3e Université d'été Animath, Saint-Flour (Cantal), 22-27 août 2004

La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire

par Yves Chevallard

IUFM d'Aix-Marseille & UMR ADEF

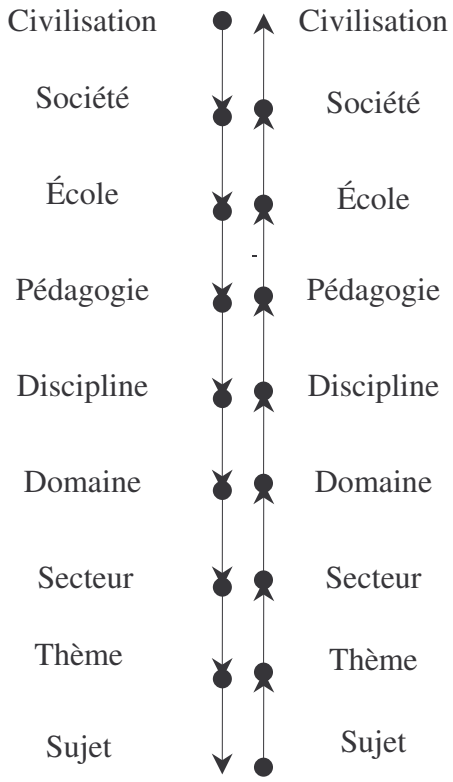
1. Questions d'éducation : entre méprise et mépris

1.1. En matière d'éducation, l'attitude qui prévaut encore dans nos sociétés est presque entièrement sous-tendue par un mélange à composition variable de mépris pur et de méprises indéfiniment reconduites – les méprises procédant généralement du mépris affiché face aux questions d'éducation. Si l'on en usait à propos des questions de santé comme on en use à propos des questions d'éducation, on pourrait peut-être voir une association militant, appelons Animéd, proposer au ministre de la Santé de patronner une université d'été sur telle maladie jusqu'ici invaincue ; et, après bien des réticences – une bonne circulaire publiée au *Bulletin officiel de la santé nationale* (BOSN) et enjoignant aux officiers de santé de faire ceci et cela ne serait-elle pas autrement efficace que les productions de quelques songe-creux à la science incertaine ? –, on verrait peut-être le ministère accorder au projet une somme ridicule, en se disant qu'après tout, on ne sait jamais – même si l'on n'y croit guère et si, surtout, on doute que de telles démonstrations estivales de docte ignorance soient autre chose qu'un tribut payé à l'air du temps.

1.2. Le problème, pourtant, c'est que les songe-creux militants sont tout autant dans le faux que le ministère bien sûr imaginaire que je viens d'évoquer, parce qu'eux aussi croient – comme on le croit depuis toujours – qu'il suffirait d'un peu de talent et du concours des bonnes volontés de chacun pour y arriver, et cela en vertu de cet axiome que, en matière d'éducation, les choses, sont simples, ou plutôt *doivent* l'être ! Rappelons-nous la réforme des mathématiques modernes, les talents et la haute assurance conjugués d'un Choquet ou d'un Dieudonné, la formidable énergie sociale mobilisée (notamment chez les professeurs de mathématiques, mais pas seulement), et, pour finir, l'échec patent ! Revenons un instant à la médecine : situons cette université d'été, disons, en août 1816, et supposons qu'on s'y propose de travailler sur une médication contre la phtisie – alors même que l'on confond encore, sous ce nom englobant, tuberculose, bronchite, gangrène du poumon, œdème, emphysème, apoplexie… Août 1816 : René Laennec (1781-1826) n'aura l'illumination qui le conduit à inventer le stéthoscope qu'en septembre. Travailler sur « la phtisie » et la vaincre (au moins médicalement) n'est alors nullement à portée de main : cela supposera un travail immense, dont une première étape sera, en 1882, la découverte par Robert Koch (1843-1910), prix Nobel de médecine 1905, du bacille qui porte son nom (*Mycobacterium tuberculosis*), une seconde étape étant marquée, en 1943, par la mise au point de la streptomycine par Selman A. Waksman (1888-1973), prix Nobel de médecine 1952. Pour creuser profond, il faut creuser large. Inutile de rechercher, à portée de la main ou de l'été, une technique dont la production suppose des développements technologiques et théoriques qui supposent eux-mêmes un *immense travail* encore à venir. Il faut prendre, autant qu'on le peut, la mesure des problèmes. On sait par exemple que, sur l'avis des meilleurs mathématiciens du temps, l'Académie des sciences refusa en 1775 de prendre plus longtemps en compte les mémoires concernant la quadrature du cercle, parce qu'il s'agissait là d'un problème qu'on pressentait hors de portée des mathématiques de l'époque. On sait aussi qu'il fallut attendre 1882 –

l'année où Koch découvrit le bacille du même nom – pour que, en s'inspirant de la démonstration due à Hermite de la transcendance de e (1873), Lindemann (1852-1939) publie une preuve de la transcendance de π, mettant fin ainsi à une très longue ignorance.

1.3. Ce que, sagement, on a su accorder et assumer en matière de recherche mathématique est pourtant refusé, aujourd'hui encore, en matière de recherche sur l'enseignement et sur l'apprentissage des mathématiques (et plus largement en matière d'éducation). Tout se passe ici comme si, en médecine, le fait indubitable qu'il y a des gens (passagèrement) en bonne santé, suffisait à discréditer les recherches sur « la maladie » : la bonne santé, c'est très facile, savez-vous ; il suffit de faire un peu attention ! Tout ce qui suit sera tissé à contre-fil de ce sens commun stérile et dévastateur. Car l'abord du problème de la « place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire » suppose en vérité, pour le didacticien des mathématiques, un élargissement des points de vue qui sollicite toute la force des théories et des technologies didactiques aujourd'hui existantes, et sans doute bien plus encore ! J'essaierai simplement, dans ce qui suit, de proposer un état des choses conforme à ce que je crois voir actuellement. Pour commencer, je présenterai rapidement un schéma formel auquel je tiens, celui de l'échelle des *niveaux de co-détermination didactique*, qui, en quelque sorte, « encadrent » ce qu'il est possible de faire en matière de diffusion des connaissances et des savoirs, c'est-à-dire en matière didactique.



Partons de l'échelon inférieur. Un *sujet d'étude* c'est, en mathématiques, une question telle que « Comment calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle quand on connaît la longueur des deux autres côtés ? », ou encore « Comment calculer une primitive d'une fraction rationnelle ? », ou bien « Comment démontrer qu'un nombre donné est irrationnel ? » L'échelon immédiatement supérieur, le *thème d'études*, sera, dans le système scolaire-universitaire français, dans le premier cas repéré par l'étiquette « Théorème de Pythagore » (voire par « Pythagore », tout court), ce qui désigne, non le théorème en question, mais tout une *organisation mathématique* incluant par exemple une technique bien justifiée pour

« calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle quand on connaît la longueur des deux autres côtés » ; dans le deuxième cas, le thème d'études se nommera par exemple « Calcul de primitives » (ou, plus chic, « Primitivation »). Quant au troisième cas, je ne crois pas qu'il apparaisse vraiment dans le cas français (un étudiant de mathématiques devenu professeur peut n'avoir jamais eu à démontrer, par exemple, que $\sqrt{5} - \sqrt{1+\sqrt{3}}$ est irrationnel). Mais il pourrait être subsumé sous un thème d'études intitulé simplement « Nombres réels ». Le troisième échelon est celui des *secteurs d'études* : les thèmes s'organisent en secteurs. Le thème « Pythagore » est ainsi situé par le programme de la classe de 4e dans un secteur intitulé *Triangle rectangle et cercle*. Quant aux secteurs, ils s'intègrent dans de vastes domaines – géométrie, analyse, arithmétique, etc. Bien entendu, tout cela est une construction historique qui n'a pas de caractère intrinsèque, prédéterminé, nécessaire. Les étiquettes changent : ainsi le domaine que nombre de professeurs enseignant en seconde nomment encore « Analyse » a-t-il été officiellement rebaptisé « Calcul et fonctions » depuis la rentrée 2000, en même temps que ses contenus étaient retouchés. Les domaines se regroupent à leur tour en une *discipline*, qui est traditionnellement « les mathématiques » pour ce qui concerne l'ensemble des secteurs et domaines évoqués. Mais on n'oubliera pas qu'à cet égard les choses ne sont pas si simples, en particulier du fait des conflits *territoriaux* entre disciplines établies ou émergentes. À qui appartiennent par exemple – scolairement parlant – la cinématique ou l'astronomie ? Aux mathématiques ou à la physique ? La réponse a varié selon les temps et les lieux [1]. À quelle discipline appartient l'algorithmique aujourd'hui ? Aux mathématiques ou à la *computer science* ? Etc. Au-dessus de la discipline – des disciplines – se trouvent les échelons de la *pédagogie*, de l'*École*, de la *Société*, de la *Civilisation*. Je ne les commenterai pas davantage ici, sauf en énonçant ce principe essentiel que traduit l'échelle proposée : ce qu'on peut faire à tel échelon – par exemple dans l'étude de tel thème mathématique – dépend des *contraintes* imposées et des *conditions* créées par les échelons supérieurs (c'est ce que signifient les flèches descendantes du schéma). Considérons à titre d'exemple une unique contrainte pédagogique : les classes d'une heure. Au XIXe siècle, les classes sont de deux heures ; c'est la réforme de 1902 qui institue la classe d'une heure, en la rendant obligatoire dans le premier cycle (c'est-à-dire au collège) et en la recommandant dans le second cycle, *« sauf les exceptions nécessaires »*. Une séance de deux heures permet certaines choses que la séance d'une heure ne permet plus : elle permet par exemple de temporiser, de varier le rythme et le type des activités, en ménageant des temps plus lents, des moments d'accélération, etc. D'une manière plus générale, quelle que soit la façon dont on entend l'expression de « mathématiques vivantes », on ne peut guère espérer répondre à la question « Peut-on et alors comment faire place à des "mathématiques vivantes" dans l'éducation secondaire ? » si l'on ne prend pas en compte *l'ensemble pertinent des contraintes et des conditions* sous lesquelles cette éducation doit se réaliser. Il est bien entendu que, inversement, le fait de parvenir, en un certain échelon de détermination didactique, à modifier le jeu des conditions et des contraintes a, en règle générale, des répercussions *aux autres niveaux*, jusqu'au niveau de la civilisation si l'on suit le schéma proposé ! C'est ce que signifient, bien sûr, les flèches ascendantes du schéma [2]. C'est avec tout cela en tête que je ferai maintenant un petit nombre de remarques sur le problème qui nous réunit.

---

[1] Le programme du CAPES de mathématiques comporte ainsi une partie de « cinématique du point » largement ignorée des candidats (et peut-être de certains préparateurs) : y figure par exemple la question des oscillateurs harmoniques et… du mouvement des planètes !

[2] Voici une illustration simple de ce fait : l'obligation « civilisationnelle » d'écrire avec « pleins » et « déliés », liée elle-même à l'emploi normé d'un certain type de pointes traçantes (dont l'emblème scolaire fut longtemps la célèbre « plume Sergent-Major »), se défait lorsque de nouvelles pointes traçantes envahissent la société (hors l'École), à partir de 1950 pour ce qui est des stylos « à bille » et de la France. L'École résiste d'abord, rudement, passionnément. Elle finira par céder après avoir laissé s'installer un hiatus non verbalisé, dogmatisé sans doute

2. Quelle mission pour l'École ?

2.1. Se situer dans l'échelle ci-dessus au niveau de l'École – des diverses Écoles possibles –, c'est se situer en un point sensible de la configuration de forces que le schéma ci-dessus prétend représenter. Il n'est par exemple pas équivalent que, relativement à tel savoir et à tel public, existe une École qui enseigne ce savoir à ce public, ou qu'une telle École n'existe pas ! La société et, au-dessus d'elle, la civilisation, peuvent ainsi imposer à telle école donnée une « écologie » très singulière. Dans une civilisation qui n'est plus la nôtre désormais, l'école eut par exemple pour fonction première de séparer une élite du reste du peuple : ainsi en allait-il de la *paideia* – l'éducation grecque – dans l'Empire romain tardif, aux IV^e^ et V^e^ siècles de notre ère. « Une des fonctions primordiales de cette culture était de distinguer une élite du flot ordinaire de l'humanité », note l'historien John Matthews [3]. Dans son livre *Pouvoir et persuasion dans l'Antiquité tardive* [4], Peter Brown, le grand historien de cette période, rappelle que « seuls les fils de notables avaient les moyens et le temps de faire le long voyage qui les amènerait des contrées les plus lointaines de l'Orient grec pour suivre à loisir les cours d'un maître tel que Libanius [314-393] à Antioche, ou Prohaeresius [vers 276-368] à Athènes ». Et Brown d'ajouter : « Ils sortaient de cette expérience coûteuse et intellectuellement exigeante avec une excellente opinion d'eux-mêmes : ils étaient convaincus que "la correction de leurs discours bien charpentés et le vernis brillant de l'habileté" les rendaient aussi supérieurs aux illettrés que les êtres humains au simple bétail. » La *paideia*, conclut-il, « était un moyen d'exprimer la distance sociale ». Et s'il est vrai que son action séparatrice n'était pas absolue, puisqu'elle autorisait tout de même quelques rares transfuges dont l'aventure a pu séduire les commentateurs modernes – pensons, bien sûr, à Augustin d'Hippone (354-430) –, elle avait surtout pour effet d'unir fortement l'élite qu'elle distinguait en la rassemblant autour de références culturelles dont cette fonction de cohésion d'un groupe dominant était l'essentiel. « Depuis les débuts de l'Empire, écrit encore Peter Brown, une culture commune avait fourni un langage qui permettait à des gens instruits d'Arles ou d'Arabie de communier dans la même admiration dévote de la rhétorique grecque. » Cette fonction distinctive et identificatoire ne supposait guère, au plan des contenus de connaissance, que ce « monument » culturel un peu creux qu'était devenue la rhétorique grecque, « reine des disciplines » de l'éducation des élites : « Formaliste, bien-pensante, tranquillement routinière et invariablement flagorneuse, la rhétorique fournissait un fond musical permanent au consensus en faveur du gouvernement romain entretenu avec habileté chez les notables des cités du monde grec. » Et il est vrai que les usages de ce monument du savoir antique apparaissent en partie dérisoires : ils permettaient de conforter le sentiment d'une commune appartenance entre membres d'une élite par ailleurs fortement « hétérogène », ce que l'anecdote suivante laisse voir crûment : « Rencontrant les conseillers juridiques d'un nouveau gouverneur (qui devait avoir grandi à Rome), Libanius posa la question cruciale : "Comment Ulysse gouvernait-il son royaume d'Ithaque ?" La réponse fusa : "En bon père de famille." Cette citation classique donna le ton aux relations entre le gouverneur et le conseil municipal pour les mois à venir. »

---

mais non point *pensé*, négocié, assumé, entre pratiques scolaires et pratiques extrascolaires d'écriture : une circulaire du 3 septembre 1965 énoncera, dans un langage daté, que, les traits d'écriture étant désormais « uniformes », il n'y a plus lieu « d'interdire les instruments à réservoir d'encre, ni même les crayons à bille qui procurent des avantages de commodité pratique »…

[3] *The Roman Empire of Ammainus*, Londres, Duckworth, 1989, 78. Cité *in* Brown, *op. cit.*

[4] Éditions du Seuil, 1998.

2.2. Cette fonction séparatrice de l'École d'autrefois sera longuement revendiquée. Mille cinq cents ans après Libanius, un intellectuel bourgeois qui fut courageux en son jeune âge, dit-on, Marc Girardin, dit Saint-Marc Girardin (1801-1873), longtemps professeur, membre de l'Académie française, déclarait de la manière la plus crue : « Je ne demande pas à un honnête homme de savoir le latin ; il me suffit qu'il l'ait oublié. » On le voit : le savoir – la connaissance du latin en l'espèce – vaut ici par son pouvoir séparateur, qui scinde la société en deux parts numériquement inégales, en unissant le petit nombre de ceux qu'elle met à part du gros de la société. Mais l'histoire de l'École peut aussi être lue et *voulue* comme un effort continué, jamais achevé, toujours à approfondir, quelquefois aussi désarmé, pour promouvoir l'union du *laos*, mot grec qui désigne le peuple entendu, non dans sa dimension politique (ce serait le *demos*) ou dans ses particularismes culturels (ce serait l'*ethnos*), mais, simplement, comme l'ensemble des êtres humains vivant ensemble à un moment déterminé sur un territoire donné, quelles que soient leurs origines, leurs croyances, leurs aspirations. Éducation du *laos*, donc, c'est-à-dire, étymologiquement, éducation *laïque*, qui n'exclut personne – pour des raisons « ethniques », par exemple. C'est dans la perspective d'une telle ambition laïque que je situerai les développements qui suivent.

3. Les mathématiques, une matière comme les autres

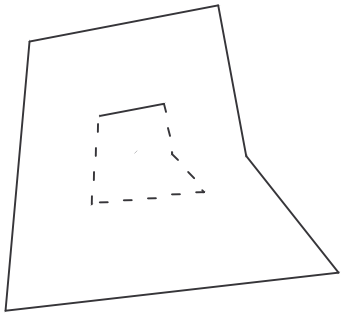
3.1. Dans un livre justement fameux – *Civilisation grecque* [5] –, réagissant à la sacralisation de la Grèce antique que certains de ses confrères entretiennent avec la dernière énergie, l'helléniste André Bonnard (1888-1959) écrit sobrement : « le peuple grec a été, en son temps, un peuple comme les autres ». Bonnard, il est vrai, était de gauche, et même d'extrême gauche. De la même façon, je serais tenté de dire : la discipline mathématique est, en notre temps, une discipline comme les autres ! Il est vrai sans doute qu'il existe une cote des disciplines scolaires, et que les mathématiques, depuis deux siècles et demi, n'y ont pas été mal classées, en dépit de leur handicap constitutionnel face aux disciplines « humanistes » – dont, jadis, le latin cher à Saint-Marc Girardin. Mais il n'en fut pas toujours ainsi : longtemps les mathématiques passèrent en effet pour savoir sans valeur. En 1566, ainsi, un certain Charpentier, qui avaient des protecteurs hauts placés, obtint la chaire de mathématiques du Collège royal que François I^{er} avait créée à l'origine – dès les premiers mois d'existence du Collège, en 1530 – pour Oronce Finé (1494-1555), qui l'occupera jusqu'à sa mort. Charpentier ignore tout des mathématiques, ce qu'il finit par admettre. De plus, il ignore le grec, qui reste nécessaire pour lire Euclide. Aux protestations de Pierre de la Ramée (1515-1572), titulaire au Collège d'une chaire de philosophie depuis 1551, qui y enseigne Euclide, et que cette nomination scandalise, Charpentier répond en soutenant que les mathématiques sont un « jeu d'enfant » comparées à la métaphysique, et même « une fange » faite pour les porcs. En fin de compte, il s'engage à les apprendre *en trois mois*. On mesure par contraste la distance parcourue !

3.2. Le problème des mathématiques vivantes ne saurait avoir une solution qui lui soit entièrement propre : on ne peut imaginer de sauver les mathématiques toutes seules ! J'essaierai de montrer un peu plus loin qu'il faut au contraire prendre à bras le corps un problème *général* : comment faire pour que les connaissances diffusées par l'École, quelle qu'en soit la nature, soient des connaissances « vivantes » pour ceux auprès de qui elles sont diffusées ? Il est vrai que les corporatismes disciplinaires nous portent à regarder le système scolaire comme un *marché*, dont différentes disciplines – anciennement installées ou plus récemment promues – se disputeraient les parts, dans un égoïsme bien compris, chacune œuvrant pour son « intérêt » propre, ce qui tend à engendrer, entre les disciplines, un

[5] Lausanne, 1958.

individualisme cynique incapable même, selon moi, de saisir le problème auquel l'École est aujourd'hui affrontée.

3.3. J'ai cité plus haut un helléniste de gauche ; je citerai maintenant un écrivain réactionnaire, mais à l'œil exercé : je veux parler de Chateaubriand (1803-1846). Dans ses *Mémoires d'outre-tombe*, il écrit ceci, que je ne suis certes pas le premier à citer : « L'aristocratie a trois âges successifs : l'âge des supériorités, l'âge des privilèges et l'âge des vanités. Sortie du premier, elle dégénère dans le second et s'éteint dans le dernier. » Les mathématiques ont appartenu à une aristocratie scolaire. Elles avaient depuis longtemps quitté l'âge des supériorités pour entrer dans l'âge des privilèges, où une discipline scolaire, sans perdre de son lustre peut-être, perd certainement de son utilité pour l'École et pour l'intelligence du monde : elle est là, mais on ne sait plus guère pourquoi. Elle est là, en vérité, par un privilège conservé, contre lequel d'aucuns murmurent. Dans cet âge des privilèges, une discipline scolaire tend alors à prendre la forme d'une visite guidée de savoirs que l'on parcourt à la hâte, à l'instar de vestiges monumentaux autrefois vivants mais dont les raisons d'être, les fonctions vitales ont cessé d'être comprises. Les savoirs enseignés ne produisent plus des connaissances vivantes dans les publics scolaires conviés à révérer les œuvres – mathématiques ou autres – que l'enseignement prodigué leur impose de « connaître ». Ainsi, par exemple, on ne saura pas comment faire pour tracer une figure « trois fois plus petite » qu'une figure donnée (voir ci-contre). Mais on sera supposé connaître en détail les propriétés de l'homothétie ! Savoirs monumentaux insistants, connaissances effectives évanescentes…



3.4. La dégénérescence « monumentaliste » des savoirs scolaires ne frappe certes pas que les mathématiques. Je prendrai pour exemple la discipline scolaire appelée « Sciences économiques et sociales », SES. Il s'agit là d'une discipline apparue récemment dans le paysage scolaire (1969), et dont l'état de fraîcheur épistémologique ne devrait en conséquence pas faire de doute. Une enquête par questionnaire a été récemment conduite auprès d'élèves de terminale ES, de terminale STT (« Sciences et technologies tertiaires »), d'étudiants de DEUG de sciences économiques ou d'AES (« Administration économique et sociale »), d'étudiants de licence ou de maîtrise à coloration économique (AES, sciences de gestion, etc.), ainsi que d'élèves de classes préparatoires économique et commerciale (CPEC), à quoi il faut ajouter des élèves de première ou de deuxième année de BTS. Un compte rendu en est donné dans un petit ouvrage récemment paru. Que révèle donc cette enquête, qui prétend sonder les « connaissances » diffusées par notre enseignement de l'économie ? Tout d'abord que la « valeur ajoutée » par les études supérieures est faible, voire négative : les élèves de terminale ES atteignent ainsi un score moyen de près de 61 %, alors que les étudiants de DEUG ont un score moyen inférieur à 56,5 %. Il faut attendre le deuxième cycle des études universitaires pour que les étudiants fassent mieux que les lycéens : un peu plus de 64 %. Mais, surtout, l'enquête confirme l'hypothèse de monumentalisation évoquée ci-dessus. Sept questions, nous dit-on (*op. cit.*, p. 138), « portaient sur des concepts clés de l'économie : valeur ajoutée, productivité, etc. ». Ces questions ont un taux de réponses exactes élevé, de 74 % en moyenne (et même de 78,5 % pour les élèves de terminale ES) : les « monuments » ont été visités et leur connaissance peut être exhibée lorsque le contexte s'y prête. Six autres questions « concernaient des données factuelles de l'économie et de la société (…) comme le taux de prélèvement obligatoire ou celui de syndicalisation » ; là, les taux de réponses sont déjà moins bons : environ 54,5 % (et 60 % pour les terminales ES). Deux questions portaient sur l'histoire économique et sociale : le taux de réponses justes diminue encore, et passe au-

dessous de 43 % (mais il est de 48,5 % pour les élèves de terminale ES). Enfin deux questions pouvaient être regardées comme « exigeant une certaine connaissance des "mécanismes" économiques » : cette fois, le taux global moyen tombe à 31,5 %, les étudiants l'emportant en ce cas sur les lycéens, avec environ 36 % de réponses justes pour les premiers et 30 % pour les seconds. Mais examinons plus attentivement ces questions qui font chuter près de 70 % des élèves de terminale ES. La première question – la septième du questionnaire – était formulée ainsi :

7. Un euro fort est :

- défavorable aux exportations européennes ;
- favorable aux exportations européennes.

Les commentateurs de l'enquête écrivent à ce propos : « D'une courte tête (55 %), c'est la seconde position qui l'emporte. Autrement dit, près de la moitié de ces jeunes *a priori* informés ne saisissent pas l'influence du taux de change sur le commerce extérieur. » La seconde question – la onzième de l'enquête – touchait, elle, à une connaissance dont les professeurs de SES se démènent pourtant, traditionnellement, pour tenter de la faire recevoir des élèves :

11. Principalement, la monnaie est créée par :

- la banque centrale ;
- les banques de dépôt ;
- l'État.

Cette fois, 86 % des réponses désignent la banque centrale, et 8 % seulement les banques de dépôt, en dépit des efforts des professeurs pour redresser une « représentation » courante mais erronée ! « Les résultats des étudiants, note le commentaire avec une ironie peut-être involontaire, sont à peine meilleurs que ceux des élèves. » L'échec est patent. On peut restituer un théorème concernant l'homothétie, mais on ne sait toujours pas réduire ou agrandir une figure en usant d'une homothétie !

4. Une éducation citoyenne et laïque

4.1. L'ouvrage cité à propos de l'enquête sur les connaissances économiques et sociales d'élèves et étudiants est un compte rendu des « Premières rencontres nationales de l'enseignement de l'économie », tenues à la Sorbonne le 26 avril 2003 sous l'égide de l'Institut de recherches de la FSU et de l'association Attac. Ses éditeurs (Nouveaux Regards et Syllepse) lui ont donné un titre on ne peut plus clair : *L'économie est l'affaire de tous*. Son sous-titre n'est pas moins alerte : *Quelle formation des citoyens ?* Les auteurs de ce texte – Christian Laval et Régine Tassi – écrivent notamment ceci :

> L'École n'est cependant pas le seul lieu où l'on peut apprendre à comprendre l'économie et la société. […] D'autres espaces sociaux de transmission de la culture économique existent aujourd'hui : associations spécialisées, mouvements d'éducation populaire, syndicats. Comment, aujourd'hui, exercer sa citoyenneté, prendre part à la vie publique et agir dans ce monde traversé par de multiples problèmes sociaux sans avoir ou sans pouvoir s'approprier une culture économique, sociale, juridique et politique permettant de maîtriser les concepts des sciences de la société et les mécanismes de l'organisation sociale ?

Ce que suggèrent furtivement ces remarques, c'est que l'École tend à ne plus être regardée comme une institution sur laquelle on compte pour s'instruire de connaissances vivantes ; et que c'est tout naturellement ailleurs – dans la « vraie vie » – qu'on ira chercher, le moment venu, de telles connaissances. Par rapport à sa mission d'instruction supposée, l'École apparaît ainsi déréglée, « en dérangement ». Tout se passe comme si l'on ne croyait plus aux

savoirs qu'elle prétend faire connaître, comme si elle était devenue un monde d'opérette, qui « compte pour du beurre » ; comme si elle n'était pas le premier lieu où l'on acquiert des connaissances d'anglais, d'économie, de mathématiques qui, plus tard, éventuellement complétées, permettront d'analyser et de comprendre les situations vécues et d'y intervenir à bon escient.

4.2. L'École devient alors un lieu où la rencontre avec ces étranges bibelots culturels en quoi se transmuent les savoirs scolaires semble largement immotivée, et, finit-on par penser, presque forcément arbitraire ; où, par obligation sociale et habitude culturelle, on passe quelques années de sa jeune vie à fréquenter des savoirs que la tradition impose sans autre motif que, au mieux, le bénéfice éventuel d'une valeur formative réputée sans doute par quelques-uns « essentielle », mais en vérité abstraite, indicible, en suspens par rapport à la vie extrascolaire présente et à venir – surtout à venir. La formation scolaire se résout alors, pour une majorité qui fait norme, en un je-ne-sais-quoi que plus d'un ancien élève, plus tard, se flattera de tenir pour presque rien. Or, lorsque les privilèges perdent ainsi leur évidence, l'âge des vanités impose ses jeux : à quels savoirs va-t-on jouer, cela n'est finalement qu'une affaire de distinction ; et tout savoir – géométrie hyperbolique ou théorie des graphes ou … – pourra convenir, s'il n'est pas démuni d'une certaine dignité épistémologique, et qu'on ne pousse pas le jeu, à son propos, au point d'en faire un outil effectif d'action dans le siècle – ce qui abolirait le suspens et ruinerait la transcendance formative. Le dérèglement et la corruption curriculaires laissent ainsi proliférer par places une moisissure noble dont on espère parfois que, *à la longue*, elle régénérera un curriculum en décomposition. Pourtant, comme l'écrivait autrefois John Maynard Keynes (1883-1946), *« in the long run, we are all dead »*. À long terme, nous sommes tous morts.

4.3. Il ne me semble pas qu'il y ait la moindre chance qu'une régénération spontanée se produise ainsi. Il me semble en revanche qu'une action d'envergure est immédiatement possible, utile, nécessaire. On peut entendre certains des constats précédents comme pointant un fait désolant autant qu'imparable : trop de jeunes feraient le gros dos devant ce que l'École prétend leur apporter et en seraient réduits, demain, à chercher ailleurs ce qu'elle leur propose aujourd'hui en vain. Je suggère de cela une lecture inverse : ce n'est pas les jeunes qui abandonnent l'École et ses savoirs, c'est l'École avec ses savoirs de fantaisie qui abandonne les jeunes, et qui, à travers eux, *abandonne la société*. Je crois que nous sommes aujourd'hui devant une crise de désajustement semblable à celle dont d'Alembert (1717-1783) se faisait en termes vifs le dénonciateur, vers le milieu du XVIII^{e} siècle, dans l'article COLLEGE de l'*Encyclopédie*, que je me permettrait de citer un peu longuement :

> Humanités : on appelle ainsi le temps qu'on emploie dans les collèges à s'instruire des préceptes de la langue latine. Ce temps est d'environ six ans. On y joint vers la fin quelque connaissance très superficielle du grec ; on y explique tant bien que mal les auteurs de l'Antiquité les plus faciles à entendre ; on y apprend aussi tant bien que mal à composer en latin ; je ne sache pas qu'on y enseigne autre chose [...].
>
> Rhétorique : en rhétorique on apprend d'abord à étendre une pensée, à circonduire et allonger des périodes et peu à peu l'on en vient à des discours en forme, toujours ou presque toujours en langue latine. On donne à ces discours le nom d'amplifications ; nom très convenable en effet puisqu'il consiste pour l'ordinaire à noyer dans deux feuilles de verbiage ce qu'on pourrait et devrait dire en deux lignes [...].
>
> Philosophie : après avoir passé sept ou huit ans à apprendre des mots ou à parler sans rien dire, on commence enfin, ou on croit commencer, l'étude des choses ; car c'est la vraie définition de la philosophie. Mais il s'en faut bien que celle des collèges mérite ce nom : elle ouvre pour l'ordinaire par un compendium qui est, si on peut parler ainsi, le rendez-vous d'une infinité de questions inutiles sur l'existence de la philosophie, sur la philosophie d'Adam, etc. On passe de là en logique : celle qu'on

> enseigne, du moins dans un grand nombre de collèges, est à peu près celle que le maître de philosophie se propose d'apprendre au bourgeois gentilhomme [...].
>
> Il résulte de ce détail qu'un jeune homme, après avoir passé au collège dix années qu'on doit mettre au nombre des plus précieuses de sa vie en sort, lorsqu'il a le mieux employé son temps, avec la connaissance très imparfaite d'une langue morte, avec des préceptes de rhétorique et des principes de philosophie qu'il doit tâcher d'oublier [...].

Comme il y a deux siècles et demi, c'est, selon moi, à une révision radicale des *épistémologies scolaires* qu'il faut aujourd'hui travailler.

4.4. Comment réinscrire l'École dans la société ? Comment refonder, sur ce point, notre civilisation ? Je partirai ici d'une notion qu'il me faudra un peu commenter : celle, antique, de *« vie bonne »*. L'École est un ressort essentiel dans une civilisation où la société, par divers organes, s'efforce de faire la vie meilleure à chacun. La Déclaration d'indépendance américaine – dite « des Treize Colonies » – du 4 juillet 1776 range ainsi « la poursuite du bonheur » – *the pursuit of happiness* – parmi les droits inaliénables du peuple :

> We hold these truths to be self-evident, that all men are created equal, that they are endowed by their Creator with certain unalienable Rights, that among these are Life, Liberty and the pursuit of Happiness. --That to secure these rights, Governments are instituted among Men, deriving their just powers from the consent of the governed, --That whenever any Form of Government becomes destructive of these ends, it is the Right of the People to alter or to abolish it, and to institute new Government, laying its foundation on such principles and organizing its powers in such form, as to them shall seem most likely to effect their Safety and Happiness.

En France, la constitution du 24 juin 1793 énonce, en son article premier : « Le but de la société est le bonheur humain. » Bien entendu, il n'y a pas un accord immédiat sur ce qu'est la vie bonne ni sur la manière d'y parvenir. La chose est évidente, elle ne doit pas troubler : elle est *la* question politique par excellence. Formellement, toutefois, l'affaire peut se dire en peu de mots (mais avec quelques symboles…). Des questions Q se posent ; faire la vie meilleure, c'est concourir à apporter à ces questions Q des réponses R jugées les meilleures possibles. Quelle contribution l'École peut-elle donc apporter à cet effort pour aller vers la vie bonne ? L'École a d'abord une fonction *critique* : elle doit aider à déconstruire les questionnements tout faits, les questions Q obligées, qui sont posées mais qui, peut-être, ne se posent pas, ou ne se posent plus, etc. Elle doit aussi aider, bien entendu, à analyser, à évaluer les réponses R toutes faites qu'apporte la culture, ces réponses que j'ai pris l'habitude de noter $R^{\diamondsuit}$, ce que je lis « r poinçon », parce qu'il s'agit là toujours, peu ou prou, des réponses « estampillées » en quelque institution, ou en quelque ensemble d'institutions – des réponses institutionnelles donc. Mais l'École a encore et surtout une fonction essentielle *d'aide à la production* de réponses R, que je nomme cette fois $R^{\heartsuit}$ (« r cœur ») en les référant ainsi à ceux qui les produisent – ce sont des réponses selon leur cœur –, mais en soulignant qu'elles seront pour tous les autres, ou pour les mêmes mais plus tard ou ailleurs, simplement, des réponses $R^{\diamondsuit}$.

4.5. Il y a dans le schéma précédent une subtilité qu'il convient d'expliciter. Ce schéma se concrétise banalement en ce fait que, allant à l'École, je suis mis en contact avec des questions Q et des réponses $R^{\diamondsuit}$, que j'aurai à étudier, c'est-à-dire à observer, à analyser, à évaluer. Mais aucune réponse ne saurait m'être imposée comme étant *la* bonne réponse, comme participant authentiquement de la vie bonne ; et cela pour cette raison que, dans l'École du *laos* – dans l'École *laïque*, donc, mais en un sens qui étend au-delà du religieux l'acception usuelle de ce qualificatif –, par définition il n'est pas question d'indiquer, et moins encore d'*imposer*, une conception déterminée de la vie bonne. Ce serait sortir du cadre de la

laïcité ainsi entendue. Une réponse $R^{\heartsuit}$ peut par exemple être construite et validée provisoirement par la classe, sous la direction du professeur, pour que les choses suivent leur cours, pour que la vie ensemble se poursuive. Mais chacun, en droit, et pas seulement en fait, retrouve sa liberté à l'endroit du couple $(Q, R^{\heartsuit})$ dès qu'il ou elle sort de la classe. L'École en tant qu'elle est laïque a pour mission de *faire connaître* des couples $(Q, R^{\diamondsuit})$, y compris sans doute le couple $(Q, R^{\heartsuit})$. Mais elle ne saurait chercher, par exemple, à *faire aimer* telle réponse $R^{\diamondsuit}$, ni *a fortiori* à intriguer pour la faire adopter comme « bonne réponse » à Q ! Une conséquence trop méconnue du principe de laïcité mérite d'être ici nettement soulignée : contrairement à ce qu'on a répété à l'envi, le professeur de mathématiques n'a pas à chercher à « faire aimer » les mathématiques qu'il a mission d'enseigner à ses élèves : ce serait une faute morale lourde contre la laïcité. Il doit s'efforcer de les leur faire *connaître*, ce qui est autrement exigeant. Il n'a pas davantage, cela va sans dire, à vouloir les leur faire détester ! Simplement, le fait que tel élève aime ou n'aime pas relève (en droit et, inéluctablement, *en fait*) d'une liberté personnelle proprement inaliénable ; et ce serait tyrannie que de prétendre seulement y toucher ! Faites connaître, le plus justement, le plus exactement qu'il sera possible. L'amour, la détestation ou l'indifférence sont affaire personnelle et viendront par surcroît.

4.6. De quelles questions Q se soucier à l'École ? C'est par sa réponse à cette question que l'École du *laos* abandonne les jeunes générations et la société ou, au contraire, contribue à faire la vie bonne – qu'elle s'interdit pourtant même de définir ! Les « grandes » questions, les questions génératrices de l'éducation scolaire doivent être celles-là même qui verrouillent le plus le chemin de la vie bonne pour les générations montantes et pour la société où elles entrent – et que, demain, à leur tour, elles feront. Comment vivre, seul, à deux, ensemble, *ethnos* avec *ethnos* plutôt qu'*ethnos* contre *ethnos* ? Comment éviter les conflits ? Comment les gérer ? Quels risques – « naturels » ou autres – courons-nous, individuellement, collectivement ? Que pouvons-nous espérer faire ? Que font les autres ? Que croient-ils ? Que sont leurs valeurs, leurs projets, leurs renoncements ? Etc. Je résumerai et j'approfondirai tout cela par une formule que j'emprunte à un pédagogue américain, Paul Gagnon, dans un article intitulé "What Should Children Learn?" Ce que l'École doit enseigner, écrit Gagnon [6], c'est d'abord *"the essential core of learning that all students in a modern democracy have the right not to be allowed to avoid."* L'École doit ainsi mettre en contact les élèves avec tout ce qu'ils ont le droit, dans une démocratie moderne, qu'on ne leur permette pas d'éviter. Pour le dire autrement : avec tout ce qu'ils ont le droit qu'on leur interdise de ne pas rencontrer ! La formule parle d'elle-même, mais je voudrais la commenter un peu. L'École apparaît ainsi comme cette institution sociale qui me force à des rencontres – avec des questions Q et des réponses $R^{\diamondsuit}$, avec le travail d'élaboration de réponses $R^{\heartsuit}$ – que je n'aurais sans doute pas faites si l'École ne les avait pas programmées au nom de la société et de la poursuite du bonheur. Ces rencontres me permettent de sortir de mon monde d'origine, me font voir d'autres manières de se vivre comme Terrien, comme homme ou comme femme, de vivre avec les autres, d'agir au quotidien, de concevoir et de réaliser des projets personnels ou collectifs, de connaître d'autres mœurs, d'autres vies, etc. Sortir de sa famille, de son quartier, de sa ville, de son pays, et même de la civilisation où l'on est venu au monde, se frotter aux autres manières de vivre, c'est ce que j'appelle *se civiliser* – et le processus de civilisation, au plan individuel comme au niveau des collectifs, n'est jamais achevé ! L'École est un foyer de civilisation, de contact avec d'autres manières de se civiliser. Mais où sont les mathématiques là-dedans ?

[6] L'article cité a paru dans le numéro de décembre 1995 du mensuel *The Atlantic Monthly*, p. 65-74.

5. Vers une nouvelle épistémologie ?

5.1. « Redonner sens » aux mathématiques et aux sciences, au fait de les enseigner (d'un côté) et de les apprendre (de l'autre), telle est l'une des formulations les plus usuelles du problème d'ensemble auquel l'état de la société et des mathématiques nous confronte aujourd'hui. En bien des cas, une question de mathématiques *Q* naît au sein d'une « situation du monde » dans laquelle certaines personnes doivent accomplir une certaine tâche sans doute *non mathématique* mais, en quelque façon, *mathématiquement problématique*, engendrée elle-même par une activité sociale que l'on se borne alors *à évoquer* et qui se trouvera bientôt expulsée de la scène mathématique ou n'y figurera plus qu'à titre de lointain décorum. Aussi, alors même que les mathématiques (et les sciences) nourrissent leur développement des problèmes que soulève la vie sociale dans son infinie diversité – notamment à travers son dialogue avec la nature –, la société n'y apparaît au mieux, dans l'état actuel des choses, que comme un horizon dénué de signification à l'endroit des gestes propres aux disciplines de connaissance qui y trouvent pourtant leur premier moteur. Les mathématiques, on l'a suggéré, se retirent alors du monde ; et le monde, en conséquence, s'éloignent des mathématiques. Que faire ?

5.2. Je poserai ici, pour mieux situer ma réponse, que la résolution des difficultés associées au confinement culturel des mathématiques et des autres disciplines scolaires passe, me semble-t-il, par la reconnaissance du principe socio-épistémologique suivant : contrairement au postulat fondant le Grand partage institué autour de 1600 entre « sciences de la nature » « sciences de la culture », contrairement à l'opposition entre une culture scolaire « classique » – qui aura façonné tant bien que mal les élites sociales pendant des siècles – et une culture « moderne » qui ne parvient toujours pas à se faire reconnaître au même niveau de légitimité culturelle, toute science – « de la Nature » ou « de l'Homme et de la Société » – doit être regardée, pensée, vécue comme ayant pour objet d'étude un certain système, à la fois spécifique et évolutif, *de conditions et de contraintes de la vie et du développement des sociétés humaines et des individus qui les composent*. Toute science, ainsi, entretient un commerce déterminé avec la vie sociale, et son étude ne saurait sans en contrefaire la réalité la couper de cet ancrage vital. Inversement et pour les mêmes raisons, on ne saurait étudier la vie des hommes et des sociétés sans prendre en compte les contraintes physiques, chimiques, biologiques, mathématiques qui la déterminent et que les sciences correspondantes – physique, chimie, biologie, mathématiques – élucident et, souvent, permettent de déplacer ou d'annuler [7].

5.3. Je donne tout de suite, faute de mieux, deux exemples très simples de contraintes de nature mathématique sur la vie « des hommes et des sociétés ». Un groupe de travail d'une institution internationale comporte sept personnes ; faute d'avoir pu se mettre d'accord sur une langue de travail commune, chacune d'elle s'exprimera dans sa langue, des interprètes assurant une traduction simultanée pour les autres membres du groupe. Si l'on suppose les sept langues toutes différentes, si l'on suppose aussi que chaque interprète ne traduit que dans un sens (du portugais vers le grec mais pas du grec vers le portugais, par exemple), le nombre d'interprètes nécessaires sera égal au nombre de *couples* de langues : les sept personnes seront donc entourées de… quarante-deux interprètes – conclusion qui fait apparaître judicieuse la

[7] Cette exigence devrait avoir une incidence sensible sur la formation des acteurs et des producteurs des SHS – Sciences de l'Homme et de la Société –, qui se doit d'inclure une initiation appropriée aux sciences des contraintes et conditions de nature mathématique, physique, chimique, biologique, etc., de la vie des sociétés.

recherche d'un compromis quant aux langues de travail du groupe [8]. Second exemple, qui porte sur une question de probabilité : si, dans un ensemble humain qui réalise exactement la parité entre les sexes (la proportion d'hommes y est égale à la proportion de femmes), on veut constituer une instance composée de quatre personnes, et si l'on est attaché au principe de parité (deux hommes et deux femmes), il faudra l'assumer expressément : car, à s'en remettre au hasard, on aurait en ce cas 5 chances sur 8, soit 62,5 % de chances de devoir accepter une répartition non paritaire !

5.4. Les exemples précédents évoquent, en quelque sorte, des interventions *directes* de savoirs mathématiques dans l'organisation de la vie sociale. En bien des cas cependant, les mathématiques élucident et concourent à faire évoluer les conditions et contraintes de la vie des institutions sociales de manière *indirecte*, en élucidant et en concourant à faire évoluer des conditions et contraintes de nature biologique, ou chimique, ou physique, ou… mathématique, etc., qui pèsent sur la vie des institutions et des hommes. Ainsi retrouve-t-on tout le spectre des interventions possibles des mathématiques au service de l'intelligence et de la maîtrise des conditions et contraintes de la vie des sociétés. La problématique des mathématiques comme sciences de certaines conditions et contraintes de la vie des hommes (pris dans leurs assujettissements institutionnels, psychologiques, biologiques, physiques, etc.) peut être résumée en un schéma déjà ébauché : la vie sociale, dans tous ses aspects, conduit à envisager des questions Q auxquelles il convient d'apporter des réponses R. La chose requiert la constitution de *systèmes didactiques* $S(X, Y, Q)$, où X est le collectif qui *étudie* Q et Y l'équipe qui *dirige l'étude* de Q par X. (Bien sûr, on peut avoir $Y = \varnothing$.) C'est le système didactique $S(X, Y, Q)$ qui va créer une réponse R à la question Q, ce qu'on peut noter : $S(X, Y, Q) \rightarrow R$. Comme il en va aujourd'hui (depuis la rentrée 2000 en classe de première) au lycée avec les TPE - dont l'ancêtre immédiat sont les *travaux d'initiative personnelle encadrés* (TIPE) introduits dans les classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE) à la rentrée 1995 - et, au collège (depuis la rentrée 2002 en 5e), avec les IDD (itinéraires de découverte), la question Q n'est pas nécessairement une question de mathématiques, ou de physique, etc. La *production* d'une réponse R suppose des *savoirs* $S_1, \ldots, S_n$ et plus généralement des *œuvres* $O_1, \ldots, O_m$ que leur mise en jeu *motive* en leur conférant par cela même une certaine raison d'être, selon une dynamique qu'on peut noter ainsi : $S(X; Y; Q)_{\vert S_1, S_2, \ldots, S_n, O_1, O_2, \ldots, O_m} \rightarrow R$.

5.5. Permettre aux mathématiques enseignées de sortir de leur splendide isolement pour retrouver le monde, alors, c'est non seulement faire « travailler » les mathématiques sur des questions Q non nécessairement mathématiques (comme il en va dans les TPE ou les IDD), mais les y faire travailler de concert avec d'autres savoirs, en une symphonie *codisciplinaire* où les mathématiques concourent avec d'autres disciplines à élucider des conditions et contraintes de toute nature qui déterminent la production de réponses R à des questions Q. Mais le même schéma vaut en vérité tout autant si la question posée, Q, est de nature mathématique. Dans tous les cas, on s'efforcera d'observer le plus rigoureusement possible un « principe de symétrie » qui, parmi les savoirs $R_1, \ldots, R_n$ et les œuvres $O_1, \ldots, O_m$ *potentiellement* utiles dans la production de R impose de n'en exclure *a priori* aucun, quelle qu'en soit la « nature » (mathématique ou autre), et oblige de même à intégrer dans la réponse R produite (ou dans l'organisation de savoir dont elle sera un fragment fonctionnel) les savoirs et les œuvres que sa production aura *effectivement* mobilisés. Ainsi se bâtit la « synthèse », ce *trésor mathématique* mixte alimenté par tous mais dont la bonne gestion est l'objet spécifique du « souci mathématicien » propre à la classe de mathématiques. À ce jeu, il

[8] Sur un tel compromis – dit du « multilinguisme intégral contrôlé » – dans le cadre du parlement européen, on pourra se reporter à l'adresse Internet suivante : http://www.europarl.eu.int/interp/public/enlarge/enlarge_fr.htm.

se peut, certes, que certaines parties des mathématiques traditionnellement honorées dans une logique monumentaliste ne soient pas « sauvées » : car le principe de symétrie, qui, localement, fait dépendre le sort d'un savoir mathématique de sa mobilisation effective dans les activité d'étude et de recherche - les AER - menées à bien, devient ici le critère décisif.

6. Vers une nouvelle didactique scolaire ?

6.1. Les dispositifs institutionnels particuliers que sont les IDD, TPE, PPCP (« projets pluridisciplinaires à caractère professionnel », en lycée professionnel) et autres TIPE relèvent d'un schéma épistémologique commun, celui définissant ce que je nommerai d'une façon générale un *parcours d'étude et de recherche* – un PER -, notion que je voudrais situer rapidement.

6.2. Tout d'abord, deux grands principes doivent être rappelés. Premier principe, les savoirs *S* sont des « machines » à produire des connaissances utiles à la création de réponses *R* à des questions *Q*. C'est ainsi que, dans l'activité humaine extrascolaire, les savoirs ont été engendrés et sont mobilisés, remaniés, développés, élagués, etc. – et non pour être exposés comme en un musée, visités, vénérés. Deuxième principe : contre le point de vue monumentaliste, qui donne le primat à l'étude « à vide » des savoirs et rejette au second plan, voire oblitère, les couples (*Q*, *R*), le point de vue *fonctionnel* met au premier plan les couples (*Q*, *R*), et ne promeut un savoir *S* qu'à proportion de son utilité éprouvée dans l'étude de questions *Q* et l'élaboration de réponses *R*. Le premier point de vue sacrifie sans ambages les *fonctions* d'un savoir *S* comme outil de production de connaissances au profit de la rencontre « directe », explicite, formelle avec la *structure* de *S* – le pari étant, quand pari il y a, que les usages idoines s'imposeront d'eux-mêmes le moment venu. Le second point de vue conduit à considérer au contraire qu'un savoir est sacrifié, y compris dans ses usages ultérieurs éventuels, dès lors qu'il n'est jamais apparu comme ce qui permet de répondre à certaines questions, de résoudre certains problèmes, lorsque, donc, on ne l'a jamais rencontré dans le cadre d'une mobilisation transpositive de nature *fonctionnelle*.

6.3. Pourquoi des *parcours* et pas seulement des *activités* d'étude et de recherche ? La mise en œuvre d'un semblant de point de vue fonctionnel a été corrélée, depuis deux décennies environ, avec la promotion didactique des « activités ». Cette pratique « activiste » est aujourd'hui assez ancienne pour qu'un fait soit regardé ici comme acquis : les « activités » n'ont pas véritablement permis de passer d'une pratique monumentaliste à une pratique fonctionnelle. Deux points d'arrêt peuvent, à cet égard, être identifiés. Le premier tient en un effet de domination de l'idéologie monumentaliste : en règle générale, les « activités » proposées ont moins pour but, aujourd'hui, de répondre à quelque question *Q* jugée cruciale, et dont l'étude rendrait très improbable le fait de ne pas rencontrer, à titre d'outil efficace voire exclusif, un certain savoir *S* désigné par avance, que de ménager une transition avec le moment, tenu pour seul décisif, de la rencontre *frontale* avec (la structure de) *S* ; d'où, au reste, l'habitude, si naïvement révélatrice, de les désigner comme des activités *préparatoires*. Le second point d'arrêt est d'une autre nature (même si, en pratique, il paraît lié au premier, dont on peut mettre du temps à le distinguer). Supposant en effet dépassé le premier obstacle, les « activités » ayant fait place à des AER, des *activités d'étude et de recherche*, ordonnées à la co-construction de réponses *R* à une question *Q* et de savoirs *S* fonctionnellement désirables, le « nouveau cours » bute sur un autre obstacle : des AER réputées *ad hoc*, et donc isolées, structurellement et fonctionnellement, ne résistent guère à une écologie scolaire encore fortement monumentaliste : très rapidement, elles sont comme emportées par la formidable pression exercée par les savoirs en manque d'enseignement !

6.4. Dans le cas de la classe de mathématiques, ce blocage dirimant conduit à envisager une modification décisive de l'écologie de l'étude scolaire, par l'arrimage du temps didactique non plus à la succession des savoirs à enseigner abordés d'un point structurel (comme dans la pratique classique, encore essentiellement dominante), et pas davantage à une succession d'AER dont chacune ne ferait guère que représenter, telle une ambassade avenante, un savoir monumental prenant sa place dans une procession pour l'essentiel inchangée (comme on le voit dans l'enseignement semi-rénové actuel), mais à ce que j'ai nommé, donc, des *parcours d'étude et de recherche* – des PER –, chantiers bien trop vastes et, *a priori*, bien trop sous-déterminés pour qu'on les prétende dédiés au « forçage » de tel ou tel ensemble précis de savoirs *S*. Un PER est engendré par une question *Q* à *fort pouvoir générateur*, susceptible d'imposer de nombreuses questions dérivées et de conduire ainsi à rencontrer un grand nombre de savoirs à enseigner – et quelques autres, qui marqueront la limite provisoire du chantier. L'ensemble des PER d'une année scolaire doit idéalement permettre de « couvrir » le programme sans lacune, mais non sans un certain nombre de redondances utiles aux apprentissages. Sans viser aucunement à satisfaire ici le critère de bonne couverture, donnons, à titre de simple illustration, quelques thèmes de PER que l'on situe, en l'espèce, dans une classe de mathématiques de 4e – même si la question génératrice d'un PER peut être travaillée à différents niveaux du cursus scolaire. On pourra, dans ce cadre, envisager par exemple un PER portant sur la question « Comment calculer sur des "grands nombres" ? » – comment, par exemple, obtenir de manière fiable l'expression décimale exacte de l'entier 123456789123456789^2 quand on ne dispose que d'une « petite » calculatrice ? On pourra encore lancer un PER centré sur la question « Comment contrôler au mieux ses calculs (numériques, mais aussi algébriques) à l'aide d'une calculatrice ? » – comment, par exemple, s'assurer que l'on a bien l'égalité $\frac{420}{595} = \frac{12}{17}$ ou l'identité $(5x + 1)(2x – 3) = 10x^2 – 13x – 3$? On pourra, de même, proposer aux élèves de s'interroger au long cours sur la question « Comment déterminer si la réciproque d'un théorème est démontrable ou, au contraire, réfutable ? » – comment déterminer par exemple si un triangle dont deux bissectrices ont même longueur est bien isocèle ? Mais on pourra aussi articuler le temps didactique à des PER d'apparence plus ciblés, afin d'amener sur le devant de la scène didactique des ingrédients du programme qui risqueraient sinon d'en être refoulés, comme il en va, entre autres, avec la notion d'*indice* en 4e (dont, il est vrai, l'étude n'est pas strictement obligatoire) : comment, ainsi, comparer les variations de deux quantités variables ? Un prix qui passe de 3,5 € à 5,2 € augmente-t-il plus, ou moins, qu'un prix qui augmente de 4,7 € à 6,9 € ? Etc.

6.5. Du fait même de son caractère ouvert, le questionnement engendré par un PER « disciplinaire » (en mathématiques, en physique, en biologie, en histoire, etc.) déborde généralement du cadre strict de la discipline au sein de laquelle il est envisagé. Comment, en classe de mathématiques, parler valablement d'*indice*, par exemple, sans mentionner quelques-uns des usages les plus communs en dehors des mathématiques (le programme mentionne… la géographie) de cet outil numérique ? Considérons de même cet autre exemple, qui participe du même souci de mettre en avant une question souvent parcimonieusement travaillée, celle des *volumes* : « Comment calculer le volume d'un objet ? » – comment, par exemple, calculer le volume d'un tas de pierres, d'un talus, d'un fossé ? On touche, avec cette dernière question, à des pratiques sociales immémoriales, dont toute trace a été anciennement gommée de l'enseignement général et qui devront pourtant, sauf à limiter arbitrairement le travail à accomplir, faire l'objet d'une *enquête* même rapide – par exemple autour de la question « Qui se soucie de calculer des volumes aujourd'hui ? »…

Un PER « en mathématiques » est ainsi presque nécessairement, de par son absence de normalisation épistémologique *a priori*, une affaire de mathématiques *mixtes*, où des objets mathématiques, majoritaires, se mêlent à des objets relevant d'autres univers de l'activité humaine. Le phénomène de débordement disciplinaire sera évidemment plus net encore si l'on choisit de s'interroger, fût-ce *à partir* des mathématiques ou de telle autre discipline que l'on voudra, sur des phénomènes qui relèvent plus franchement encore d'une sphère *a priori* tout autre : ainsi en irait-il, par exemple, si l'on décidait d'un parcours d'étude et de recherche impulsé par la question « Pourquoi existe-t-il différents modes de scrutin ? », cas dans lequel des coopérations entre plusieurs disciplines scolaires seraient sans doute envisagées.

6.6. La mise en œuvre de la nouvelle épistémologie que la notion de PER concrétise au moins provisoirement appelle une nouvelle didactique scolaire, que je me contenterai d'illustrer par un exemple. Dans l'étude d'une question Q, il ne s'agit pas seulement de construire $R^{\heartsuit}$ à partir des matériaux issus de l'analyse et de l'évaluation d'une pluralité de $R^{\diamondsuit}$ attentivement observés ; il est souvent nécessaire de *déconstruire* des $R^{\diamondsuit}$ « dominants », qui étouffent le questionnement et qui gêneraient la réception de la réponse $R^{\heartsuit}$. À propos par exemple de la question « Comment contrôler au mieux ses calculs à l'aide d'une calculatrice ? », une réponse $R^{\diamondsuit}$ concernant le contrôle d'une égalité supposée – par exemple celle des fractions $\frac{420}{595}$ et $\frac{12}{17}$ – est que le verdict de la calculatrice (qui affiche ici, pour l'une et l'autre fraction, une *même* expression décimale : 0,70588…) ne serait pas fiable, au motif qu'il pourrait se faire que, *en poursuivant la division*, on découvre que les deux suites de décimales diffèrent par exemple à la 15e place, ou à la 40e place, etc. Or cette réponse est, du point de vue mathématique, lourdement *fausse*. Supposons en effet qu'on forme l'expression $\frac{420}{595} - \frac{12}{17}$; puisque 595 est un multiple de 17 (on a $17 \times 35 = 595$), on est certain, d'après les règles usuelles du calcul sur les fractions, que cette expression s'écrit sous la forme $\frac{\pm k}{595}$ (où k est un entier positif ou nul). Si k n'est pas nul, $\frac{k}{595}$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{595} = 0{,}00168\ldots$ Pour que k soit non nul, il faudrait donc qu'une différence apparaisse au moins dès la *troisième* décimale – c'est ainsi que l'on a par exemple $\frac{419}{595} = 0{,}70420\ldots$ ou $\frac{421}{595} = 0{,}70756\ldots$ alors que, on l'a dit, $\frac{12}{17} = 0{,}70588\ldots$ Il suffit donc ici, pour conclure que $\frac{420}{595} = \frac{12}{17}$, de vérifier que les écritures décimales de ces fractions sont identiques *jusqu'à la troisième décimale* (ce qui est bien le cas) : ils le seront alors *à n'importe quel rang*. D'une manière générale, le « travail » des réponses $R^{\diamondsuit}$, et en particulier la mise à bas de certaines réponses qui participent de tel ou tel *folklore* – ce mot désignant le système des connaissances majoritairement tenues pour assurées dans un public donné, par exemple chez les professeurs de telle discipline, ou chez leurs élèves, chez leurs parents, etc. –, l'intégration subséquente des fruits de ce travail dans la réponse $R^{\heartsuit}$ sont un élément essentiel de tout acte d'étude et de recherche, qui est toujours, si peu que ce soit, intervention didactique, c'est-à-dire *intervention sociale visant la diffusion de connaissances déterminées auprès de certains publics* – celui que constituent les élèves d'une classe, les membres d'un jury d'examen ou de concours, les membres d'une profession, etc.

6.7. Pourquoi un tel travail est-il *vital* aujourd'hui ? Le système scolaire et plus généralement toute institution humaine se trouve toujours, dans une période historique donnée, sur nombre d'objets qui y ont un habitat et y occupent une niche déterminée, en proie à des croyances

« folkloriques » qui, tout simplement, sont *fausses*. Ainsi en va-t-il, dans l'enseignement des mathématiques en France aujourd'hui, de la croyance qui, dans l'exemple ci-dessus, était supposée (à tort) rendre illégitime l'intervention de la calculatrice. Toute croyance fausse n'a pas forcément, dans un certain état historique de la société, des conséquences fâcheuses en tout domaine d'activité. Croire par exemple, selon un « folklore » déjà illustré sur le cas des fractions, que les expressions $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{18}$, dont on aurait vérifié à la main qu'elles ont les mêmes deux ou trois premières décimales, qu'elles pourraient différer à la 15^{e} ou à la 40^{e} décimale, était sans conséquence sérieuse dans l'enseignement secondaire des années 1950. Aujourd'hui, des moyens de calcul puissants sont là, et n'importe quel élève pourra interroger la calculatrice d'un ordinateur, qui lui indiquera que les développements décimaux des deux expressions sont les mêmes exactement bien au-delà de la troisième décimale, et qu'on a par exemple : $3\sqrt{2}, \sqrt{18} =_{\text{calc}} 4{,}242640687119285146405066172629 0\ldots$ Pour établir l'égalité de ces expressions, les moyens de calcul disponibles dans les années 1950 ne laissaient guère d'autre possibilité aux élèves que d'apprendre le calcul sur les radicaux, lequel permet d'écrire : $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. La situation des années 2000 est différente : si l'on veut motiver l'étude du calcul sur les radicaux, il faudra choisir d'autres situations génératrices que celles utilisées autrefois. C'est là, strictement, un problème de petite ingénierie didactique. Mais il y a un autre problème, et d'une profondeur incomparable. Les élèves, s'ils pouvaient parler franchement, et s'ils avaient les mots pour cela, pourraient nous dire à peu près ceci : « Vous nous interdisez d'utiliser la calculatrice pour voir si deux fractions, ou deux expressions numériques comportant un radical, sont ou non égales. Fort bien. Nous obtempérons. Mais vous ne pouvez pas nous empêcher d'observer que, chaque fois que nous avons eu à comparer de telles expressions, lorsqu'elles étaient égales la calculatrice affichait les mêmes chiffres ; et, lorsqu'il n'en était pas ainsi, les affichages différaient très vite – et non pas au-delà du dernier rang affiché. Hormis bien sûr dans un exemple fabriqué manifestement pour ça ! Alors, pourquoi cela ? Pourrait-on nous l'expliquer ? Ne pourrait-on pas nous dire pourquoi – si c'est bien le cas ! – ce qui nous apparaît comme une évidence ne serait en vérité qu'une illusion naïvement intéressée ? La calculatrice fait partie de notre pauvre vie mathématique, mais vous, sans autre forme de procès, vous la déclarez illégitime. D'un mot, vous renvoyez au néant ce qui est pour nous le premier réflexe, si contestable soit-il. Pourquoi l'École nous abandonne-t-elle ainsi ? » La demande est d'une aveuglante, d'une provocante légitimité ! Et c'est, de mon point de vue, une ardente obligation de l'École que de répondre à cette interpellation trop souvent muette. Supposons des expressions $\sqrt{a}$ et $b\sqrt{c}$ (où $a, b, c \in \mathbb{N}^*$) que l'on veut comparer. Supposons alors que $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ ont la même partie entière et les mêmes n premières décimales, en sorte qu'on a $|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| < 10^{-n}$. Supposons de plus – c'est la condition clé ! – que $a\sqrt{b} + \sqrt{c} < 10^{n}$. En multipliant l'inégalité $|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| < 10^{-n}$ par $a\sqrt{b} + \sqrt{c}$, on obtient ceci : $|a^2b - c| < 10^{-n}$ $(a\sqrt{b} + \sqrt{c}) \leq 1$. Le nombre $|a^2b - c|$ étant entier, il ne peut être strictement inférieur à 1 qu'en étant nul : on a donc $a^2b - c = 0$, soit encore $(a\sqrt{b} - \sqrt{c})(a\sqrt{b} + \sqrt{c}) = 0$, d'où enfin $a\sqrt{b} - \sqrt{c} = 0$. Dans le cas de $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{18}$ par exemple, on a $3\sqrt{2} + \sqrt{18} < 6 + 5 = 11 < 10^2$; par suite, dès lors qu'on sait que les écritures décimales de ces nombres sont les mêmes jusqu'à la deuxième décimale, on peut conclure à leur égalité. Bien entendu, une calculatrice ordinaire suffit à la tâche ! Le résultat mathématique précédent et les résultats de semblable facture adéquats aux diverses situations de calcul rencontrées constituent une mise à jour – sur *un* point, parmi beaucoup d'autres – des mathématiques du secondaire afin que celles-ci soient, si je puis dire, des mathématiques *responsables*, qui manifestent clairement aux yeux des jeunes générations que l'École ne les abandonne pas, mais qu'au contraire elle se préoccupe au plus haut point de leur donner les moyens de penser le réel et d'entrer en lui armées de savoir et de raison.