La calculatrice, ce bon objet

par Yves Chevallard

Un immense progrès

Que la calculatrice soit devenue un outil indispensable du travail numérique, personne ne devrait en douter. Entre hier et aujourd'hui, la distance est tellement énorme qu'on a fini par oublier la difficulté d'hier, la facilité d'aujourd'hui en matière de calcul. L'aire A d'une sphère de rayon de mesure R est donnée par la formule $A = 4\pi R^2$. Si l'on veut construire une sphère d'aire unité – par exemple d'un mètre carré –, quel rayon faut-il lui donner ? L'égalité précédente fournit aisément le principe de la réponse : $R = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$. Mais comment obtenir une « bonne » valeur décimale approchée de cette expression ? Dans un ouvrage intitulé *Calculs numériques et graphiques*, publié en 1928 chez Armand Colin, l'auteur, Émile Gau, parvient – après une demi-page de considérations – à l'encadrement suivant : $0{,}2819\ldots < R < 0{,}2824\ldots$ Il conclut en ces termes (*op. cit.*, p. 14) : « Il sera commode de prendre ici $R = 0{,}282$, et cette valeur sera approchée (dans un sens inconnu) à $\frac{1}{2000}$ près. » Aujourd'hui, une calculatrice de collège donne, d'un coup d'un seul :

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi}} =_{cc} 0{,}282094792.$$

Quant à la calculatrice que je peux consulter sur mon ordinateur, elle affiche ceci :

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi}} =_{co} 0{,}28209479177387814347403972578039.$$

Le même auteur entreprend un peu plus loin (p. 57) de calculer une expression dont on verra dans un instant la signification : $N = \frac{1}{4}[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)]$. Là encore, deux pages de considérations diverses précèdent cette conclusion (p. 59) :

> En définitive, nous obtenons $N = 0{,}44$ avec une erreur absolue inférieure à $\frac{13}{240} + \frac{1}{80} = \frac{16}{240} = \frac{1}{15} <$ 0,7. Par conséquent, $0{,}37 < N < 0{,}51$. Il n'est donc pas certain que le nombre 0,4 soit approché à $\frac{1}{10}$ près, puisque sa distance à l'extrémité la plus éloignée de l'intervalle est $\frac{11}{100}$; mais comme nous avons *forcé* les erreurs, pour simplifier leur calcul, il est certain que notre évaluation est exagérée, et il reste très probable que 0,4 est approché à $\frac{1}{10}$ près.

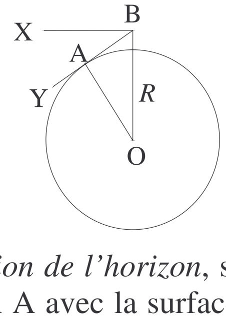
Les calculatrices d'aujourd'hui sont moins prolixes et donnent sans façon :

$$N = \frac{1}{4}[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)] =_{cc} 0{,}415823382$$

$$N = \frac{1}{4}[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)] =_{co} 0{,}41582338163551867420348456881025$$

Le même auteur reviendra sur la question un peu plus tard, armé de nouveaux outils ; désignant par la lettre c ce qu'il nommait plus haut N, il peut cette fois conclure : « Donc on peut écrire ici $c = 0{,}42$, résultat exact avec une erreur inférieure à 0,01. Les tables donnent 0,41582. » La mention des tables mérite un commentaire. L'expression N (ou c) est en fait la mesure du côté d'un polygone régulier à 15 côtés inscrit dans un cercle de rayon de mesure 1 ; il est facile d'établir que l'on a aussi : $N = c = 2 \times \sin 12^\circ$. Il y a quelques décennies encore, pour achever ce calcul, on consultait les « tables trigonométriques », qui donnaient $\sin 12^\circ =_{tt} 0{,}20791$, ce qui conduit bien, en effet, à $N = c = 0{,}41582$. Les « tables » sont aujourd'hui remplacées par la calculatrice, qui donne, au collège, $\sin 12^\circ =_{cc} 0{,}207911691$, et, plus libéralement encore, $\sin 12^\circ =_{co} 0{,}20791169081775933710174228440513$.

Les calculs précédents sont extraits d'un ouvrage dont le calcul numérique est la spécialité. On va voir que la situation est souvent beaucoup plus anarchique dans des ouvrages qui ne font qu'un simple usage de calculs numériques, sans prétendre en exposer – ni en respecter ! – les principes. L'auteur déjà mentionné présente aussi, en contrepoint aux méthodes de calcul numérique, le *calcul graphique*, dont la difficile naissance a jalonné une grande partie du XIX^e siècle mais qui s'épanouit au moment où il écrit et demeurera florissant jusqu'au-delà des années 1950 – ce qu'on a largement oublié aujourd'hui. Le principe de base en est simple : pour déterminer une valeur approchée d'un nombre x donné par une certaine formule, $x = E(a, b, c, \ldots)$, on « construit la formule » $E(a, b, c, \ldots)$, c'est-à-dire qu'on réalise une épure où x apparaît comme la mesure d'un certain segment : il suffit alors de *mesurer* ce segment pour avoir une valeur approchée de x. Pour connaître une valeur approchée de, disons, $\sqrt{34}$, on construira un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit aient pour longueur, respectivement, 3 cm et 5 cm ; en vertu du théorème de Pythagore, l'hypoténuse aura alors pour longueur $\sqrt{(3\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2} = \sqrt{9\text{ cm}^2 + 25\text{ cm}^2} = \sqrt{34\text{ cm}^2} = \sqrt{34}$ cm. La mesure de l'hypoténuse fournit la valeur espérée. Dans un ouvrage intitulé *Pour comprendre la trigonométrie* publié en 1930 chez Gaston Doin & C^{ie}, à Paris, l'auteur, Georges Durand, propose très vite, au titre des applications les plus simples de la trigonométrie, le petit problème suivant (*op. cit.*, p. 18) : dans un triangle rectangle dont l'hypoténuse fait 10 mètres de longueur, calculer la longueur ℓ du côté opposé à un angle de 38º. Le problème pourrait être résolu graphiquement, par une construction géométrique utilisant le rapporteur. Mais cet instrument est connu pour être d'une précision limitée. La trigonométrie – et les tables trigonométriques – se montrent alors particulièrement utiles : la longueur ℓ est donnée par $\ell = 10\text{ m} \times \sin 38^\circ$. La table utilisée par l'auteur donne $\sin 38^\circ = 0{,}6157$ et il vient donc : $\ell = 6{,}157$ m. L'auteur note (p. 18) : « Il faut remarquer la précision obtenue par cette méthode, qui dépasse de beaucoup celle d'une construction géométrique. » Pourtant la puissance de la trigonométrie demeure fragilisée – elle le demeurera encore longtemps – par les problèmes de calcul. Dans ce même ouvrage, étudiant plus à fond les « problèmes sur les triangles rectangles », l'auteur propose un problème classique, celui du calcul du rayon de la Terre. Un observateur se trouve en B, à 2000 mètres au-dessus du niveau de la mer.



Il mesure ce qu'on appelle la *dépression de l'horizon*, soit l'angle que fait avec l'horizontale (BX) un rayon visuel (BY) tangent en A avec la surface de la mer. Il trouve, en l'espèce, un angle $\widehat{XBY}$ de 1,5º (ou plutôt de 1º 30'). Comme on a $\widehat{BOA} = \widehat{XBY}$, si l'on mesure les longueurs en kilomètres, il vient : $OA = R = (R + 2) \times \cos \widehat{BOA} = (R + 2) \times \cos 1{,}5^\circ$. La résolution de cette équation en R donne : $R = \frac{2\cos 1{,}5^\circ}{1-\cos 1{,}5^\circ}$. Voici alors le calcul que propose l'auteur :

$$R = \frac{2\cos 1^\circ\,30'}{1-\cos 1^\circ\,30'} = \frac{2\times 0{,}9997}{1-0{,}9997} = \frac{1{,}9994}{0{,}0003} = 6\,665 \text{ km.}$$

Si l'on reprend ce calcul, aujourd'hui, avec une calculatrice, on trouve ceci :

$$\frac{2\cos 1{,}5^\circ}{1-\cos 1{,}5^\circ} =_{\text{co}} 5834{,}4335225554529046935474295895.$$

La différence est sensible : l'erreur relative commise est supérieure à 14 % ! D'où provient-elle ? Le dernier quotient est correct ; on a en effet :

$$\frac{1{,}9994}{0{,}0003} =_{\text{co}} 6664{,}6666666666666666666666666667.$$

Qu'en est-il alors du numérateur et du dénominateur de ce quotient ? On a ceci :

$$2\cos 1{,}5^\circ =_{\text{co}} 2\times 0{,}99965732497555728003676088836768$$
$$= 1{,}99931464995111456007352177767354 < 1{,}9994$$

$$1-\cos 1{,}5^\circ =_{\text{co}} 0{,}00034267502444271996323911163232012 > 0{,}0003.$$

On retrouve ainsi que, à cause des arrondis auxquels il est tenu de procéder, l'auteur surestime sensiblement le quotient à calculer. Il est vrai que l'erreur commise était peut-être intéressée : le résultat *obtenu* (6665 km), certes numériquement faux, est plus proche du « rayon terrestre moyen » que celui qui résulte *vraiment* du calcul entrepris (5834 km) ; et il est à cet égard piquant de lire la conclusion que l'auteur donne à sa petite étude :

> La valeur obtenue est un peu trop forte, car on sait que le rayon terrestre moyen est 6371 km. On pourrait d'ailleurs améliorer le résultat en tenant compte de différentes causes d'erreurs, en particulier de la réfraction ; mais ce calcul suffit pour comprendre le principe de la méthode.

Rien n'est dit, on le voit, sur ce qui est sans doute la principale source d'erreur : l'imprécision du calcul.

Misonéisme et techno-peurs

Pour un observateur neutre et bienveillant, la place attribuée et la réputation faite à la calculatrice dans la classe de mathématiques sont paradoxales. En dépit d'une évolution sensible, qui lui donne aujourd'hui une place *officielle* cardinale, le climat reste à la suspicion : la calculatrice est d'abord un mauvais objet, dont les élèves doivent apprendre à se méfier. Misonéisme et techno-peurs se rendent des points. Il y a eu le flop du bogue de l'an 2000. Il y a aussi, moins médiatisée, la calculatrice, tombeau de la pensée ! Au CAPES de mathématiques, jusqu'à l'édition 2005 du concours, il a existé pendant des années un sujet de la deuxième épreuve orale d'admission ainsi libellé : « Exemples d'étude, aux niveaux collège et lycée, d'exercices mettant en évidence les possibilités et les limites d'une calculatrice. » Dans une perspective largement partagée, on s'est efforcé de mettre d'abord en avant les « limites » – et à vrai dire les « dangers » – de la calculatrice, oublieux sans doute qu'on était – heureuse sélectivité de la mémoire ! – des limites beaucoup plus rapidement atteintes du calcul « à la main » tel qu'on l'a vu à l'œuvre dans les exemples précédents. C'est ainsi par exemple que des générations récentes d'élèves ont pu avoir à calculer la valeur du polynôme $9x^4 - y^4 + 2y^2$ lorsque $x = 10\,864$ et $y = 18\,817$. On a ceci :

$$9\times 10864^4 - 18817^2\times(18817^2-2) =_{\text{co}} 1.$$

Mais sur une calculatrice de collège, les choses ne se passent pas ainsi ; celle utilisée plus haut répond par exemple $9 \times 10864^4 - 18817^2 \times (18817^2 - 2) =_{cc} 0$; mais elle répond aussi bien : $9 \times 10864^4 - 18817^4 + 2 \times 18817^2 =_{cc} -141022$. La pauvre bête s'affole ! Le phénomène est classique : achetez un lave-linge, fourrez-y toute votre garde-robe, sans même ôter les cintres, et allez vous étonner de ce qui adviendra ! Les plus frustes concluront que cela ne remplace pas la lessive à la main et que le lavoir d'autrefois…

On joue ici sur le fantasme infantile de toute-puissance (la calculatrice devrait tout absorber sans broncher), si vif chez tant d'entre nous, au lieu d'introduire les jeunes générations à la culture du bon usage, c'est-à-dire de l'usage attentif, bienveillant des objets. Derrière toute « limite », il y a des possibilités. Comment employer sagement, efficacement sa calculatrice de collégien pour obtenir la valeur cherchée ? C'est l'occasion de mettre à la tâche nombre d'outils mathématiques que le collégien doit apprendre à maîtriser. Sa calculatrice est déjà à la peine pour calculer 10864^4 : la vraie valeur de cette puissance quatrième est 13930253758038016, quand la calculatrice utilisée affiche $1{,}393025376 \times 10^{16}$. Il faut donc que l'élève se fasse fabriquant de techniques. En l'espèce il pourra procéder comme ceci, en *combinant* l'emploi de la calculatrice et le calcul à la main.

$$x^2 = 10\,864^2 = 118026496 = 118 \times 10^6 + 26\,496 \Rightarrow x^4 = (118 \times 10^6 + 26\,496)^2$$

$$= 118^2 \times 10^{12} + 2 \times 118 \times 26\,496 \times 10^6 + 26\,496^2 = 13924 \times 10^{12} + 6253056 \times 10^6 + 702038016$$

$$= 13924 \times 10^{12} + 6{,}253056 \times 10^{12} + 702038016 = 13930{,}253056 \times 10^{12} + 702038016$$

$$= 13930253056 \times 10^6 + 702{,}038016 \times 10^6 = 13930253758{,}038016 \times 10^6 = 13930253758038016.$$

Par ce procédé *mixte* on obtient successivement que $9x^4 = 125372283822342144$ puis que, ainsi qu'on s'y attendait, $y^2(y^2 - 2) = 125372283822342143$: la différence est bien égale à 1.

L'exploration des *limites* derrière les *possibilités* est à l'évidence essentielle pour construire une culture de l'usage approprié de la calculatrice ; mais la découverte des possibilités est première. Supposons que l'on veuille vérifier l'égalité que voici :

$$144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5.$$

Découverte sur ordinateur en 1968, elle invalide une vieille conjecture d'Euler selon laquelle la puissance n-ième d'un entier ne pourrait pas s'écrire sous la forme de moins de n puissances n-ièmes d'entiers non nuls. La calculatrice utilisée au collège risque fort de ne pouvoir prendre en charge de manière directe la vérification de cette égalité, qui, aussi bien, découragerait le calculateur « à la main » le plus vertueux ! Pour effectuer cette vérification – que l'on abandonnera au lecteur –, on doit alors user de la technique de calcul « mixte » déjà employée, associant calcul à la main et calcul à la calculatrice. Là encore, le calcul écrit apparaît comme l'outil adapté pour secourir la calculatrice : ainsi la calculatrice redonne-t-elle des raisons d'être au calcul « à la main ».

Explorer les possibilités. Supposons maintenant ainsi que l'on veuille écrire l'expression

$$E = \left(\frac{2 + \sqrt{5}}{7 - 2\sqrt{5}}\right)^2$$

sous la forme « canonique » $a + b\sqrt{5}$ (où a et b sont des nombres rationnels). La technique de calcul usuelle conduirait à écrire

$$E = \left(\frac{2 + \sqrt{5}}{7 - 2\sqrt{5}}\right)^2 \left(\frac{7 + 2\sqrt{5}}{7 + 2\sqrt{5}}\right)^2$$

et à calculer… Ce travail, long, aride, et surtout d'une fiabilité réduite, peut être court-circuité. Supposons E écrit sous la forme voulue, ce qu'on peut noter ainsi : $E(\sqrt{5}) = a + b\sqrt{5}$; on voit alors (ou l'on admet) qu'on a $E(-\sqrt{5}) = a - b\sqrt{5}$, ce qui donne : $a = (E(\sqrt{5}) + E(-\sqrt{5}))/2$. On demandera donc à la calculatrice ce que vaut, pour elle, l'expression

$$a = \left(\left(\frac{2+\sqrt{5}}{7-2\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2-\sqrt{5}}{7+2\sqrt{5}}\right)^2\right)/2.$$

Que répond la calculatrice ? Bien entendu, il faut savoir organiser l'opération. Mais la première réponse est tout de même décevante : a serait égal à 1,40428… Comment obtenir a sous la forme d'une fraction d'*entiers* ? La réponse est aisée. Comme $(7 - 2\sqrt{5})(7 + 2\sqrt{5}) = 49 - 20 = 29$, il suffit de lui demander la valeur de 29^2a, soit de

$$29^2\left(\left(\frac{2+\sqrt{5}}{7-2\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2-\sqrt{5}}{7+2\sqrt{5}}\right)^2\right)/2.$$

Cette fois la calculatrice répond agréablement : 1181 ; a vaut donc $\frac{1181}{29^2}$. Que vaut alors b ?

On a très simplement :

$$b = \frac{E(\sqrt{5}) - a}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{2+\sqrt{5}}{7-2\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{1181}{29^2}}{\sqrt{5}}.$$

À nouveau on prendra soin de demander à la calculatrice la valeur de 29^2b ; elle répond sans barguigner : 528. On a donc $b = \frac{528}{29^2}$ et, par suite,

$$E = \left(\frac{2+\sqrt{5}}{7-2\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1181}{841} + \frac{528}{841}\sqrt{5}.$$

Mais sommes-nous sûrs de notre affaire ?

Légendes urbaines mathématiques

Pour savoir si l'égalité que l'on vient d'écrire est bien vraie, on peut effectuer un geste que beaucoup de professeurs hésiteraient à assumer : demander à la calculatrice la valeur de chacun des deux membres de cette égalité, pour *voir*. En l'espèce, on obtient ceci.

$$\left(\frac{2+\sqrt{5}}{7-2\sqrt{5}}\right)^2 =_{cc} 2{,}808137803 \;;\; \frac{1181}{841} + \frac{528}{841}\sqrt{5} = 2{,}808137803.$$

On peut évidemment recourir à une calculatrice plus puissante, qui donne ceci.

$$\left(\frac{2+\sqrt{5}}{7-2\sqrt{5}}\right)^2 =_{co} 2{,}8081378027584886560095644436268$$

$$\frac{1181}{841} + \frac{528}{841}\sqrt{5} =_{co} 2{,}8081378027584886560095644436268.$$

La conclusion semble ne pas faire de doute. Mais peut-on faire confiance à la calculatrice ? Il circule encore parmi les professeurs une croyance protéiforme qui peut prendre la forme suivante : « La calculatrice donne le même affichage quand on lui demande ce que valent, d'une part $3\sqrt{5}$, d'autre part $\sqrt{45}$. Cela signifie simplement que les premières décimales de ces deux nombres réels sont bien identiques, mais l'on ne sait pas s'il en sera de même par exemple avec la 30^{e} ou la 40^{e} décimale. On ne peut donc pas en conclure que $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$. » Il s'agit là d'un bel exemple de légende scolaire, de rumeur infondée : la chose devrait sauter aux yeux de ceux qui la propagent si une attitude irrationnelle à l'encontre de la calculatrice n'exténuait pas leur sensibilité mathématique. Soit en effet $a, b, c \in \mathbb{N}^*$; si $a\sqrt{b} \neq \sqrt{c}$, on a :

$$|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| = \frac{|a^2b - c|}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} \geq \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

On a donc ainsi la proposition suivante :

$$a\sqrt{b} \neq \sqrt{c} \Rightarrow |a\sqrt{b} - \sqrt{c}| \geq \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

Cette proposition équivaut encore à ceci :

$$|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| < \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} \Rightarrow a\sqrt{b} = \sqrt{c}.$$

Si l'on prend $a = 3$, $b = 5$ et $c = 45$, on a : $\dfrac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} > \dfrac{1}{3 \times 3 + 7} = \dfrac{1}{16} > 0{,}06$. En sorte que, si l'on avait $3\sqrt{5} \neq \sqrt{45}$ la chose se verrait sur les affichages de la calculatrice *avant la 3^e^ décimale*. Inversement, si ces affichages sont *identiques jusqu'à la 2^e^ décimale incluse*, alors $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$.

Le phénomène se produit tant qu'on reste dans le domaine numérique où il est depuis toujours usuel d'évoluer au collège. Si, par exemple, on prend $a = 2$, $b = 2$ et $c = 8$, on a

$$\frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} > \frac{1}{2 \times 2 + 3} = \frac{1}{7} > 0{,}1$$

en sorte que, si l'on avait $2\sqrt{2} \neq \sqrt{8}$, les affichages de la calculatrice diffèreraient *avant* la 2^e^ décimale. La calculatrice est donc un outil de confiance, tant qu'on en use avec tact. Soit ainsi à tester l'égalité *supposée* que voici :

$$\sqrt{13} + \frac{2}{\sqrt{13}} = \sqrt{17 + \frac{4}{13}}.$$

Que dit la calculatrice ? Ceci :

$$\sqrt{13} + \frac{2}{\sqrt{13}} =_{\text{cc}} 4{,}160251472 \ ; \sqrt{17 + \frac{4}{13}} =_{\text{cc}} 4{,}160251472.$$

La conclusion est-elle sûre ? Le calcul ci-après, où l'on suppose $\sqrt{a} + \dfrac{2}{\sqrt{a}} \neq \sqrt{b + \dfrac{4}{a}}$, permet de répondre :

$$\left|\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} - \sqrt{b + \frac{4}{a}}\right| = \frac{\left|\left(\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2 - \left(b + \frac{4}{a}\right)\right|}{\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} + \sqrt{b + \frac{4}{a}}} = \frac{\left|a + 4 + \frac{4}{a} - b - \frac{4}{a}\right|}{\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} + \sqrt{b + \frac{4}{a}}} \geq \frac{1}{\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} + \sqrt{b + \frac{4}{a}}}.$$

Pour $5 \leq a \leq 16$ et $b \leq 24$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} + \sqrt{b + \frac{4}{a}}} > \dfrac{1}{4 + 1 + 5} = \dfrac{1}{10}$. Ainsi, lorsque $5 \leq a \leq 16$ et $b \leq 24$, si $\sqrt{a} + \dfrac{2}{\sqrt{a}} \neq \sqrt{b + \dfrac{4}{a}}$ les affichages diffèrent avant la 2^e^ décimale.

Ce qui précède vaut pour la plupart des calculs élémentaires. Considérons ainsi les fractions $\frac{221}{481}$ et $\frac{119}{259}$; la calculatrice donne ceci :

$$\frac{221}{481} =_{cc} 0{,}459459459459 \; ; \; \frac{119}{259} =_{cc} 0{,}459459459459.$$

Peut-on en conclure en toute sécurité à l'égalité des deux fractions ? Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier naturel $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{\pm k}{\mathrm{PPCM}(b, d)}.$$

Si $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ on a alors : $\left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| = \frac{k}{\mathrm{PPCM}(b, d)} \geq \frac{1}{\mathrm{PPCM}(b, d)}$. On a donc la proposition suivante :

$$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \Rightarrow \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| \geq \frac{1}{\mathrm{PPCM}(b, d)}.$$

Cette proposition est encore équivalente à la suivante :

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| < \frac{1}{\mathrm{PPCM}(b, d)} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Qu'en est-il dans le cas envisagé plus haut ? On a 481 – 259 = 222, 259 – 222 = 37, 222 – 6 × 37 = 0 : le PGCD de 481 et 259 est 37 et on a donc : PPCM(481, 259) = $\frac{481 \times 259}{37}$ = 3367. Par suite,

$$\left|\frac{a}{481} - \frac{c}{259}\right| \geq \frac{1}{3367} > \frac{1}{4000} = 0{,}00025.$$

Ainsi, si $\frac{a}{481} \neq \frac{c}{259}$ la chose se voit sur les affichages de la calculatrice *avant la 5^e décimale*. Inversement, si ces affichages sont *identiques jusqu'à la 4^e décimale incluse*, alors $\frac{a}{481} = \frac{c}{259}$.

Une culture à construire

Contrairement à une croyance encore répandue, la calculatrice constitue, pour la plupart des types de faits numériques étudiés au collège et au lycée, un *laboratoire très sûr*, permettant d'obtenir des résultats fiables. Bien entendu, si l'« expérience numérique » que l'on réalise en interrogeant la calculatrice permet très souvent de tenir pour certain le fait numérique visé, il restera encore à le *déduire* dans le cadre de la *théorie déductive du numérique* dont la construction est un apport essentiel du mathématicien à la culture. Ainsi établira-t-on par exemple que l'on a ceci :

$$\sqrt{13} + \frac{2}{\sqrt{13}} = \sqrt{\left(\sqrt{13} + \frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2} = \sqrt{13 + 4 + \frac{4}{13}} = \sqrt{17 + \frac{4}{13}}.$$

Mais pour revivre cette construction, pour faire vivre adéquatement la dialectique de l'*expérimentation* et de la *déduction théorique*, il faut des moyens d'étude et de recherche que la calculatrice renouvelle profondément. Ces moyens, il convient alors de les identifier avec soin et minutie, en apprenant notamment à lire autrement des situations de calcul longuement patinées par l'usage pré-moderne. Soit par exemple un triangle ABC rectangle en A, tel que

AB = 2,8 (pour une certaine unité de longueur) avec $\widehat{ABC} = 37°$. On a d'abord : $BC = \frac{AB}{\cos 37°}$ $= \frac{2,8}{\cos 37°}$. L'utilisation de la calculatrice conduisait traditionnellement à écrire quelque chose comme ceci : $BC = \frac{2,8}{\cos 37°} \approx 3,5$. Pour calculer alors la mesure AC du troisième côté, on écrivait : $AC = BC \times \cos 53°$, en sorte qu'il venait : $AC \approx 3,5 \times \cos 53° \approx 2,1$. Les professeurs étaient attachés à faire que leurs élèves n'écrivent pas l'égalité *fautive* $AC = 3,5 \times \cos 53° \approx 2,1$, puisque *on n'a pas* BC = 3,5. (Ici, en fait, il se trouve qu'on a *exactement* $2,1^2 + 2,8^2 = 3,5^2$: la « nature » mathématique récompense bien mal les professeurs vertueux !) Aujourd'hui, pourtant, il n'est plus utile d'écrire des égalités approchées telle $\frac{2,8}{\cos 37°} \approx 3,5$. L'utilisation d'une calculatrice permet d'obtenir un grand nombre de décimales : on aura par exemple : $\frac{2,8}{\cos 37°} =_{co} 3,5059798428374318520070363988351$. Bien entendu, il n'est pas utile non plus d'écrire toutes les décimales affichées. Il suffira d'écrire par exemple $\frac{2,8}{\cos 37°} =$ 3,5059… et d'effectuer le calcul suivant, celui de $AC = BC \times \cos 53°$, en utilisant la valeur *calculée par la calculatrice*, en usant pour cela de la *mémoire* de cette dernière ; ce qu'on pourra écrire par exemple ainsi : $AC = BC \times \cos 53° = 3,5059\ldots \times \cos 53° = 2,109\ldots$

Bien d'autres types de situations de calcul doivent ainsi être envisagés à nouveaux frais. Mais une culture à reconstruire est toujours une culture fragile. La période actuelle est à cet égard marquée par d'étranges altérations : on y voit une culture mathématique perturbée tantôt rejeter à tort certains usages, en se réclamant de croyances mathématiquement erronées, on l'a vu ; tantôt céder sur ses prérogatives, comme si elle avait perdu ses marques, ainsi qu'il en va lorsque des professeurs, en quatrième, voulant exprimer la solution de l'équation $\cos \alpha = 0,625$, se mettent à écrire : « shift cos 0,625 ≈ 51,3° ». Il importe au contraire que, paraphrasant Horace sans façon, nous puissions dire bientôt : « La classe de mathématiques, conquise par la calculatrice, conquit son farouche vainqueur et mit les arts mathématiques au cœur de cet outil rustique. »