LA RECHERCHE, L'ENSEIGNEMENT ET LE RESTE [*]

par Yves Chevallard (Luminy)

On pose mal le problème de l'enseignement à l'Université si on le réduit – comme c'est généralement le cas – à un face à face entre recherche et enseignement. Quand on a dit – ce dont, peu ou prou, tout le monde doit convenir – que l'état de l'enseignement conditionne en partie, avec un décalage chronologique évident mais non moins imparable, l'état de la recherche ; quand on a constaté qu'il n'est guère actuellement de critère acceptable de jugement de la valeur d'un enseignement (sauf à mettre un inspecteur derrière chaque enseignant) ; quand, de plus, on a rajouté là-dessus l'inévitable question de l'évolution des carrières (sur laquelle se croisent revendications légitimes et arguments ambigus) ; quand, bientôt, prenant acte d'un constat de nécessité et d'impuissance tout à la fois, on se borne à quelques encouragements sans vraie portée pratique (parce que, d'abord, non fondés sur une analyse théorique véritable) ; alors le *débat scientifique* est terminé. Et les discussions d'opinions, répétitives, deviennent interminables.

C'est oublier qu'il n'y a pas d'amélioration possible de l'enseignement sans analyse des *conditions* qui commandent l'enseignement. On insiste souvent par exemple, à propos de l'« enseignant-chercheur », sur le lien indissoluble qui unirait les qualités de l'enseignant à la valeur du chercheur. Trop de contre-exemples s'offrent à nous pour que l'on puisse accepter, sans examen, cette assertion. Le lien existe, certes, mais (tout comme avec les corrélations statistiques) il faut le situer à un niveau d'*ensemble*. Le rechercher au niveau de l'individu, c'est commettre une erreur d'échelle. Et une erreur qui fait obstacle – chose plus grave – à l'approfondissement de l'analyse : si le niveau de l'individu est bien le niveau pertinent d'analyse et d'action, on conclura vite qu'un bon enseignant doit surtout être un bon chercheur, pour nourrir son enseignement d'une science riche et authentique.

C'est oublier le problème des *médiations*, multiples, qui font le tissu où se développent recherche comme enseignement : entre recherche et enseignement, il n'y a guère de lien *direct*, qui serait réalisé en chacun de nous, mais bien plutôt, de fait (donc, qu'on le veuille ou non), un lien *médiat*, un système complexe de médiations qui concernent, irriguent, animent la communauté mathématique dans son entier. L'exemple de la réforme des mathématiques modernes est à cet égard éclairant. Ceux qui ont impulsé cette réforme, dans les années cinquante, ont eu raison de le faire : il fallait redonner une substance à un enseignement qui s'étiolait. Mais ceux – les étudiants d'abord, puis les élèves de l'enseignement secondaire – qui ont connu cette réforme, ont raison de penser, et de dire, qu'ils ont vu alors les structures leur tomber du ciel sur la tête [1]. La réforme était devenue nécessaire. Mais elle fut aussi nécessairement traumatisante, parce qu'elle avait été trop longtemps différée. Pourquoi un si grand retard, qui de fait imposa aux réformateurs une chirurgie brutale ? D'un faisceau de raisons, extrayons-en une, dont le poids n'est pas discutable : l'enseignement avait vieilli parce qu'entre la pointe avancée de la recherche et le quotidien de l'enseignement, la communication se faisait mal. Depuis longtemps les médiations ne fonctionnaient plus. À tel point que les éléments introduits alors pour « moderniser » l'enseignement ont parfois usurpé leur titre de modernité. Il en est ainsi par exemple des éléments d'algèbre linéaire, qui

---

[*] Ce qui suit s'inscrit dans le prolongement des réflexions amorcées lors des Journées SMF de Montpellier (2-3-4 octobre 1980) consacrées aux problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'Université.

[1] Sur ce point, cf. Y. Chevallard, *Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixante*, in *Recherches*, n° 41 (septembre 1980), p. 71-99.

apparaissent dans l'enseignement universitaire parisien vers la fin des années cinquante : Peano en avait donné un exposé détaillé, en une langue claire (qui n'était pas le « péanien » tant raillé autrefois par Poincaré) *dès 1888*. Cette présentation [2], directement utilisable, attendait depuis près de soixante-dix ans ! On peut dire alors, pour risquer un paradoxe, que la modernisation a consisté ici à introduire des éléments *archaïques*, déjà anciens, qui n'étaient modernes qu'en contraste avec une situation générale *hyperarchaïque*. Ce coup d'œil rétrospectif explique à la fois l'ardeur des réformateurs et le violent traumatisme des réformés.

Il faut resituer recherche et enseignement à l'intérieur d'un cadre où apparaissent les enjeux et les mécanismes réels qui les font solidaires l'un de l'autre. Recherche et enseignement ne sont que deux points, ou si l'on veut deux extrémités, d'un continuum qui, outre ces deux types d'activités, est constitué surtout d'un ensemble d'activités intermédiaires, que l'on peut appeler activités *de vulgarisation et de diffusion internes à la communauté mathématique*. À l'intérieur de cette communauté, il ne suffit pas que du savoir soit produit. Encore faut-il qu'il circule, et qu'il irrigue l'ensemble du corps mathématique, sous peine de déséquilibre et d'étiolement. Le sous-développement des activités de vulgarisation et de diffusion *internes* est à l'origine de bien des dysfonctionnements, en particulier de ces phénomènes de développement inégal (pour emprunter un terme aux économistes) dont le prix doit ensuite être brutalement payé. Il est vrai par exemple que quelques universités françaises (Nancy, Strasbourg) avaient, dès l'avant-guerre, réagi contre la situation qui prévalait alors. Mais ce mouvement ne put diffuser sur l'ensemble français, parce que n'existaient pas les relais qui eussent permis, par une plus grande progressivité, d'atténuer les rigueurs d'un bouleversement dès cette époque inévitable.

Ces fonctions de diffusion, de vulgarisation, d'actualisation du savoir, ne sont que très partiellement remplies par la recherche et l'enseignement *stricto sensu* : sans doute apprend-on en enseignant, et sans doute aussi la recherche demeure-t-elle la meilleure source de savoir. Mais l'enseignement devient vite la proie de la répétition, et la recherche tend à isoler dans la spécialisation. Il faut une vulgarisation interne pour assurer le décloisonnement des spécialités, en même temps que la pesée féconde de la recherche sur l'enseignement. Que sont ces activités ? Il y a, proche du domaine de la recherche au point de s'y fondre presque, ce qui est peut-être une qualité essentielle de la direction de recherches, cette fonction de « professeur de curiosité » dont la figure historique demeure celle de Mersenne (Pascal disait de lui : « Il avait un talent tout particulier pour former de belles questions, en quoi il n'avait peut-être pas de semblable ; mais encore qu'il n'eust pas un pareil bonheur à les résoudre, et que ce soit proprement en cecy que consiste tout l'honneur, il est vray néanmoins qu'on luy a obligation et qu'il a donné l'occasion de plusieurs belles découvertes qui peut-être n'auraient jamais esté faites s'il n'y eust excité les sçavans »). Mais laissons cela. Il y a d'abord l'activité de *synthèse*, au plus haut niveau : par exemple écrire un article, ou un ouvrage, mettant en forme un ensemble de recherches atomisées en notes et articles accessibles au seul spécialiste, pour les accorder avec une plus large audience. C'est là une activité qui fait cruellement défaut et qui se situe, par son niveau d'exigence mathématique, tout près de la recherche, sans se confondre avec elle tout à fait. Le travail de Peano déjà cité fournit ici un bon exemple : en écrivant son *Calcolo geometrico*, Peano vulgarise, à l'intention de la communauté des mathématiciens. l'*Ausdenungslehre* (1844) de Grassmann, peu lue parce que, précise-t-il, *"i concetti troppo elevati ed astrusi contenuti nell'*Ausdenungslehre *impedirono la diffusione di*

[2] Sur cette présentation, voir l'Annexe qui rassemble quelques extraits du début de l'exposé. Pour situer ce point d'histoire dans le cadre du développement de l'algèbre linéaire, voir l'*Abrégé d'histoire des mathématiques* (ss la dir. de J. Dieudonné), tome 1, Paris, Hermann, 1978, p. 94-95.

questa scienza". Situation exemplaire donc. Mais le sort fait à l'ouvrage de Peano lui-même montre qu'un seul relais ne saurait suffire : il faut parler d'un réseau de médiations diverses. Omettons le catalogue que nous ne saurions donner ici : de la recherche à l'enseignement, les relais doivent surtout assurer que le savoir produit par la recherche ne se perde en chemin, pour rejaillir peut-être un jour, mais trop tardivement, en résurgences que l'enseignement ne saurait alors, sans difficulté grave, intégrer à son propre cours. En amont de l'enseignement proprement dit, il y a par exemple tout un ensemble d'activités qui préparent l'acte d'enseignement sans s'y égaler, et qui ne sont pas de la recherche au sens que la communauté donne à ce mot. Il y est question d'épistémologie (quels sont les grands problèmes, dignes de faire 1a substance d'un enseignement vivant ?), de curiosités transversales (comment cela est-il utilisé, et dans quel secteur mathématique ou extramathématique ?), d'attentions érudites (mettant en jeu l'histoire des mathématiques), etc.

Toutes ces activités sont nécessaires : on peut les oublier, elles ne nous oublient pas. Elles ne sont pas de la recherche ; mais elles sont tout de même des activités de *création*. Elles ne sont pas de l'enseignement ; mais elles préparent les lendemains de l'enseignement, en écartant les réveils brutaux. Autre chose encore : elles ne sont pas, sans plus, de la didactique des mathématiques. Celle-ci se constitue comme champ scientifique nouveau, suivant les règles qui organisent toute activité de recherche. Son objet est bien l'étude de l'enseignement des mathématiques, mais dans une problématique qui n'est pas exactement celle de l'enseignant. Celui-ci, selon un pragmatisme réaliste, se désespèrera d'un enseignement qui « ne marche pas », et voudra le changer; se réjouira d'un enseignement qui marche, et voudra le reproduire. Le didacticien cherchera encore à comprendre *pourquoi*, pourquoi « ça marche » et pourquoi « ça ne marche pas », prenant ainsi le temps – refusé à l'enseignant comme tel – d'un détour théorique qui lui assure, par le contrôle théorique des faits d'enseignement, une meilleure maîtrise pratique de l'enseignement – niveau où il retrouve alors, et appuie, l'activité de l'enseignant.

La question est dès lors posée de ces activités tierces, intermédiaires et médiatrices ; de la reconnaissance de leur fonction nécessaire au sein de la communauté mathématique ; et de l'organisation de leur statut.

ANNEXE

Le “Calcolo geometrico” de Peano
(extraits)

CAPITOLO IX

Trasformazioni di sistemi lineari

72. Esistono dei sistemi di enti sui quali sono date le seguenti definizioni:

1. È definita l’*egualianza* di due enti a e b del sistema, cioè è definita una proposizione, indicata con $a = b$, la quale esprime una condizione fra due enti del sistema, soddisfatta da certe coppie di enti, e non da altre, e la quale soddisfa ali equazioni logiche:

$$(a = b) = (b = a), \qquad (a = b) \cap (b = c) < (a = c).$$

2. È definita la *somma* di due enti a e b, vale a dire è definito un ente, indicato con $a + b$, che appartiene pure at sistema dato, e che soddisfa alle condizioni:

$$(a = b) < (a + c = b + c), \qquad a + b = b + a, \;\; a + (b + c) = (a + b) + c,$$

e il valor commune dei due membri dell’ultima eguaglianza si indicherà con $a + b + c$.

3. Essendo a un ente del sistema, ed m un numero intero e positivo, colla scrittura ma intenderemo la somma di m enti eguali ad a. È facile riconoscere, essendo a, b, ...enti del sistema, m, n, ... numeri interi e positivi,. che

$$(a = b) < (ma = mb);\ m(a + b) = ma + mb;\ (m + n)a = ma + na;\ m(na) = (mn)a;\ 1a = a.$$

Noi supporremo che sia attribuito un significato alla scrittura ma, qualunque sia il numero reale m, in guisa che siano ancora soddisfatte le equazioni precedenti. L’ente ma si dirà *prodotto* del numero (reale) m per l’ente a.

4. Infine supporremo che esista un ente del sistema, che diremo *ente nullo*, e che indicheremo con 0, tale que, qualunque sia l’ente a, il prodotto del numero 0 per l’ente a dia sempre l’ente 0, ossia

$$0a = 0.$$

Se alla scrittura $a - b$ si attribuisce il significato $a + (-1)b$, si deduce:

$$a - b = 0, \qquad a + 0 = a.$$

DEF. *I sistemi di enti per cui sono date le definizioni 1, 2, 3, 4, in guisa da soddisfare alle condizioni imposte, disconsi* sistemi lineari.

……………………………………………………………………………………………………..

73. DEF. *Più enti* $a_1\ a_2 \ldots a_n$ *d’un sistema lineare disconsi fra loro* dipendenti *se si possono determinare n numeri* $m_1\ m_2 \ldots m_n$ *non tutti nulli, in guisa che risulti*

$$m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n = 0.$$

……………………………………………………………………………………………………..

DEF. *Numero delle dimensioni d'un sistema lineare è il massimo numero di enti fra loro indipendenti che si possono prendere nel sistema.*

……………………………………………………………………………………………..

TEOR. *Se il sistema A è ad n dimensioni, presi nel sistema n enti indispendenti* $a_1\ a_2 \dots a_n$*, e dato un nuovo ente a, si possono determinare n numeri* $x_1\ x_2 \dots x_n$ *in guisa che risulti*

$$(1) \qquad a = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n$$

Inoltre essi sono determinati univomente, ossia

$$(2) \qquad (x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n = x'_1a_1 + x'_2a_2 + \dots + x'_na_n) = (x_1 = x'_1) \cap \dots (x_n = x'_n)$$

……………………………………………………………………………………………..

DEF. *Essendo* $a_1\ a_2 \dots a_n$ *n enti indipendenti d'un sistema ad n dimensioni, i numeri* $x_1\ x_2 \dots x_n$ *che soddiSfano alla relazione (1) disconsi le* coordinate *di a rispetto agli* enti di riferimento $a_1\ a_2 \dots a_n$.

……………………………………………………………………………………………..

75. DEF. *Un operazione R a eseguirsi su ogni ente a d'un sistema lineare A, dicesi* distributiva *se il risultato dell'operazione R sull'ente a, che indicheremo con* R_a*, è pure un ente d'un sistema lineare e sono verificate le identità*

$$R(a + a') = Ra + Ra', \qquad R(ma) = m(Ra),$$

ove a e a' sono enti qualunque del sistema A, ed m un numero reale qualunque.

L'ente R_a, cioè il risultato dell'operazione distributiva *R* sull'ente *a*, dicesi *funzione distributiva* di a. Un'operaziono distributiva si chiamerà anche *trasformazione lineare*, o *trasformazione* senz'altro.