandeur donnée d'une espèce donnée a pu être un objectif des *leçons de choses* de l'enseignement primaire d'autrefois. Dans une conférence pédagogique prononcée le 31 août 1878, Ferdinand Buisson, cheville ouvrière de la réforme à laquelle le nom de Jules Ferry reste attaché, soulignait ainsi la valeur distinctive de cette capacité, regardée par lui comme emblématique de la formation « primaire »(cité *in* Maury 1996, p. 32) :

> « On formera de même leur œil à la mesure et à l'évaluation approximative des longueurs, des distances, des superficies, des poids, des volumes. Il y a des élèves de nos lycées, très forts en mathématiques, qui ne seraient pas capables d'estimer la contenance d'un champ, le poids d'un sac de blé, ou le volume d'un tas de pommes de terre. Je voudrais que pas un élève ne sortît de l'école primaire sans avoir l'œil et le toucher sinon infaillibles, du moins très exercés à ces mesurages intuitifs... »

2. Axiomatiser la notion d'espèce de grandeurs

2.1. Un univers d'objets assez riche

Le schéma formel introduit dans ce qui précède est en fait insuffisant pour mathématiser l'idée commune de grandeur. Pour le voir, considérons la situation suivante. Soit X un ensemble non vide, et μ_0 et μ_1 deux applications de X dans $\mathbb{R}_+$. On suppose : 1) que $G(X, \mu_0) = G(X, \mu_1)$, c'est-à-dire que μ_0 et μ_1 définissent sur X la *même* relation d'équivalence ~ ; 2) que la relation d'ordre et l'addition (partielle) respectivement définies sur $X/\sim = G(X, \mu_0) = G(X, \mu_1)$ par μ_0 et μ_1 sont *identiques*. Il n'est pas déraisonnable alors de s'attendre à ce qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $\mu_1 = k\mu_0$. Or cela ne se produit pas nécessairement. Soit ainsi $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ avec $\mu_0(g_1) = 1$, $\mu_0(g_2) = 2$, $\mu_0(g_3) = 4$ et $\mu_1(g_1) = 1$, $\mu_1(g_2) = 2$, $\mu_1(g_3) = 5$. On voit que μ_0 et μ_1 définissent la même relation d'ordre sur G, et il en va de même s'agissant de l'addition (elle n'est jamais définie, ni pour μ_0 ni pour μ_1) ; pourtant il n'existe pas de réel k tel que $\mu_1 = k\mu_0$.

Une des raisons pour lesquelles le résultat escompté est mis en défaut tient au fait que G *contient trop peu d'éléments*. On va donc imposer à G, par voie axiomatique, d'être assez riche pour que le résultat attendu devienne vrai. Comme y incitent les remarques précédentes, on partira pour cela, non des grandeurs elles-mêmes, mais des *objets* supports de ces grandeurs éventuelles. Écartant provisoirement la mesure μ, on suppose donc un ensemble X d'objets et une relation d'équivalence ~ sur X ; l'ensemble $G = X/\sim$ sera l'ensemble de grandeurs visé. Pour des raisons qui s'éclairciront rapidement, on suppose en outre que chaque classe d'équivalence $\tilde{x}$ (pour $x \in X$) est *infinie*.

2.2. Des objets aux grandeurs

L'arithmétique traditionnelle [2] nommait grandeur « tout ce qui peut être augmenté ou diminué, comme la largeur d'une route, la durée d'un trajet, la vitesse d'un véhicule, le nombre des feuillets d'un livre, etc. », et réservait l'appellation de grandeurs *mathématiques* à

---

[2] Voir la première partie de ce travail (Chevallard & Bosch 2000).

« celles pour lesquelles on peut [en outre] définir l'égalité et la somme », comme « les surfaces, les volumes, les angles, les arcs, les forces, les quantités de chaleur, etc. ». Pour imprécises qu'elles soient, ces formulations, on va le voir, constituent le socle sur lequel le travail d'axiomatisation de la notion d'espèce de grandeurs peut prendre appui.

On suppose d'abord qu'on a défini sur X une relation de *préordre total* $\prec$ associée à la relation d'équivalence ~, soit une relation transitive telle que, pour tous x, y, un et un seul des trois énoncés $x \prec y$, $y \prec x$, $x \sim y$ est vrai. On peut ainsi dire que deux objets ont même grandeur ou non, et, dans ce dernier cas, on peut comparer ces deux objets du point de vue de l'espèce de grandeur considérée.

On suppose ensuite qu'on a défini sur X une opération binaire, notée $\oplus$, telle que

1) $x \oplus y$ est défini si, et seulement si, $x \neq y$;

2) si $x \neq y$, alors $x \oplus y \sim y \oplus x$, et si, de plus, $x \neq z$ et $y \sim z$, alors $x \oplus y \sim x \oplus z$;

3) si $(x \oplus y) \oplus z$ et $x \oplus (y \oplus z)$ sont définis, alors $(x \oplus y) \oplus z \sim x \oplus (y \oplus z)$.

On impose enfin trois conditions unissant ~, $\prec$ et $\oplus$:

1) si $x \neq y$, alors $x \prec x \oplus y$;

2) si $x \prec z$, alors il existe $y \neq x$ tel que $x \oplus y \sim z$;

3) pour tout $x \in X$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_1, \ldots, y_n$ tels que $y_1 \sim \ldots \sim y_n$, $y_1 \oplus \ldots \oplus y_n$ est défini et $x \sim y_1 \oplus \ldots \oplus y_n$.

Notons qu'il résulte des conditions précédentes que, si $x \oplus u \sim x \oplus v$, alors $u \sim v$: si, au contraire, on avait par exemple $u \prec v$, il existerait w tel que $u \oplus w \sim v$, et il viendrait $x \oplus u \prec (x \oplus u) \oplus w \sim x \oplus (u \oplus w) \sim x \oplus v$, soit $x \oplus u \prec x \oplus v$.

À partir de la structure $(X, \sim, \prec, \oplus)$, on définit alors sur $G = X/\sim$

1) un *ordre total* : on pose $\tilde{x} < \tilde{y}$ s'il existe $x' \in \tilde{x}$ et $y' \in \tilde{y}$ tel que $x' \prec y'$ (cette dernière inégalité est alors vraie pour tout $x' \in \tilde{x}$ et tout $y' \in \tilde{y}$) ;

2) une *addition* : on définit la somme par l'égalité

$$\tilde{x} + \tilde{y} = \{z \in X \,/\, \exists\, x' \in \tilde{x}, y' \in \tilde{y} \text{ tel que } z \sim x' \oplus y'\}$$

(on vérifiera que l'addition est alors bien définie) ;

3) une *soustraction* : $\tilde{x} - \tilde{y}$ est l'unique élément de G tel que $\tilde{y} + (\tilde{x} - \tilde{y}) = \tilde{x}$;

4) une *division* par $n \in \mathbb{N}^*$: on pose $\dfrac{\tilde{x}}{n} = \tilde{y}$ où $y \sim y_1 \sim \ldots \sim y_n$, avec $x \sim y_1 \oplus \ldots \oplus y_n$.

Pour tout $g \in G$, on pose en outre $1g = g$. On a alors le résultat suivant : pour $g, g_1, g_2, g_3 \in G$,

GR1. un et un seul des énoncés $g_1 < g_2$, $g_1 = g_2$, $g_1 > g_2$ est vrai ;

GR2. Si $g_1 < g_2$ et $g_2 < g_3$ alors $g_1 < g_3$;

GR3. $g_1 + g_2 = g_2 + g_1$;

GR4. $(g_1 + g_2) + g_3 = g_1 + (g_2 + g_3)$;

GR5. $g_1 < g_1 + g_2$;

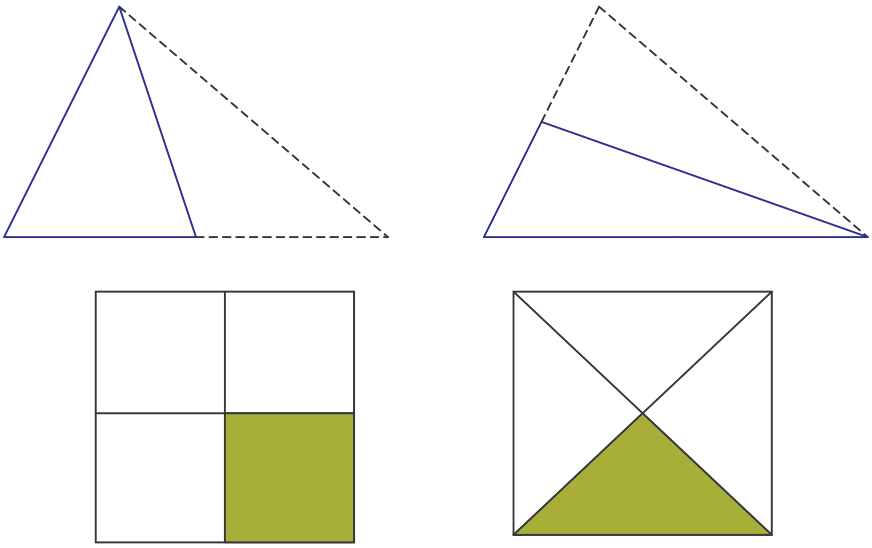
GR6. Si $g_1 < g_2$ alors il existe une unique grandeur $h \in G$ telle que $g_1 + h = g_2$;

GR7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique grandeur $h \in G$ telle que $g = nh$.

On obtient ainsi une première axiomatique de la notion d'espèce de grandeurs $(G, <, +)$.

2.3. La nécessité des grandeurs

Arrêtons-nous un instant sur les restrictions imposées, dans ce qui précède, aux opérations sur les *objets*. On ne saurait ajouter, concrètement, un objet x *à lui-même* : on ne peut l'ajouter qu'à un *autre* objet, y, ayant *même grandeur* que x. La chose va de soi en pratique ; elle est ici prise au sérieux. Mais c'est surtout la condition relative au *fractionnement* qui doit être méditée : les objets $y_1, \ldots, y_n$ de même grandeur tels que $y_1 \oplus \ldots \oplus y_n$ et x aient même grandeur *ne sont pas uniques* : pour $n = 2$, par exemple, on ne peut pas parler de *la* moitié de x, tout simplement parce que, en dehors d'une convention sociale plus ou moins explicite, l'*« objet moitié »* de x *n'existe pas* : il existe en général une infinité de couples d'objets distincts (y_i, y_j) tels que $y_i \sim y_j$ et $y_i \oplus y_j = x$. Les figures ci-dessous illustrent ainsi *l'inexistence* d'une « moitié de triangle » et d'un « quart de carré » du point de vue de l'*aire* (on notera en passant que les *périmètres* de ces « moitiés », d'une part, de ces « quarts », d'autre part, sont *inégaux*).



Nombre d'énoncés proposés dans les manuels sont à cet égard *lourdement fautifs*, tels les suivants [3] :

« Dites, pour chacun des dessins ci-dessous, quelle *fraction du cercle* a été peinte en rouge »

« Quelle *fraction de tarte* reste-t-il ? Quelle *fraction de tarte* a-t-on déjà mangée ? »

« L'aire d'un champ est de 6394 m^2. On vend *les 3/4 du champ*. Quelle est l'aire de la partie vendue ? »

On voit que, non seulement, on nous parle ici d'objets *non définis*, mais qu'on se réfère à travers eux à des grandeurs dont la *nature* n'est pas claire, *n'étaient les conventions de*

[3] C'est nous qui soulignons.

l'usage scolaire : en pratique, on peut par exemple fort bien préférer la « moitié supérieure » d'un gâteau (et, surtout, *d'un gratin…*) à sa « moitié inférieure », même si le faire savoir est contraire aux règles de la civilité.

L'oubli historiquement récent, dans la culture mathématique scolaire, des grandeurs au profit des seuls objets supports des grandeurs a conduit en particulier à diffuser parmi les professeurs de mathématiques l'ineptie selon laquelle on ne saurait, « en toute rigueur », parler que de fractions *inférieures à* l'unité, au motif que cela n'aurait pas de sens de parler, par exemple, des *quatre tiers* d'un gâteau. On a vu que, en réalité, cela n'a pas davantage de sens de parler de la *moitié* ou des *trois quarts* d'un gâteau ! En revanche, les choses s'éclairent dès qu'on parle, non de fractions *d'objets*, mais de fractions *de grandeurs*, ainsi que le fait l'énoncé suivant :

> « Un brocanteur avait acheté un meuble 380 F. Il le revend et son bénéfice est *les 2/5 du prix d'achat*. Quel a été, en francs, son bénéfice ? Quel a été le prix de vente ? »

Cette *impossible arithmétique* des « objets » explique la nécessité absolue d'une *théorie des grandeurs*, qui peut seule fournir des entités, les grandeurs, sur lesquelles on puisse opérer comme d'aucuns rêvent – vainement, on l'a vu – d'opérer *sur les objets eux-mêmes*. Mais le gain qu'apporte une telle théorie a un coût, celui du *détour par les grandeurs* dans le trajet qui conduit des *objets* aux *mesures*, et un coût que nous avons aujourd'hui *désappris à assumer*. Par contraste, on doit rappeler que l'enseignement des mathématiques l'avait autrefois pris en charge sans façon, ainsi qu'en témoigne ce passage d'un manuel d'arithmétique pour les classes de 4^e et 3^e dû à Anna et Élie Cartan (Cartan & Cartan 1934, p. 64).

I. — PARTIE ALIQUOTE D'UNE GRANDEUR

103. — Grandeurs divisibles ou continues. — Il existe, parmi les grandeurs, certaines d'entre elles qui peuvent être divisées, au moins par la pensée, en un nombre absolument quelconque de parties égales, par exemple : la longueur d'une pièce de ruban, la surface d'un champ, la quantité de vin contenue dans un tonneau, etc.

De telles grandeurs sont dites *divisibles* ou *continues*.

104. — Définition : ***Une grandeur continue est dite une partie aliquote d'une autre grandeur de même espèce, si la première grandeur est contenue un nombre entier de fois dans la seconde.***

Dans la figure 10, la longueur CD, contenue 3 fois dans AB, est une partie aliquote de AB.

On dit aussi que AB est un *multiple* de CD :

$$AB = 3CD$$

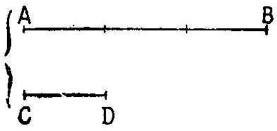


Fig. 10.

On dit encore que le nombre entier 3 *mesure* la longueur AB quand on prend CD pour unité.

On voit ici que c'est, non une pièce de ruban, mais sa *longueur*, non un champ, mais sa *surface*, non le contenu d'un tonneau de vin, mais la *quantité* correspondante de vin que l'on peut diviser « en un nombre absolument quelconque de parties égales », ces parties étant des parties (« aliquotes ») de *grandeurs*, et non des parties (« concrètes ») d'un ruban, d'un champ, ou du contenu d'un tonneau [4].

2.4. Calcul sur les grandeurs d'une espèce donnée

Pour faciliter la suite des choses, on ajoute à G une grandeur « théorique », la *grandeur nulle*, notée 0_G, caractérisée par le fait que, pour tout $g \in G$, on a $g > 0_G$ et $0_G + g = g + 0_G = g$. L'introduction de 0_G oblige à retoucher certains des axiomes retenus, et conduit à adopter une espèce de grandeurs comme une structure $(G^\#, <, +, 0_G)$, où $G^\#\backslash\{0_G\} = G \neq \varnothing$, satisfaisant les conditions suivantes, où g, g_1, g_1, g_2, g_3 prennent leurs valeurs dans $G^\#$:

GR1. un et un seul des énoncés $g_1 < g_2$, $g_1 = g_2$, $g_1 > g_2$ est vrai ;
GR2. si $g_1 < g_2$ et $g_2 < g_3$ alors $g_1 < g_3$;
GR3. $g_1 + g_2 = g_2 + g_1$;
GR4. $(g_1 + g_2) + g_3 = g_1 + (g_2 + g_3)$;
GR5. si $g_2 \neq 0_G$ alors $g_1 < g_1 + g_2$;
GR6. si $g_1 < g_2$ il existe une unique grandeur h telle que $g_1 + h = g_2$;
GR7. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une unique grandeur h telle que $g = nh$;
GR8. si $g \neq 0_G$ alors $0_G < g$ et $0_G + g = g + 0_G = g$.

Dans ce qui suit, on présente *more geometrico* les principales propriétés qui découlent de ces axiomes.

1) Si $g_1 < g_2$, alors $g_1 + h < g_2 + h$.

D'après GR6, GR8 et GR1, il existe $g_1^* \neq 0_G$ tel que $g_1 + g_1^* = g_2$. D'après GR3 et GR4, on a alors $g_2 + h = (g_1 + g_1^*) + h = (g_1 + h) + g_1^*$. Comme, d'après GR5, $g_1 + h < (g_1 + h) + g_1^*$, il vient ainsi $g_1 + h < (g_1 + g_1^*) + h$, soit $g_1 + h < g_2 + h$.

On notera que, dans la démonstration précédente, on ne fait pas usage de la clause d'unicité de GR6. En fait, cette clause est redondante. Supposons en effet que l'on ait $g_1 + h = g_1 + h^*$. Si l'on avait par exemple $h < h^*$, on aurait, d'après la proposition 1, $h + g_1 < h^* + g_1$, soit $g_1 + h < g_1 + h^*$, ce qui, d'après GR1, est incompatible avec l'hypothèse que $g_1 + h = g_1 + h^*$. On a donc $h = h^*$.

2) Si $g + h_1 = g + h_2$, alors $h_1 = h_2$.

Il s'agit d'un corollaire de la proposition précédente. La loi de simplification est donc valide dans $(G^\#, +)$.

3) Si $g_1 < g_2$ et $h_1 \leq h_2$, alors $g_1 + h_1 < g_2 + h_2$.

[4] Dans le formalisme introduit jusqu'ici, on dira que $h \in G$ est une partie *aliquote* de $g \in G$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g = nh$, c'est-à-dire si g est un multiple entier de h.

On a $g_1 + h_1 < g_2 + h_1$ et $h_1 + g_2 \leq h_2 + g_2$, et donc $g_1 + h_1 < g_2 + h_2$.

Pour continuer, posons, pour tout $g \in G$, l'égalité $0g = 0_G$. On a alors le résultat suivant.

4) Si $g \neq 0_G$, et si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $ng \neq 0_G$.

On a : $ng = g + (n-1)g$. Si $(n-1)g = 0_G$, alors $ng = g$; or, d'après GR8, $g > 0_G$, donc $ng > 0_G$,. Si $(n-1)g \neq 0_G$, alors $ng > g$ d'après GR5, et donc $ng > 0$ d'après GR2.

On déduit de là que la clause d'unicité de GR7 est, elle aussi, inutile. Supposons en effet que l'on ait $nh = nh^*$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Si l'on avait par exemple $h < h^*$, il existerait $g \neq 0_G$ tel que $h + g = h^*$ et on aurait $nh^* = nh + ng$, avec, d'après la proposition 4, $ng \neq 0_G$; d'où, d'après GR5, $nh < nh + ng$, soit $nh < nh^*$, ce qui est incompatible avec le fait que $nh = nh^*$. On a donc $h = h^*$.

5) Si $g < h$, et si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $ng < nh$.

6) Soit $g \neq 0_G$, et $n, p \in \mathbb{N}$. Si $n < p$ alors $ng < pg$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + m = p$. On a : $pg = (n + m)g = ng + mg$. D'après la proposition 4, $mg \neq 0_G$ et donc, d'après GR5, $ng < ng + mg$, soit $ng < pg$.

7) L'ensemble $G^\#$ est infini.

8) Soit $g \neq 0_G$, et $n, p \in \mathbb{N}$. Si $ng = pg$ (resp., $ng < pg$) alors $n = p$ (resp., $n < p$).

Soit $g \in G^\#$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En s'autorisant de GR7, on désigne maintenant par $\frac{1}{n}g$ l'unique grandeur h telle que $nh = g$: on a donc $n\left(\frac{1}{n}g\right) = g$.

9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$. Si $g \neq 0_G$ alors $0_G < \frac{1}{n}g < g$.

Si l'on avait $\frac{1}{n}g = 0_G$, on aurait $g = n\left(\frac{1}{n}g\right) = n0_G = 0_G$. On a donc $\frac{1}{n}g > 0_G$. D'après la proposition 4, $(n-1)\left(\frac{1}{n}g\right) \neq 0_G$ et donc, d'après GR5, $\frac{1}{n}g < \frac{1}{n}g + (n-1)\left(\frac{1}{n}g\right)$; comme $\frac{1}{n}g + (n-1)\left(\frac{1}{n}g\right) = n\left(\frac{1}{n}g\right) = g$, il vient $\frac{1}{n}g < g$.

10) L'ensemble G n'a pas de plus petit élément.

11) Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $g \neq 0_G$. Si $\frac{1}{n}g = \frac{1}{p}g$ alors $n = p$.

Soit $h = \frac{1}{n}g = \frac{1}{p}g$; d'après la proposition 9, $h \neq 0_G$. Puisque $nh = ph$, d'après la proposition 8, on a $n = p$.

12) Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$ et $g, h \in G^\#$. On a :

$$\frac{1}{n}(mg) = m\left(\frac{1}{n}g\right) ; \frac{1}{n}(g+h) = \frac{1}{n}g + \frac{1}{n}h ; \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}g\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{n}g\right) = \frac{1}{np}g.$$

La démonstration est laissée au lecteur.

13) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $g, h \in G^\#$. Si $g < h$ alors $\frac{1}{n}g < \frac{1}{n}h$.

Si l'on avait $\frac{1}{n}g = \frac{1}{n}h$ ou $\frac{1}{n}g > \frac{1}{n}h$, d'après la proposition 5, on aurait $g = h$ ou $g > h$, contrairement à l'hypothèse.

14) Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $g \neq 0_G$. On a : $n < p \Leftrightarrow \frac{1}{n}g > \frac{1}{p}g$.

Supposons $n < p$ et $\frac{1}{n}g \leq \frac{1}{p}g$; d'après la proposition 5, on a alors $np\left(\frac{1}{n}g\right) \leq np\left(\frac{1}{p}g\right)$, soit $pg \leq ng$, ce qui contredit la proposition 6 : on a donc $\frac{1}{n}g > \frac{1}{p}g$. Inversement si l'on a $\frac{1}{n}g > \frac{1}{p}g$ et si l'on avait $n \geq p$, d'après le résultat précédent on aurait $\frac{1}{n}g \leq \frac{1}{p}g$: on a donc $n < p$.

3. Mesurer les grandeurs

3.1. Un résultat d'unicité

On doit maintenant se demander s'il existe, ou si l'on peut définir, un *système de nombres positifs* $\mathfrak{S}$ et une *application* $\mu : X \to \mathfrak{S}$, et cela de façon « unique » (c'est-à-dire à un « isomorphisme » près pour $\mathfrak{S}$, à un facteur multiplicatif près pour μ), tels que

1) la relation d'équivalence définie par μ sur X est identique à $\sim$: $\mu(x) = \mu(y) \Leftrightarrow x \sim y$;
2) la relation de préordre définie par μ sur X est identique à $\prec$: $\mu(x) < \mu(y) \Leftrightarrow x \prec y$;
3) l'application μ est un morphisme de $(X, \oplus)$ dans $(\mathfrak{S}, +)$: $\mu(x \oplus y) = \mu(x) + \mu(y)$.

Au prix d'un abus de notation sans gravité, il revient au même de rechercher $\mathfrak{S}$ et $\mu : G = X/\sim \to \mathfrak{S}$ tels que l'on ait $\mu(g) < \mu(h)$ si et seulement si $g < h$, et $\mu(g + h) = \mu(g) + \mu(h)$. En étendant à $G^\# = G \cup \{0_G\}$ les conditions imposées à μ sur G, on voit que l'application cherchée doit vérifier d'une part $\mu(0_G + g) = \mu(0_G) + \mu(g)$, d'autre part $\mu(0_G + g) = \mu(g)$, et qu'on doit donc avoir $\mu(0_G) = 0$. Il en résulte que, pour tout $g \neq 0_G$, puisque $g > 0_G$, on doit avoir $\mu(g) > \mu(0_G)$, et donc $\mu(g) > 0$. Cela noté, on a le fait suivant, qui assure *a priori* l'unicité de μ pourvu que l'on ait $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}_+$: il existe au plus une application $\mu : G^\# \to \mathfrak{S}$ qui respecte l'ordre et l'addition.

Soit des mesures μ et ν, applications de $G^\#$ dans $\mathfrak{S}$, et soit $u \in G^\#$, $u \neq 0_G$, de sorte que $\mu(u) \neq 0 \neq \nu(u)$. On montre que, pour tout $g \in G^\#$, on a : $\frac{\mu(g)}{\mu(u)} = \frac{\nu(g)}{\nu(u)}$; en posant $k = \frac{\mu(u)}{\nu(u)}$, on aura alors : $\mu(g) =$

$k\nu(g)$, pour tout $g \in G^{\#}$. Soit en effet $n \in \mathbb{N}^*$; il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{m}{n} \leq \frac{\mu(g)}{\mu(u)} < \frac{m+1}{n}$. La première inégalité s'écrit $\mu\left(\frac{u}{n}\right) \leq \mu\left(\frac{g}{m}\right)$, d'où $\frac{g}{m} \geq \frac{u}{n}$. Il existe donc $t \in G^{\#}$ tel que $\frac{u}{n} + t = \frac{g}{m}$ et donc $\mu(t) = \mu\left(\frac{g}{m}\right) - \mu\left(\frac{u}{n}\right)$. On a alors $\nu\left(\frac{g}{m}\right) = \nu\left(t + \frac{u}{n}\right) = \nu(t) + \nu\left(\frac{u}{n}\right) \geq \nu\left(\frac{u}{n}\right)$. D'où : $\frac{\nu(g)}{\nu(u)} = \frac{m\nu\left(\frac{g}{m}\right)}{n\nu\left(\frac{u}{n}\right)} \geq \frac{m}{n}$. Comme g et u jouent des rôles symétriques dans ce qui précède, en partant de $\frac{\mu(g)}{\mu(u)} < \frac{m+1}{n}$, soit de $\frac{n}{m+1} < \frac{\mu(u)}{\mu(g)}$, on obtient $\frac{\nu(u)}{\nu(g)} > \frac{n}{m+1}$, soit donc $\frac{\nu(g)}{\nu(u)} < \frac{m+1}{n}$. On a ainsi $\frac{m}{n} \leq \frac{\mu(g)}{\mu(u)}$ et $\frac{\nu(g)}{\nu(u)} < \frac{m+1}{n}$; d'où $\left|\frac{\mu(g)}{\mu(u)} - \frac{\nu(g)}{\nu(u)}\right| < \frac{1}{n}$, et ceci pour tout entier $n \geq 1$. Par suite, $\frac{\mu(g)}{\mu(u)} = \frac{\nu(g)}{\nu(u)}$, pour tout $g \in G^{\#}$, CQFD.

3.2. Des nombres pour mesurer : entiers et fractions

Il reste à examiner l'*existence* de μ, question qui renvoie immédiatement au problème des *nombres* nécessaires pour mesurer des grandeurs.

Choisissons $u \in G^{\#}$, $u \neq 0_G$, et posons $\mu_u(u) = 1$. Soit d'abord $g = nu$, où $n \in \mathbb{N}$. On a $\mu_u(g) = \mu_u(nu) = n\mu_u(u) = n$, ce qui montre que, pour mesurer des grandeurs, on a évidemment besoin des entiers naturels : $\mathfrak{S} \supset \mathbb{N}$.

Soit ensuite $g \in G$ tel que $ng = u$, où $n \in \mathbb{N}^*$; on a $n\mu_u(g) = \mu_u(ng) = \mu_u(u) = 1$. On a donc besoin d'un nombre $r = \mu_u(g)$ tel que $nr = 1$. Plus généralement, soit v, $g \in G$ tels que $v = mu$ et $ng = v$; on a $n\mu_u(g) = \mu_u(v) = m$: on a ainsi besoin d'un nombre r tel que $nr = m$.

C'est ainsi que s'introduisent les fractions d'entiers : le nombre r tel que $nr = m$ résulte du « fractionnement » en n de l'entier m. Si, comme il en va au début du collège, on ne suppose guère connus au départ que les entiers naturels, la question qui se pose alors est celle-ci : existe-t-il un tel nombre r vérifiant l'égalité $nr = m$?

Si m est un multiple n, le nombre cherché est simplement l'entier r quotient de m par n. Mais que se passe-t-il si n ne divise pas m ? Pour répondre à cette question, il convient de préciser ce qu'on peut entendre, à ce stade, par « nombre », ou plutôt par *système de nombres*. Pour être regardé comme un système de nombres, un ensemble $\mathfrak{S}$ doit certainement être muni

1) d'une addition, loi de composition binaire associative et commutative, par rapport à laquelle tout élément $r \in \mathfrak{S}$ est régulier ($r + s = r + t \Rightarrow s = t$) ;

2) d'une multiplication, loi de composition binaire associative et commutative, par rapport à laquelle tout élément $r \in \mathfrak{S}$ non neutre pour l'addition est régulier ($rs = rt \Rightarrow s = t$), et distributive par rapport à l'addition ($r(s + t) = rs + rt$).

Rappelons deux faits simples. Tout d'abord, s'il existe un élément neutre $0_{\mathfrak{S}}$ pour l'addition, celui-ci est unique : si $\omega \in \mathfrak{S}$ est tel que $\omega + s = s$ pour tout $s \in \mathfrak{S}$, on a, en prenant $s = 0_{\mathfrak{S}}$, $\omega + 0_{\mathfrak{S}} = 0_{\mathfrak{S}}$; comme $\omega + 0_{\mathfrak{S}} = 0_{\mathfrak{S}} + \omega = \omega$, il vient $\omega = 0_{\mathfrak{S}}$. Ensuite, s'il existe, $0_{\mathfrak{S}}$ est « absorbant », c'est-à-dire que $s0_{\mathfrak{S}} = 0_{\mathfrak{S}}$ pour tout $s \in \mathfrak{S}$: on a en effet $s0_{\mathfrak{S}} + 0_{\mathfrak{S}} = s0_{\mathfrak{S}} = s(0_{\mathfrak{S}} + 0_{\mathfrak{S}}) = s0_{\mathfrak{S}} + s0_{\mathfrak{S}}$ et donc, puisque $s0_{\mathfrak{S}}$ est régulier pour l'addition, $0_{\mathfrak{S}} = s0_{\mathfrak{S}}$.

Admettons alors qu'il existe un système de nombres $\mathfrak{S} \supset \mathbb{N}$, dont les lois prolongent celles de $\mathbb{N}$, et qui, pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, contienne un nombre r vérifiant l'égalité $nr = m$. Si $m = 0$, on a $r = 0$. Si $m \neq 0$, on voit que chacun des nombres r est *caractérisé* par l'égalité $nr = m$ qui motive notre intérêt pour lui : si en effet on a $nr = m$ et $ns = m$, on a aussi $nr = ns$ et donc $r = s$, puisque $n \in \mathbb{N}^*$ est régulier pour la multiplication. Ce résultat d'unicité justifie la notation traditionnelle de r comme fonction de n et de m, $r = \frac{m}{n}$. Bien entendu, si n divise m, le nombre $\frac{m}{n}$ est l'entier quotient de m par n.

Remarquons ensuite qu'il existe une *infinité* de couples $(n, m) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$ définissant le même nombre r : si $r = \frac{m}{n}$, c'est-à-dire si $nr = m$, on a $k(nr) = km$, soit $(kn)r = km$, pour tout $k \in \mathfrak{S}$; si $k \in \mathbb{N}^*$, l'égalité $(kn)r = km$ montre alors que $r = \frac{km}{kn}$ c'est-à-dire que $\frac{m}{n} = \frac{km}{kn}$. En particulier, soit $k = n\cap m$ le PGCD de n et m, et soit $n_0 = \frac{n}{k}$ et $m_0 = \frac{m}{k}$; il vient : $\frac{m_0}{n_0} = \frac{km_0}{kn_0} = \frac{m}{n}$. Observons que, si $m = 0$, on a $k = n$ et donc $n_0 = 1$ et $m_0 = 0$: on a donc $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons maintenant que l'on ait, inversement, $\frac{m}{n} = \frac{q}{p}$, où $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $m, q \in \mathbb{N}$. Posons $r = \frac{m}{n}$; on a $nr = m$ et $pr = q$, et donc $p(nr) = pm$ et $n(pr) = nq$, soit $pnr = pm$ et $pnr = nq$. Il vient ainsi $pm = nq$: c'est l'égalité « des produits en croix ». Si $m = 0$ on a $nq = 0$ et donc $q = 0$. Supposons $m \neq 0$; avec les notations déjà employées on a alors $p(km_0) = (kn_0)q$ soit $k(pm_0) = k(n_0q)$ et donc $pm_0 = n_0q$. D'après le théorème de Gauss, n_0, qui divise pm_0 mais est premier avec $m_0 \neq 0$, divise p : il existe donc $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = n_0\ell$. L'égalité $pm_0 = n_0q$ s'écrit alors $(n_0\ell)m_0 = n_0q$ et il vient ainsi $m_0\ell = q$. Étant donné $r = \frac{m}{n}$, où $(n, m) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, toutes les expressions de r comme fractions d'entiers sont finalement de la forme $\frac{m_0\ell}{n_0\ell}$, où $n_0 = \frac{n}{n\cap m}$, $m_0 = \frac{m}{n\cap m}$ et $\ell \in \mathbb{N}^*$.

Soit enfin deux nombres fractions d'entiers, $r = \frac{m}{n}$ et $s = \frac{q}{p}$ (où $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $m, q \in \mathbb{N}$). Montrons que leur somme et leur produit sont complètement déterminés par le fait que $(\mathfrak{S}, +, \times)$ est un système de nombres extension de $(\mathbb{N}, +, \times)$. Partons des égalités caractéristiques $nr = m$ et $ps = q$. En multipliant la première par p et la seconde par n, on obtient $p(nr) = pm$, soit encore $(np)r = pm$, et $n(ps) = nq$, soit $(np)s = nq$. Il vient alors $(np)r + (np)s = pm + nq$, soit $(np)(r + s) = pm + nq$, c'est-à-dire $\frac{m}{n} + \frac{q}{p} = \frac{pm + nq}{np}$. En multipliant membre à membre les égalités $nr = m$ et $ps = q$, il vient de même $(np)(rs) = mq$, soit $\frac{m}{n} \times \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}$.

S'ils existent, les nombres dont on a besoin à ce stade sont donc entièrement déterminés. Mais de tels nombres existent-ils ? En d'autres termes, les exigences qu'on leur impose n'entraînent-elles pas quelque contradiction ? La réponse est, mathématiquement, classique : elle consiste à exhiber une structure ayant les propriétés supposées. Considérons sur $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$ la relation $\equiv$ définie par : $(n, m) \equiv (p, q) \Leftrightarrow pm = nq$. On vérifie aisément qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Posons alors $\mathfrak{F} = (\mathbb{N}^*\times\mathbb{N})/\equiv$ et notons $\frac{m}{n}$ la classe d'équivalence du couple $(n, m) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$. (Formellement on a donc $\frac{m}{n} = \{ (\ell n_0, \ell m_0) \,/\, n_0(n \frown m) = n,\ m_0(n \frown m) = m,\ \ell \in \mathbb{N}^* \}$.) Observons que $\frac{m}{n} = \frac{q}{n}$ équivaut à $m = q$. Il en résulte en particulier que l'application $m \mapsto \frac{m}{1}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathfrak{F}$ est une injection : on peut donc identifier $\mathbb{N}$ et $\left\{ \frac{m}{1} \,/\, m \in \mathbb{N} \right\}$ et, dès lors, $\mathbb{N} \subset \mathfrak{F}$. Pour $\frac{m}{n}, \frac{q}{p} \in \mathfrak{F}$, posons $\frac{m}{n} + \frac{q}{p} = \frac{pm + nq}{np}$ et $\frac{m}{n} \times \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}$. Pour $n = p = 1$, on a $\frac{m}{1} + \frac{q}{1} = \frac{m+q}{1}$ et $\frac{m}{1} \times \frac{q}{1} = \frac{mq}{1}$: l'addition et la multiplication dans $\mathfrak{F}$ prolongent l'addition et la multiplication définies sur $\mathbb{N}$. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$; existe-t-il dans $\mathfrak{F}$ un nombre r tel que $nr = m$? On a en fait : $n \times \frac{m}{n} = \frac{n}{1} \times \frac{m}{n} = \frac{nm}{n} = \frac{m}{1} = m$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $(\mathfrak{F}, +, \times)$, que l'on notera désormais $\mathbb{Q}_+$, possède les autres propriétés attendues.

3.3. Le besoin d'autres nombres

En pratique, on peut se restreindre à la division par *certains* entiers non nuls, $n_1, n_2, \ldots, n_k$, ce qui revient à privilégier la division par $n = n_1 n_2 \ldots n_k$: les « nombres pour mesurer » sont alors les éléments positifs de l'anneau $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ constitués des rationnels de la forme $\frac{m}{n^p}$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$: $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right] = \left\{ \frac{m}{n^p} \,/\, m \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N} \right\}$. Pour $n = 10 = 2\cdot 5$, on obtient ainsi l'anneau des nombres *décimaux* $\mathbb{D} = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{10}\right]$, c'est-à-dire des rationnels de la forme $\frac{m}{10^p}$ $(m \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N})$: $\mathbb{D} = \left\{ \frac{m}{10^p} \,/\, m \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N} \right\}$. Pour $n = 2$ on obtient l'anneau $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ des rationnels *binaires* ou *dyadiques*, de la forme $\frac{m}{2^p}$: $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{ \frac{m}{2^p} \,/\, m \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N} \right\}$.

En théorie, pourtant, n'a-t-on pas besoin d'autres nombres que les rationnels positifs pour mesurer toutes les grandeurs $g \in G^{\#}$? La réponse est connue depuis le temps de Pythagore, d'Eudoxe et de Platon : les rationnels *ne suffisent pas*. Le théorème de Pythagore implique que la mesure r de la diagonale d'un carré dont la longueur des côtés est prise pour unité doit être telle que $r^2 = 2$. Or cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}_+$.

Considérons plus généralement l'équation $r^2 = k$, où $k \in \mathbb{N}^*$. Posons $r = \frac{m_0}{n_0}$, avec n_0 et m_0 premiers entre eux. On a $m_0 m_0 = k n_0^2$. Puisque n_0 divise $m_0 m_0$ mais est premier avec m_0, n_0 doit diviser m_0, ce qui n'est possible que si $n_0 = 1$. Par suite, $r = \frac{m_0}{n_0} = \frac{m_0}{1} = m_0$ est un entier naturel. Si k est un « carré parfait », r existe certainement. Mais si k n'est pas un carré d'entier, comme il en va lorsque $k = 2$, il n'existe pas de rationnel r tel que $r^2 = k$ parce qu'il n'existe pas d'*entier* r tel que $r^2 = k$.

Pour mesurer les longueurs, il est donc nécessaire d'aller au-delà des rationnels. De quels nouveaux nombres a-t-on besoin pour pouvoir mesurer *toutes* les grandeurs de *toutes* les espèces possibles ? Afin d'étudier cette question dans de bonnes conditions, on procède d'abord à un *enrichissement* de la structure d'espèce de grandeurs, on commence par définir le produit d'une grandeur par un rationnel.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$ et $g \in G^\#$. On a $n\left(\frac{1}{n}(mg)\right) = mg$ et $n\left(m\left(\frac{1}{n}g\right)\right) = m\left(n\left(\frac{1}{n}g\right)\right) = mg$, et donc $\frac{1}{n}(mg) = m\left(\frac{1}{n}g\right)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$; on a : $\frac{1}{kn}(kmg) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k}(kmg)\right) = \frac{1}{n}(mg)$. On peut donc poser : $\frac{m}{n}g = \frac{1}{n}(mg)$. On a alors $n\left(\frac{m}{n}g\right) = n\left(\frac{1}{n}(mg)\right) = mg$. Par ailleurs, puisque $\frac{m}{n}g = m\left(\frac{1}{n}g\right)$, on a encore $\frac{1}{m}\left(\frac{m}{n}g\right) = \frac{1}{m}m\left(\frac{1}{n}g\right) = \frac{1}{n}g$. Il vient ainsi $np\left(\frac{m}{n}\left(\frac{q}{p}g\right)\right) = p\left(m\left(\frac{q}{p}g\right)\right) = m(qg) = (mq)g$, et donc $\frac{m}{n}\left(\frac{q}{p}g\right) = \frac{1}{np}(mq)g = \frac{mq}{np}g$. Notons encore que, pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, $m, q \in \mathbb{N}$ et $g \neq 0_G$, on a : $\frac{m}{n} < \frac{q}{p} \Leftrightarrow \frac{m}{n}g < \frac{q}{p}g$. On a en effet $\frac{m}{n}g < \frac{q}{p}g$ si et seulement si $np\left(\frac{m}{n}g\right) < np\left(\frac{q}{p}g\right)$, ce qui équivaut encore à $(mp)g < (nq)g$. Comme $g \neq 0_G$, cette dernière inégalité équivaut à $mp < nq$, soit $\frac{m}{n} < \frac{q}{p}$. Notons enfin que, si l'on a défini $\mu(g)$, $g \in G^\#$, on a $n\mu\left(\frac{m}{n}g\right) = \mu\left(n\left(\frac{m}{n}g\right)\right) = \mu(mg) = m\mu(g)$, et donc $\mu\left(\frac{m}{n}g\right) = \frac{1}{n}m\mu(g) = \frac{m}{n}\mu(g)$.

On impose ensuite à $(G^\#, <, +, 0_G)$ de satisfaire un nouvel axiome, dit *d'Archimède* en France, *d'Eudoxe-Archimède* en d'autres pays (Archimède l'explicite mais il en attribue la paternité à Eudoxe) :

GR9. Si $h \neq 0_G$, pour tout $g \in G^\#$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nh > g$.

On notera qu'il revient au même de dire que, si $h > 0_G$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n}h < g$. En d'autres termes, pour toute grandeur $h > 0_G$, la suite $\left(\frac{h}{n}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0_G dans $G^\#$ muni de la topologie de l'ordre.

Soit alors $u \in G^\#$ une grandeur non nulle prise pour unité, et soit $a \in \mathbb{N}^*$, $a \geq 2$. D'après l'axiome d'Eudoxe-Archimède, pour tout $g \in G^\#$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k_n \in \mathbb{N}^*$ unique tel que $\frac{k_n}{a^n}u \leq g < \frac{k_n + 1}{a^n}u$: $k_n + 1$ est le plus petit des entiers ℓ tels que $\ell\frac{u}{a^n} > g$ (et k_n le plus grand des entiers ℓ tels que $\ell\frac{u}{a^n} \leq g$). Si $\mu_u(g)$ est défini, il vient $\frac{k_n}{a^n} \leq \mu_u(g) < \frac{k_n + 1}{a^n}$. Observons que la suite $\left(\frac{k_n}{a^n}\right)_{n\geq 1}$ est croissante : puisque $\frac{k_n}{a^n}u = \frac{ak_n}{a^{n+1}}u \leq g$, on a $ak_n \leq k_{n+1}$ et il vient donc $\frac{k_n}{a^n} \leq \frac{k_{n+1}}{a^{n+1}}$. On montre semblablement que $\left(\frac{k_n + 1}{a^n}\right)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante. En outre on a

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{k_n+1}{a^n}-\dfrac{k_n}{a^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a^n} = 0$. Les deux suites sont donc adjacentes. Si, comme on l'a supposé, $\mu_u(g)$ a été défini, on peut conclure que, pour la topologie de l'ordre dans l'ensemble $\mathfrak{S}$ des nombres disponibles, elles convergent toutes les deux vers le nombre $\mu_u(g)$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k_n}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k_n+1}{a^n} = \mu_u(g)$.

Si $\mu_u(g)$ n'a pas été défini, pourrait-on alors *poser* $\mu_u(g) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k_n}{a^n}$? La première condition pour cela, c'est, bien sûr, que la suite $\left(\dfrac{k_n}{a^n}\right)_{n\geq1}$ ait une limite dans l'ensemble $\mathfrak{S}$ des nombres disponibles. On sait qu'il se peut qu'il n'en soit pas ainsi lorsque $\mathfrak{S} = \mathbb{Q}_+$ (par exemple si, d'aventure, cette suite tendait vers $\sqrt{2}$).

Pour que le problème ait toujours une solution, il suffit de supposer la disponibilité d'un système de nombres $\mathfrak{S}$ satisfaisant l'axiome *de la borne supérieure*, c'est-à-dire dans lequel *toute suite croissante et majorée admet une limite*. Il en résulte aussitôt, en effet, que la suite $\left(\dfrac{k_n}{a^n}\right)_{n\geq1}$, qui est croissante et majorée (par $\dfrac{k_1+1}{a}$), possède une limite dans $\mathfrak{S}$, et qu'on peut alors poser : $\mu_u(g) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k_n}{a^n}$. Notons que, si $g = \dfrac{q}{p}u$, on a $\dfrac{k_n}{a^n} \leq \dfrac{q}{p} < \dfrac{k_n+1}{a^n}$: la suite $\left(\dfrac{k_n}{a^n}\right)_{n\geq1}$ a donc pour limite $\dfrac{q}{p}$, en sorte qu'on a bien $\mu_u(g) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k_n}{a^n}$. Il ne reste plus alors qu'à vérifier que l'application μ_u définie ainsi satisfait les conditions fixées plus haut.

Montrons d'abord que, si $g < h$, alors $\mu_u(g) < \mu_u(h)$. Soit $\omega \in G^\#$ tel que $g + \omega = h$: on a $\omega \neq 0_G$ et il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^N\omega > u$, soit $\dfrac{1}{a^N}u < \omega$. Soit alors $\left(\dfrac{k_n}{a^n}\right)_{n\geq1}$ et $\left(\dfrac{\ell_n}{a^n}\right)_{n\geq1}$ les suites relatives à g et h respectivement. On a : $\dfrac{k_n+1}{a^n}u = \dfrac{k_n}{a^n}u + \dfrac{1}{a^n}u \leq g + \dfrac{1}{a^n}u$. Pour $n = N$, on a alors $\dfrac{k_N+1}{a^N}u = g + \dfrac{1}{a^N}u < g + \omega = h$. On a donc $\dfrac{k_N+1}{a^N} \leq \dfrac{\ell_N}{a^N}$. Comme la suite $\left(\dfrac{\ell_n}{a^n}\right)_{n\geq1}$ croît vers $\mu_u(h)$ et que $\left(\dfrac{k_n+1}{a^n}\right)_{n\geq1}$ décroît strictement vers $\mu_u(g)$, on a $\mu_u(g) < \mu_u(h)$. Montrons ensuite que μ_u est additive. Soit $\left(\dfrac{\xi_n}{a^n}\right)_{n\geq1}$ la suite relative à $g + h$. Avec les notations déjà employées, on a $\dfrac{k_n}{a^n}u + \dfrac{\ell_n}{a^n}u \leq \dfrac{\xi_n}{a^n} \leq g < \dfrac{\xi_n+1}{a^n}u \leq \dfrac{k_n+1}{a^n}u + \dfrac{\ell_n+1}{a^n}u$ et donc $\dfrac{k_n}{a^n} + \dfrac{\ell_n}{a^n} \leq \dfrac{\xi_n}{a^n} \leq g < \dfrac{\xi_n+1}{a^n} \leq \dfrac{k_n+1}{a^n} + \dfrac{\ell_n+1}{a^n}$. Les suites $\left(\dfrac{\xi_n}{a^n}\right)_{n\geq1}$ et $\left(\dfrac{\xi_n+1}{a^n}\right)_{n\geq1}$ ont donc même limite que les suites adjacentes $\left(\dfrac{k_n}{a^n}+\dfrac{\ell_n}{a^n}\right)_{n\geq1}$ et $\left(\dfrac{k_n+1}{a^n}+\dfrac{\ell_n+1}{a^n}\right)_{n\geq1}$: on a bien $\mu_u(g+h) = \mu_u(g) + \mu_u(h)$.

3.4. Quels nombres et quels calculs ?

On déduit aisément du résultat précédent que, si $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}^{\clubsuit}$ sont deux systèmes de nombres (positifs) incluant $\mathbb{Q}_+$ et vérifiant l'axiome de la borne supérieure, $(\mathfrak{S}, <, +)$ et $(\mathfrak{S}^{\clubsuit}, <, +)$ sont isomorphes : il suffit pour cela de considérer $\mathfrak{S}^{\clubsuit}$ comme une espèce de grandeurs (comme on le verra plus loin, $\mathfrak{S}^{\clubsuit}$ satisfait l'axiome GR9 dès qu'il satisfait l'axiome de la borne supérieure). Mais cet « unique » système de nombres existe-t-il ? Supposer sa disponibilité n'entraîne-t-il pas de contradiction ?

La réponse, à nouveau, est classique : on sait que la construction de ce système de nombres unique (et universel, s'agissant de mesurer les grandeurs), inaugurée par Eudoxe de Cnide, consignée dans le Livre X de ses *Éléments* par Euclide, a été élaborée à nouveaux frais au XIX^{e} siècle [5], dans des formes diverses : coupures de Dedekind, suites de Cauchy, etc.

Cette réponse, qui fait des nombres *réels* – puisque d'eux il s'agit – un *donné* de l'histoire des mathématiques, est pourtant, dans sa sécheresse, mal adaptée à l'enseignement des mathématiques au collège puisque, à ce stade des études mathématiques, il s'agit précisément de *reconnaître* – pour les *satisfaire* – les *besoins numériques* du travail mathématique.

De quels nombres autres que les rationnels a-t-on donc besoin au collège ? Notons par exemple que, vu la définition retenue *jusqu'ici* pour la notion d'espèce de grandeurs, il n'est pas toujours nécessaire de disposer de *tous* les nombres réels positifs pour mesurer toutes les grandeurs *d'une espèce donnée*. Notons $\mathcal{C}$ le corps des nombres *constructibles*, c'est-à-dire le plus petit sous-corps [6] de $\mathbb{R}$ tel que, si $\alpha \in \mathcal{C}_+$ alors $\sqrt{\alpha} \in \mathcal{C}$. Le corps des nombres constructibles $\mathcal{C}$ contient strictement le corps des rationnels $\mathbb{Q}$: on a par exemple $\sqrt{2} \in \mathcal{C}$ (alors que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Par ailleurs, $\mathcal{C}$ est strictement contenu dans $\mathbb{R}$: on montre par exemple [7] que $\sqrt[3]{2} \notin \mathcal{C}$. Prenons alors $G^{\#} = \mathcal{C}_+$ avec $u = 1$. En vertu du résultat d'unicité démontré plus haut, la mesure μ_u est alors l'application identique de $\mathcal{C}_+$: la mesure de ces grandeurs que sont les nombres constructibles positifs n'utilise donc qu'une partie des nombres réels positifs, à savoir le système $\mathfrak{S} = \mathcal{C}_+$.

L'observation des pratiques mathématiques du collège montre pourtant que le système de nombres $\mathcal{C}_+$ n'y suffit pas. Il y a tout d'abord le cas du nombre π, qui mesure la longueur d'un demi-cercle de rayon 1 ou l'aire d'un disque de rayon 1, et qui intervient encore dans la mesure de l'aire d'une sphère et du volume d'une boule par exemple, et qui obligerait au moins à prendre $\mathfrak{S} = \mathcal{C}[\pi]_+$. Il y a éventuellement, ensuite, le problème des racines *cubiques*, lié notamment à la question de la mesure des *volumes*. Ce problème est en principe neutralisé dans le curriculum actuel, où la considération exclusive de mesures de volumes de la forme $v = k\ell^3$ (où $\ell \in \mathcal{C}_+$ et $k \in \mathcal{C}[\pi]_+$) permet de résoudre l'équation $kx^3 = v$ sans employer de racines cubiques.

S'il n'en est pas ainsi, le système de nombres $\mathfrak{S} = \mathcal{C}_+$ est évidemment insuffisant. Pour faire face aux besoins qu'engendreraient notamment la résolution d'équations de la forme $kx^3 = v$, on peut alors supposer la disponibilité d'un système de nombres $\mathfrak{S} \supset \mathcal{C}_+$ vérifiant l'axiome *de Dieudonné* [8] : étant donné un polynôme $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ à coefficients dans $\mathfrak{S}$, si, pour x_0

---

[5] Sur les différentes constructions proposées, voir Dhombres 1998.

[6] L'intersection d'un ensemble de sous-corps de $\mathbb{R}$ ayant la propriété indiquée est un sous-corps de $\mathbb{R}$ ayant encore cette propriété : comme l'ensemble $\mathfrak{R}$ des sous-corps concernés n'est pas vide (puisque $\mathbb{R} \in \mathfrak{R}$), on a $\mathcal{C} = \bigcap \mathfrak{R}$.

[7] Voir ainsi Jones, Morris, Pearson 1994 ; le résultat indiqué équivaut à l'impossibilité de la duplication du cube à la règle et au compas.

[8] Jean Dieudonné l'introduit dans son livre *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (Dieudonné 1964, p. 22).

et $x_1 \in \mathcal{S}$ tels que $x_0 \leq x_1$, on a $P(x_0) \leq \alpha \leq P(x_1)$, alors il existe $\beta \in \mathcal{S}$ tel que $x_0 \leq \beta \leq x_1$ et $P(\beta) = \alpha$.

Notons $\mathcal{D}$ le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ vérifiant l'axiome précédent. Pour tout $\alpha \in \mathcal{D}_+^*$ considérons le polynôme $P(x) = x^2 - \alpha$: on a $P(0) = -\alpha < 0$ et, selon que $\alpha \leq 1$ ou $\alpha > 1$, $P(1) = 1 - \alpha \geq 0$ ou $P(\alpha) = \alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha - 1) > 0$. D'après l'axiome de Dieudonné, il existe donc $\beta > 0$ tel que $\beta^2 = \alpha$; par suite, on a $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$. Bien entendu, l'axiome de Dieudonné entraîne aussi l'existence de racines cubiques : puisque $\sqrt[3]{2} \notin \mathcal{C}$, on a donc $\mathcal{D} \neq \mathcal{C}$. Plus généralement, toute équation $ax^3+bx^2+cx+d = 0$ à coefficients dans $\mathcal{D}$, avec $a \neq 0$, possède une solution dans $\mathcal{D}$.

Supposant que $a = 1$, on a en effet $P(x) = x^3+bx^2+cx+d = x^3\left(1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}\right)$. Or on a : $1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} \geq 1 - \left|\frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}\right| \geq 1 - \frac{1}{|x|}\left(|b| + \frac{|c|}{|x|^2} + \frac{|d|}{|x|^3}\right)$. Pour $|x| \geq 1$ il vient donc : $1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} \geq 1 - \frac{1}{|x|}(|b|+|c|+|d|)$. Par suite, pour $|x| > k = \max(1, |b|+|c|+|d|)$, $1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} > 0$. Il en résulte que $P(x) = x^3\left(1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}\right)$ a, pour $|x| > k$, le signe de x : il existe donc $\beta \in \mathcal{D}$ tel que $-k - 1 < \beta < k + 1$ et $P(\beta) = 0$.

Un troisième enrichissement du système de nombres $\mathcal{S} = \mathcal{C}_+$ doit encore être envisagé : il est lié à l'introduction – en 6^e – du *rapporteur* gradué en *degrés* et, par suite, à la considération – notamment en 5^e – d'angles mesurés en degrés par un *entier* ou un nombre décimal quelconque, enfin à la définition des « rapports trigonométriques » que sont le *cosinus* (en 4^e) ainsi que le *sinus* et la *tangente* (en 3^e) d'un angle *aigu*. Le problème est que certains angles ne sont pas constructibles à la règle et au compas, et donc que les rapports trigonométriques correspondants *ne sont pas* des réels constructibles : on démontre classiquement que, par exemple, il en va ainsi de l'angle de 20° (= $\frac{\pi}{9}$ rad), et donc aussi des angles de 1°, 2°, 4°, 5° (alors que l'angle de 3° est, lui, constructible). À cet égard, le passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{D}$ n'améliore que partiellement les choses.

Ainsi puisque $\beta = \cos 20°$ vérifie l'égalité $4\beta^3 - 3\beta = 4(\cos 20°)^3 - 3(\cos 20°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$ et donc annule le polynôme $P(x) = 8x^3 - 6x - 1$, puisque ce nombre est compris entre 0 et 1 et vérifie l'encadrement $-1 = P(0) < P(\beta) = 0 < P(1) = 1$, et puisque la fonction $x \mapsto P(x)$, dont la dérivée s'écrit $12(2x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, décroît sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ en partant de –1, puis croît sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, et donc ne s'annule qu'une fois, en β, sur $]0, 1[$), on a, d'après l'axiome de Dieudonné, $\cos 20° \in \mathcal{D}_+$.

Pour être tout à fait à l'aise, il conviendrait de se placer dans le corps $\mathcal{A}$ des réels *algébriques* en prenant $\mathcal{S} = \mathcal{A}_+$ (ou plutôt $\mathcal{S} = \mathcal{A}[\pi]_+$). Les angles usuellement manipulés au collège sont des multiples rationnels de π radians : on a par exemple $20° = \frac{1}{9}\pi$ rad, $37° = \frac{37}{180}\pi$ rad, etc. Or, pour $k, n \in \mathbb{N}^*$, la valeur des fonctions trigonométriques sur un réel de la forme $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ ($\in \mathbb{Q}[\pi]_+$) est toujours algébrique : l'identité $Re[(\cos\theta + i \sin\theta)^n] = 1$, où Re désigne la partie réelle d'un nombre complexe, se récrit en effet sous la forme P(cos θ) = 0, où P est un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}$, en sorte que cos θ est un nombre algébrique, ce qui entraîne qu'il en est de même de sin θ et, chaque fois qu'elle est définie, de tan θ.

Un système de nombres convenable $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ étant ainsi supposé disponible, deux problèmes fondamentaux se posent, dont le premier est tout simplement : qu'est-ce que « calculer » dans $\mathcal{S}$? « Calculer » une expression numérique donnée, E, c'est la mettre – chaque fois que la chose est possible – sous une forme *canonique* $E^{©}$, cette écriture canonique étant caractérisée par la propriété suivante : deux expressions numériques E et F sont *égales* (E = F) si et seulement si leurs formes canoniques $E^{©}$ et $F^{©}$ sont *identiques* ($E^{©} \equiv F^{©}$), ce qui permet de reconnaître *d'un coup d'œil* que deux expressions désignent – ou non – *le même nombre*. C'est ainsi que, si l'on a préalablement réduit deux fractions – par exemple $\frac{60}{84}$ et $\frac{380}{532}$ – « à leur plus simple expression », qui est leur forme canonique – soit, en l'espèce, $\frac{5}{7}$ et… $\frac{5}{7}$ –, on *voit* (sur l'expression canonique) que l'on a ou non l'égalité des deux fractions – on voit en l'espèce que $\frac{60}{84} = \frac{380}{532}$.

Une grande partie du travail mathématique accompli à l'école primaire puis au collège et au-delà consiste à construire des systèmes d'écriture canonique de nombres (et d'autres entités, comme les polynômes, les vecteurs, etc.) et à apprendre à écrire une expression donnée sous forme canonique – par exemple à passer de l'expression $5(2^3–1)$ à sa forme canonique 35. Chaque extension du système de nombres $\mathcal{S}$ disponible appelle donc, en principe, la construction d'une écriture canonique des expressions numériques nouvellement formées. C'est ainsi que le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathcal{C}$ conduit à s'interroger sur l'écriture canonique possible d'expressions du type $\frac{a + b\sqrt{e}}{c + d\sqrt{e}}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ et où e est un entier non carré parfait : en toute rigueur on doit montrer ici que toute expression de ce type s'écrit de manière unique sous la forme $u + v\sqrt{e}$, où $u, v \in \mathbb{Q}$.

L'existence comme l'unicité dérivent d'un fait unique : l'expression $x^2 - ey^2$ ne s'annule dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ que si $x = y = 0$, ce qui revient à dire que $\sqrt{e}$ n'est pas rationnel. D'une part, en effet, l'égalité $c + d\sqrt{e} = 0$ entraîne $c^2 - ed^2 = 0$ et donc $c = d = 0$, de sorte que, si $(c, d) \neq (0, 0)$, l'expression $\frac{a + b\sqrt{e}}{c + d\sqrt{e}}$ est bien définie, et il en est de même de l'expression $\frac{(a + b\sqrt{e})(c - d\sqrt{e})}{c^2 - ed^2}$ qui lui est égale et a la forme attendue, ce qui prouve l'existence. D'autre part, si $u + v\sqrt{e} = s + t\sqrt{e}$ (où $u, v, s, t \in \mathbb{Q}$), il vient $(s - u)^2 - e(v - t)^2 = 0$ et donc $s = u$ et $v = t$, ce qui prouve l'unicité. On pourra ainsi établir que les expressions $\frac{2 - \sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 4}$ et $\frac{\sqrt{2} - 1}{3 - 2\sqrt{2}}$ désignent le même nombre, élément de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathcal{C}$, dont l'écriture canonique est $1 + \sqrt{2}$.

De telles constructions sont en fait à portée limitée : ainsi, s'il est classique dans l'enseignement secondaire de traiter – en le maltraitant… – le problème de l'écriture canonique d'éléments de $\mathbb{Q}[\sqrt{e}]$ (où $e = 2, 3, \dots$), il ne l'est pas de s'interroger sur l'écriture canonique d'éléments de $\mathbb{Q}[\sqrt{e}, \sqrt{f}]$: si les élèves découvrent qu'une expression telle que

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ s'écrit sous la forme $u + v\sqrt{5}$ (exactement : $2 + \sqrt{5}$), ils n'explorent pas le problème correspondant pour, par exemple, une expression du type $\dfrac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Le corps $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ étant un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{Q}$, ils découvriraient ici qu'une expression de ce type s'écrit en règle générale sous la forme $u + v\sqrt{2} + w\sqrt{3} + s\sqrt{2\cdot 3}$ où $u, v, w, s \in \mathbb{Q}$: on a par exemple $\dfrac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}$.

Une remarque doit encore être faite à propos des nombres solutions d'équations, tel cos 20°. Si, pour les degrés 1 et 2 on apprend à expliciter les solutions, ce qui permet un calcul utilisant les radicaux, il n'en va pas de même pour le degré 3. Comment alors calculer dans un tel cas ? Considérons à titre d'exemple l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$, qui admet dans $\mathcal{D}$ une solution unique $\alpha \in\ ]0, 1[$. L'égalité $\alpha^3 = 1 - 2\alpha$ permet de récrire toute expression polynomiale $P(\alpha)$, où $P \in \mathcal{C}[x]$, sous la forme $a\alpha^2 + b\alpha + c$ avec $a, b, c \in \mathcal{C}$. Ainsi aura-t-on : $\alpha^5 - 3\alpha + 1 = \alpha^2(1 - 2\alpha) - 3\alpha + 1 = \alpha^2 - 2(1 - 2\alpha) - 3\alpha + 1 = \alpha^2 + \alpha - 1$. Cette technique peut aussi être utilisée – bien que, aujourd'hui, elle ne le soit guère – à propos des solutions d'équations de degré 1 ou 2. Si $3\alpha - 4 = 0$ on a par exemple $\alpha^2 = \dfrac{(3\alpha)^2}{9} = \dfrac{16}{9}$. De même, si $\alpha^2 + \alpha - 3 = 0$, alors $\dfrac{6}{\alpha} = \dfrac{2(\alpha^2 + \alpha)}{\alpha} = 2\alpha + 2$. Et ainsi de suite.

Examiné dans la perspective précédente, le nombre π paraît avoir un sort particulier (qui sera aussi, plus tard, celui du nombre e) : dans les calculs exacts, il reste *« inerte »*, et on aura par exemple : $\dfrac{\pi}{2+\sqrt{3}} = \pi(2 - \sqrt{3})$. D'une manière générale, on écrira une expression où apparaît π sous la forme $\sum_{0\leq i\leq n} a_i\pi^i$ (où $a_i \in \mathcal{A}$), sans « réduction » aucune – contrairement à ce qui se passait dans les exemples précédents –, et on considérera alors que, si les coefficients de deux telles expressions diffèrent, alors les nombres correspondants, éléments de $\mathcal{A}[\pi]$, diffèrent eux-mêmes. Cette pratique revient à traiter π, implicitement, comme *transcendant*, ce dont on sait que la démonstration en bonne et due forme n'a été établie qu'assez tardivement (Lindemann, 1882).

Un second problème, que l'on ne fera ici que mentionner, se pose chaque fois qu'on procède à une extension du système des nombres $\mathcal{S}$: tout nombre nouveau doit pouvoir être approché autant qu'on le souhaite par des nombres anciens, et finalement par des nombres *décimaux*. Là encore, on notera que la solution d'un tel problème ne saurait être universelle : elle devra être conquise type de nombres par type de nombres.

Si, par exemple, α est défini comme la solution de l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$, on aura $\alpha(\alpha^2 + 2) = 1$ et donc $\alpha = \dfrac{1}{\alpha^2 + 2}$; comme l'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2}$ est strictement décroissante sur $\mathcal{D}_+$, l'encadrement initial $0 < \alpha < 1$ donne $\varphi(1) < \varphi(\alpha) < \varphi(0)$, soit $\dfrac{1}{3} < \alpha < \dfrac{1}{2}$, encadrement qui, à son tour, donne $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) < \varphi(\alpha) < \varphi\left(\dfrac{1}{3}\right)$, soit $\dfrac{4}{9} < \alpha < \dfrac{9}{19}$. Il vient ainsi successivement $\dfrac{361}{803} < \alpha < \dfrac{81}{178}$, $\dfrac{31684}{69929}$

$< \alpha < \dfrac{644809}{1419939}$, etc. Comme $\dfrac{31684}{69929} = 0{,}4530881\ldots$ et $\dfrac{644809}{1419939} = 0{,}454110\ldots$, on obtient ainsi que $0{,}4530 < \alpha < 0{,}4542$. On ne développera pas davantage le thème, au reste très classique, des approximations rationnelles et décimales de nombres réels.

3.5. Structure vectorielle et changement d'unité

Soit $(G^{\#}, <, +, 0_G)$ une espèce de grandeurs. Le choix d'une grandeur non nulle $u \in G$ prise pour unité définit une mesure μ_u sur $G^{\#}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (ou dans un de ses demi-sous-corps), avec $\mu_u(G^{\#})$ dense dans $\mathbb{R}_+$ (puisque $\mu_u(G^{\#}) \supset \mathbb{Q}_+$). Dans ce qui suit, on va « normaliser » la construction précédente en renforçant la définition des espèces de grandeurs afin de pouvoir les regarder comme des *demi-droites vectorielles sur* $\mathbb{R}$ (et pas seulement sur $\mathbb{Q}$).

Soit $r \in \mathbb{R}_+$ et $g \in G$. Si r est rationnel, le produit rg a été défini. Qu'en est-il si $r \notin \mathbb{Q}$? Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante de rationnels ayant pour limite r. La suite $(r_ng)_{n\geq 1}$ est strictement croissante dans $G^{\#}$. Soit $g^* \in G^{\#}$ tel que $\mu_u(g^*) \geq r\mu_u(g)$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mu_u(r_ng) = r_n\mu_u(g) < r\mu_u(g) \leq \mu_u(g^*)$, et donc $r_ng < g^*$. La suite $(r_ng)_{n\geq 1}$ est donc majorée dans $G^{\#}$. Supposons qu'elle ait une borne supérieure, c'est-à-dire un plus petit majorant, g_r. Par passage à la limite dans l'inégalité $r_n\mu_u(g) \leq \mu_u(g_r)$ on obtient alors $r\mu_u(g) \leq \mu_u(g_r)$. Si l'on avait $r\mu_u(g) < \mu_u(g_r)$, il existerait $h \neq 0_G$ tel que $r\mu_u(g) + \mu_u(h) < \mu_u(g_r)$. Comme $h < g_r$ il existerait h^* tel que $h + h^* = g_r$ et il viendrait alors : $\mu_u(r_ng) < r\mu_u(g) < \mu_u(g_r) - \mu_u(h) = \mu_u(h^*)$. Par suite, on aurait $r_ng < h^* < g_r$, en contradiction avec le fait que g_r est la borne supérieure de $(r_ng)_{n\geq 1}$. On a donc $r\mu_u(g) = \mu_u(g_r)$. En prenant $g = u$, on a $r = \mu_u(u_r)$: en conséquence, $\mu_u(G^{\#}) = \mathbb{R}_+$. Par ailleurs, puisque l'application μ_u est injective, l'égalité obtenue montre que, pour g donné, g_r ne dépend que de r (ce qui justifie *a posteriori* la notation adoptée pour g_r). On est donc porté à poser : $rg = g_r$. Par construction, on a alors l'égalité $\mu_u(rg) = r\mu_u(g)$. Si $r = 0$ ou $g = 0_G$, on pose en outre $rg = 0_G$, ce qui respecte l'égalité précédente.

Pour que tout cela soit possible on est conduit à imposer à la structure d'espèce de grandeurs un ultime axiome, qui se substitue à l'axiome d'Archimède, l'axiome *de la borne supérieure* :

GR9. Toute partie de $G^{\#}$ non vide et majorée a une borne supérieure.

Ce nouvel axiome GR9 est plus fort que l'ancien axiome GR9 : l'axiome de la borne supérieure implique l'axiome d'Eudoxe-Archimède.

Si, en effet, pour $h \neq 0_G$ et g donnés, on avait $nh \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $H = \{nh \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, qui est non vide et majoré par g, aurait une borne supérieure g^*. Soit alors $g^{\#}$ tel que $g^{\#} + h = g^*$; comme $g^{\#} < g^*$, $g^{\#}$ n'est pas un majorant de H, et il existerait donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^{\#} < Nh$. On aurait alors $(N + 1)h = Nh + h > g^{\#} + h = g^*$, en contradiction avec le fait que g^* majore H.

On appellera désormais *espèce de grandeurs* toute structure $(G^{\#}, <, +, 0_G)$, où $G^{\#}\backslash\{0_G\} = G \neq \varnothing$, qui vérifie les axiomes ci-après :

GR1. un et un seul des énoncés $g_1 < g_2$, $g_1 = g_2$, $g_1 > g_2$ est vrai ;

GR2. si $g_1 < g_2$ et $g_2 < g_3$ alors $g_1 < g_3$;

GR3. $g_1 + g_2 = g_2 + g_1$;

GR4. $(g_1 + g_2) + g_3 = g_1 + (g_2 + g_3)$;

GR5. si $g_2 \neq 0_G$ alors $g_1 < g_1 + g_2$;

GR6. si $g_1 < g_2$ il existe une unique grandeur h telle que $g_1 + h = g_2$;

GR7. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une unique grandeur h telle que $g = nh$;

GR8. si $g \neq 0_G$ alors $0_G < g$ et $0_G + g = g + 0_G = g$;

GR9. toute partie de $G^\#$ non vide et majorée a une borne supérieure.

Ainsi qu'on l'a montré, l'ensemble $G^\#$ peut alors être muni d'une loi externe sur le demi-corps des réels positifs $\mathbb{R}_+$; avec l'addition et l'ordre, cette loi externe confère aux espèces de grandeurs la structure de demi-droite vectorielle ordonnée. Toute mesure μ est alors un isomorphisme entre les demi-droites vectorielles ordonnées $G^\#$ et $\mathbb{R}_+$. Pour tout choix d'une unité $u \in G$, on obtient un tel isomorphisme μ_u. Si $r = \mu_u(g)$, on a $\mu_u(g) = r = r\mu_u(u) = \mu_u(ru)$, et donc $g = ru$: r est ainsi la *coordonnée* de g dans la *base* $\{u\}$. En particulier on a $G^\# = u\mathbb{R}_+$.

Soit $v \in G$, et soit $k = \mu_u(v)$, en sorte que $v = ku$. Pour tout $g \in G^\#$ on a $g = ru = \frac{r}{k}(ku) = \frac{r}{k}v$: si l'unité choisie est k fois plus grande, la mesure est k fois plus petite. Posons $\mu = \frac{1}{k}\mu_u$: μ et μ_u mesurent la même espèce de grandeur, et l'on a $\mu(v) = \frac{\mu_u(v)}{k} = \frac{k}{k} = 1$, soit donc $\mu = \mu_v$. On retrouve ainsi la formule classique de changement d'unité pour une espèce déterminée de grandeurs : si $v = ku$, où $k \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\mu_v = \frac{1}{k}\mu_u$.

4. Algèbre des espèces de grandeurs

4.1. Définition d'un système de grandeurs

Pour simplifier, on note désormais G (et non plus $G^\#$) l'espèce de grandeurs générique, et on pose alors $G^* = G\backslash\{0_G\}$. Le travail conduit jusqu'ici ne permet encore de travailler que sur *une* espèce de grandeurs G à la fois : sur les longueurs $\ell \in L$, ou sur les masses $m \in M$, etc. On introduit maintenant une nouvelle structure mathématique [9], celle de *système de grandeurs*, qui permettra de justifier complètement les calculs *avec unités* (et aussi les calculs *sans* les unités).

Dans ce qui suit, on associe à toute espèce de grandeurs G la droite vectorielle correspondante $\bar{G}$. Notant $g - h$ la grandeur telle que $h + (g - h) = g$, on oriente $\bar{G}$ par la relation d'ordre définie par : $g < h$ si et seulement si $h - g \in G^*$. $\bar{G}$ est l'espèce de grandeurs *algébriques* associée à G. On pose $\bar{G}_+ = G$ et $\bar{G}_- = \bar{G}\backslash G^*$. On considère $\mathbb{R}$ comme une espèce particulière de grandeurs algébriques, l'espèce des grandeurs *sans dimension*. Cela fixé, on considère un ensemble S dont les éléments sont appelés *grandeurs algébriques*, et qui contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels. On précise la définition de S en plusieurs étapes.

On suppose d'abord définie sur S une *multiplication*, associative et commutative, dont la restriction à $\mathbb{R}$ est la multiplication habituelle sur $\mathbb{R}$, et telle que

SG_1. pour tout $g \in S$ on a $1g = g$ et $0g = 0$.

[9] Ce qui suit doit tout à un travail déjà ancien de Hassler Whitney (Whitney 1968).

On pose alors, pour tout $g \in S$, $-g = (-1)g$. On a en particulier $-0 = (-1)0 = 0$. Cela fait, on suppose ensuite une partie S_+ de S telle que

SG$_2$. $\mathbb{R} \cap S_+ = \mathbb{R}_+$;

SG$_3$. pour tout $g \neq 0$, une et une seule des deux grandeurs g et $-g$ appartient à S_+ ;

SG$_4$. pour tous $g, h \in S_+^*$, $gh \in S_+^*$.

L'ensemble S_+ est l'ensemble des grandeurs *positives*. L'ensemble $S_- = \{-g \ / \ g \in S_+\}$ est l'ensemble des grandeurs *négatives*.

On définit enfin une loi externe, l'*exponentiation*, qui, à tout couple $(r, g) \in \mathbb{Q} \times S_+^*$, associe un élément de S_+^* noté g^r, dont la restriction à $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}_+^*$ a le sens habituel, et telle que

SG$_5$. pour tout $g \in S_+^*$, $g^1 = g$ et $g^0 = 1$;

SG$_6$. pour $g, h \in S_+^*$ et $r, s \in \mathbb{Q}$, $(gh)^r = g^r h^r$ et $(g^r)^s = g^{rs}$.

Soulignons que la construction présentée dans ce qui suit reste inchangée si on remplace comme domaine d'exposants le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels par le corps $\mathbb{R}$ des réels : le choix de $\mathbb{Q}$, ici, est seulement lié au souci de faciliter la « lecture » de cette construction.

4.2. Premières propriétés

Plusieurs propriétés découlent immédiatement des axiomes SG$_1$ à SG$_6$. Pour tout $g \in S$, on a ainsi, successivement,

$-(-g) = (-1)(-g) = (-1)[(-1)g] = [(-1)(-1)]g = 1g = g$;
$(-g)h = [(-1)g]h = (-1)(gh) = -(gh)$;
$(-g)(-h) = -[g(-h)] = -[(-h)g] = -(-(gh)) = gh$.

On a de plus $0 \in \mathbb{R}_+ \subset S_+$, et donc $0 = -0 \in S_-$, d'où $S_+ \cap S_- = \{0\}$. Si $g, h \in S_-$, alors $-g, -h \in S_+$ et $gh = (-g)(-h) \in S_+$. Si $g \in S_+$ et $h \in S_-$, alors $-h \in S_+$ et $gh = -(g(-h)) \in S_-$. Il en résulte en particulier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $g \in S_+$, $\lambda g \in S_+$. Inversement si $\lambda \in \mathbb{R}$, $g \in S_+$ et $\lambda g \in S_+$, alors $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Soit $g \in S^*$. Si g est positif, alors $gg^{-1} = g^0 = 1$. Si g est négatif alors $g[-(-g)^{-1}] = (-g)(-g)^{-1} = (-g)^0 = 1$. Toute grandeur non nulle admet donc un inverse pour la multiplication. Soit alors $g, h, k \in S$ telles que $gk = hk$. D'après ce qui précède il existe $\ell \in S$ telle que $k\ell = 1$. Il vient donc $g = g(k\ell) = (gk)\ell = (hk)\ell = h(k\ell) = h$. Il en résulte que l'inverse multiplicatif d'une grandeur non nulle g est unique : on le notera g^{-1} dans tous les cas. Pour $g \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, g^n a été défini plus haut de telle sorte qu'on ait $g^n = g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (n facteurs g) ; posons alors $g^{-n} = (g^{-1})^n$: on vérifie aisément que les règles des exposants (axiome SG$_6$) restent valables pour $g \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$.

4.3. Espèces de grandeurs et grandeurs composées

On définit maintenant les différentes *espèces de grandeurs G* qui composent le *système de grandeurs S*. Soit $g \in S^*$. On pose $[g] = \{\lambda g \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $[g]_+ = [g] \cap S_+$. Si $h \in [g]$, et puisque l'égalité $\lambda g = \mu g$, avec $g \neq 0$, entraîne $\lambda = \mu$, il existe un réel λ unique tel que $\lambda g = h$; $[g]$ peut donc être muni d'une addition définie par $\lambda g + \mu g = (\lambda + \mu)g$. Moyennant des vérifications simples, laissées au lecteur, on peut alors conclure que $[g]$ est muni d'une structure de droite vectorielle orientée sur $\mathbb{R}$, et $[g]_+$ d'une structure de demi-espace vectoriel orienté de dimension 1 sur $\mathbb{R}$: $[g]_+$ est donc une espèce de grandeurs.

Soit $g, h \in S^*$. Si $[g] \cap [h] \neq \{0\}$, soit $k \in [g] \cap [h]$, $k \neq 0$. Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ tels que $k = \lambda g = \mu h$ et on a : $h = \mu^{-1}k = \mu^{-1}(\lambda g) = (\mu^{-1}\lambda)g \in [g]$, de sorte que $[h] \subset [g]$. On a de même $[g] \subset [h]$, et donc $[h] = [g]$. Ainsi, étant donné deux espèces de grandeurs $[g]$ et $[h]$, ou bien $[g] \cap [h] = \{0\}$, ou bien $[g] = [h]$. On a en outre, toujours pour $g, h \in S^*$: $[g] = [h] \Leftrightarrow h \in [g] \Leftrightarrow g \in [h]$; $[g]_+ = [h]_+$ ou $[g]_+ \cap [h]_+ = \{0\}$; $[g]_+ = [h]_+ \Leftrightarrow [g] = [h]$.

D'après ce qui précède, on a $S = \bigcup \{ [g] \ / \ g \in S^* \}$: S apparaît ainsi comme une *réunion de droites vectorielles réelles*, les espèces de grandeurs algébriques qui composent S. On notera qu'on peut écrire : $S = \bigcup \{ [g] \ / \ g \in S_+^* \}$.

Considérons alors la multiplication entre grandeurs. Soit $w \in S^*$, $g, h \in [w]$ et $k \in S$. L'expression $k(g + h)$ est bien définie. Montrons que $kg + kh$ est bien définie et que l'on a : $k(g + h) = kg + kh$. Ce résultat est trivialement vrai si $k = 0$. Supposons $k \neq 0$ et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $g = \lambda w$, $h = \mu w$. On a $kg = \lambda(kw)$, $kh = \mu(kw)$. Comme $k \neq 0$, on a $kw \neq 0$ et on peut écrire que $kg, kh \in [kw]$: l'expression $kg + kh$ est donc bien définie. Par ailleurs il vient, d'une part $k(g + h) = k(\lambda w + \mu w) = k[(\lambda + \mu)w] = (\lambda + \mu)(kw)$, d'autre part $kg + kh = \lambda(kw) + \mu(kw) = (\lambda + \mu)(kw)$. D'où l'égalité annoncée.

Soit alors $[S]$ l'ensemble des espèces de grandeurs $[g]$, pour $g \in S^*$: $[S] = \{ [g] \ / \ g \in S^* \}$. On munit l'ensemble $[S]$ de deux lois, l'une interne, l'autre externe, en posant, pour tous $g, h \in S_+^*$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, $[g][h] = [gh]$, $[g]^r = [g^r]$. Il convient évidemment de montrer que ces opérations sont bien définies.

Si $[g] = [g']$ et $[h] = [h']$, où $g', h' \in S_+^*$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $g' = \lambda g$ et $h' = \mu h$, et on a $g'h' = (\lambda\mu)gh$, avec $gh, \lambda\mu, g'h' \in S_+^*$, de sorte que $[g'h'] = [gh]$: la multiplication est donc bien définie sur $[S]$. Si $[g] = [g']$, de même, on a $g'^r = (\lambda g)^r = \lambda^r g^r$, avec $g^r, \lambda^r, g'^r \in S_+^*$, de sorte que $[g'^r] = [g^r]$: la loi externe d'exponentiation est donc bien définie sur $[S]$.

Le résultat principal relatif à $[S]$, d'où va découler l'essentiel des propriétés utiles, est alors le suivant : *muni de la multiplication et de l'exponentiation interne,* $[S]$ *est un espace vectoriel multiplicatif sur* $\mathbb{Q}$.

$[S]$ est d'abord un groupe multiplicatif commutatif dont l'élément neutre est $[1] = \mathbb{R}$, soit l'espèce des grandeurs sans dimension, l'inverse de $[g]$ étant $[g^{-1}]$. On a en effet $[1][g] = [1g] = [g]$, $[g][g^{-1}] = [gg^{-1}] = [1]$. On doit alors vérifier que l'application $(r, \mathcal{G}) \mapsto \mathcal{G}^r$ (de $\mathbb{Q} \times [S]$ dans $[S]$) vérifie les axiomes des espaces vectoriels, soit : $(\mathcal{G}\mathcal{H})^r = \mathcal{G}^r\mathcal{H}^r$, $\mathcal{G}^{r+s} = \mathcal{G}^r\mathcal{G}^s$, $\mathcal{G}^{rs} = (\mathcal{G}^r)^s$, $\mathcal{G}^1 = \mathcal{G}$. On a par exemple : $(\mathcal{G}\mathcal{H})^r = ([g][h])^r = [gh]^r = [(gh)^r] = [g^r h^r] = [g^r][h^r] = [g]^r[h]^r = \mathcal{G}^r\mathcal{H}^r$. La vérification des autres axiomes est laissée au lecteur.

On peut alors utiliser les notions et résultats classiques relatifs aux espaces vectoriels. Soit $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n \in [S]$. On dit que $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ *engendrent* $[S]$ si, pour tout $\mathcal{G} \in [S]$, il existe $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}$ tels que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1^{r_1} \dots \mathcal{G}_n^{r_n}$. On dit que $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ sont *linéairement indépendants* si l'égalité $\mathcal{G}_1^{r_1} \dots \mathcal{G}_n^{r_n} = [1]$ implique $r_1 = \dots = r_n = 0$. On dit que $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ forment une *base* de $[S]$ si $\mathcal{G}_1$,

..., $\bar{G}_n$ engendrent $[S]$ et sont linéairement indépendants, soit encore si, pour tout $\bar{G} \in [S]$, il existe $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Q}$ uniques tels que $\bar{G} = \bar{G}_1^{r_1} ... \bar{G}_n^{r_n}$. Si $\{\bar{G}_1, ..., \bar{G}_n\}$ est une base de $[S]$ et $[g] = \bar{G}_1^{r_1} ... \bar{G}_n^{r_n}$, on dit que la grandeur g a pour *dimension* dans la base $\{\bar{G}_1, ..., \bar{G}_n\}$ le n-uple $(r_1, ..., r_n)$; par abus de langage, on dit encore que g a pour dimension $\bar{G}_1^{r_1}, ..., \bar{G}_n^{r_n}$.

On étend ces définitions à S. Soit $g_1, ..., g_n \in S_+^*$; on dit que $g_1, ..., g_n$ engendrent S si $[g_1], ..., [g_n]$ engendrent $[S]$, que $g_1, ..., g_n$ sont indépendants si $[g_1], ..., [g_n]$ le sont dans $[S]$, et que $g_1, ..., g_n$ forment une base de S si $[g_1], ..., [g_n]$ forment une base de $[S]$. On a alors les résultats suivants.

1) Les grandeurs $g_1, ..., g_n \in S_+^*$ engendrent S si et seulement si, pour tout $g \in S$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Q}$ tels que $g = \lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}$.

Si, en effet, $[g_1], ..., [g_n]$ engendrent $[S]$, et si $g \neq 0$, il existe $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Q}$ tels que $[g] = [g_1]^{r_1} ... [g_n]^{r_n} = [g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}]$; on a donc $g \in [g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}]$ et, par suite, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ unique tel que $g = \lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}$. Si $g = 0$, il suffit de prendre $\lambda = 0$. La réciproque est évidente.

2) Les grandeurs $g_1, ..., g_n \in S_+^*$ sont indépendantes si et seulement si l'égalité $g_1^{r_1} ... g_n^{r_n} \in \mathbb{R}$ implique $r_1 = ... = r_n = 0$.

Si en effet $g_1^{r_1} ... g_n^{r_n} \in \mathbb{R}$, on a $[g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}] = [1]$, soit $[g_1]^{r_1} ... [g_n]^{r_n} = [1]$: $[g_1], ..., [g_n]$ étant indépendantes dans $[S]$, cela entraîne que $r_1 = ... = r_n = 0$. La réciproque est évidente.

3) Si les grandeurs $g_1, ..., g_n \in S_+$ sont indépendantes et si $g \in S^*$ s'écrit sous la forme $g = \lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$, $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Q}$), cette écriture est unique.

Si en effet $\lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n} = \mu g_1^{s_1} ... g_n^{s_n}$, on a $(\lambda\mu^{-1}) g_1^{r_1 - s_1} ... g_n^{r_n - s_n} = 1$ et donc $g_1^{r_1 - s_1} ... g_n^{r_n - s_n} \in \mathbb{R}$; par suite $r_1 = s_1, ... r_n = s_n$ et on a $\lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n} = \mu g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}$. Comme $g_1^{r_1} ... g_n^{r_n} \neq 0$, on a $\lambda = \mu$.

4) Si les grandeurs $g_1, ..., g_n \in S_+^*$ forment une base de S, alors tout $g \in S^*$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $\lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Q}$.

Ce résultat découle immédiatement des précédents.

4.4. Systèmes à un nombre fini de dimensions

On se restreint maintenant au cas d'un système de grandeurs S engendré par un nombre *fini* de grandeurs non nulles. On peut alors affirmer que S possède une base, que deux bases de S ont le même nombre d'éléments, appelé *nombre de dimensions de base* de S, et que tout ensemble de grandeurs non nulles indépendantes peut être complété pour former une base de S.

Soit $\{g_1, ..., g_n\}$ et $\{h_1, ..., h_n\}$ deux bases de S. Pour tous i, j, $1 \leq i, j \leq n$, il existe $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ et $r_{ij}, s_{ij} \in \mathbb{Q}$ tels que $h_i = \lambda_i g_1^{r_{i1}} ... g_n^{r_{in}}$ et $g_i = \mu_i h_1^{s_{i1}} ... h_n^{s_{in}}$. On a donc : $g_i = \mu_i(\lambda_1 g_1^{r_{11}} ... g_n^{r_{1n}})^{s_{i1}} ... (\lambda_n g_1^{r_{n1}} ... g_n^{r_{nn}})^{s_{in}} = \mu_i \lambda_1^{s_{i1}} ... \lambda_n^{s_{in}} g_1^{s_{i1}r_{11} + ... + s_{in}r_{n1}} ... g_n^{s_{i1}r_{1n} + ... + s_{in}r_{nn}}$. D'après l'unicité de la décomposition, il vient alors $\mu_i \lambda_1^{s_{i1}} ... \lambda_n^{s_{in}} = 1$, soit $\mu_i = \lambda_1^{-s_{i1}} ... \lambda_n^{-s_{in}}$ et

$$\begin{cases} s_{i1}r_{11}+ \ldots +s_{ij}r_{j1}+ \ldots +s_{in}r_{n1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{i1}r_{1i}+ \ldots +s_{ij}r_{ji}+ \ldots +s_{in}r_{ni} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{i1}r_{1n}+ \ldots +s_{ij}r_{jn}+ \ldots +s_{in}r_{nn} = 0 \end{cases}$$

soit encore

$$(s_{i1} \ldots s_{ij} \ldots s_{in})\begin{pmatrix} r_{11} \ldots r_{1i} \ldots r_{1n} \\ r_{j1} \ldots r_{ji} \ldots r_{jn} \\ r_{n1} \ldots r_{ni} \ldots r_{nn} \end{pmatrix} = (0 \ldots 1 \ldots 0)$$

et donc $\mathrm{M}(s_{ij})\mathrm{M}(r_{ij}) = \mathrm{I}$, soit $\mathrm{M}(s_{ij}) = \mathrm{M}(r_{ij})^{-1}$. En outre, en échangeant g_i et h_i, on a de même $\lambda_i = \mu_1^{-r_{i1}} \ldots \mu_n^{-r_{in}}$ (et $\mathrm{M}(r_{ij}) = \mathrm{M}(s_{ij})^{-1}$).

Observons que, si une grandeur est exprimée dans la base $\{g_1, ..., g_n\}$ par $g = \nu g_1^{t_1} \ldots g_n^{t_n}$, il vient

$$g = \nu\mu_1^{t_1} \ldots \mu_n^{t_n} h_1^{t_1s_{11}+ \ldots +t_ns_{n1}} \ldots h_n^{t_1s_{1n}+ \ldots +t_ns_{nn}}$$

ce qui donne son expression dans la base $\{h_1, ..., h_n\}$. On considère alors les changements de base (dans S) qui conservent les dimensions de base, c'est-à-dire tels que $[h_i] = [g_i]$ pour $1 \leq i \leq n$. Les formules précédentes se réduisent alors à $h_i = \lambda_i g_i$ et $g_i = \mu_i h_i = \lambda_i^{-1}h_i$, les λ_i étant > 0. Pour $g = \nu g_1^{t_1} \ldots g_n^{t_n}$, on a $g = \nu\lambda_1^{-1} \ldots \lambda_n^{-1}h_1^{t_1} \ldots h_n^{t_n}$. Si l'on appelle *coefficient* de g dans la base $\{g_1, ..., g_n\}$ le réel ν tel que $g = \nu g_1^{t_1} \ldots g_n^{t_n}$, on voit que l'égalité précédente fait retrouver *les lois du calcul « avec unités »* : le coefficient de g dans la base $\{h_1, ..., h_n\}$ s'obtient simplement en remplaçant les g_i par leur expression en fonction des h_i.

4.5. Similitudes entre systèmes de grandeurs

Étant donné deux systèmes de grandeurs S et T, on appelle morphisme de S dans T toute application ϕ de S dans T satisfaisant les conditions suivantes : si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\phi(\lambda) = \lambda$; si $g \in S_+^*$ alors $\phi(g) \in T_+^*$; pour tous $g, h \in S$, $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$; pour tout $g \in S_+^*$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, $\phi(g^r) = \phi(g)^r$. On a en particulier $\phi(0) = 0$ et, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $g \in S$, $\phi(\lambda g) = \lambda\phi(g)$. Il en résulte notamment que, pour tout $g \in S_+$, $\phi([g]) = [\phi(g)]$. La restriction de ϕ à $[g]$ est alors un (iso)morphisme de la droite vectorielle $[g]$ sur la droite vectorielle $[\phi(g)]$. Pour $h, k \in [g]$ il existe en effet $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $h = \lambda g$, $k = \mu g$, et on a donc $\phi(\lambda h) = \lambda\phi(h)$, $\phi(h + k) = \phi(\lambda g + \mu g) = \phi((\lambda + \mu)g) = (\lambda + \mu)\phi(g) = \lambda\phi(g) + \mu\phi(g) = \phi(\lambda g) + \phi(\mu g) = \phi(h) + \phi(k)$.

D'après des résultats classiques en algèbre linéaire, on a ensuite les faits suivants. Étant donné des systèmes de grandeurs S et T et une base $\{g_1, ..., g_n\}$ de S, pour tout $(h_1, ..., h_n) \in (T_+^*)^n$ il existe un morphisme unique ϕ de S dans T tel que $\phi(g_i) = h_i$ pour $1 \leq i \leq n$: on a $\phi(\lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n}) = \lambda h_1^{r_1} \ldots h_n^{r_n}$. Le morphisme ϕ est injectif si et seulement si $\{h_1, ..., h_n\}$ est indépendant, surjectif si et seulement si $\{h_1, ..., h_n\}$ engendre T, bijectif si et seulement si $\{h_1, ..., h_n\}$ est une base de T. Il existe un isomorphisme de S sur T si et seulement si les systèmes de grandeurs S et T ont le même nombre de dimensions de base.

Parmi les morphismes de systèmes de grandeurs, on considère maintenant le cas particulier essentiel des *similitudes*. On appelle similitude de S un automorphisme de S tel que, pour tout

$g \in S_+^*$, on a $[\phi(g)] = [g]$, c'est-à-dire tel que ϕ conserve les *espèces* de grandeurs. On a le résultat suivant : un endomorphisme ϕ de S tel que $[\phi(g)] = [g]$ pour tout $g \in S_+^*$ est une similitude de S ; si $g \in S_-^*$ alors $\phi(g) \in S_-^*$.

Si, en effet, $g \in S_-^*$ alors $-g \in S_+^*$ et donc $\phi(-g) \in S_+^*$ Comme $\phi(-g) = \phi((-1)g) = (-1)\phi(g) = -\phi(g)$, $\phi(g) = -\phi(-g) \in S_+^*$. Soit alors $g, h \in S$ tels que $\phi(g) = \phi(h) = k$. Si $k \neq 0$, alors $g, h \neq 0$ et il vient $[g] = [\phi(g)] = [\phi(h)] = [h]$, de sorte qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $g = \lambda h$. On a donc $\phi(g) = \phi(\lambda h) = \lambda\phi(h) = \lambda\phi(g)$, d'où $\lambda = 1$ et $g = h$. Si $k = 0$, $g = h = 0$, puisque $g, h \neq 0$ entraîne $\phi(g), \phi(h) \neq 0$. Ainsi ϕ est injectif. Soit alors $g \neq 0$; il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\phi(g) = \lambda g$, et on a alors $\phi(\lambda^{-1}g) = g$: ϕ est surjectif.

Les similitudes d'un système de grandeurs à un nombre fini de dimensions de base sont précisées par le résultat suivant : toute base $\{g_1, ..., g_n\}$ de S définit une bijection canonique entre les similitudes de S et l'ensemble $(\mathbb{R}_+^*)^n$, bijection qui, à la similitude ϕ, associe le n-uple $\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ défini par les égalités $\phi(g_i) = \lambda_i g_i$ $(1 \leq i \leq n)$; pour $g \in [g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}]$, on a $\phi(g) = \lambda_1^{r_1} ... \lambda_n^{r_n} g$.

Soit en effet ϕ une similitude. Comme $\phi(g_i) \in S_+^*$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\phi(g_i) = \lambda_i g_i$ $(1 \leq i \leq n)$: l'application $\phi \mapsto \Lambda$ est donc bien définie. Inversement, l'application $\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \mapsto \phi$, où $\phi(g_i) = \lambda_i g_i$, est définie puisque, si $\{g_1, ..., g_n\}$ est une base, $\{\lambda_1 g_1, ..., \lambda_n g_n\}$ est aussi une base. Soit $g \in [g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}]$; il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}$ et on a donc : $\phi(g) = \phi(\lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}) = \phi(\lambda)\phi(g_1^{r_1}) ... \phi(g_n^{r_n}) = \lambda\phi(g_1)^{r_1} ... \phi(g_n)^{r_n} = \lambda(\lambda_1 g_1)^{r_1} ... (\lambda_n g_n)^{r_n} = \lambda(\lambda_1^{r_1} g_1^{r_1}) ... (\lambda_n^{r_n} g_n^{r_n}) = \lambda_1^{r_1} ... \lambda_n^{r_n}(\lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}) = \lambda_1^{r_1} ... \lambda_n^{r_n} g$. Par suite, ϕ est une similitude de S. Il est clair que l'application $\Lambda \mapsto \phi$ est injective. Si ϕ est une similitude à laquelle est associée $\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, la similitude ψ telle que $\psi(g_i) = \lambda_i g_i$ est identique à ϕ : l'application $\Lambda \mapsto \phi$ est donc surjective.

4.6. Système engendré par des grandeurs

Soit n grandeurs non nulles $g_1, ..., g_n$. On construit un système de grandeurs S engendré par $g_1, ..., g_n$. Pour cela, on considère les expressions formelles $\lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Q}$. On identifie d'une part tous les éléments de la forme $0 g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}$ avec l'élément 0 de $\mathbb{R}$, et, d'autre part, tous les éléments de la forme $\lambda g_1^{0} ... g_n^{0}$ avec l'élément λ de $\mathbb{R}$. Ces identifications étant faites, on obtient l'ensemble S annoncé. On définit alors S_+ comme formé des éléments de la forme $\lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Définissons alors la multiplication et l'exponentiation, respectivement, par $(\lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n})(\mu g_1^{s_1} ... g_n^{s_n}) = \lambda\mu g_1^{r_1+s_1} ... g_n^{r_n+s_n}$ et $(\lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n})^t = \lambda^t g_1^{r_1 t} ... g_n^{r_n t}$ $(\lambda > 0)$. Ces opérations sont bien définies : si $\lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}$ ou $\mu g_1^{s_1} ... g_n^{s_n}$ a plusieurs expressions, c'est que λ ou μ est nul, et par suite $\lambda\mu = 0$, de sorte que le produit des deux expressions est bien défini par l'expression figurant dans le membre de droite ; la seconde opération n'est définie que sur des expressions ayant un nom unique.

On définit $S_+ \subset S$ comme formé des éléments $\lambda\, g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}$ tels que $\lambda \geq 0$. Montrons alors que S est un système de grandeurs. Observons d'abord que $(\mu g_1^{0} ... g_n^{0})(\lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}) = (\mu\lambda) g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}$. En prenant $r_1 = ... = r_n = 0$, on voit, d'après l'identification faite plus haut, que la restriction à $\mathbb{R}$ de la multiplication définie sur S est la multiplication usuelle sur $\mathbb{R}$. En faisant $\mu = 1$ puis $\mu = 0$ on vérifie que l'axiome SG_1 est satisfait : $1(\lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}) = (1 g_1^{0} ... g_n^{0})(\lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}) = (1\lambda) g_1^{r_1} ... g_n^{r_n} = \lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}$; $0(\lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}) = (0 g_1^{0} ... g_n^{0})(\lambda g_1^{r_1} ... g_n^{r_n}) = (0\lambda) g_1^{r_1} ... g_n^{r_n} = 0 g_1^{r_1} ... g_n^{r_n} = 0$.

L'associativité et la commutativité de la multiplication dans S découlent immédiatement de celle de la multiplication dans $\mathbb{R}$ et de l'addition dans $\mathbb{Q}$. Par ailleurs, $\lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n} \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $r_1 = \ldots = r_n = 0$: l'axiome SG_2 est donc vérifié. Si, dans l'égalité indiquée plus haut, on prend alors $\mu = -1$, il vient $-(\lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n}) = (-1)(\lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n}) = ((-1)g_1^{0} \ldots g_n^{0})(\lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n}) = ((-1)\lambda)g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n} = (-\lambda)g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n}$.

Pour $\lambda \neq 0$, un et un seul des deux nombres λ et $-\lambda$ appartient à $\mathbb{R}_+^*$ et donc une et une seule des deux grandeurs $\lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n}$ et $-\lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n}$ appartient à S_+^* : SG_3 est vérifié. SG_4 l'est de même, trivialement. La définition de l'exponentiation sur S_+^* montre que sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est bien l'exponentiation sur $\mathbb{R}_+^*$ (avec exposants dans $\mathbb{Q}$). Pour $g = \lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n}$ avec $\lambda > 0$ on a : $g^1 = (\lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n})^1 = \lambda^1 g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n} = \lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n} = g$; $g^0 = (\lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n})^0 = \lambda^0 g_1^{0} \ldots g_n^{0} = 1g_1^{0} \ldots g_n^{0} = 1$. L'axiome SG_5 est donc vérifié. La vérification de SG_6, immédiate, est laissée au lecteur.

On simplifie maintenant les notations. Soit $g = \lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n}$. On a : $\lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n} = (g_1^{r_1})(\lambda g_2^{r_2} \ldots g_n^{r_n})$. Si $r_1 = 0$, $g_1^{r_1} = g_1^{0} = 1$ et donc $\lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n} = \lambda g_2^{r_2} \ldots g_n^{r_n}$. Plus généralement, on peut supprimer tous les facteurs $g_i^{r_i}$ pour lesquels $r_i = 0$. De même, si $\lambda = 1$ on supprime λ (à moins que tous les r_i ne soient nuls). La notation g_i désigne alors la grandeur $1g_1^{0} \ldots g_i^{1} \ldots g_n^{0}$, de sorte que les g_i ($1 \leq i \leq n$) sont alors des éléments de S (et plus précisément de S_+). Il vient en outre $g_i^{r} = (1g_1^{0} \ldots g_i^{1} \ldots g_n^{0})^r = 1g_1^{0} \ldots g_i^{r} \ldots g_n^{0}$ et on peut alors écrire $\lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n} = (\lambda)(g_1^{r_1}) \ldots (g_n^{r_n}) = (\lambda)((g_1)^{r_1} \ldots ((g_n)^{r_n})$, de sorte que $\lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n}$ peut être regardé comme un produit de grandeurs dans S. En outre tout élément de S s'écrit de manière unique sous la forme $\lambda g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n}$: $\{g_1, \ldots, g_n\}$ est une base de S.

Dans la construction précédente, on est parti de n grandeurs $g_1, \ldots, g_n$ indépendantes. Partons maintenant de *n espèces* de grandeurs, $G_1, \ldots, G_n$. Pour $1 \leq i \leq n$, soit $g_i \in G_i^*$. On désigne par $S_0 = S(g_1, \ldots, g_n)$ le système de grandeurs correspondant. Soit alors $h_i \in G_i^*$, pour $1 \leq i \leq n$. On va montrer que $S_1 = S(h_1, \ldots, h_n)$ et S_0 sont le *même* système de grandeurs. Pour cela on introduit les réels $\lambda_i > 0$ tels que $h_i = \lambda_i g_i$. Soit alors $\lambda h_1^{r_1} \ldots h_n^{r_n} \in S_1$; dans S_0 on a l'égalité $\lambda h_1^{r_1} \ldots h_n^{r_n} = \lambda(\lambda_1 g_1)^{r_1} \ldots (\lambda_n g_n)^{r_n} = (\lambda\lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_n^{r_n})g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n}$. Pour $\lambda = 0$ il vient $0h_1^{r_1} \ldots h_n^{r_n} = (0\lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_n^{r_n})g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n} = 0g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n}$, de sorte que les éléments $0h_1^{r_1} \ldots h_n^{r_n} \in S_1$ et $0g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n} \in S_0$ sont identifiés à $0 \in \mathbb{R}$ respectivement dans S_1 et S_0. De même pour $r_1 = \ldots = r_n = 0$, on a $\lambda h_1^{0} \ldots h_n^{0} = (\lambda\lambda_1^{0} \ldots \lambda_n^{0})g_1^{0} \ldots g_n^{0} = \lambda g_1^{0} \ldots g_n^{0}$, de sorte que les éléments $\lambda h_1^{0} \ldots h_n^{0} \in S_1$ et $\lambda g_1^{0} \ldots g_n^{0} \in S_0$ sont identifiés à $\lambda \in \mathbb{R}$ respectivement dans S_1 et S_0. Dans le cas où $\lambda \neq 0$ et où les r_i sont non tous nuls, l'égalité $\lambda h_1^{r_1} \ldots h_n^{r_n} = (\lambda\lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_n^{r_n})g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n}$ permet d'identifier l'élément $\lambda h_1^{r_1} \ldots h_n^{r_n} \in S_1$ avec l'élément $(\lambda\lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_n^{r_n})g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n} \in S_0$. Pour $\mu \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda = \mu\lambda_1^{-r_1} \ldots \lambda_n^{-r_n}$ on a $\lambda h_1^{r_1} \ldots h_n^{r_n} = (\lambda\lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_n^{r_n})g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n} = \mu g_1^{r_1} \ldots g_n^{r_n}$, de sorte que l'ensemble S_1 s'identifie avec l'ensemble S_0 tout entier. On laissera le lecteur vérifier que les définitions de la multiplication, de l'exponentiation et de S_+ coïncident dans S_1 et S_0. Il en résulte que S_1 et S_0 sont un même système de grandeurs. Ainsi, pour des espèces de grandeurs $G_1, \ldots, G_n$ données, le système de grandeurs $S(g_1, \ldots, g_n)$ est indépendant des grandeurs $g_1, \ldots, g_n$ non nulles choisies. Puisque $\{g_1, \ldots, g_n\}$ est une base de S, $\{\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_n\}$ est une base de $[S]$.

4.7. Calculer avec les unités

On va maintenant exploiter la notion de système de grandeurs pour montrer comment le calcul sur les grandeurs qu'elle autorise justifie les calculs *avec* unités. Notons d'abord que si

g et h sont des grandeurs d'espèces quelconques, avec $h \neq 0$, on peut poser $\frac{g}{h} = gh^{-1}$, la grandeur gh^{-1} appartenant à l'espèce $[g][h]^{-1}$. Si g, h, k, ℓ sont des grandeurs d'espèces quelconques, avec h et ℓ non nuls, on a $\frac{g}{h}\frac{k}{\ell} = (gh^{-1})(k\ell^{-1}) = (gk)(h\ell)^{-1} = \frac{gk}{h\ell}$; et, de même, en supposant en outre $k \neq 0$, $\frac{\frac{g}{h}}{\frac{k}{\ell}} = \frac{gh^{-1}}{k\ell^{-1}} = (gh^{-1})(k\ell^{-1})^{-1} = (g\ell)(hk)^{-1} = \frac{g\ell}{hk}$. En supposant $h > 0$ si $r \in \mathbb{Q}$ n'est pas entier, on a encore $\left(\frac{g}{h}\right)^r = (gh^{-1})^r = g^r h^{-r} = g^r(h^r)^{-1} = \frac{g^r}{h^r}$.

Soit $g \neq 0$. Alors $g^2 \in S_+^*$ et $\frac{1}{g^2} = \left(\frac{1}{g}\right)^2 \in S_+^*$. Si $g > 0$, $g^{1/2} \in S_+^*$: on pose $\sqrt{g} = g^{1/2}$. Cela étant, soit l'équation (dans S) $x^2 = a$, où $a \in S_+^*$. Soit $x \in S$ tel que $x^2 = a$. Si $x \in S_+^*$, on a $x = (x^2)^{1/2} = a^{1/2} = \sqrt{a}$. Si $x \in S_-^*$, $-x \in S_+^*$ et comme $(-x)^2 = x^2 = a$, on a $-x = \sqrt{a}$, soit $x = -\sqrt{a}$. Ainsi l'équation $x^2 = a$ admet-elle deux solutions exactement, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Notons qu'on aurait pu aussi procéder ainsi : si $x^2 = a$, on a $[x^2] = [a]$ et donc aussi $[x] = [x^2]^{1/2} = [a]^{1/2} = [\sqrt{a}]$, de sorte que l'on peut écrire $x^2 - a = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$; l'équation proposée est donc équivalente à $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$ soit à $x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$, ce qui donne $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

Soit l'équation générale du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \in \mathcal{G}^*$, $b \in \mathcal{G}\mathcal{H}$, $c \in \mathcal{G}\mathcal{H}^2$: les solutions x doivent être cherchées dans $\mathcal{H}$. On a : $a^{-1}(ax^2 + bx + c) = x^2 + ba^{-1}x + ca^{-1} = (x + \frac{1}{2}ba^{-1})^2 - \frac{1}{4}a^{-2}(b^2 - 4ac)$. Il en résulte que $a^{-1}(ax^2 + bx + c)$ s'annule si et seulement si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution ; si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution, $x = -\frac{1}{2}ba^{-1} \in \mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{G}^{-1} = \mathcal{H}$; si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions opposées, $x = \frac{1}{2}a^{-1}(-b + \sqrt{\Delta})$ et $x = \frac{1}{2}a^{-1}(-b - \sqrt{\Delta})$, qui toutes deux appartiennent à $\mathcal{H}$.

Prenons par exemple le système de grandeurs engendré par L et T, où L est l'espèce des *longueurs* et T celles des *durées* ; soit un projectile lancé verticalement à la vitesse initiale $v_0 = 35$ m/s $\in LT^{-1}$: on veut déterminer le temps auquel la pierre aura atteint la hauteur 20 m ($\in L$). En négligeant le frottement de l'air, on a $v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = 20$ m. Si on prend $g = 10$ m/s$^2 \in LT^{-2}$, l'équation s'écrit $35(\text{m/s})t - 5(\text{m/s}^2)t^2 = 20$ m. En multipliant l'équation par $\text{s}^2/(5\text{m})$, on obtient : $t^2 - 7\text{s}t + 4\text{s}^2 = 0$. On a $\Delta = 49\text{s}^2 - 4(4\text{s}^2) = 33\text{s}^2$ et donc $\sqrt{\Delta} = \sqrt{33}\text{s}$. D'après ce qui précède, on a $t = \frac{1}{2}(7\text{s} - \sqrt{33}\text{s}) = \frac{1}{2}(7 - \sqrt{33})\text{s}$ ou $t = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{33})\text{s}$.

Le calcul *avec les unités*, c'est-à-dire en fait le calcul sur les grandeurs, inclut non seulement le calcul « algébrique » sur les grandeurs, que l'on vient d'illustrer, mais encore le calcul *différentiel et intégral*, sur lequel on ne s'arrêtera pas ici [10]. On examinera un instant, en

[10] Sur cette question, voir Whitney 1968.

revanche, la notion de *proportionnalité*. Pour cela, revenons à la notion d'aire. Si l'on définit l'aire a d'un rectangle comme le produit de sa largeur $\ell_0 \in L$ par sa longueur $\ell_1 \in L$, et si, ayant choisi une unité de longueur $u \in L$, on étend la mesure ainsi définie sur les rectangles à l'ensemble des parties *quarrables* du plan[11], on définit sur cet ensemble d'objets une espèce de grandeur, l'aire A, telle que $A = L^2$. La définition de l'espèce de grandeur volume V à partir des pavés de l'espace conduit de même à conclure que $V = L^3$. Considérons alors un cylindre de hauteur $h \in L$ et de base un cercle de rayon $r \in L^*$; son volume $v \in L^3$ est fonction de h et de r : $v = f(h, r)$. On sait (ou on admet) que, pour $\lambda > 0$, on a $f(\lambda h, r) = \lambda f(h, r)$ et $f(h, \lambda r) = \lambda^2 f(h, r)$: on dit que f est *homogène de degré* 1 *par rapport à h*, et de degré 2 par rapport à r, ou encore que v est proportionnel à h et proportionnel à r^2. Choisissons alors une unité $u \in L^*$: on a $h = \lambda u$, $r = \mu u$, pour λ, μ uniques dans $\mathbb{R}_+^*$. Il vient $f(h, r) = f(\lambda u, \mu u) = \lambda\mu^2 f(u, u)$, où $f(u, u) \in (L^3)^*$ et s'écrit donc ku^3 pour un certain réel $k > 0$. On a ainsi $v = f(h, r) = \lambda\mu^2 ku^3 = k(\lambda u)(\mu u)^2 = khr^2$. Le coefficient k se détermine alors par le calcul intégral.

D'une manière générale, on a le résultat suivant. Soit $n + 1$ espèces de grandeurs $G, G_1, ..., G_n$, et soit f une application de $G_1 \times ... \times G_n$ dans G homogène de degré r_i par rapport à la i-ième variable ($1 \leq i \leq n$). Il existe une constante unique $k \in GG_1^{-r_1} ... G_n^{-r_n}$ telle que $f(g_1, ..., g_n) = kg_1^{r_1} ... g_n^{r_n}$ pour tout $(g_1, ..., g_n) \in G_1 \times ... \times G_n$. Soit en effet $u_i \in G_i^*$ et λ_i tel que $g_i = \lambda_i u_i$ ($1 \leq i \leq n$). On a : $f(g_1, ..., g_n) = f(\lambda_1 u_1, ..., \lambda_n u_n) = \lambda_1^{r_1} ... \lambda_n^{r_n} f(u_1, ..., u_n)$. Posons $k = f(u_1, ..., u_n)u_1^{-r_1} ... u_n^{-r_n}$; comme $f(u_1, ..., u_n) \in G$ on a $k \in GG_1^{-r_1} ... G_n^{-r_n}$ et il vient : $f(g_1, ..., g_n) = \lambda_1^{r_1} ... \lambda_n^{r_n} f(u_1, ..., u_n) = k(\lambda_1 u_1)^{r_1} ... (\lambda_n u_n)^{r_n} = kg_1^{r_1} ... g_n^{r_n}$.

Comme dans le cas du cylindre (où $G_1 = G_2 = L$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $G = L^3$), on a souvent, en pratique, $G = G_1^{r_1} ... G_n^{r_n}$ et donc $GG_1^{-r_1} ... G_n^{-r_n} = \mathbb{R}_+$, de sorte que $k \in \mathbb{R}_+$. Lorsque $n = 1$ et $r_1 = 1$, on obtient le cas de la « proportionnalité simple » – celle du collège –, avec $k \in GG_1^{-1}$. Soit u et u_1 des unités de G et G_1 respectivement. Il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}_+$ unique tel que $k = \alpha \dfrac{u}{u_1}$ et il vient : $f(g_1) = kg_1 = \alpha\, g_1 \dfrac{u}{u_1} = \alpha \dfrac{g_1}{u_1} u$. Si $g_1 = xu_1$, on a donc $f(xu_1) = (\alpha x)u$, où k et $x \in \mathbb{R}_+$.

Ainsi qu'on l'a souligné, la construction précédente permet de justifier complètement les calculs sur les grandeurs. Soit ainsi le problème suivant (Whitney 1968, p. 248) :

> *« John ran a quarter of a mile in two and a quarter minutes. What was his average speed, in ft per sec ? »*

Ici, on a simplement : $v = \dfrac{0{,}25 \text{ mi}}{2{,}25 \text{ min}} = \dfrac{0{,}25 \cdot 5280\text{ft}}{2{,}25 \cdot 60\text{s}} \approx 9{,}78 \dfrac{\text{ft}}{\text{s}} = 9{,}78 \text{ ft} \cdot \text{s}^{-1}$. À propos de l'usage de « laisser tomber » les unités, le même auteur écrit (*ibid.*, p. 251) :

> *« In elementary work, it is very doubtful if units should be omitted, especially if units are to be changed. For instance, let us give the answer in the problem of John's race [...] as follows : "John ran the distance $\frac{1}{4}$ in the time $2\frac{1}{4}$, in terms of miles and minutes ; his average speed was $\frac{88}{9}$, in terms of feet and seconds." The student will find it conceptually difficult to understand this, and more so to derive it. How does he remember in which direction the formulas for changing units work ? Keeping in the units, all such difficulties disappear. »*

[11] Sur cette notion, voir par exemple Rogalski, Robert, Pouyanne 2001, chapitre 9.

Mais que fait-on au juste quand on « laisse tomber » les unités d'un calcul ? Considérons l'exemple suivant : on travaille dans le système de grandeurs S engendré par les grandeurs m et s. Toute grandeur peut alors s'écrire sous la forme $\lambda \mathrm{m}^r \mathrm{s}^t$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, r, $t \in \mathbb{Q}$). Soit ϕ l'homomorphisme de S dans $\mathbb{R}$, défini par $\phi(\mathrm{m}) = \phi(\mathrm{s}) = 1$. On a $\phi(\lambda \mathrm{m}^r \mathrm{s}^t) = \lambda \phi(\mathrm{m})^r \phi(\mathrm{s})^t = \lambda$, et donc $\lambda \mathrm{m}^r \mathrm{s}^t = \phi(\lambda \mathrm{m}^r \mathrm{s}^t)\mathrm{m}^r \mathrm{s}^t$. Reprenons ici le calcul effectué plus haut.

> Comme la restriction de ϕ à une espèce de grandeurs donnée est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on a : $\phi\left(20 \text{ ms}^{-1} \cdot 240 \text{ s} - \frac{1}{2} 0{,}04 \text{ ms}^{-2} \cdot 240^2 \text{ s}^2\right) = \phi(20 \text{ ms}^{-1} \cdot 240 \text{ s}) - \phi\left(\frac{1}{2} 0{,}04 \text{ ms}^{-2} \cdot 240^2 \text{ s}^2\right)$ $= \phi(20 \text{ ms}^{-1})\phi(240 \text{ s}) - \phi\left(\frac{1}{2} 0{,}04 \text{ ms}^{-2}\right)\phi(240^2 \text{ s}^2) = 20 \cdot 240 - \frac{1}{2} 0{,}04 \cdot 240^2 = 3648$. Il vient donc : $20 \text{ ms}^{-1} \cdot 240 \text{ s} - \frac{1}{2} 0{,}04 \text{ ms}^{-2} \cdot 240^2 \text{ s}^2 = 3648 \text{ m}$.

D'une manière générale, le théorème d'homomorphisme (appliqué au système $\mathbb{R}$ des grandeurs sans dimension) permet de justifier *l'oubli* des unités : pour obtenir le résultat avec unités, il suffit de faire suivre le résultat numérique obtenu en ignorant les unités de l'unité choisie dans l'espèce de grandeurs sur laquelle on opère.

Si la technique dominante des calculs *sans* unités, c'est-à-dire des calculs sur des *mesures* et non sur des grandeurs, peut donc bien être justifiée, on retiendra surtout que la technique des calculs *avec* unités, ou, comme on disait autrefois, sur des nombres concrets (tels 5 cm, 57 km/h, etc.), c'est-à-dire sur des grandeurs, est la plus « normale », et en tout cas la plus pertinente, par la *fiabilité* qu'elle procure, en particulier lorsque l'opérateur est un débutant dans le domaine où il calcule.

Références bibliographiques

APMEP (1982), *Mots*, tome VI (*Grandeur*, *mesure*). Paris : APMEP.

BOURBAKI N. (1963), *Éléments de mathématique*, Livre III, *Topologie générale*, chapitres 5 à 8. Paris : Hermann.

CARTAN A., CARTAN É. (1934), *Arithmétique (Classes de 4e et de 3e)*. Paris : Armand Colin.

CHEVALLARD Y., BOSCH M. (2000), Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, 55, p. 5-32.

DHOMBRES J. (1998), Nombres réels. *Dictionnaire des mathématiques. Fondements, probabilités, applications*. Paris : Encyclopædia Universalis et Albin Michel.

DIEUDONNÉ J. (1964), *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris : Hermann.

JONES A., MORRIS S.A., PEARSON K.R. (1994), *Abstract Algebra and Famous Impossibilities*. New York : Springer-Verlag.

MAURY L. (1996), *Les origines de l'école laïque en France*. Paris : PUF.

ROGALSKI M., ROBERT A., POUYANNE N. (2001), *Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie*. Paris : Ellipses.

ROUCHE N. (1992), *Le sens de la mesure*. Bruxelles : Didier Hatier.

ROUCHE N. (1994), Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil psychologique. *Repères - IREM*, 15, avril 1994, p. 25-36.

WHITNEY H. (1968), The Mathematics of Physical Quantities, Part II : Quantity Structures and Dimensional Analysis. *The American Mathematical Monthly*, mars 1968, p. 227-256.