

LA DIALECTIQUE ENTRE ÉTUDES LOCALES ET THÉORISATION : LE CAS DE L'ALGÈBRE DANS L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRÉ

Yves Chevallard

1. Observations épistémologiques

1.1. Les recherches fondamentales

La distinction, devenue classique, entre recherches pures et recherches appliquées, est née dans des champs scientifiques parvenus à un certain état de développement. Appréhendée dans cette perspective, elle apparaît d'abord comme un élément, un temps fonctionnellement opérant, d'une certaine rhétorique de l'inscription sociale des sciences : par cette dichotomie, en effet, « la » science (ainsi dénommée par une métonymie à valeur tactique) se proposait comme une praxis théorique dotée d'effets décodables, et donc assignables, par la culture ordinaire, effets de réel soumis à la reconnaissance culturelle et à la négociation sociale.

Distinction extrinsèque, elle est le symptôme d'une exigence culturelle qui n'a fait que s'approfondir après la seconde guerre mondiale. Rétrospectivement, sa qualité de formation de compromis – entre exigences internes au développement scientifique et intégration sociale des champs scientifiques concernés – apparaît clairement : rappelons que le célèbre « Journal für die Reine und Angewandte Mathematik » de L. Crelle fut ironiquement rebaptisé « Journal für die Reine Unangewandte Mathematik ». Confirmation de ce statut, le surgissement – aux États-Unis d'abord – du courant concurrentiel recherche/développement, montre une autre forme de réponse aux exigences de la société : à une dichotomie interne à l'activité scientifique, elle substitue une autre coupure/articulation, qui met la science, prise cette fois comme un bloc, face au problème social que son développement doit affronter – celui non tant de ses « applications » *stricto sensu* que de ses effets sociaux culturellement repérables.

L'état de développement de la didactique des mathématiques – sa jeunesse absolue et relative – ne lui épargne guère l'interpellation culturelle ; et le temps où nous vivons tend bien plutôt à en accroître la vigueur. Nous ne pouvons donc manquer d'y répondre, sauf à risquer de marginaliser notre discipline, culturellement d'abord, socialement ensuite, jusqu'à l'étiollement et la disparition. Le gouffre de l'histoire, qui a pu absorber mainte civilisation, est assez large et profond pour englober aussi la didactique des mathématiques.

Cette réponse doit être pesée. Nous poserons ici qu'une réponse adéquate est celle du couple recherche/développement – assez bien reçu pour faire sens parmi un large cercle d'interlocuteurs – en articulation avec une distinction seconde mais essentielle, celle des recherches fondamentales (au pluriel). La signification immédiate qu'il convient de donner à cette expression naît de son opposition, selon une ligne sémantique usuelle dans la langue courante elle-même, à ce qu'on pourrait appeler d'abord pudiquement des recherches sans puissance de transformation de notre domaine de savoir : recherches, donc, anodines, sans portée, subalternes, dérisoires... Alignant ainsi les épithètes, et jusqu'aux plus péjoratives, nous serons à bon droit taxé d'outrecuidance si l'on ne voit ici que l'effet de la parole libre d'un auteur, un parmi d'autres et sans nulle prérogative en droit. Mais qu'on y voie l'effort d'une communauté de recherche pour échapper à ses lignes de plus grande pente, chemins qui

ne mènent nulle part, sinon au plus bas : et l'on y verra alors la forme d'une nécessaire et rude lucidité dans la construction de savoir à laquelle notre communauté s'est vouée.

1.2. Recherches fondamentales et théorie didactique

La didactique des mathématiques se définit comme toute science par son objet, qui au vrai n'est défini lui-même que par son inscription dans une problématique déterminée. Posons que cet objet est l'étude des systèmes didactiques. La tâche des didacticiens est donc d'élaborer une théorie de cet objet : une théorie didactique. Une recherche fondamentale est alors celle qui contribue de manière effective, contrôlée par la communauté des chercheurs, à établir, remanier, augmenter, étendre la théorie : une recherche qui – autre ligne sémantique dont l'épithète fondamental(e) participe – contribue à fonder (à refondre, à re-fonder, etc.) la théorie didactique. En ce sens, la distinction du fondamental et de qui ne l'est pas ne recoupe en rien la distinction du « pur » et de l'« appliqué ». Une recherche pure, aussi bien qu'une recherche appliquée, au sens ancien, peut être fondamentale et peut ne l'être pas. Les voies et moyens et les styles de la recherche sont encore une autre question. Ainsi, ce que les sciences humaines désignent du nom de travail de terrain (*fieldwork*), selon une autre métonymie épistémologiquement ambiguë, n'est en rien classable selon le pur et l'appliqué : l'ethnologie, qui nous apporte cette notion, fournit à cet égard des exemples en tous sens. Il reste, bien entendu, que la distinction du fondamental et de son reste (disons : le non-fondamental) ne s'opérationnalise que fort difficilement en un critère simple et net. Mais il faut tenir fermement, croyons-nous, que cette difficulté même est ici la clé du progrès, qu'elle est constitutive de l'effort auquel le développement de la didactique des mathématiques nous convie. Quel champ peut faire l'économie d'une telle interrogation, à commencer par les mathématiques elles-mêmes ? Que la question introduise quelque incertitude, la chose est évidente. Mais, en nous délivrant d'une certitude facile, elle (re)crée une vision ouverte de notre devenir, là même où la certitude de critères usés referme et enclave.

1.3. Théorie didactique, études locales et développement

La théorisation s'organise en dialectique avec des recherches qui sont, nécessairement, des études locales (enfermées dans un « sujet de recherche »), conduites à l'intérieur de cadres régionaux (balisés par un « thème » ou un « secteur » de recherches), etc. Ainsi des travaux autour de l'enseignement de l'algèbre. Cela signifie en bref que les chercheurs ont besoin :

- de la théorie (« générale »), pour conduire des études locales (sous peine de succomber au péché d'opportunisme théorique) ;
- d'études locales, pour construire la théorie didactique, sans quoi le produit de l'effort de théorisation peut n'être qu'un objet creux, une cathédrale vide, une « grand theory » au sens autrefois dénoncé par C. Wright Mills.

Mais ce balancement est rompu dans la relation que les praticiens du système d'enseignement (enseignants, mais aussi responsables, décideurs : noosphériens en général) peuvent entretenir avec la recherche dans le cadre du développement. Ces praticiens en effet ont besoin, non d'études locales – marquées généralement par une forte teneur « empirique » (*case studies*) –, mais bien de théorie (« pure »). Une belle table de données numériques sur la chute des corps ne saurait intéresser que le chercheur, non le praticien ; celui-ci, tout au contraire, attendra du chercheur quelque *loi*, qui lui permettra de comprendre le réel et de régler son action.

On se heurte là, pourtant, au paradoxe de la science et de la culture. Les études locales apparaissent au praticien culturellement significatives, parce qu'il peut aussi les lire comme

anecdotes, en savourer l'effet d'exotisme, et jouir du spectacle d'une science mondaine qui lui épargne les affres de l'activité scientifique. Qu'il fréquente un séminaire de recherche, il connaîtra, à voir tel tableau de données ou tel fait bien avéré qu'il extrait subrepticement, pour son propre plaisir, de telle recherche particulière, les délices de la « commotion didactique », tout de même qu'on se donnait, dit-on, dans les salons scientifico-mondains du XVIII^e siècle, la « commotion électrique ». C'est pourtant au chercheur seul que ces études locales apparaîtront scientifiquement significatives et théoriquement nécessaires. Une recherche particulière, dès lors, n'a d'intérêt, dans une perspective de développement, qu'à proportion de son caractère fondamental, de sa portée en termes d'organisation et de réorganisation de notre compréhension du réel ; et le développement risque de se fourvoyer quand ses acteurs hypostasient spectaculairement tel ou tel élément décontextualisé (intuition, conjecture, résultat partiel, etc.) du processus global de la recherche et de la théorisation.

2. L'approche de l'objet d'étude

2.1. Le pôle du savoir

On a présenté ailleurs le système didactique comme constitué, sous la règle instituée du contrat didactique, d'un savoir, d'un enseignant et d'un groupe d'enseignés. La théorie de la transposition didactique correspond alors à une approche des systèmes didactiques qui choisit comme point d'entrée le pôle du savoir. De ce point de vue, si elle peut être regardée, de manière restreinte, comme une théorie de la formation et du fonctionnement du savoir enseigné, elle n'est en rien un épistémologisme –de la même façon que l'entrée par le pôle des enseignés n'entraîne pas de ce seul fait au psychologisme. Mais, au plus large, elle ambitionne d'être regardée comme fondement de la théorie didactique : à ce titre, elle devra déployer sa conceptualisation de façon à embrasser l'intégralité du système didactique en son fonctionnement.

2.2. Problématique écologique et analyse didactique

La problématique de l'étude peut être formulée, globalement et à grands traits, à l'aide du concept de rapport au savoir (de l'enseignant, de l'enseigné), par le moyen de deux questions :

1. Quelles sont les conditions assurant la viabilité didactique de tel élément de savoir et de tel rapport à cet élément de savoir ?
2. Quelles sont les contraintes pouvant empêcher ces conditions d'être satisfaites ?

Cette problématique ouvre tout à la fois l'espace des concepts et celui des méthodes : si celles-ci comme ceux-là peuvent bien, en quelque manière, lui préexister (en tant qu'emprunts à des champs scientifiques voisins), c'est cependant dans la perspective ouverte par elle qu'ils devront être repris, réévalués, en leur signification et en leur portée dans le registre strict de l'analyse didactique ainsi entendue.\$

3. Exemple d'analyse écologique

3.1. Le rapport aux nombres relatifs observé

À titre d'exemple, nous considérerons l'observation suivante : en classe de cinquième, pendant au moins une certaine période de l'année, l'enseignant semble entretenir avec les nombres dits relatifs (qu'il introduit officiellement en cette classe) un rapport marqué par une distinction entre les « nombres » (ou écritures ?) « +3 » et « 3 ».

Ici, l'élément de savoir est « les nombres relatifs » ; le rapport à cet élément de savoir que l'on considère est, non pas celui de l'enseigné, mais celui de l'enseignant. L'observation consigne ce qui semble être une régularité, localement stable, dans le rapport de l'enseignant à cet élément de savoir.

Deux problèmes peuvent alors être proposés. Tout d'abord, cette observation n'est-elle pas une bévue ? Peut-on l'attester de manière certaine, reproductible et contrôlable ? Ensuite, pourquoi ce rapport émerge-t-il ?

Ces deux questions prennent leur signification d'une seconde observation, dont l'établissement ne souffre guère de discussion : la distinction supposée entre +3 et 3 (pour reprendre cet exemple) disparaît quand on porte son regard, disons, au niveau des lycées : +3 et 3, c'est alors la même chose (pour l'enseignant comme pour l'enseigné), sous deux notations différentes, mais voisines et commutables. À un plus haut niveau encore, la formalisation usuelle en donne acte explicitement : si l'on construit $\mathbf{Z}$ à partir de $\mathbf{N}$ par le procédé (devenu classique) de symétrisation de $\mathbf{N}$ (comme semi-groupe), la construction s'achève par l'identification de $\mathbf{N}$ à une partie de $\mathbf{Z}$. Cette assurance met donc en relief l'intérêt des deux questions posées : est-on bien sûr que, dans la genèse didactique-scolaire actuelle de la notion de relatifs, il y ait un moment où cette identification n'existe pas, mais au contraire laisse place, assez durablement (au contraire de ce qui se passe lors de la construction mathématique rappelée plus haut, laquelle est supposée menée d'un trait), à une distinction ? Et, s'il en est bien ainsi, pourquoi cela se produit-il ?

Les deux questions sont en fait liées. La certitude que l'on a bien mis le doigt ici sur un phénomène réel peut partiellement être assurée par l'observation empirique attentive. Pourtant celle-ci n'est pas entièrement convaincante, en ce qu'elle semble montrer un balancement entre deux attitudes, identification et distinction. Mais cette certitude sera définitivement acquise si on peut montrer en quoi ce phénomène trouve sa place dans un réseau (qu'on peut dire, au sens large, causal) de conditions et de contraintes. C'est ce que l'on fera rapidement dans les lignes qui suivent.

3.2. Le rapport aux nombres relatifs expliqué

L'observation de l'enseignement, en classe de cinquième, de la manipulation (calculatoire) des nombres relatifs révèle en effet un autre phénomène, qui semble familier à l'enseignant de ces classes jusqu'à lui devenir parfaitement transparent. Considérons ici, à titre d'exemple générique, le calcul de la « somme algébrique » suivante :

$$(+5) - (-3) + (-7) \quad (\text{a}).$$

Le premier pas du calcul consiste à éliminer les signes « moins » dits opératoires, par la règle de réécriture :

$$-(\pm 3) \rightarrow +(\mp 3).$$

On passe donc à l'expression suivante :

$$(+5) + (+3) + (-7) \quad (\text{b}).$$

Le pas suivant consiste, tout à la fois, à supprimer les signes « plus » opératoires et à transformer les signes (« plus » ou « moins ») prédicatoires en signes opératoires (à l'exception du nombre en position initiale, qui perd son signe « plus »), mouvement par lequel

les nombres relatifs perdent leur signe prédicatoire pour laisser la place à des nombres naturels. Nous scinderons ce changement global en ses deux étapes :

$$5 \quad +3 \quad -7 \quad (c').$$

$$5 + 3 - 7 \quad (c'').$$

La dissociation opérée dans la deuxième étape du calcul met en évidence un fait remarquable : l'expression c' n'est nullement une « somme algébrique » ! C'est seulement une succession d'écritures de nombres, dont le référent est donc, au mieux, une suite (au sens mathématique du mot) de trois nombres (5, +3, -7).

Ce phénomène, appréhendé du point de vue de la signification mathématique, laisse donc apparaître une singularité très remarquable, qui ne laissera pas de devoir être examinée à son tour. Mais, en lui-même, il éclaire l'observation dont nous étions partis : si le calcul des sommes algébriques doit être conduit (au moins officiellement) ainsi qu'on l'a montré, alors il devient impossible d'identifier +3 et 3 d'une manière acontextuelle (« context-free »), hormis pour le nombre en position initiale, pour lequel au contraire cette identification est automatique. Dans le calcul précédent, par exemple, la chute simultanée des signes « plus » opératoires et prédicatoires conduirait à l'écriture :

$$5 \quad 3 \quad -7.$$

Et, en sens inverse, il y a, sinon identification, du moins passage obligatoire de +3 à 3 (du nombre relatif +3 au nombre naturel 3, qui seraient donc deux entités différentes quoique « équivalentes » en cette étape de calcul), au cours de la transition de c' à c'' .

Ainsi, la distinction observée, autant que l'apparence de « balancement » avec un processus d'identification encore en germe, apparaissent à la fois comme établies et expliquées. Elles sont, en somme, forcées à exister par une contrainte décisive : la technique enseignée pour manipuler les sommes algébriques.

On soulignera ici que, quelle que soit la formation initiale reçue, et donc quel que soit le rapport préalable que l'enseignant entretienne avec le calcul sur les nombres relatifs, ce rapport en vient à être réélaboré sous l'effet des contraintes auxquelles l'enseignant se trouve comme tel assujéti dans la classe. Cette réélaboration, au demeurant et en l'espèce, va plus loin que la simple coexistence, chez la même personne, de deux styles de rapport, l'un « réel », l'autre « didactique » et maintenu pour des raisons d'opportunisme (de nécessité) didactique. L'expérience que nous avons acquise à cet égard nous laisse penser qu'il y a, de fait, naturalisation de ce rapport, vu comme le « bon » rapport, et défendu comme tel si, d'aventure, celui-ci se trouvait attaqué (par exemple au nom d'arguments mathématiques mettant en avant son inconsistance).

3.3. Un réseau déterminé de conditions et de contraintes

L'analyse écologique menée jusqu'ici peut être poursuivie : car pourquoi, à son tour, cette technique de manipulation des sommes algébriques apparaît-elle ? Nous serons plus rapide encore sur cette question.

Le fait majeur est ici un fait historiquement assignable concernant les changements enregistrés par l'écosystème au sein duquel les nombres relatifs sont appelés à vivre : celui de la séparation de l'algébrique et du numérique. Dans l'histoire de l'algèbre savante comme dans l'histoire de l'algèbre enseignée, les nombres que nous appelons aujourd'hui relatifs sont

des rejets de l'algèbre : on les appelait justement, il y a quelques décennies encore, des nombres algébriques. (Seul vestige de cette genèse, et qui a d'ailleurs perdu sa signification pour la grande majorité des enseignants : nous parlons, aujourd'hui encore, de « sommes algébriques »). En d'autres termes, le calcul algébrique force à l'existence les nombres algébriques. Et, du même mouvement, il définit les règles de manipulation de ces entités numériques neuves. L'enseignant de mathématiques actuel s'étonnera sans doute en découvrant l'organisation du corpus enseigné qui était la norme, qui apparaissait naturelle et allant de soi, il y a quelques décennies encore. Dans tel manuel ancien (s.d., conforme au programme de 1920 du brevet élémentaire), l'enseignement de l'algèbre introduit d'abord l'« Emploi des lettres et des signes » de l'algèbre, puis met en œuvre ces outils nouveaux dans la résolution d'« Équations du premier degré » simples (où le lien avec les méthodes de résolution de l'arithmétique élémentaire demeure un contrepoint obligé) ; et ce n'est qu'ensuite que s'introduisent les « Nombres algébriques » et leur calcul, qui donnent alors sa pleine force au « Calcul algébrique ».

Dans un tel cadre, le calcul des sommes algébriques procède d'une manière qu'on peut dire classique, en plein accord avec un rapport tout aussi classique aux nombres relatifs. Ce que le manuel examiné plus haut résume en deux points :

« Il est facile de vérifier :

1. Qu'il n'y a pas de différence essentielle entre les nombres positifs et les nombres arithmétiques ;
2. Qu'une somme algébrique de nombres algébriques est équivalente à une somme algébrique de nombres positifs et par conséquent à une somme algébrique de nombres arithmétiques.

Ex. : $(+22) - (+7) + (-9) - (-5) = (+22) - (+7) - (+9) + (+5) = 22 - 7 - 9 + 5.$ »

Si cette organisation du corpus est rompue, en revanche, c'est-à-dire si l'on passe à l'organisation que nous dirons ici moderne (« actuelle » irait mieux : nous dirons plus loin pourquoi), soit encore si l'introduction des nombres algébriques n'est plus soumise au calcul algébrique, alors le paysage change brutalement. Un manuel, datant de 1934, montre clairement cette altération profonde : tout d'abord (Chapitre I), les nombres positifs et négatifs sont introduits ; ce n'est qu'ensuite que viennent, successivement, calcul algébrique (Chapitre II) et équations du premier degré (Chapitre III). La genèse traditionnelle des nombres relatifs est ici entièrement perdue. Le procédé contemporain de calcul des sommes algébriques, qui n'est certes pas forcé à l'existence par cette réorganisation seule, devient pourtant, dès lors, possible. Le même ouvrage en fournit une claire illustration :

« Simplification de la notation. – Pour simplifier la représentation d'une somme, on convient :

1. de sous-entendre le signe + de l'addition entre les nombres ;
2. d'écrire les nombres sans leurs parenthèses les uns à la suite des autres et chacun avec son signe propre ;
3. de supprimer le signe + s'il est placé devant le premier nombre.

D'après cela, la somme

$$(+8) + (-7) + (+18) + (-15) + (+5)$$

s'écrira simplement :

$$8 - 7 + 18 - 15 + 5.$$
 »

L'explication précédente ne peut sans doute pas être dite complète : si le procédé contemporain devient possible, il n'en est pas pour autant nécessaire. Aussi d'autres ensembles de conditions et de contraintes devraient-ils être pris en compte pour obtenir une telle explication – ce que nous ne tenterons pas ici. Deux remarques seulement. Si l'on peut

bien penser que parmi ces conditions et contraintes figurent certainement, d'une manière générale, « les enseignés », regardés comme systèmes de contraintes cognitives (ce qu'ils ne sont pas seulement), il est improbable que ce facteur explique sans résidu le choix d'un procédé contre l'autre. Inversement, l'exemple précédent montre assez clairement que l'on ne peut comprendre la genèse (et les accidents de la genèse) de la formation du rapport au savoir enseigné (celui de l'enseigné comme celui de l'enseignant) sans analyse des conditions et des contraintes sous lesquelles ce rapport – et tel rapport et non tel autre – pourra effectivement apparaître.

Il est vraisemblable pourtant que le changement observé, quoique s'étalant dans l'histoire, devrait pouvoir être rapporté à un ensemble déterminé de conditions. En d'autres termes, son origine ne se dissoudrait pas dans un foisonnement indéfini de conditions inassignables, associées spécifiquement, sans décontextualisation possible, à un moment d'histoire, à une évolution historique comme telle irréversible. Le manuel « moderne » que nous avons mentionné est, dans une perspective de simple évolution historique, en avance sur son temps ; car le paradigme ancien subsistera longtemps encore dans l'enseignement français. Inversement, il est possible de retrouver, encore aujourd'hui, mais à l'écart de l'enseignement officiel, le paradigme « ancien ». Le document reproduit ci-après présente les exercices, proposés dans un ouvrage constamment réédité (l'édition utilisée est de 1971), intitulé « Teach Yourself Algebra », concernant les nombres positifs et négatifs : on y retrouvera un univers d'apprentissage fort différent de celui que nous connaissons aujourd'hui. La condition déterminante, à cet égard, semble bien être le fait que nous désignons plus haut comme séparation de l'algébrique et du numérique. Phénomène dont les tenants et les aboutissants resteraient alors à élucider.

Exercices sur les nombres positifs et négatifs

P. Abbott, *Teach Yourself Algebra*, Hodder & Stoughton, 1971, pp. 57-58.

Exercise 9.

1. Write down the answers to the following:

(1) $(+12) \times (+3)$.	(2) $(+12) \times (-3)$.
(3) $(-12) \times (+3)$.	(4) $(-12) \times (-3)$.
(5) $(+12) \div (+3)$.	(6) $(+12) \div (-3)$.
(7) $(-12) \div (+3)$.	(8) $(-12) \div (-3)$.

2. Write down the answers to the following:

(1) $(+a) \times (-a)$.	(2) $(-a) \times (-a)$.
(3) $(+a) \div (-a)$.	(4) $(-a) \div (-a)$.

3. Write down the answers to the following:

(1) $(-2a) \times (+2b)$.	(2) $(-2a) \times (-2b)$.
(3) $(+10x) \times (-2y)$.	(4) $(-10x) \times (+2y)$.
(5) $(+10x) \div (-2y)$.	(6) $(-10x) \div (-2y)$.

4. Find the values of the following:

(1) $(-4) \times (+3) \times (-2)$.
(2) $(-a) \times (+3a) \times (-2a)$.
(3) $(-18xy) \div (-6x)$.
(4) $(-24a^2b^2) \div (+4ab)$.

5. Find the values of the following:
- (1) $(-5x) \times (-2x) \times (-x)$.
 - (2) $a(a-b) - b(b-a)$.
 - (3) $- \{a(-2b) \times (-b)\}$.
 - (4) $-a(a-2b-c)$.
6. Find the simplified form of the following:
- (1) $(+2a) \times (-5b) \times (-2b)$.
 - (2) $(-4x)^2 - 2x(5x-4)$.
 - (3) $x(y-z) - z(x-y) - y(x-z)$.
7. Write down the second, third, fourth and fifth powers of:
- (1) $(-a)$.
 - (2) $(-2x)$.
 - (3) $(-\frac{b}{3})$.
8. Write down the square roots of 81 and $9x^4$ and the cube roots of $-x^3$ and $-8a^6$.
9. Find the answers to the following:
- (1) $(-8x) \times (-2)$.
 - (2) $(-10x) \div (-2)$.
 - (3) $(-2xy) \div (-x)$.
 - (4) $(+6b) \div (-3)$.
 - (5) $(+8t^2) \div (-4t)$.
 - (6) $(-4x^3) \div (-2x^2)$.
 - (7) $(-2x^2) \times (-4x)$.
 - (8) $(+15x^2y) \div (-5xy)$.
 - (9) $(-12a^2b^2) \div (+3ab)$.
 - (10) $(-24a^3bc^2) \div (-4abc)$.
10. Write down the values of:
- (1) $\{(-a) \times (-b)\} \div (-a)$.
 - (2) $(+\frac{1}{x^2}) \times (-x)^3$.
 - (3) $(-6x)^2 \times (-x)^3 \div (-2x)^4$.

4. La dialectique de l'étude locale et de la théorisation

4.1. Enseignement et apprentissage de l'algèbre au collège

L'observation de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre au collège convainc d'une divergence nette entre ce que beaucoup pourraient désigner comme les « effets souhaités » d'une part (capacité à manipuler les expressions algébriques et à mobiliser le calcul algébrique dans la résolution de problèmes, ce qu'on pourrait résumer, elliptiquement, comme l'acquisition d'un « sens de l'algèbre ») et, d'autre part, les effets effectivement observés.

Cet enseignement, en effet, met en place (et se présente comme) une formation écologiquement stable, très robuste, fermée sur elle-même, presque entièrement étrangère à l'utilisation de l'algèbre comme outil.

Cette formation est marquée notamment, de manière très clairement prégnante, par un rapport de l'enseigné au calcul algébrique comme calcul formel. On reprendra ici un exemple simple mettant en relief la différence entre calcul formel et calcul fonctionnel (la terminologie et la conceptualisation sont reprises ici de G. Brousseau).

Le calcul formel est celui que l'élève du collège met en œuvre, très ordinairement, en réponse à une des consignes classiques dans l'enseignement du calcul algébrique : développer, calculer, etc. Il en ira ainsi dans l'exemple suivant : « Calculer l'expression $(2a + 1) + (2a + 3)$. » La réponse attendue, et la réponse que l'enseignement donné fera surgir de la manière la plus hautement probable, est constituée par le calcul : « $(2a + 1) + (2a + 3) = \dots = 4a + 4$. » L'un des signes de la formalité est ici le critère d'arrêt : pourquoi considérer le calcul comme achevé lorsque, et seulement lorsque, la forme $4a + 4$ a été obtenue ? Pourquoi, par exemple, ne le poursuivrait-on pas, pour écrire ensuite

$$\dots = 4a + 4 = 4(a + 1) ?$$

Dans la mesure où la forme du résultat du calcul ne répond à aucune exigence extérieure au calcul, dans la mesure donc où le calcul est formel, l'arrêt est déterminé par ce qu'on peut appeler un « code de conduite du calcul algébrique » (code dont nous ne considérerons pas ici la motivation ni la genèse), qui persuadera que $4a + 4$ est la « bonne » forme, entre toutes.

Les choses changent si le calcul précédent apparaît comme fonctionnel, s'il apparaît comme un moment dans la construction d'une solution à un problème qui n'est pas le problème de ce calcul. Considérons ainsi, par contraste, l'énoncé suivant :

« Démontrer que la somme de deux entiers impairs successifs est un multiple de quatre. »

La réponse à la question posée pourra être recherchée dans la manipulation de l'expression $(2a + 1) + (2a + 3)$. Mais ici l'arrêt du calcul sera fixé par le problème, extérieur comme tel au calcul, que l'on s'efforce de résoudre. La forme $4a + 4$ n'apparaît plus comme « optimale » et c'est au contraire la forme $4(a + 1)$ qui deviendra pertinente. Au passage, notons que la création de conditions didactiques engendrant la réponse $4(a + 1)$ est, en calcul formel, hors de portée de l'enseignant, sauf à compliquer explicitement (et « artificiellement », du point de vue formaliste) la consigne – la seule consigne « Calculer » étant définitivement insuffisante pour produire l'effet attendu : « Calculer l'expression $(2a + 1) + (2a + 3)$, puis factoriser l'expression obtenue. »

4.2. Les conditions de formation et de stabilité

Nous dresserons ci-après un tableau rapide des grands traits de l'organisation de l'algèbre enseignée et des interrelations avec le numérique. (Celles avec le géométrique jouent un rôle sans doute essentiel, mais nous les laisserons de côté ici.)

Une telle description doit partir de l'algèbre savante – dont l'algèbre enseignée procède en retombée historiquement décalée (transposition didactique). La mise en histoire de l'algèbre savante peut être résumée dans ses lignes de force. Il y a au départ un corpus, traditionnel et à évolution lente, de problèmes arithmétiques (les plus anciens d'entre eux se retrouvent à Babylone). Sur ce corpus vient alors s'établir la première algèbre (au sens où nous usons de ce mot), celle des algébristes arabes à partir du IX^e siècle. Le surgissement de cette algèbre entraîne un vaste remaniement, étalé sur plusieurs siècles, du domaine numérique, lequel s'étend alors par l'apparition des négatifs, puis des décimaux (liés, dans l'algèbre arabe, à la théorie des polynômes), puis, plus tard encore, des imaginaires (que les algébristes italiens voient naître dans l'étude des équations algébriques). On notera que l'origine des nombres relatifs (comme celle des décimaux ou des imaginaires) est bien intramathématique, quel que soit par ailleurs leur intérêt extramathématique : les nombres négatifs n'ont pas été inventés pour mesurer l'altitude au-dessous du niveau de la mer...

Ce cadre de développement confirme l'idée de l'algèbre comme outil et tout un ensemble de pratiques peuvent être à cet égard alléguées pour montrer en particulier que, à nul moment, la dialectique de l'algébrique et du numérique ne perd sa réalité – et cela, jusqu'au XIX^e siècle (nombres idéaux de Kummer, corps de nombres) et à nos jours (nombres p-adiques, corps de classes, etc.).

Pourtant, dans ce même mouvement, une évolution divergente s'observe : l'outil n'acquiert et n'accroît son rendement qu'à faire lui-même l'objet d'une étude approfondie. La chose est patente avec les équations algébriques. Outil de résolution de problèmes, les équations, en effet, doivent elles-mêmes être résolues : le problème *a priori* extra-algébrique (voire extra-mathématique) qu'elles permettront de résoudre amène au devant de la scène le problème tout algébrique de leur résolution. Ce mouvement conduit alors à l'autonomisation savante d'une algèbre élémentaire (polynômes, fractions rationnelles, équations algébriques). C'est sur cette base contrastée que le processus de transposition didactique va alors accomplir son œuvre.

L'autonomisation savante que nous avons mentionnée se trouve en consonance avec une loi de la transposition didactique : la tendance à la différenciation et à l'autonomisation internes relatives du corpus enseigné en différents secteurs. Ce type d'organisation constitue, écologiquement, une garantie de robustesse et de viabilité didactiques : si tout dépend de tout, si du moins, dans l'activité mathématique savante, tout peut dépendre de tout, la relation didactique suppose une analytique qui, en découpant des sous-champs autonomes, réduit la charge didactique et cognitive que constituerait l'intense jeu intersectoriel dont l'horizon savant nous offre le spectacle. Dans le cas de l'algèbre, l'espèce de « traitement par lots » que promeut l'économie didactique finira par délimiter un domaine préalable, sorte de prolégomènes obligés à toute pratique de l'algèbre – la perte de sens entraînée par la rupture du réseau de significations tissé par les emplois du calcul algébrique étant compensée par la mise en place du code de (bonne) conduite (des calculs algébriques) mentionné plus haut.

Une autre loi du fonctionnement didactique doit être prise en compte ici, en ce qui concerne l'effondrement de la dialectique numérique/algébrique. Il s'agit de la loi de topogénèse. La frontière topogénétique, en effet, va s'installer durablement en séparant l'algébrique du numérique, celui-ci étant versé au lieu (*topos*) de l'enseigné, celui-là au lieu de l'enseignant – le rapport de l'enseigné à l'algébrique demeurant strictement, dès lors, celui que permet le calcul formel précédemment décrit.

Mais en ce point d'autres facteurs doivent être nécessairement invoqués. Cette distribution interne au jeu didactique se trouve en consonance, jusqu'à la complicité active, avec des déterminants qu'il faut référer à la culture (occidentale). Celle-ci, en effet, n'a jamais véritablement assimilé l'algèbre, dont elle reconduit invariablement la péjoration – l'algèbre tombeau de la pensée, quand la géométrie au contraire saura s'assurer les honneurs de la plus haute culture. Dans le même mouvement, elle assume le numérique dans les termes d'une appropriation supposée « concrète », en fait empiriste-sensualiste, qui ne renvoie le numérique qu'à lui-même et à ses images les plus dérisoires dans la culture (ainsi, les relatifs seront-ils assignés aux manipulations d'ascenseurs, etc.). Face à ce laminage de la praxis algébrique par des valeurs culturelles qui lui demeurent étrangères, la noosphère – système d'adaptation mais aussi de protection du système d'enseignement face à son environnement sociétal – montrera une insensibilité mathématique évidente, qui conduira aux capitulations que marquent les programmes successifs des collèges, ceux de 1971, 1978, 1986 : y compris, donc, le programme de la réforme dite « des mathématiques modernes ».

4.3. Retour à la théorie

La note pessimiste que nous venons de frapper peut susciter une réaction justifiée : en dépit de tout cela, objectera-t-on, les élèves ne parviennent-ils pas pourtant, d'une manière insuffisante sans doute, à user du calcul algébrique (fonctionnellement), et non pas seulement à calculer (formellement) ?

La chose n'est pas niable, et son explication renvoie à une loi structurelle essentielle de la genèse didactique du rapport au savoir de l'enseigné : de son apprentissage. L'énoncé de cette loi suppose qu'à côté du savoir enseigné on introduise, dans la théorie didactique, un autre concept : celui de savoir didactique. Sous cette appellation, il faut ranger un ensemble, *a priori* hétérogène, de savoirs, dont l'intégration et, si l'on peut dire, l'organicité n'existent que dans l'unité fonctionnelle de la dynamique didactique. Il faut y ranger notamment le savoir nécessaire à l'enseigné pour tracer sa route à travers le processus d'ensemble que gèrent le contrat didactique et son évolution en rapport avec les contenus enseignés. Il faut y ranger aussi – c'est d'abord cela qui nous intéresse ici – ce savoir mathématique qui est, pour l'enseigné, à un moment donné, l'un des outils que l'exercice de son métier d'élève réclame.

Or, ce savoir mathématique est, pour l'essentiel, du savoir ayant eu, mais n'ayant plus, le statut de savoir enseigné : du savoir, donc, qui a été enseigné et qui, de ce fait (selon la très exacte expression familière aux enseignants comme aux enseignants), « est supposé connu ». Un savoir qui a cessé d'être un enjeu didactique et dont le contrat didactique verse dès lors la maîtrise adéquate à la charge de l'enseigné.

Ce changement de statut est un fait didactique essentiel. Car c'est lorsque le savoir, naguère enseigné, a cessé d'être enjeu didactique que s'ouvrent pour l'enseigné, dans son intimité concrète de sujet, la possibilité, la responsabilité et la charge de faire évoluer, pour le stabiliser localement (dans le temps didactique, c'est-à-dire dans l'espace des tâches concrètes qui lui sont assignées), son rapport au savoir didactique, grâce auquel il pourra continuer de « faire l'élève », soit d'établir un rapport didactiquement adéquat à de nouveaux éléments de savoir enseigné.

C'est ce phénomène didactique que nous désignerons comme loi du décalage structurel entre enseignement et apprentissage. En forçant les termes – nettement – pour donner du relief à notre description, nous pourrions dire ici que c'est lorsque l'enseignement est terminé que l'apprentissage commence ; plus complètement, que c'est parce que l'enseignement est (supposé) terminé que l'apprentissage peut commencer. Mais celui-ci ne se fait qu'à prendre appui sur l'enseignement prodigué : enseignement non suffisant, sans doute, mais qui reste en même temps, structurellement, didactiquement nécessaire.

Revenons à l'algèbre. L'enseignement du calcul algébrique se termine avec la classe de troisième. Et c'est en classe de seconde, et dans les classes suivantes, que la réélaboration du rapport de l'enseigné au calcul algébrique va se faire. Ce processus y trouve de riches occasions, avec, par exemple, les manipulations que suppose le calcul des dérivées de fonctions et leur emploi dans la détermination des variations de la fonction étudiée. Immédiatement alors, on passe au calcul fonctionnel, qui éloigne la conduite pratique du calcul de la norme codifiée antérieurement apprise.

Ce remaniement doit être apprécié dans sa portée : le rapport au calcul algébrique ne devient que localement fonctionnel. Chaque domaine d'emploi devra être patiemment gagné à la fonctionnalité. Aussi ne pourra-t-on s'étonner que l'élève, qui maîtrise correctement le calcul fonctionnel en tel domaine (celui de l'étude des fonctions, par exemple), rétablisse d'abord brusquement, comme en un court-circuit didactique qui ramène de l'archaïque en surface, son rapport antérieur, établi sous l'empire d'un calcul seulement formel, devant tout domaine d'emploi neuf pour lui. Phénomène auquel les enseignants de sciences physiques sont couramment confrontés, sans toujours en détenir la clé interprétative.

On ajoutera encore deux remarques, essentielles à la théorie et à son développement. Dépasant la fiction didactique qui plie l'enseignant au mythe nécessaire qu'elle énonce, le didacticien doit savoir reconnaître l'adidactique au cœur du didactique (et non le pourchasser, comme une vaine chimère, à l'extérieur du didactique) ; et, à chaque instant, orienter sa réflexion, touchant l'enseigné, à la lumière de la question fondamentale : qu'apprend-il, ou que peut-il apprendre, en ce moment ?

BIBLIOGRAPHIE

- ALTHUSSER (L.), 1974. *Philosophie et philosophie spontanée des savants* (1967), F. Maspéro, Paris.
- BADIOU (A.), 1969. *Le concept de modèle*, F. Maspéro, Paris.
- BOURDIEU (P.), 1987. *Choses dites*, Ed. de Minuit, Paris.
- CHEVALLARD (Y.), 1979. *Positions épistémologiques pour la didactique*, IREM d'Aix-Marseille.
- CHEVALLARD (Y.), 1981. The Didactics of Mathematics: its Problematic and related research, *Recherches en didactique des mathématiques*, 2, 1, pp. 146-157.
- CHEVALLARD (Y.), 1982a. *Sur l'ingénierie didactique*, IREM d'Aix-Marseille.
- CHEVALLARD (Y.), 1982b. *Balisage d'un domaine de recherche : l'enseignement de l'« algèbre » au premier cycle*, IREM d'Aix-Marseille.
- CHEVALLARD (Y.), 1984. Le problème des problèmes « concrets », document diffusé à la 3^e école d'été de didactique des mathématiques (Olivet, 2-13 juillet 1984).
- CHEVALLARD (Y.), 1985a. « Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège ». *Petit x*, 5, pp. 51-94.
- CHEVALLARD (Y.), 1985b. *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- CHEVALLARD (Y.), 1986a. « Vers une analyse didactique des faits d'évaluation », in J.M. De Ketele (Ed.), *L'évaluation : approche descriptive ou prescriptive ?* (De Boeck-Wesmael, Bruxelles), pp. 31-59.
- CHEVALLARD (Y.), 1986b. « Esquisse d'une théorie formelle du didactique », communication au *Colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (CIRM- Luminy, 16-21 novembre 1986).
- CHEVALLARD (Y.), 1986c. *Enseignement de l'algèbre et transposition didactique* (à paraître).
- CHEVALLARD (Y.), FELDMANN (S.), 1986. *Pour une analyse didactique de l'évaluation*, IREM d'Aix-Marseille.
- CHEVALLARD (Y.), 1987, « Quelques représentations touchant le concept de représentation », communication à la *Rencontre nationale sur la didactique de l'histoire et de la géographie* (INRP, Paris, 18-20 mars 1987).

- COQUIN-VIENNOT (D.), 1985. « Complexité mathématique et ordre d'acquisition : une hiérarchie de conceptions à propos des relatifs », *Recherches en didactique des mathématiques*, 6, 2-3, pp. 133-192.
- GLAESER (G.), 1981. « Épistémologie des relatifs », *Recherches en didactique des mathématiques*, 2, 3, pp. 303-346.
- HART (K.M.), 1981. *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, John Murray, Londres.
- KÜCHEMANN (D.), 1981. « Positive and Negative Numbers », in Hart 1981, pp. 82-87.
- PASCAL (D.), 1980. *Le problème du zéro -L'économie de l'échec dans la classe et la production de l'erreur*, IREM d'Aix-Marseille.
- PEDRAZA (P.), PEDRAZA (M.), 1984. *De l'arithmétique à l'algèbre : une succession impossible ?* IREM d'Aix-Marseille.
- RAYMOND (P.), 1973. *Le passage au matérialisme*, F. Maspéro, Paris.
- RAYMOND (P.), 1975. *L'histoire et les sciences*, F. Maspéro, Paris.
- SCHNEIDER (O.), 1979. *Le passage des équations numériques aux équations paramétriques en classe de seconde*, IREM d'Aix-Marseille.
- SCHURING (G.), 1986. « Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs », *Petit x*, 12, pp. 5-32.
- TONNELLE (J.), 1979. *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*, IREM d'Aix-Marseille.
- VINNER (S.), 1975. « The Naïve Platonic Approach as a Teaching Strategy in Arithmetic », *Educational Studies in Mathematics*, 6, 3, pp. 339-350.