L’humble séminaire 2019-2020

Séance 7

Séance 7 : pp. 154-189

L’humble séminaire 2019-2020

Séance 7 du ~~16~~19 juin 2020

I. Avons-nous progressé ?

Cette septième séance de notre *Humble séminaire* sera la dernière de l’année universitaire 2019-2020. Il m’a semblé qu’il serait bon de considérer, fût-ce brièvement, ce que nous avons fait cette année, sans tenter de préciser trop ce qu’il nous reste à faire – ce serait à la fois enthousiasmant et accablant ! Je propose donc que nous nous arrêtions un instant sur cette question : dans la connaissance de la TAD, *avons-nous progressé ?* Bien sûr, j’espère que la réponse d’au moins certain·e·s d’entre nous sera positive.

Un cadre formel « bien connu »

Je voudrais utiliser ici une partie de ce que nous avons vu dès la séance 1 de ce séminaire. Il s’agit de porter un jugement sur le rapport $R(\hat{\imath}, \text{TAD})$ de certaines instances $\hat{\imath}$ à l’objet TAD. Je rappelle d’abord la structure de ce que j’ai appelé un *noyau cognitif* $\tilde{n} = (\hat{\imath}, o, \hat{s}, \hat{v})$.

➤ En l’espèce, l’objet o du ou des noyaux $= (\hat{\imath}, o, \hat{s}, \hat{v})$ à considérer est la TAD. Je prendrai – *ici* – pour « instance standard » $\hat{s} = (I, p)$ la position $p = \hat{\rho}_{\text{YC}}$ que j’occupe actuellement au sein de l’institution I qu’est la communauté des personnes occupant une position $\hat{\rho}_{\text{TAD}}$ de chercheurs en didactique travaillant dans le cadre de la TAD. Faute de mieux, et aujourd’hui du moins, je prendrai la même instance $\hat{\rho}_{\text{YC}}$ pour « instance évaluatrice » $\hat{v}$, supposée capable d’estimer la proximité de $R(\hat{\imath}, \text{TAD})$ avec $R(\hat{s}, \text{TAD})$. Nous considérons donc le *noyau cognitif* $\tilde{n} = (\hat{\imath}, \text{TAD}, \hat{\rho}_{\text{YC}}, \hat{\rho}_{\text{YC}})$. On peut prendre pour instance $\hat{\imath}$ un chercheur en didactique ξ ou une position $\hat{\rho}_{\text{TAD}}$ de chercheur en didactique travaillant dans le cadre de la TAD. Bien entendu, en lieu et place de $\hat{\rho}_{\text{YC}}$, chacun peut considérer une position $\hat{\rho}'_{\text{TAD}}$ quelconque, la sienne propre ou celle d’un chercheur ξ' de sa connaissance par exemple.

➤ Autour de ce noyau cognitif $\tilde{n}$ s’est construite, dans ce séminaire, une *situation possiblement didactique* $\varsigma = (\tilde{n}, \hat{u}, \delta, \mathcal{C})$, où, à nouveau, $\hat{u} = \hat{\rho}_{\text{YC}}$. Les gestes possiblement didactique δ sont ceux réalisés dans la suite des séances de l’*Humble séminaire*, tels du moins qu’ils se sont matérialisés dans les *Notes* des différentes séances. Et l’ensemble $\mathcal{C}$ des conditions prévalentes est celui que nous pouvons imaginer sans l’avoir vraiment explorer jusqu’ici.

« Hypothèses de travail »

Comment l'instance $\hat{u} = \hat{\rho}_{YC}$ a-t-elle déterminé les gestes δ ? Réponse : en s'appuyant sur quelques *hypothèses de travail*. À propos de cette dernière expression, je trouve intéressant ce commentaire présent dans l'article « Hypothesis » de *Wikipedia*[1] : « A working hypothesis is a *provisionally accepted* hypothesis proposed *for further research*, in a process beginning with *an educated guess or thought*. » Ce qui veut dire à peu près ceci : « Une hypothèse de travail est une hypothèse provisoirement acceptée proposée pour de plus amples recherches, dans un processus commençant par une supposition ou une idée éclairée Voici donc, en ce sens, deux grandes hypothèses.

➤ Première hypothèse de travail ($\mathbf{\Upsilon}_1$) : Nombre de personnes qui occupent aujourd'hui ou voudraient venir occuper une position $\hat{\rho}_{TAD}$ ont un rapport à la TAD que j'appellerai ici *lacunaire*. Cela n'a rien d'étonnant : un chercheur ξ, qui, par définition, travaille par questionnement du monde, est dépendant, en ce qui concerne son équipement cognitif, des recherches qu'il ou elle a menées jusque-là : ces recherches lui ont fait rencontrer certaines œuvres en même temps qu'elles lui en faisaient ignorer d'autres. Il en résulte à chaque instant une vision parcellaire de la théorie utilisée. Ce phénomène de lacunarité concerne aussi bien la théorie elle-même, dont le développement est, par nature, à chaque instant incomplet. Une des idées de base de l'*Humble séminaire* est précisément de questionner les « défectuosités » soit du rapport à l'œuvre, soit de l'œuvre elle-même.

➤ Voici alors la seconde hypothèse de travail ($\mathbf{\Upsilon}_2$) : le système des rapports – autrement dit l'équipement cognitif – d'une instance $\hat{\imath}$ se référant à un cadre théorique donné – la TAD, pour ce qui nous concerne – est presque toujours, à des degrés divers, compénétré par certains constituants de rapports institutionnels étrangers à cette théorie. C'est ainsi que le rapport à la notion de *paradigme du questionnement du monde* est souvent subrepticement infiltré de constituants « naturalisés » de la notion – vécue plutôt qu'étudiée – de *paradigme de la visite des œuvres*. C'est là, en particulier, qu'il nous faut considérer l'ensemble $\mathcal{C}$ des conditions prévalentes. Il y a donc à accomplir, à cet égard, une *déconstruction* puis une *reconstruction*, partielles sans doute, de certains au moins des rapports personnels ou institutionnels considérés.

➤ La stratégie « possiblement didactique » adoptée dans l'*Humble séminaire* en résulte. Une part importante du travail accompli y a concerné de manière explicite les « éléments » de la TAD, ou plutôt, car ces éléments ne sont pas donnés a priori, l'*élémentation* de la TAD. Une

[1] Voir à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Hypothesis. C'est moi qui souligne.

part bien moins importante – hélas ! – a concerné *l'étude de questions de didactique* proprement dite. Enfin, une rubrique a été ouverte (à propos d'algèbre élémentaire) consacrée à l'étude du rapport qui peut s'établir, dans le cadre de la TAD, à diverses œuvres, mathématiques ou non. Avec tout cela, j'espère que, donc, nous avons un peu progressé !

II. Reprises, approfondissements, scolies

Voici trois mots clés pour l'étude d'une œuvre quelle qu'elle soit : *reprises*, *approfondissements*, *scolies*. Le mot de *reprise* se comprend, je pense ; mais je reproduis quand même ce que dit le CNTRL de l'usage que nous en ferons :

> **1.** Se remettre à travailler à quelque chose, étudier de nouveau quelque chose. *Reprendre une étude, une recherche*. *Si, primitivement, nous n'avions touché à ce problème que par voie d'allusions, c'est que nous comptions le reprendre et en faire une étude spéciale* (Durkheim, *Divis. trav.*, 1893, p. 1). *La question sera reprise plus bas* (Sauss.1916, p. 33).
> **2.** Remettre la main à une œuvre, à un ouvrage généralement en vue de l'achever ou de le parfaire. Synon. *retoucher*. *Reprendre un tableau*. (Dict. XIX^e^ et XX^e^ s.). *Le moulage peut être repris à l'outil* (*Arts et litt.*, 1935, p. 20-10). *Il avait ses rôles de prédilection. Il aimait à les reprendre pour les parfaire* (Duhamel, *Suzanne*, 1941, p. 228)

La même source rappelle aussi ce qu'on appellera un *approfondissement* :

> Étude, analyse systématique et réfléchie d'une question, d'un problème. *Approfondissement d'une question, d'une science, du sens d'une œuvre*…

➤ Le mot de *scolie*, moins usuel, appelle un commentaire plus développé. En français, on l'a écrit au fil des siècles tantôt *scolie* (usuellement au féminin), tantôt *scholie*. (plutôt au masculin). Dans le « Mode d'emploi » de son traité, Nicolas Bourbaki notait[2] : « Sous le nom de "scholie", on trouvera quelquefois un commentaire d'un théorème particulièrement important. »

➤ L'article « Scholie » de *Wikipédia* précise que le mot vient « du grec ancien σχόλιον / *skhólion*, "commentaire, scholie", lui-même dérivé de σχολή / *skholḗ*, "occupation studieuse, étude" »[3]. Ce mot, dans son double emploi, est anciennement présent dans la langue. C'est

---

[2] Voir ainsi la partie des *Éléments de mathématique* du traité intitulée « Théorie des ensembles » (qu'on trouvera à http://tomlr.free.fr/Math%E9matiques/Bourbaki/Theorie%20Des%20Ensembles.pdf), au point 6 de la section « Mode d'emploi de ce traité ». Sur Bourbaki, voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Nicolas_Bourbaki.
[3] Voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Scholie.

ainsi que, dans son *Dictionnaire étymologique de la langue françoise* publié à Paris (chez Decourchant) en 1829, B. de Roquefort écrivait ceci[4] :

> SCOLIE, *scholie*, note grammaticale et critique, remarque, observation sur divers passages d'un auteur, pour faciliter l'intelligence du texte. En mathématiques, la scolie est une remarque sur une proposition précédente. Du gr. *Scholê*, loisir ; ouvrage fait à loisir.
>
> SCOLIASTE, *scholiaste*, commentateur d'un ancien auteur grec. (p. 264)

Le mot *sc(h)oliaste* lui-même vient du grec σχολιαστής (*skholiastês*) « commentateur ».

➤ Dans ce qui suit, certains développements seront des reprises, parfois avec approfondissement (et donc comporteront de *neuf*) ; d'autres seront des scholies, qui soulignent tel ou tel aspect des reprises et approfondissements.

➤ Je céderai ici à la tentation d'un geste possiblement didactique que j'emprunte, comme on le sait peut-être, à Bourbaki : l'usage du symbole ☡, que Bourbaki présente en ces termes[5] :

> Certains passages sont destinés à prémunir le lecteur contre des erreurs graves, où il risquerait de tomber ; ces passages sont signalés en marge par le signe ☡ (« tournant dangereux »)

Par exemple, dans sa *Théorie des ensembles*, la première occurrence du signe ☡ concerne le passage suivant :

> On notera que, dans l'ensemble ordonné $\mathcal{F}(E\,;F)$, la relation $f < g$ signifie
>
> « quel que soit $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$, et il existe $y \in E$ tel que $f(y) < g(y)$ »
>
> *et non* « quel que soit $x \in E$, $f(x) < g(x)$ »
>
> Pour ne pas risquer cette confusion, on évitera d'ordinaire de faire usage de la notation $f < g$ dans ce cas.

Comme on le verra, j'userai du signe « tournant dangereux » dans le corps même du texte (et non en marge).

La notion d'école : une précision

En écrivant les lignes qui précèdent – à propos du mot *scholie* –, je pensais – mais à tort ! – que nous avions rencontré et examiné le mot grec σχολή, d'où dérivent dans diverses langues européennes les mots *σχολείο*, *scholae*, *école*, *school*, *Schule*, *skole*, *escuela*, *scuola*, *escola*, *escòla*, etc. Ce qui suit est donc une simple *reprise*, sans véritable *approfondissement*.

[4] Voir à https://books.google.fr/books?id=atcSAAAAYAAJ&pg=PR3&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false. Sur l'auteur, voir à https://fr.wikipedia.org/wiki/Jean-Baptiste-Bonaventure_de_Roquefort. Sur le mot *scoliaste*, voir à https://fr.wiktionary.org/wiki/scholiaste.

[5] Au point 7 de la section « Mode d'emploi de ce traité » déjà mentionnée. Voir aussi à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Bourbaki_dangerous_bend_symbol.

➤ Pour parler de la notion « grecque » d'école, ou plutôt, donc, de la notion de *skholè*, je me limiterai ici à deux extraits d'ouvrages. Tout d'abord, dans son livre *Qu'est-ce que l'école ?* (Gallimard, Paris, 2005), Henri Pena-Ruiz écrit ceci :

> Le *mot* « école » vient d'un terme grec, *scholè,* qui veut dire loisir, entendu au sens de libre activité. Le latin *schola* reprend cette acception, d'abord donnée au terme *ludus*, qui veut dire aussi « jeu ». Évoquant l'école (*schola*) comme lieu d'enseignement, Festus précise que les enfants doivent s'y adonner aux études libérales, toutes choses étant par ailleurs suspendues (*ceteris rebus omissis, vacare liberalibus studiis pueri debent*). L'idée essentielle tient déjà dans cette maxime : l'école est inventée pour que le petit homme puisse cultiver ses facultés par des études délivrées des contraintes du moment. C'est que de telles études ont pour seule fin l'épanouissement des potentialités de chacun en authentiques facultés. Reposant sur ces facultés, le sort des activités qui conditionnent la vie et la survie n'en sera pas pour autant négligé : il sera au contraire mieux assuré. Le succès d'une telle entreprise requiert que le lieu et le temps de ces études soient préservés des urgences de la vie, qui sinon les marqueraient de leurs limites. Ainsi naît l'idée d'un espace et d'un temps de loisir consacré à l'étude. On tient ici l'idée fondatrice de l'école. (pp. 23-24)

On retiendra de cela qu'une école, *c'est un temps et un lieu où l'on se livre à l'étude*. Mais la description que donne l'auteur cité est sans doute trop centrée sur l'enfance, en même temps qu'elle semble sous-tendue par l'identification de l'étude scolaire à la visite des œuvres, du seul fait qu'elle mette en avant l'argument clé de l'ancien paradigme « bourgeois » : étudier, c'est « cultiver ses facultés », plutôt que s'affronter à des questions clés de la vie commune, quelle que soit au reste la « communauté » considérée.

➤ Sur le premier point – la mise en œuvre de l'idée « scolaire » n'est pas l'apanage de l'enfance – , je rappelle que, historiquement, l'école est d'abord, en Grèce, celle de personnes adultes, « savantes » souvent, qui cherchent à percer les mystères du monde où elles vivent. Dans une étude intitulée « Lieux et écoles du savoir », l'historien Carlo Natali en dit plus sur la naissance de la *scholè* grecque[6] :

[6] Voir Jacques Brunschwig & Geoffrey Lloyd (1996), *Le savoir grec* (pp. 229-249). Paris : Flammarion. Les quatre écoles auxquelles Natali se réfèrent sont les écoles platonicienne, aristotélicienne, stoïcienne et épicurienne. Le mot *diatribê* employé dans le passage ci-après a désigné d'abord un passe-temps, puis l'étude, une activité « sérieuse ». Notons que, en français comme en anglais, le sens aujourd'hui courant du mot – qui désigne un discours parfois violent contre quelqu'un ou quelque chose – est relativement tardif. C'est ainsi que, dans son *Dictionary of Word Origins* (1990), John Ayto écrit : « *Diatribe*'s connotations of acrimoniousness and abusiveness are a relatively recent (19th-century) development. Originally in English it meant simply 'learned discourse or disquisition'. It comes via Latin *diatriba* from Greek *diatribé* 'that which passes, or literally wears away, the time', and hence, in scholarly circles, 'study' or 'discourse'. This was a derivative of *diatribein* 'pass, waste, while away', a compound verb formed from the intensive prefix *dia-* and *tríbein* 'rub'. »

> À la fin du IV^{e} siècle, Athènes voit se constituer les quatre grandes écoles qui ont lié pour toujours le nom de la cité à celui de la philosophie. Mais Athènes ne fut pas la seule cité à posséder des philosophes : beaucoup de socratiques mineurs fondèrent des écoles ailleurs, à Mégare, Elis, Olympie, Érétrie, et les Platoniciens voyagèrent beaucoup, à Atarnée, dans le Pont, à la cour de Macédoine ; Épicure [v. 341-v. 270 AEC] fit de même. Mais il est tout à fait révélateur qu'Aristote [384-322 AEC] aussi bien qu'Épicure, après avoir entamé leur activité ailleurs, décidèrent de retourner à Athènes pour fonder leur propre école dans une cité dont l'importance garantissait un vaste public à leur doctrine. Les mêmes raisons amenèrent Zénon de Kition [v. 334-v. 262 AEC] lui-même à ouvrir son école dans la même cité. Ainsi les quatre principales écoles philosophiques hellénistiques furent créées à Athènes, deux par des citoyens athéniens, les deux autres par des étrangers.
>
> Les écoles prirent alors une forme achevée. Un vocabulaire particulier s'institua dans la communauté philosophique : outre le terme *diatribê*, d'usage ancien, on employa celui de *scholè* pour désigner le cursus des « études, leçons, et séminaires », signification inconnue du temps de Platon et d'Aristote, où il indiquait le « temps libre ». Selon Philodème [v. 110-v. 40 AEC], l'école était nommée *hairesis*, « choix », d'après le choix d'une doctrine philosophique, ou l'analogue *agogè*. On employait aussi *kepos* (jardin), *peripatos* (promenade), *exedra* (amphithéâtre). On pouvait donc désigner une école en faisant allusion à son activité doctrinale, ou encore à sa structure physique.
>
> Dicéarque [v. 350-v. 285 AEC] s'éleva contre la tendance de la philosophie de son époque à s'institutionnaliser ; il soutint que l'on pouvait faire de la philosophie n'importe où, sur la place publique, dans les champs, ou pendant la bataille : nul besoin de la chaire, de commentaires livresques, d'horaire fixe ou de *peripatos* avec ses disciples ! Ménédème d'Érétrie [v. 350-v. 277 AEC], lui aussi, dit-on, était indifférent aux conditions de son enseignement : ni ordre, ni sièges disposés en cercle, mais des disciples attentifs assis ou se promenant, à l'image du maître. (pp. 236-237)

L'attitude de Dicéarque[7], rétif à l'existence d'établissements d'enseignement permanents, se rencontrera à toutes les époques, et ce débat peut s'élargir jusqu'à questionner *l'existence même* d'une école « en dur ». Cela noté, quelle que soit la forme concrète d'une institution scolaire, quelle que soit en particulier sa pédagogie, on a là un concept que la civilisation grecque a nommé – *skholè*. La réalité correspondante est pourtant présente, peut-on penser, *en toutes les cultures humaines*. Ƶ Pour la TAD, *une école, c'est un temps, si minime soit-il, et un lieu, quelque mouvant et nomade qu'il puisse être, où s'arrêtent les activités « ordinaires » de la vie pour laisser place à l'étude*.

La relativité instantielle et la tentation autoritaire

Je reviens maintenant sur une question abordée dans ce séminaire dès la séance 1. Il s'agira donc d'une *reprise*, mais d'une reprise *avec approfondissement* – comme on va le voir. De

[7] Sur Dicéarque, voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Dicéarque.

quoi s'agit-il ? Le passage de ce que j'appelle la problématique *classique* à la problématique *relativiste* effectué en TAD concerne en principe, je pense, Z *toute institution possible*. Cette « révolution » tient essentiellement en deux points.

➤ Premier point : Z le chercheur ξ considère toute instance $\hat{\imath}$ comme s'inscrivant dans son champ d'investigation potentiel, au double plan *cognitif* (que sont les rapports $R(\hat{\imath}, o)$ relatifs à tels ou tels objets o ?) et *didactique* (quels changements cognitifs, c'est-à-dire affectant les rapports $R(\hat{\imath}, o)$, peut provoquer tel ou tel changement dans les conditions prévalentes $\mathcal{C}$?). Bien entendu, on pensera en particulier aux cas où $\hat{\imath}$ est un élève ou une position d'élève, un professeur ou une position de professeur, un ministre de l'éducation ou une position de ministre de l'éducation, etc. Et, bien sûr, on pensera aussi à un chercheur en didactique ou à une position $\hat{\rho}$ de chercheur en didactique.

➤ Quoiqu'il soit relié au premier point, le second point annoncé touche plus profond. Que fait-on dans nos sociétés avec ces faits dont la forme générique est : $\hat{\imath} \vdash \vartheta$ (ou $\hat{\imath} \nvdash \vartheta$) ? Dans les sociétés épistémologiquement absolutistes, on regarde l'énoncé ϑ comme un jugement absolu qui est soit vrai, soit faux : dans le premier cas, on écrirait $\vdash \vartheta$; dans le second, $\nvdash \vartheta$. Je considérerai que Z cela revient à supposer l'existence d'une « instance suprême »[8], notée ici $\hat{\imath}^{\infty}$, qui connaîtrait la vérité en un certain domaine de réalité, en sorte que les écritures précédentes équivaudraient respectivement à $\hat{\imath}^{\infty} \vdash \vartheta$ et à $\hat{\imath}^{\infty} \nvdash \vartheta$, respectivement[9].

➤ En fait, ce postulat se spécifie, à l'époque moderne, en fonction des différentes « disciplines » $\mathcal{D}$ ou des différentes « sciences » $\mathcal{S}$ (lesquelles sont des disciplines réputées « scientifiques » par certaines instances $\hat{w}$), ce qui renvoie à la supposition de l'existence en chaque cas, d'une instance suprême, à savoir $\hat{\imath}^{\infty}_{\mathcal{D}}$ ou $\hat{\imath}^{\infty}_{\mathcal{S}}$, qui, dans son domaine de réalité, est une *Bocca della Verità* – la « Bouche de la vérité » (que l'on verra ci-dessous) est une sculpture d'environ 1,75 m de diamètre, qui « représente un visage masculin barbu dont les yeux, le nez et la bouche sont forés et creux », indique l'article homonyme de *Wikipédia*[10],

---

[8] Selon le CNRTL, « suprême » dérivé du latin *supremus* « le plus au-dessus, le plus haut »; « le dernier », superlatif de *superus* « qui est au-dessus, supérieur », lui-même dérivé de *super* « sur, au-dessus ». Voir à l'adresse https://www.cnrtl.fr/etymologie/suprême.

[9] Dans les énoncés $\hat{\imath}^{\infty} \vdash \vartheta$ et $\hat{\imath}^{\infty} \nvdash \vartheta$, la variable $\hat{\imath}$ est liée par l'opérateur $\cdot^{\infty}$: on a ainsi $\hat{\imath}^{\infty} \vdash \vartheta \Leftrightarrow \hat{\jmath}^{\infty} \vdash \vartheta$, etc. Voir par exemple à https://en.wikipedia.org/wiki/Free_variables_and_bound_variables?oldid=161833297#Variable-binding_operators. Notons aussi que, d'après le CNRTL, « suprême » est dérivé du latin *supremus* « le plus au-dessus, le plus haut »; « le dernier », superlatif de *superus* « qui est au-dessus, supérieur », lui-même dérivé de *super* « sur, au-dessus ». Voir à l'adresse https://www.cnrtl.fr/etymologie/suprême.

[10] Voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Bocca_della_Verità. Cette sculpture est à Rome, dans le vestibule (*pronaos*) de l'église Santa Maria in Cosmedin.

lequel précise notamment que les fonctions originelles de cette sculpture « sont incertaines : fontaine, bouche d'impluvium [système de captage et de conservation des eaux de pluie] ou plus probablement bouche d'égout ». Cette dernière hypothèse, peu ragoûtante il est vrai, symbolise opportunément, ainsi que nous allons le voir, l'ambivalence des « bouches de la vérité »

➤ Pour aller vers une modélisation plus « matérialiste » de ce qui précède, qui reste attaché historiquement à une organisation des sociétés imprégnée de transcendance religieuse (je n'irai pas plus loin ici sur cet aspect-là des choses), je constate simplement que certaines instances $\hat{\imath}$ sont regardées par un ensemble $\hat{W}$ d'instances $\hat{w}$ comme des *autorités* – des « bouches de vérité » – à propos d'un ensemble $\boldsymbol{Q}$ de questions Q ; ou, au contraire, que cette qualité leur est refusée. On écrira alors[11], selon le cas, $\hat{W} \vdash \hat{\alpha}(\hat{\imath}, \boldsymbol{Q})$ ou $\hat{W} \nvdash \hat{\alpha}(\hat{\imath}, \boldsymbol{Q})$ ou encore $\hat{W} \vdash \neg\hat{\alpha}(\hat{\imath}, \boldsymbol{Q})$: la première expression s'oralise en « Pour les instances appartenant à l'ensemble $\hat{W}$, l'instance $\hat{\imath}$ est une autorité ($\hat{\alpha}$) relativement aux questions $Q \in \boldsymbol{Q}$ » ; et semblablement s'agissant de deux autres expressions. Une instance $\hat{w}$ « autorisante » ou « non autorisante » relativement à un ensemble $\boldsymbol{Q}$ sera notée $\hat{w}_{\boldsymbol{Q}}$ et leur ensemble sera noté $\hat{W}_{\boldsymbol{Q}}$.

➤ Notons ici un cas générique important : celui qui s'écrit $\hat{\imath} \vdash \hat{\alpha}(\hat{\imath}, \boldsymbol{Q})$ (respectivement, $\hat{\imath} \nvdash \hat{\alpha}(\hat{\imath}, \boldsymbol{Q})$), c'est-à-dire dans lequel $\hat{\imath}$ se regarde (resp. ne se regarde pas) comme une autorité relativement aux questions $Q \in \boldsymbol{Q}$. Dans une classe scolaire, ainsi, le professeur d'une discipline $\mathcal{D}$ est en principe tenu pour une autorité sur les questions de sa discipline, $\boldsymbol{Q}_{\mathcal{D}}$, par les élèves de la classe (et, en règle générale, par lui-même) : si p_E est la position de professeur

[11] Le choix de la lettre α rappelle discrètement le grec ancien ἀρχή (*arkhḗ*), qui renvoie et à la notion de commencment, d'origine, et à la notion de pouvoir, d'autorité. Voir par exemple à l'adresse https://fr.wiktionary.org/wiki/ἀρχή.

de $\mathcal{D}$ et p_e est la position d'élève de la classe, on aura donc $p_e \vdash \hat{\alpha}(p_E, \boldsymbol{Q}_{\mathcal{D}})$ (et aussi sauf exception $p_E \vdash \hat{\alpha}(p_E, \boldsymbol{Q}_{\mathcal{D}})$). En revanche, si $\mathcal{D}' \neq \mathcal{D}$, on aura souvent $p_e \nvdash \hat{\alpha}(p_E, \boldsymbol{Q}_{\mathcal{D}'})$: le professeur de $\mathcal{D}$ ne sera en général pas reconnu comme une autorité par les élèves sur les questions réputées relever de $\mathcal{D}'$…

➤ Le modèle précédent peut être raffiné en introduisant un degré d'autorité γ variant par exemple de 1 à l'infini. On notera alors selon le cas $\hat{W} \vdash \hat{\alpha}(\gamma, \hat{\imath}, \boldsymbol{Q})$, $\hat{W} \nvdash \hat{\alpha}(\gamma, \hat{\imath}, \boldsymbol{Q})$ ou $\hat{W} \vdash \neg\hat{\alpha}(\gamma, \hat{\imath}, \boldsymbol{Q})$. Le « jeu » institutionnel avec l'autorité (relativement à un domaine donné) qui est reconnue par un ensemble $\hat{W}$ d'instances est certainement une affaire complexe à explorer. Tout d'abord, il arrive qu'une instance $\hat{\imath}$ soit telle que l'on ait : $\exists\, \boldsymbol{Q}\ \exists\, \hat{W}\ \forall\, \gamma\ \hat{W} \vdash \hat{\alpha}(\gamma, \hat{\imath}, \boldsymbol{Q})$. On retrouve alors ce que nous avions noté plus haut $\hat{\imath}^{\infty}$ (relativement à $\boldsymbol{Q}$, du point de vue de $\hat{W}$) : le « passage à l'infini » concernant le degré d'autorité γ est contemporain d'un processus d'*hypostasiation* qui crée une entité supposée réelle, à savoir $\hat{\imath}^{\infty}_{\boldsymbol{Q}}$, à partir du constat que certaines instances $\hat{\imath}$ se voient accorder un certain degré d'autorité γ relativement à $\boldsymbol{Q}$ [12].

➤ Ensuite, les processus d'autorisation ($\hat{W} \vdash \hat{\alpha}(\hat{\imath}, \boldsymbol{Q})$) et de désautorisation ($\hat{W} \vdash \neg\hat{\alpha}(\hat{\imath}, \boldsymbol{Q})$) amènent à poser la question de l'origine et de la genèse de l'autorité de $\hat{w} \in \hat{W}$ lui permettant d'affirmer l'autorité ou la non-autorité de l'instance $\hat{\imath}$ relativement à un ensemble de questions $\boldsymbol{Q}$. On entre ici dans une série de difficultés que le point de vue « suprématiste » semble résoudre quand on ne voit pas que, précisément, il élude, ignore et nie de tels problèmes. Je note toutefois que, en nombre de cas, la conclusion de $\hat{w}_{\boldsymbol{Q}}$ quant à l'autorité (ou à l'absence d'autorité) de $\hat{\imath}$ relativement à $\boldsymbol{Q}$ *semble* relever d'un très large arbitraire. C'est tout cela que la *théorie de l'enquête* qui se développe dans le cadre de la TAD doit affronter.

➤ Il est instructif, dans cette perspective, de s'arrêter un instant sur le mot d'*autorité* et les mots qui lui sont apparentés[13]. Commençons par *auteur* ou plutôt, en anglais, par *author*. Voici ce que dit à cet égard John Ayto dans son *Dictionary of Word Origins* (1990):

> **author** [14] Latin *auctor* originally meant 'creator, originator'; it came from *auct*-, the past participial stem of *augēre*, which as well as 'increase' (as in English *augment*) meant 'originate'. But it also developed the specific sense 'creator of a text, writer', and brought both these meanings with it into English via Old French *autor*. Forms with *-th-* began to appear in the mid 16th century (from French), and originally the *-th-* was just a spelling variant of *-t-*, but eventually it affected the pronunciation. While the 'writing' sense has largely taken over *author*, *authority* [13] (ultimately from Latin *auctōritās*) and its derivatives *authoritative* and *authorize* have developed along the lines of the creator's power to command or make decisions.

[12] Le dictionnaire Merriam-Webster en ligne définit le verbe « hypostasier » (*hypostatize*) comme suit : *to attribute real identity to (a concept)*. Voir à l'adresse https://www.merriam-webster.com/dictionary/hypostatized.

[13] Sur la notion de « mots apparentés », voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Mot_apparenté.

Deux lignes de sens donc. La première vient directement du latin *augere* « augmenter » (mot qui, par le bas latin *argumentare*, dérive lui-même de *augere*). Dans *Les mots latins* (1942/1976, p. 21), Fernand Martin (1879-1966) indique que l'*actor* est un créateur, celui qui fait croître, un fondateur (de ville notamment), un auteur de loi, un garant (qui se charge d'une chose au nom d'un autre), un possesseur, qui met aux enchères[14]. Du mot *auctōritās*, Martin précise lors qu'il produit « les mêmes sens : création, fondation, institution, garantie, possession ». La seconde ligne de sens (qui n'existe pas en latin classique) est celle qui nous est devenue familière : l'auteur d'un texte, c'est le « scripteur » de ce texte. Dans son dictionnaire étymologique en ligne, Douglas Harper note ceci à propos de *author*[15] :

> From late 14c. as "a writer, one who sets forth written statements, original composer of a writing" (as distinguished from a *compiler*, *translator*, *copyist*, etc.). Also from late 14c. as "source of authoritative information or opinion," now archaic but the sense behind *authority*, etc.

Le mot *author* flirte avec l'idée d'autorité. Douglas Harper écrit à l'entrée *authority* de son dictionnaire[16] :

> From c. 1300 in the general sense "legal validity," also "authoritative book; authoritative doctrine" (opposed to reason or experience); "author whose statements are regarded as correct." From mid-14c. as "right to rule or command, power to enforce obedience, power or right to command or act." In Middle English also "power derived from good reputation; power to convince people, capacity for inspiring trust."

Une « autorité », c'est, peut-on dire, une instance qui « y a été voir », qui a enquêté, et qui, fonctionnant alors en média, énonce ensuite ce qu'elle a vu. Nous voilà donc au cœur de la *dialectique des milieux* (le raisonnement, l'expérience) *et des médias* (les autorités). Une grande partie des efforts intellectuels et politiques de nos sociétés depuis cinq siècles au moins a été au service de notre émancipation des trop nombreuses « autorités » imposées.

➤ De ces tensions, que la dialectique médias / milieux vise indéfiniment à dépasser, témoigne tout une partie de la sémantique des mots apparentés à *autorité*. Ce n'est pas un hasard que, en anglais, l'adjectif *authoritative* possède aujourd'hui, en anglais, deux sens génétiquement associés quoique sémantiquement distincts. D'une part, en effet, *authoritative* signifie « autoritaire » – nous n'avons plus guère que ce sens en français courant. D'autre part, il

---

[14] De là l'anglais *auction*, qui désigne une vente aux enchères : voir *l'Online Etymology Dictionary* de Douglas Harper (2001-2020) à l'adresse https://www.etymonline.com/search?q=auction. (Harper précise : « In the U.S., something is sold *at* auction; in England, *by* auction » – précieuse indication…)

[15] Voir à l'adresse https://www.etymonline.com/word/author.

[16] Voir à l'adresse https://www.etymonline.com/search?q=authority.

signifie « fiable, qui fait autorité »[17]. Significativement s'agissant de cénacles où l'on tient que l'*Encyclopædia Britannica* est une autorité mais que *Wikipédia* n'en est pas une, le dictionnaire en ligne *WordReference*, qui donne pour synonymes de *authoritative*, en ce sens, « reliable, knowledgeable », propose cet exemple d'emploi : « Do you think Wikipedia is authoritative enough to cite? », soit donc : « Crois-tu que Wikipédia soit assez fiable pour être cité ? »… Cette religion des « autorités » culmine rituellement dans ce qu'on nomme *argument d'autorité*. À ce sujet, j'emprunte à… *Wikipedia* les lignes qui suivent[18] :

> An **argument from authority** (*argumentum ab auctoritate*), also called an **appeal to authority**, or **argumentum ad verecundiam**, is a form of defeasible argument in which the opinion of an authority on a topic is used as evidence to support an argument. It is well known as a fallacy, though some consider that it is used in a cogent form when all sides of a discussion agree on the reliability of the authority in the given context. Other authors consider it a fallacy to cite an authority on the discussed topic as the primary means of supporting an argument.

Cette tentation « autoritaire » n'est pas indépassable, comme je voudrais le suggérer maintenant.

Que faire donc ?

Considérons une instance $\hat{\imath}$ qui émet un jugement ϑ : $\hat{\imath} \vdash \vartheta$. L'énoncé ϑ a trait à une ou plusieurs questions au sein d'un ensemble $\boldsymbol{Q}$ de questions. Si une instance $\hat{w}$ considère que $\hat{\imath}$ est une autorité relativement à $\boldsymbol{Q}$, c'est-à-dire si $\hat{w} \vdash \hat{\alpha}(\gamma, \hat{\imath}, \boldsymbol{Q})$, $\hat{w}$ pourra être portée à juger de même que le fait $\hat{\imath}$: on aura alors $\hat{w} \vdash \vartheta$. Notons qu'il se peut que $\hat{w}$ prétende cependant qu'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire juge que l'on a $\hat{w} \vdash \neg\vartheta$, par exemple parce que $\hat{w}$ se réfère aussi à une instance $\hat{\imath}'$ telle que $\hat{w} \vdash \hat{\alpha}(\gamma', \hat{\imath}', \boldsymbol{Q}) \land \hat{w} \vdash \gamma' > \gamma \land \hat{\imath}' \vdash \neg\vartheta$. Comment un chercheur en didactique ξ peut-il situer tout cela dans le cadre de la *théorie de l'enquête* développée en TAD ?

➤ Le premier point à souligner est que, une question Q étant considérée, ☡ ξ s'intéresse en principe à toute instance $\hat{\imath}$ possible, qu'elle soit *ou non* regardée comme une autorité relativement à Q par au moins certaines instances $\hat{w}$. S'il en était autrement, ξ pourrait se désintéresser par principe, par exemple, du rapport à la question Q d'un élève, d'un

---

[17] Quand j'évoque la tentation « autoritaire » comme ci-dessus, je conjoins délibérément (et néologiquement) les deux sens que produit traditionnellement l'anglais *authoritative*.

[18] Voir à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Argument_from_authority. Cet article est beaucoup plus riche que l'extrait présenté (choisi pour son caractère synthétique) le suggère. On pourra aussi se reporter *notamment* à la version française de cet article (à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Argument_d'autorité). Sur le qualificatif *defeasible*, voir à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Defeasible_reasoning; et encore à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Raisonnement_révisable).

professeur, d’un parent d’élève, d’un inspecteur, d’un autre chercheur, etc. Par contraste, si une instance $\hat{\imath}$ émet l’énoncé ϑ à propos de Q, ξ pourra être amené à enquêter sur les conditions et contraintes $\mathcal{C}$ sous lesquelles ϑ a été proféré par $\hat{\imath}$.

➤ En nombre de cas, en particulier en famille, en classe ou dans les médias, $\hat{\imath}$ *répète* (éventuellement en le déformant) un énoncé émis par une autre instance, $\hat{\imath}'$, regardée par $\hat{\imath}$ comme une « bouche de vérité » relativement à Q. C’est là un cas très général, où une instance « recopie » une copie de ce qui est, *à l’origine*, un énoncé qui ne serait la copie de rien. En fait, cet énoncé supposé originel n’est pas *ipso facto* plus intéressant tandis qu’une copie serait moins intéressante : Z ce qui importe est la solidité de l’énoncé ϑ produit ou recopié, c’est-à-dire la force probante de la dialectique des médias et des milieux auquel ϑ aura résisté. Il se peut par exemple – le cas n’est pas rare en mathématiques – que l’énoncé originel ait été peu solide mais qu’une copie due à une instance $\hat{\imath}$ ait subi victorieusement une mise à l’épreuve ardue. Lorsqu’un « recopieur » soumet ϑ à une telle « ordalie », on dira que ϑ est un énoncé *authentifié* (par $\hat{\imath}$). À propos de l’adjectif *authentique*, qui inspire cette terminologie, voici ce que dit notamment l’*Online Etymology Dictionary* de Douglas Harper[19] :

> **authentic** [14] Etymologically, something that is authentic is something that has the authority of its original creator. Greek *authentikós* was a derivative of the noun *authéntēs* ‘doer, master’, which was formed from *autós* ‘self’ and the base *-hentēs* ‘worker, doer’ (related to Sanskrit *sanoti* ‘he gains’). The adjective’s original meaning in English was ‘authoritative’; the modern sense ‘genuine’ did not develop fully until the late 18th century.

Le *Dictionnaire historique de la langue* française (1993) ne dit guère autre chose :

> **AUTHENTIQUE** adj. est emprunté (1211) au bas latin *authenticus*, adjectif signifiant « original et bien attribué (d’un texte) » et substantif neutre *(authenticum)*, « acte juridique qui peut faire foi », lui-même hellénisme. Le grec tardif *authentikhos* signifie « dont le pouvoir, l’autorité est inattaquable ». Il est dérivé de *authentes* « auteur responsable » (notamment d’un meurtre), d’où *authentia* « autorité ». C’est un composé de *auto-* (…) et de °*hentês* « qui réalise, achève »… Le mot français […] s’applique alors (1403) aux personnes dont l’autorité est reconnue et légitime, puis aux choses véridiques, indiscutables, emploi normal en langue classique et moderne. Ce n’est qu’au XXe s. (1923 chez Gide) que l’adjectif correspond à « sincère, naturel, non affecté ». (p. 145)

Si un énoncé ϑ a été authentifié par le travail de $\hat{\imath}$, cette instance peut se voir reconnu une certaine autorité en ce qui concerne la question Q à laquelle se réfère ϑ, et cela d’abord, le

[19] Voir à l’adresse https://www.etymonline.com/word/authentic.

plus souvent, du point de vue de l'instance $\hat{\imath}$ elle-même (on aura ainsi $\hat{\imath} \vdash \hat{\alpha}(\gamma, \hat{\imath}, \boldsymbol{Q})$), ensuite, peut-être, du point de vue de certaines instances $\hat{w} \neq \hat{\imath}$ (on aura alors $\hat{\jmath} \vdash \hat{\alpha}(\gamma, \hat{\imath}, \boldsymbol{Q})$).

➤ Notons que, en outre, une instance $\hat{\imath}$ qui se borne à recopier une instance $\hat{\imath}'$ à laquelle est reconnue une certaine autorité peut « hériter » d'une partie de cette autorité – d'où le jeu, souvent vicieux, quelquefois subtil, et en général assez vain des citations et entre-citations. Le chercheur ξ se doit de toujours être ouvert au travail d'authentification des énoncés (au sens indiqué plus haut), quelle que soit sa conclusion ($\xi \vdash \vartheta$ ou $\xi \vdash \neg\vartheta$). Par exemple, d'où et comment cet énoncé vient-il à cet élève, à ce professeur, aux auteurs de ces instructions, de ces programmes, etc. ?

III. Devenir une « autorité » : deux esquisses d'enquêtes

La manière sans doute la plus claire pour une instance $\hat{\imath}$ de devenir une autorité sur une question Q est d'avoir *enquêté* sur la question Q. Bien sûr, la valeur de l'enquête est un élément décisif, et cette valeur dépend étroitement, en principe, de la dialectique des milieux et des médias à laquelle les énoncés de $\hat{\imath}$ auront résisté et notamment des milieux dont $\hat{\imath}$ aura provoqué les réactions. En retour, se voir reconnu une certaine autorité sera pour $\hat{\imath}$ une chance de plus de voir ses énoncés pris en compte, débattus, mis en relation avec d'autres énoncés procédant d'autres usages de mêmes milieux ou d'autres milieux, ce qui permettra éventuellement de se rapprocher de « la vérité » entendue comme erreur rectifiée. Dans ce qui suit, j'esquisse et analyse deux enquêtes pour illustrer concrètement le paradigme de questionnement du monde. Je rappelle pour cela les deux questions formulées à la fin de la séance 6, et que nous étudierons tour à tour :

ϑ_1. « On a : $20615673^4 = 2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4$. »
ϑ_2. « Chacun de nous touche son visage plusieurs centaines de fois par jour. »

Le contre-exemple de Noam D. Elkies

Nous nous pencherons ici sur l'énoncé $\vartheta = \vartheta_1$, c'est-à-dire sur l'égalité qui s'écrit

$$20615673^4 = 2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4.$$

Cet énoncé, nous l'avons vu, apparaît dans un article du mathématicien américain Noam D. Elkies dans un article d'octobre 1988 intitulé « On $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$ », paru dans *Mathematics of Computation*[20].

➤ Voici d'abord un extrait de la page 831 de l'article de Elkies où celui-ci établit l'égalité ϑ.

[20] Voir à l'adresse https://www.ams.org/journals/mcom/1988-51-184/S0025-5718-1988-0930224-9/S0025-5718-1988-0930224-9.pdf.

ON $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$ 831

Substituting this value of x into the second conic and simplifying, we find

$$\begin{aligned}(8)\qquad &\pm 21^2(17k^2+779)^2t^2\\ &\quad = -4(31790k^4 - 4267k^3 + 1963180k^2 - 974003k - 63237532).\end{aligned}$$

The right side of this reduces modulo 3 to $(x^2-x-1)^2$, from which we easily show that for (8) to hold with rational x and t, the plus sign must be chosen. Using new coordinates $X = (k+2)/7$, $Y = 3(17k^2+779)t/14$, we then further simplify (8) to

$$(9)\qquad Y^2 = -31790X^4 + 36941X^3 - 56158X^2 + 28849X + 22030.$$

We easily verify that there is no local obstruction to a rational solution for (9). This does not yet guarantee that such a solution exists, because (9) could still represent a nontrivial element of the Tate-Šafarevič group of the elliptic curve which is its Jacobian. But it does encourage us to look for small rational solutions, and in this case a few hours' computer (VAX) search for rational X such that the right-hand side of (9) is a perfect square revealed the solution

$$(X, Y) = \left(-\frac{31}{467}, \frac{30731278}{467^2}\right);$$

retracing our changes of variable we then recover the rational solutions

$$(10)\qquad (r, s, t) = \left(-\frac{18796760}{20615673}, \frac{2682440}{20615673}, \frac{15365639}{20615673}\right)$$

for (5). Clearing denominators we obtain our first counterexample

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$$

to Euler's conjecture.

L'auteur, Noam D. Elkies, jouit d'une très grande autorité sur les questions de mathématiques qu'il a étudiées[21]. Sur la question examinée ici, on voit aisément qu'il déploie un appareil mathématique relativement sophistiqué, que le lecteur pourra examiner plus à fond.

➤ Par ailleurs, il ne semble pas que l'égalité explicitée dans l'article de 1988 ait fait l'objet de mises en cause ultérieures. Ainsi, l'article « Conjecture d'Euler » de *Wikipedia*, dont la version que j'ai consultée date du 22 janvier 2019, raconte la même histoire que celle déjà connue de nous, comme on le verra ci-dessous également.

La conjecture d'Euler fut infirmée par L. J. Lander et T. R. Parkin en 1966[3] grâce au contre-exemple suivant :

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

En 1988, Noam Elkies trouva même une méthode[4] pour construire des contre-exemples lorsque $n = 4$. Son plus simple contre-exemple fut le suivant :

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4.$$

Par la suite, Roger Frye trouva le plus petit contre-exemple possible pour $n = 4$ en utilisant, avec un ordinateur, des techniques suggérées par Elkies :

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

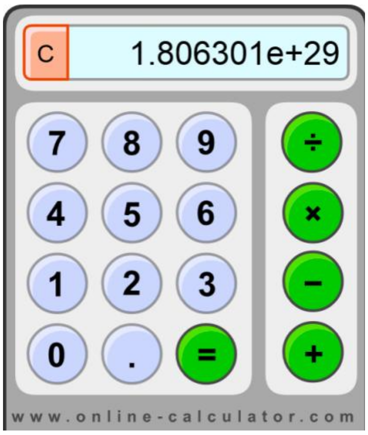
Aucun contre-exemple pour $n > 5$ n'est actuellement connu.

[21] Je renvoie à nouveau au document que l'on trouvera à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Noam_Elkies.

Semblablement, l'article « Euler's sum of powers conjecture » de *Wikipedia* donne la même égalité[22]. La version de cet article que j'ai consultée porte l'indication suivante : « This page was last edited on 25 April 2020, at 18:23 (UTC). » Les médias consultés sont en fait tous d'accord.

➤ Nous pouvons alors recourir à des *milieux* appropriés pour vérifier l'égalité proposée. On aura en tête, dans ce qui suit, la question Q_∂, soit la question des outils et de leurs usages :

> Q_∂. Un problème *P* étant donné, quels sont les *outils* qu'un instance *î* peut mobiliser pour le résoudre et quels *usages* l'instance *î* peut-elle faire de ces outils ? Quelles sont les *conditions et contraintes* sous lesquelles *î* est amenée à opérer qui, étant donné *P*, déterminent le choix des outils et de leurs usages ?



De ce point de vue, les outils souvent seuls accessibles de manière permanente à un élève français jeune sont encore aujourd'hui : 1) une feuille de papier et un stylo ou crayon ; 2) une calculette. Cela ne permet guère de vérifier l'égalité proposée. Par exemple, en utilisant une calculette en ligne[23], et en recopiant « à la main » l'écriture du nombre 20615673, on arrive finalement au résultat ci-contre, qu'il faut recopier à la main : $20615673^4 =_{\mathbb{C}} 1.806301 \cdot 10^{29}$. Cela ne laisse guère d'espoir quand à la vérification de l'égalité à tester !

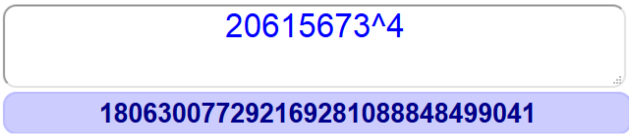
➤ Aujourd'hui, cependant, il est possible de mobiliser les outils suivants : un *ordinateur connecté à Internet* et, sur celui-ci, 1) un *fichier Word*, 2) un *navigateur web*, et 3) une (assez puissante) *calculatrice en ligne* dans la zone d'affichage de laquelle on puisse *coller et copier des chaînes de caractères*. La première opération à réaliser consiste alors à écrire sans erreur dans le fichier Word l'égalité à vérifier. Pour cela on peut la *copier* sur une page web « authentifiée » sur laquelle elle figure et la *coller* dans le fichier Word – on pourra par exemple aller la chercher dans l'article de *Wikipedia* intitulé « Euler's sum of powers conjecture » déjà mentionné, obtenant ainsi dans le fichier Word ce qui suit : $2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$. On est alors prêt pour agir.

➤ La technique de vérification peut-être la plus simple à concevoir consiste à faire calculer les puissances quatrièmes des nombres ainsi récupérés. J'ai choisi pour cela une calculatrice

[22] Voir à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Euler's_sum_of_powers_conjecture.

[23] Voir à l'adresse https://www.online-calculator.com/simple-full-screen-calculator/. On s'assurera (voir plus loin) que la fonction « Calculer » de Word fait « mieux » : elle affiche 180630077292170000000000000000.

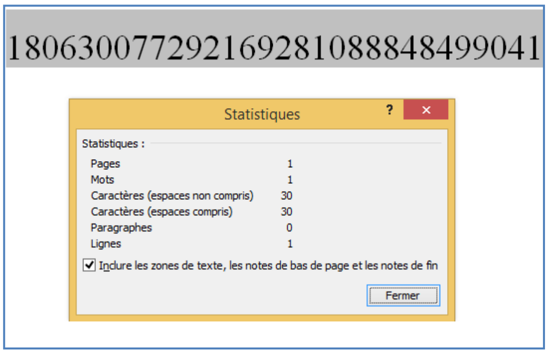
en ligne ℂ′ qui est présentée comme *Full Precision Calculator*[24]. On copie dans le fichier Word le « nombre » 20615673, on le colle dans la zone d'affichage de la calculatrice en ligne et on le fait suivre de ^4, obtenant ainsi ce qu'on voit sur la copie d'écran ci-après :



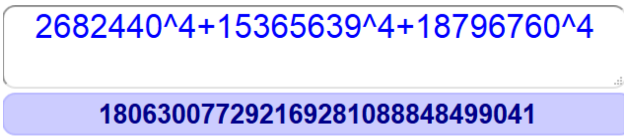
On colle alors dans le fichier Word le résultat affiché ci-dessus :

$$20615673^4 =_{\mathbb{C}'} 180630077292169281088848499041.$$

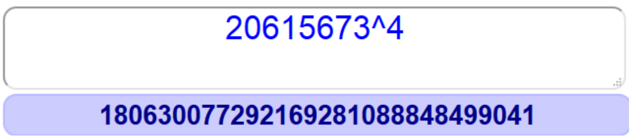
On voit que ce résultat est compatible avec celui donné par la calculette ℂ plus haut, à savoir $1.806301 \cdot 10^{29}$. En particulier, le nombre obtenu à l'aide de ℂ′ s'écrit avec 30 chiffres, ce qui concorde avec le résultat affiché par ℂ en notation scientifique. Je note ici que, pour déterminer le nombre de chiffres, il suffit de saisir l'ensemble des chiffres et d'utiliser alors les « Statistiques » de Word, comme on le voit ci-après :



➤ On fait alors calculer la somme des trois autres puissances quatrièmes. On obtient ceci :



Joint au premier calcul, que je rappelle ci-après, cela permet de conclure.



On a en effet :

---

[24] Voir à l'adresse https://www.mathsisfun.com/calculator-precision.html.

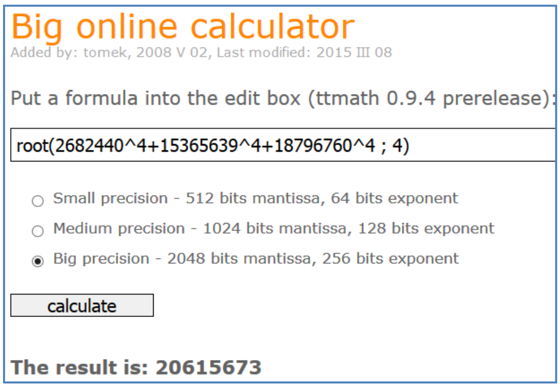
$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 =_{\mathbb{C}'} 180630077292169281088848499041 =_{\mathbb{C}'} 20615673^4.$$

➤ Une autre stratégie, qu'on peut penser plus risquée, consiste à faire calculer le nombre

$$\sqrt[4]{2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4}$$

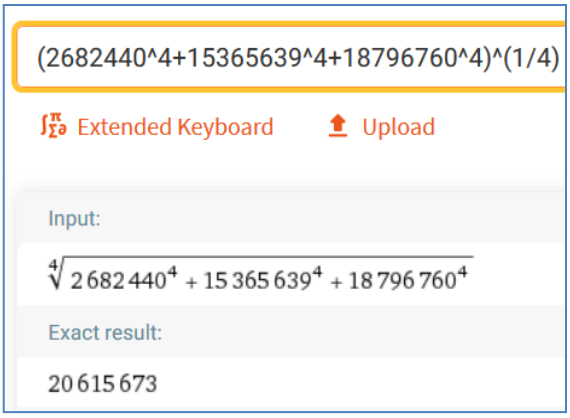
pour vérifier s'il est bien égal à 20615673. Là encore, on peut penser qu'il est nécessaire de disposer d'une calculatrice « assez puissante ».

• Commençons avec le *Big online calculator*[25], à qui l'on demande de calculer cette racine/



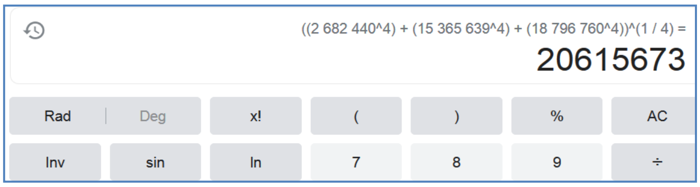
L'essai est donc concluant !

• Utilisons maintenant la calculatrice *WolframAlpha*[26] ; elle affiche ce qui suit :



À nouveau, l'essai est probant.

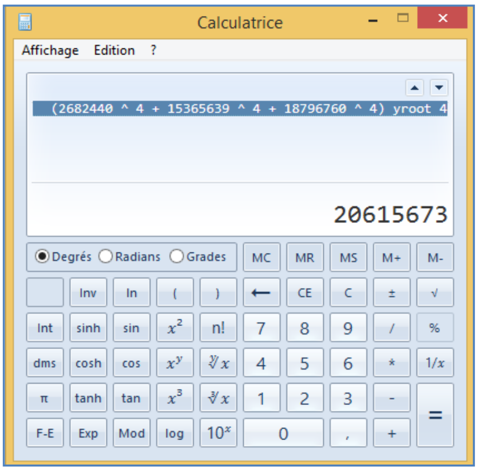
• La calculatrice de Google, elle, répond de même comme suit.



[25] Voir à l'adresse https://www.ttmath.org/online_calculator.

[26] Voir à l'adresse https://www.wolframalpha.com/.

• Il en va ainsi, encore, de la calculatrice de Windows :



• En vérité, même la « calculatrice de Word », que nous noterons 𝕎 dans ce qui suit, c'est-à-dire la fonction « Calculer » de Word, répond nettement : si l'on saisit l'expression

(2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4)^(1/4)

𝕎 répond instantanément : 20615673.

➤ Comment conclure ce qui précède ? La formulation habituelle est : *nous avons prouvé que l'égalité de N. D. Elkies est exacte*. Une autre formulation, moins assurée, est celle-ci : *nous n'avons pas pu établir que cette égalité serait erronée* – celle-ci a résisté à nos efforts ! En bien des cas, c'est ce style de formulation qui se révèle pertinent. Reprenons ici une formalisation déjà utilisée lors de la séance 6 : $(\hat{w})$ ➡ $\mathcal{S}_{\check{m}}(\mathbb{C})$ ➡ $\mathcal{S}_{\check{p}}(\mathbb{C})$ ➡ $\mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C})$ ➡ $\mathcal{S}_{\check{m}}(\mathbb{C})$ ➡ $\mathcal{S}_{\check{m}}(\hat{w})$, avec $\hat{w}$ = ϟ, soit $\mathcal{S}_{\check{m}}$(ϟ) ➡ $\mathcal{S}_{\check{m}}(\mathbb{C})$ ➡ $\mathcal{S}_{\check{p}}(\mathbb{C})$ ➡ $\mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C})$ ➡ $\mathcal{S}_{\check{m}}(\mathbb{C})$ ➡ $\mathcal{S}_{\check{m}}$(ϟ). La première étape – à savoir $\mathcal{S}_{\check{m}}$(ϟ) ➡ $\mathcal{S}_{\check{m}}(\mathbb{C})$ – suppose que ϟ sache « parler à ℂ ». La dernière étape – à savoir $\mathcal{S}_{\check{m}}(\mathbb{C})$ ➡ $\mathcal{S}_{\check{m}}$(ϟ) – suppose de même que ϟ sache entendre ce que « dit ℂ ». Mais quel crédit ϟ peut-il faire au message de ℂ ? Cela dépend en particulier de $\mathcal{S}_{\check{p}}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C})$, milieux dont ϟ peut avoir une connaissance « théorique » plus ou moins superficielle (ou plus ou moins approfondie). La petite étude précédente suggère que, d'une manière générale, un usage donné d'un milieu donné suppose une connaissance « phénoménologique » de ce milieu : la chose est vraie même si, par exemple, le milieu en question est le calcul algébrique élémentaire : l'usager attend certaines résultats, est surpris par d'autres, tout cela éclairant ses décisions dans la « gestion » dudit milieu. Prenons par exemple ℂ = 𝕎 ; on a vu que 𝕎 donnait pour valeur de $\sqrt[4]{2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4}$ ce que nous croyons être la « bonne » valeur, à savoir 20615673. Pourtant, si nous demandons à 𝕎 la valeur de

20615673^4, elle nous répond… 180630077292170000000000000000, en lieu et place de… 180630077292169281088848499041.

➤ Supposons un instant que nous ne disposions, pour toute calculatrice que du « simple-full-screen-calculator » ℂ utilisé en premier lieu. Avec cette calculatrice, il ne paraît guère possible de faire ce que nous avons fait avec les cinq calculatrices ci-dessus. On peut toutefois soumettre l'égalité d'Elkies à l'épreuve suivante : étant donné un entier positif n, on détermine les valeurs modulo n des deux membres de cette égalité[27]. Prenons par exemple n = 17 et considérons l'entier a = 20615673. Ce nombre modulo 17 est par définition égal au reste de l'entier a dans la division par 17. On a

$$20615673 / 17 =_{\mathbb{C}} 1212686{,}65$$

Il vient ainsi : $a \equiv 20615673 - 17 \times 1212686 \pmod{17} =_{\mathbb{C}} 11 \pmod{17}$. On a alors : $a^4 \equiv 11^4 \pmod{17} =_{\mathbb{C}} 14641 \pmod{17}$. Comme $\lfloor 14641 / 17 \rfloor = 861$, il vient : $11^4 \equiv 14641 - 17 \times 861 \pmod{17} =_{\mathbb{C}} 4$. On a ainsi : $20615673^4 \equiv 4 \pmod{17}$. De la même façon on obtient $2682440^4 \equiv 4 \pmod{17}$, $15365639^4 \equiv 16 \pmod{17}$ et $18796760^4 \equiv 1 \pmod{17}$. Il en résulte que l'on a donc : $2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 \equiv 4 + 16 + 1 \pmod{17} \equiv 4 \pmod{17}$. Les deux membres de l'égalité sont donc congrus modulo 17, ce qui, encore une fois, ne permet pas de *rejeter* l'égalité d'Elkies ! Si, de même, on prend n = 13 (par exemple), on arrive d'une part à $20615673^4 \equiv 0 \pmod{13}$ et d'autre part à $2682440^4 \equiv 9 \pmod{13}$, $15365639^4 \equiv 3 \pmod{13}$ et $18796760^4 \equiv 1 \pmod{13}$, en sorte que $2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 \equiv 9 + 3 + 1 \pmod{13} = 0 \pmod{13}$. On a ainsi $2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 \equiv 20615673^4 \pmod{13}$. La même conclusion s'ensuit.

➤ Revenons encore une fois sur la question Q_∂ :

> Q_∂. Un problème P étant donné, quels sont les *outils* qu'un instance $\hat{\imath}$ peut mobiliser pour le résoudre et quels *usages* l'instance $\hat{\imath}$ peut-elle faire de ces outils ? Quelles sont les *conditions et contraintes* sous lesquelles $\hat{\imath}$ est amenée à opérer qui, étant donné P, déterminent le choix des outils et de leurs usages ?

On pourra réexaminer ce qui précède dans la perspective de cette question. La petite étude de cas réalisée illustre en particulier – à mes yeux du moins – tout d'abord la variété des *outils*, qui offrent des *milieux* non toujours homologues ; ensuite, la variété des *usages* que l'on peut en faire, en fonction de ces milieux. Par contraste, on peut envisager les *hypothèses de travail* suivantes :

---

[27] Deux entiers a et b sont congrus modulo n s'ils ont le même reste dans la division par n (c'est-à-dire s'ils ont la même image par l'homomorphisme canonique de l'anneau $\mathbb{Z}$ sur l'anneau quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). Voir par exemple à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Modulo_operation.

$\mathcal{HT}$. En nombre d'institutions, et en particulier d'institutions scolaires, s'observe une tendance invétérée à un « monisme praxéologique » qui s'exprime par un mono-usage d'un mono-outil, « contre » des usages diversifiés d'outils eux-mêmes diversifiés. De cela résulterait un sous-développement de l'équipement praxéologique des sujets de l'institution considéré.

$\mathcal{HT}'$. En nombre d'institutions, et en particulier d'institutions scolaires, s'observerait une tendance impénitente à une réduction de la dialectique des médias et des milieux, trop souvent identifiée à un mono-type de preuve –par le raisonnement, par le calcul, par l'expérimentation, etc.

Pour clarifier ce point, revenons un instant sur la notion d'hypothèse de travail en considérant la définition ci-après, que l'on trouve dans le *Century Dictionary Supplement* (1909)[28] :

Working hypothesis, a hypothesis suggested or supported in some measure by features of observed facts, from which consequences may be deduced which can be tested by experiment and special observations, and which it is proposed to subject to an extended course of such investigation, with the hope that, even should the hypothesis thus be overthrown, such research may lead to a tenable theory. (p. 616)

➤ Cela noté, quelles conséquences pourrait avoir l'hypothèse de travail $\mathcal{HT}$, que j'appellerai aussi « l'hypothèse *un outil-un usage* » ? Un effet d'ensemble est la *naturalisation* des praxéologies correspondantes, comme il en va si l'on dit : « Tu prends une calculatrice et tu calcules… » Il y aurait ainsi un usage « naturel » (*calculer*) d'un objet « naturel » (*la calculatrice*). Une première conséquence de ce processus de naturalisation est d'écarter implicitement d'autres usages possibles d'une calculatrice, comme il en va avec la technique, vue lors de la séance 4, permettant de rationaliser une fraction comportant un radical au dénominateur, technique que je rappelle rapidement.

Soit par exemple $F = \frac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}$. On *sait* que F s'écrit $a + b\sqrt{7}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$. On *sait* que $F(\sqrt{7}) + F(-\sqrt{7}) = a + b\sqrt{7} + a - b\sqrt{7} = 2a$, en sorte que $2a = \frac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} + \frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} =_{\mathbb{C}} 16$, et on a donc $a = 8$, où $\mathbb{C}$ est « une calculatrice ». De même, on sait que l'on a $F(\sqrt{7}) - F(-\sqrt{7}) = 2b\sqrt{7}$, en sorte que $2b = \frac{1}{\sqrt{7}}\left(\frac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} - \frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}\right) =_{\mathbb{C}} 6$, si bien que $b = 3$. Finalement il vient $F = \frac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} = 8 + 3\sqrt{7}$.

On peut « calculer » alors que l'on a, par exemple avec la calculatrice $\mathbb{W}$, $\frac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} =_{\mathbb{W}}$ 15,937253933194 et $8 + 3\sqrt{7} =_{\mathbb{W}}$ 15,937253933, et ainsi vérifier l'égalité[29] des deux

[28] Voir à l'adresse https://archive.org/stream/cu31924091890685#page/n633/mode/2up. Sur le *Century Dictionary*, voir à https://en.wikipedia.org/wiki/Century_Dictionary. Pour plus de détails sur la notion d'hypothèse de travail, voir notamment à l'adresse https://bit.ly/3cJIkCh.

[29] On aura observé que la calculatrice $\mathbb{W}$ n'affiche pas formellement la même réponse dans les deux cas. (Sur $\mathbb{W}$, on pourra voir à l'adresse https://geekgirls.com/2010/02/using-words-hidden-calculator/.) J'ai montré par

expressions. Cet exemple rappelle d'abord que la naturalisation d'une praxéologie entraîne très généralement l'amuïssement de son *logos*. Mais il y a plus.

➤ Ce qui disparaît aussi, c'est la simple indication de la *technique* elle-même et, consubstantiellement, la connaissance « fine », souvent utile, du comportement du *milieu* sollicité. Comment rationaliser le dénominateur de $F = \dfrac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}$? Réponse laconique qu'on entendrait si cette technique était véritablement pratiquée : « Avec une calculatrice ! » La technique elle aussi devient ainsi silencieuse : inutile d'en parler puisqu'elle serait « naturelle », et donc irait de soi. Ce rabougrissement de l'évocation de la technique affecte en priorité des éléments qui, dans la culture mathématique « ordinaire », c'est-à-dire réduite à l'évocation d'objets tenus pour purement mathématiques, et donc volontiers oublieuse de ces ingrédients de l'activité mathématique qui ne le seraient pas, telle une calculatrice et ses « idiosyncrasies ».

➤ Cette propension à la « quintessenciation mathématique » ne touche pas que des aspects « matériels » de l'activité mathématique. En se référant ici à la séance précédente de cet *Humble séminaire*, on pourra penser au contraste, dans l'usage de l'*outil algébrique*, entre ce que faisait Descartes en 1643 (dans sa lettre du 17 octobre à la princesse Élisabeth de Bohème), ou encore ce que faisait, à un niveau bien plus modeste, Théophile Moreux dans son livre d'initiation à l'algèbre de 1926 (qui s'intitulait, il est vrai, « Pour *comprendre* l'algèbre »), avec ce qui se fait généralement aujourd'hui : d'une technique mêlée de morceaux de technologie, on passe alors souvent à une simple injonction (« Calculer ! », « Factoriser ! », « Dériver ! », etc.), comme si jamais il n'était utile d'expliciter *comment on s'y prend* pour accomplir la tâche prescrite. C'est là un phénomène qu'il serait utile de soumettre à « an extended course of investigation », pour parler comme le *Century Dictionary Supplement*.

Une enquête encore : se toucher le visage ?

Un second énoncé, ϑ_2, a été considéré à la fin de la séance 6 ; je le rappelle :

> ϑ_2. « Chacun de nous touche son visage plusieurs centaines de fois par jour. »

---

ailleurs que, cependant, l'égalité des expressions considérées découle bien des résultats *affichés* obtenus. Notons que la calculatrice $\mathbb{C}'$ (*Full Precision Calculator*) donne pour l'une et l'autre expressions la valeur suivante : 15.9372539331937717715048472609177812771307775492473505411050033776032064696908508832811786594236308318451937350154923892872305896658816443532821716676403231681514521891849716768990687845952617821029 34.

L'enquête à mener porte sur l'énoncé $\vartheta = \vartheta_2$ ou, plus exactement, sur la question $Q = Q_2$ suivante : « Combien de fois nous touchons-nous le visage chaque jour ? » Je note sans attendre que cette question d'enquête inclut implicitement la question « Comment le savons-nous ? » puisque la réponse $R^{\heartsuit}$ doit être justifiée (même si les réponses $R_i^{\lozenge}$, elles, ne le sont pas toujours).

➤ La question Q appelle une remarque. Ce n'est pas, a priori, une question relevant des mathématiques. Mais elle appartient à un type de questions bien représentatif du paradigme du questionnement du monde : un certain nombre d'instances $\hat{w}$ profèrent l'énoncé ϑ et cet énoncé a des incidences possibles dans la vie sociale et citoyenne. Questions : cet énoncé est-il vrai ? D'où vient-il ? Quelles en sont les justifications possibles ? Dans un tel cas, l'enquête doit certainement partir d'un repérage d'un certain nombre d'émetteurs possibles dont on recueille les messages. Pour ce qui est de ϑ (et de Q), je me limiterai ci-après, volontairement, à un début d'enquête. Voici un premier exemple[30].


Les gestes barrières : éviter de se toucher le visage

21 novembre 2017

En moyenne, votre main entre en contact avec votre visage jusqu'à 3 000 fois dans la journée. Or, le nez, les yeux et la bouche sont des portes d'entrée pour les virus et les bactéries.

Pour éviter la propagation, il faut donc essayer d'éviter de se toucher le visage et se laver régulièrement les mains.

Il s'agit d'un message de l'*Agence Régionale de Santé* (ARS)[31] daté du 21 novembre 2017 – donc, bien avant la pandémie du Covid-19. D'où sort le nombre limite de 3000 avancé ici ? Nous ne le savons pas : l'énoncé est formulé comme une vérité absolue. Se toucher le visage 3000 fois en 12 heures, cela fait 250 touchers par heure, soit encore plus de quatre fois par minute, et environ une fois toutes les 15 secondes, et cela pendant 12 heures ! Je suggère ici qu'une observation « naïve » de quelques personnes de notre entourage pendant quelques minutes pourrait constituer un milieu permettant de *rejeter* l'effectif annoncé par l'ARS.

[30] Voir à l'adresse https://www.ars.sante.fr/les-gestes-barrieres-eviter-de-se-toucher-le-visage.

[31] Sur l'ARS, voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Agence_régionale_de_santé.

➤ Examinons maintenant le deuxième document à avoir été rencontré au fil d'une première recherche sur Internet[32].

Combien de fois on se touche le visage par jour ?

La réponse du Dr Svenja Möllgaard, développement produit Nivea Visage à la R&D de Beirersdorf à Hambourg.

On le dit, on le répète, le démaquillage est l'étape clé pour afficher une belle peau. Matin et soir, c'est LE geste à adopter pour enlever les résidus de maquillage, les particules des polluants et autres poussières qui ternissent le teint. Mais en dehors des éléments extérieurs (air, maquillage etc…), plusieurs fois par jour nous salissons notre peau en… la touchant tout simplement !

> C'est sans compter que l'on se touche près de 250 fois par jour, avec des doigts pas toujours propres

explique Dr Svenja Möllgaard, spécialiste en Recherche et Développement de Beiersdorf qui vient de lancer une toute nouvelle gamme de démaquillants-soins (lait, lingettes et crème nettoyante) à découvrir en mars. On vous le dit maintenant mais chuuuut… cette ligne appelée Creme Care reprend le parfum et les actifs stars de la cultissime boîte bleue…

On se touche le visage 250 fois par jour !

Beurk, beurk, beurk ! Les doigts déposent du coup des petites saletés sur le visage qui peuvent boucher les pores ou être à l'origine des imperfections cutanées et autres petits boutons. Donc, nouvelle règle à appliquer dès à présent : essayer de se toucher le moins possible le visage (plus facile à dire qu'à faire). Notre conseil : dans un premier temps prendre déjà conscience des moments où on approche de trop près nos doigts du visage (en réunion, quand on téléphone etc…) En adoptant ce nouveau réflexe beauté, vous verrez aussi les boutons situés sur le menton et sur les contours du visage peu à peu disparaître ! Ça vaut vraiment le coup d'essayer !

Il s'agit là d'un article dû à Alexandra Raillan publié dans *Marie France*, « magazine féminin », le mercredi 24 février 2016 puis mis à jour le jeudi 23 juin 2016. On notera à nouveau que l'information est donnée bien avant l'actuelle pandémie. Soulignons aussi que le genre « conseils de beauté » dans lequel entre cet article n'est pas une raison pour l'écarter (en vertu d'un principe énoncé plus haut). De 3000 touchers faciaux, on passe brutelement à 250. À nouveau, aucune origine ni justification n'est donnée, bien qu'une « scientifique », le « Dr Svenja Möllgaard », soit mentionnée implicitement comme garante du propos. Cette absence d'origine constitue, semble-t-il, le « régime de vérité » de ces énoncés sans filiation. Deux-cent cinquante fois en 12 heures, c'est presque 21 fois par heure, ce qui fait à peu près un toucher toutes les trois minutes. C'est donc bien moins que ce que prétend l'ARS. Notons qu'une certaine autorité sur la question des touchers faciaux peut être reconnue à Svenja

[32] Voir à l'adresse https://www.mariefrance.fr/beaute/la-question-qui-tue/soins/combien-de-fois-on-se-touche-le-visage-par-jour-241025.html.

Möllgaard par certaines instances : son employeur, Nivea, la présente ainsi comme « directrice des laboratoires de Recherche et Développement NIVEA Face Care »[33].

➤ Le troisième document est un article récent du quotidien *Le Monde*, publié le 21 avril 2020 et mis à jour le 23 avril 2020. Il est dû au sociologue Pierre Bouvier et s'institule « Pourquoi nous nous touchons le visage en permanence et comment concilier cela avec le port du masque »[34]. Cette fois, nous sommes dans l'actualité de la crise liée au covid-19. L'article est sous-titré « L'idée d'un port généralisé d'un masque fait son chemin. Reste à concilier ce geste barrière avec celui, réflexe, consistant à se toucher le visage ». L'auteur y rappelle d'abord que l'ARS affirmait en novembre 2017 que « certains individus se touchent machinalement le visage jusqu'à… *"trois mille fois par jour"* » – ce qui ne fait pas avancer notre enquête, certes. Mais il ajoute alors ceci :

> En 2015, une étude menée par Mary-Louise Mclaws de l'université de Nouvelle-Galles du Sud, à Sidney, et publiée dans l'*American Journal of Infection Control*, montrait qu'un groupe de vingt-six étudiants touchait, en moyenne, son visage vingt-trois fois par heure. […] En août 2019, une étude de l'université de Tokyo arrivait sensiblement aux mêmes conclusions.

On a là la première référence à un travail d'ambition scientifique. Vingt-trois fois par heure durant 12 heures, cela fait 276 fois en un jour : on retrouve ainsi le niveau évoquée dans le magazine *Marie France*.

➤ Le premier lien offert par le passage ci-dessus conduit à un article de la journaliste Nell Gluckman paru le 5 mars 2020 dans *The Chronicle of Higher Education*[35]. Consacré à Mary-Louise McLaws (School of Public Health and Community Medicine, Sydney, Australie), cet article est intitulé « The Face of Face-Touching Research Says, 'It's Quite Frightening' ». On y lit notamment ceci[36] :

> She [Mary-Louise McLaws] was shocked five years ago when, for research that was later published in the *American Journal of Infection Control*, she counted up the number of times 26 University of New South Wales students touched their faces over four hours. She witnessed more than 2,300 face-touches and calculated that each student did it about 23 times an hour. More unnervingly, the students touched their eyes, noses, or mouths about 10 times an hour.

---

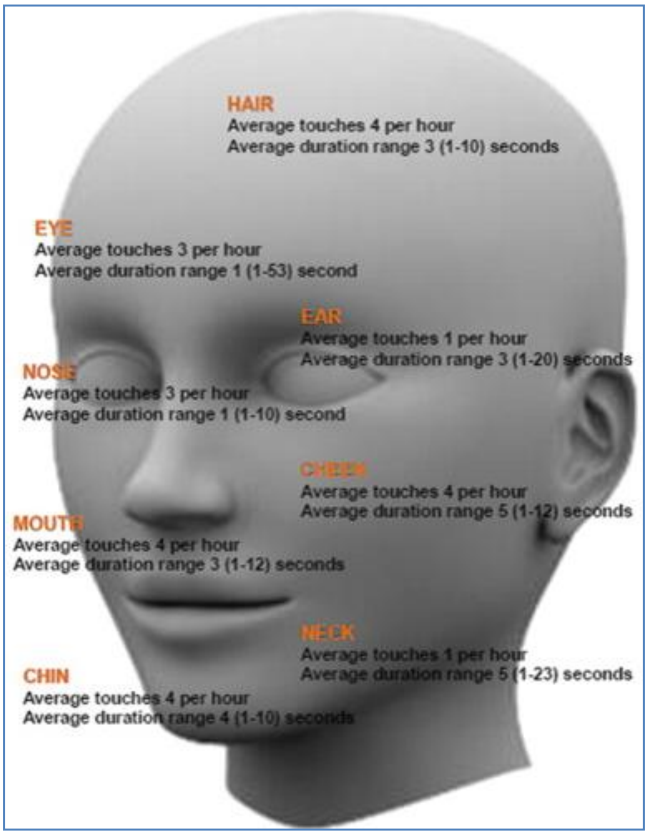
[33] Voir à l'adresse https://www.nivea.ch/fr-ch/nouveautes-nivea/hyaluron-cellular-filler-elasticite. Sur Nivea, voir à https://fr.wikipedia.org/wiki/Nivea et aussi à https://en.wikipedia.org/wiki/Nivea.

[34] Voir à l'adresse https://www.lemonde.fr/planete/article/2020/04/21/pourquoi-nous-nous-touchons-le-visage-en-permanence-et-comment-concilier-cela-avec-le-port-du-masque_6037344_3244.html. Sur l'auteur, voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre_Bouvier_(sociologue).

[35] Voir à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/The_Chronicle_of_Higher_Education.

[36] Voir à l'adresse https://www.chronicle.com/article/The-Face-of-Face-Touching/248195 ou encore à l'adresse https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/25637115/.

Ce qui est plus inquiétant (*unnerving*), écrit la journaliste en écho à Mary-Louise McLaws, c'est d'observer que ces étudiants se livrent à environ dix touchers par heure, soit 120 touchers par jour, des parties les plus susceptibles de favoriser une contamination : yeux, nez et bouche. On verra sur la figure ci-après le détail des touchers par heure observés par l'équipe qui a publié dans l'*American Journal of Infection Control* en février 2015 l'article intitulé « Face touching: A frequent habit that has implications for hand hygiene »[37].



➤ L'article du *Monde* renvoie aussi à une publication plus récente (elle a été mise en ligne le 13 août 2019), dont les six auteurs appartiennent à trois universités de Tokyo (Japon). Leur article s'intitule « Measurement of Face-touching Frequency in a Simulated Train ». Le résumé (*abstract*) qui le précède fournit une information utile, que je reproduis ci-après[38] :

> In the present study, a video monitoring survey was conducted in a simulated cabin of a commuter train, we had built, to investigate the relationship between face-touching frequencies and individual attributes. As a result, the average face-touching frequency was 17.8 times per hour. Of all face touches, mucosal contact was 42.2%. Focusing on the sex, the face-touching frequency was significantly higher for the males than for the females. Focusing on the skin condition, the face-touching frequency of those who did not wear makeup was significantly higher than that of those who did. The significant sex differences may depend on the makeup.

[37] Voir à l'adresse https://www.ajicjournal.org/article/S0196-6553(14)01281-4/fulltext.

[38] Voir à https://bit.ly/2XRpGnB.

> Focusing on pollution awareness, higher pollution awareness related to lower frequency. Thus, by improving pollution awareness of the environmental surfaces in public spaces, it is possible to reduce effectively face-touching frequency and, hence, infection risk.

Nous avons ici un dispositif observationnel plus sophistiqué. Mais les résultats ne sont pas fondamentalement différents de ceux de l'étude précédente : 17,8 touchers par heure au lieu de 23, ce qui fait 213,6 touchers en 12 heures au lieu de 276. Par ailleurs, les pourcentages de touchers sur des muqueuses sont proches : 42,2 % pour l'étude japonaise, 1024 / 2346 ≈ 43,6 % pour l'étude australienne. Si l'on arrête là notre enquête, on conclura provisoirement que les études examinées ici conduisent à l'hypothèse de travail que l'on se touche le visage en moyenne plus de 200 et moins de 300 fois, et une (petite) moitié de fois que l'on se touche des muqueuses. Où que ce soit (et donc aussi dans une classe), une enquête peut toujours être *poursuivie*, et, quand on l'a arrêtée, elle peut être *reprise*. Pour aujourd'hui, je m'en tiendrai là.

Enquêter ? Enquêter !

Les deux esquisses d'enquête présentées ci-dessus montre un aspect souvent dissimulé : une enquête – mathématique ou autre – conduit à examiner, de manière plus ou moins approfondie, une foule de questions Q_l plus ou moins inattendues (par exemple sur la marque Nivea, les fonctions elliptiques, etc.), qui font sortir l'enquêteur $\hat{h}$ (ou l'équipe d'enquête $\hat{H}$) de son domaine de « spécialité ». Ƶ Le « spécialiste » d'un domaine de questions $\boldsymbol{Q}$ est presque nécessairement *aussi* un enquêteur « non spécialisé ». Cela noté, je voudrais ajouter quelques remarques sur le fait d'enquêter et sur le questionnement du monde. Je commence par un retour sur notre plus ancien passé, ce qui pourrait bien éclairer notre présent et les voies d'avenir que nous pourrions emprunter.

➤ Dans son livre *Le problème de l'incroyance au 16^e^ siècle. La religion de Rabelais* (1947)[39], l'historien Lucien Febvre (1878-1956) soulignait le danger qu'il y eut, longtemps, à vouloir poursuivre de libres recherches. Il écrivait notamment :

> La vérité ? Tant mieux pour qui a su la déceler. C'est son trésor mignon ; il la serre sur son cœur, portes closes et la caresse en jaloux. Ni Descartes, ni Malebranche, ni Spinoza ne feront autrement. À plus forte raison ceux du XVI^e^ siècle. Ils savent le prix des vérités, si dures à arracher. Ils savourent le triomphe des réussites, la jouissance solitaire, violente et rare, de l'intelligence qui, à grand-peine, sans guide presque, ni maître, trouve. Ils savent aussi que ces joies, ces réussites sont le fait d'une élite, la récompense d'une élite. Encore les membres de cette élite s'amusent-ils volontiers à jouer des tours aux confrères, aux émules, à dissimuler aux rivaux tel résultat précieux […]. Copernic attend sa fin pour publier son système ; un siècle plus

[39] Voir à http://classiques.uqac.ca/classiques/febvre_lucien/probleme_incroyance_16e/febvre_incroyance.pdf.

> tard, Huygens tiendra encore secrète − pendant plusieurs années − sa façon de concevoir les anneaux de Saturne ; il se contentera de prendre date, à tout hasard, en faisant imprimer au bas d'un mémoire une formule d'allure cabalistique dont il possède la clef… (pp. 421-422)

Et il ajoutait encore ce « détail », où tout un monde se donne à voir[40] :

> Pour que les choses changent un peu, il faudra le XVIII^e^ siècle et ses ardeurs de prosélytisme. Le XVI^e^ siècle ? Relisons, dans le *Discours de la Licorne* d'Ambroise Paré [† 1590], l'histoire du médecin de Charles IX, Chapelain [† 1569], qui ne croyait pas plus que Paré à la vertu curative de la corne de licorne. Sommé de s'en expliquer et d'employer son autorité au service du vrai : « Jamais, répondit-il, jamais de son vivant il ne se mettrait en butte pour se faire becqueter des envieux et médisants. » Mais il ajoutait qu'après sa mort, l'on trouverait ce qu'il en avait laissé par écrit... » (p. 422)

D'une façon générale, sans vergogne aucune, les pouvoirs (d'Église, d'État, etc.) sont ainsi interdicteurs et tyranniques. L'examen de toute question tend à leur être suspect. L'épisode suivant est conté dans les *Mémoires sur le dix-huitième siècle et sur la Révolution*, parus à titre posthume en 1822, de l'abbé André Morellet (1727-1819), que ses amis philosophes (dont Voltaire et d'Alembert) surnommaient *Mords-les !* pour son alacrité intellectuelle[41] :

> En 1764, M. de Laverdy, alors contrôleur général, ayant fait rendre un arrêt du conseil qui défendait d'imprimer sur les matières d'administration, sous peine d'être poursuivi extraordinairement, ceux qu'on appelait alors philosophes furent indignés ; et j'étais de ce nombre. Je combattis pour la liberté de la presse, et j'intitulai mon ouvrage *De la liberté d'écrire et d'imprimer sur les matières de l'administration*. C'était le développement d'une partie du *Traité de la liberté de la presse* que j'avais commencé à la Bastille […]. Je gardais ici une extrême modération, afin de ne pas rencontrer d'obstacles ; mais cette réserve ne me servit de rien, et je ne pus obtenir pour moi-même la liberté que je demandais pour tous. Cependant mon travail n'avait pas déplu à M. Trudaine ; son fils l'avait communiqué à M. Chauvelin, intendant des finances, et celui-ci au contrôleur général : mais le ministre y fit une réponse à mi-marge, tout entière de maximes despotiques, ou de la théorie des premiers commis : « pour parler d'administration, il faut tenir la queue de la poêle, être dans la bouteille à l'encre ; et ce n'est pas à un écrivain obscur, qui, souvent, n'a pas cent écus vaillants, à endoctriner les gens en place ». J'ai longtemps gardé ce précieux document. On comprend bien que mon ouvrage ne fut pas alors imprimé ; mais en 1774, M. Turgot étant arrivé au ministère, je le publiai avec

---

[40] Sur la « corne de Licorne », voir à https://fr.wikipedia.org/wiki/Corne_de_licorne.

[41] Pour l'édition originale, voir à https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k64768q/f15.item.texteImage.zoom. J'utilise l'édition parue en 2000 au Mercure de France. Je suppose que le Trudaine dont parle Morellet était Daniel-Charles Trudaine (1703-1769) : voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Daniel-Charles_Trudaine.

> l'épigraphe de Tacite : *Rara temporum felicitate, ubi sentire quae velis, et quae sentias dicere licet* [Le rare bonheur d'une époque où l'on peut penser ce que l'on veut et dire ce que l'on pense]. (p. 158)

Bien entendu, contre cet interdit de la libre recherche, contre ce qu'on a appelé la *libertas inquirendi* (la liberté de chercher, d'enquêter), la lutte a été persévérante en faveur des « lumières ». À cet égard, outre Morellet, je citerai seulement le court texte qu'Immanuel Kant (1724-1804) fit paraître en décembre 1784 dans la *Berlinische Monatsschrift* en décembre 1784 sous le titre *Beantwortung der Frage : Was ist Aufklärung?*, c'est-à-dire *Réponse à la question : qu'est ce que les Lumières ?*[42]. En voici le début, où il énonce « la devise des lumières », *Ose savoir* :

> *Les lumières sont ce qui fait sortir l'homme de la minorité qu'il doit s'imputer à lui*-même. La *minorité* consiste dans l'incapacité où il est de se servir de son intelligence sans être dirigé par autrui. Il doit *s'imputer à lui-même* cette minorité, quand elle n'a pas pour cause le manque d'intelligence, mais l'absence de la résolution et du courage nécessaires pour user de son esprit sans être guidé par un autre. *Sapere aude*, aie le courage de te servir de ta *propre* intelligence ! Voilà donc la devise des lumières.

Malgré l'émancipation intellectuelle qui a changé nos sociétés si fortement depuis le XVIII^e siècle, il reste dans nos cultures « modernes » certains stigmates de ces longs siècles de répression.

➤ Le désir de savoir, la volonté *d'enquêter pour savoir* se heurtent ainsi, en nombre de cultures humaines à une hostilité mâtiné d'incompréhension. On parle par exemple, en français, de « curiosité mal placée ». Les mots pour exprimer l'attitude enquêtrice sont souvent ambivalents quand ils ne sont pas uniquement négatifs. Le CNTRL retient ainsi cette définition du mot *inquisiteur*[43] : « Qui cherche à s'enquérir de quelque chose, à découvrir quelque chose de façon *souvent indiscrète, insistante*… » En anglais, le mot *inquisitory* reçoit de *Wordnet* la définition suivante : « diligent and thorough in inquiry or investigation. » Mais le dictionnaire en ligne Merriam-Webster, lui, donne de *inquisitor* une double définition : c'est d'abord, positivement, « one who inquires or makes inquisition » ; mais c'est aussi « one who is unduly harsh, severe, or hostile in making an inquiry ». On pourrait continuer longtemps sur cette voie. Je dirai qu'un enquêteur $\hat{h}$ – ce peut être un chercheur ou un « simple citoyen » – est nécessairement un « indiscret systématique », qui doit souvent

---

[42] Voir à https://fr.wikisource.org/wiki/Métaphysique_des_mœurs_(trad._Barni)/Tome_I/PERAD/Réponse.

[43] C'est moi qui souligne.

assumer d'aller contre l'opinion et la bienséance communes. Tout cela appelle quelques remarques complémentaires.

➤ La remarque essentielle est celle-ci : $\hat{h}$ doit se reconnaître le droit de rechercher toute information qui lui paraît utile à son enquête ou ses enquêtes, même quand des instances $\hat{w}$, $\hat{w}'$, $\hat{w}''$, $\hat{w}'''$, etc., prétendent lui dénier ce droit. C'est ainsi que l'on pourrait enquêter sur le processus qui a conduit l'ARS à publier sur son site web l'affirmation qu'une personne peut se toucher le visage « jusqu'à 3000 fois dans la journée ». Qui en a eu l'idée ? D'où vient le nombre de 3000, quelle en est la source ou la genèse ? Qui a écrit le texte où s'inscrit l'énoncé examiné plus haut ? Il y aurait là sans doute des données utiles pour modéliser la fabrication, au sein d'une institution donnée, d'un énoncé ϑ en vue de le diffuser.

➤ Nous savons ce qui, dans une certaine culture populaire ou petite-bourgeoise, vient contrebattre comme un automatisme mental toute volonté enquêtrice : « Pourquoi tu demandes ça ? En quoi ça t'intéresse ? Occupe-toi de tes oignons ! (*Mind your own business, No es asunto tuyo!*) Etc. » C'est là la reprise, par des non-dominants, de l'obsession obsidionale des dominants qu'illustraient si nettement les propos de Morellet.

➤ Cela noté, on ne doit pas confondre le droit de vouloir savoir et le droit d'enquêter à cette fin avec le fait que l'exercice de ce droit « épistémique » peut, dans une situation donnée, rencontrer des obstacles de tous ordres (pratiques, légaux, etc.), dont certains peut-être ne pourront pas être surmontés dans un avenir prévisible. Toute instance – y compris un enquêteur $\hat{h}$ – peut fort bien refuser de livrer telle information en sa possession à tel enquêteur $\hat{h}'$, sans que cela invalide le droit de $\hat{h}'$ à continuer de rechercher cette information.

➤ D'autres symptômes que ces refus d'informer sont pourtant inscrits dans la culture de l'antique agenouillement devant les puissances établies. Une forme parmi les plus subtiles est celle qu'illustre le cas du nombre de touchers faciaux quotidiens : elle consiste en ceci qu'une instance $\hat{w}$ profère telle affirmation ϑ comme *allant de soi*, c'est-à-dire sans l'accompagner de l'indication d'éléments de justification objectifs ou sans la présenter comme une hypothèse de travail au sens que nous avons vu plus haut, mais en général en faisant usage, implicitement ou explicitement, d'un argument d'autorité approximatif, attaché aux supposés « sachants ». On peut voir en tout cela un amoindrissement sournois de la démocratie.

➤ La période récente a été prolifique à cet égard : « Porter un masque ne sert à rien », ou encore « Il ne servirait à rien de tester largement » a-t-on pu entendre ainsi de façon répétitive, ces assertions étant souvent proférées par des intervenants excipant du titre de médecin (ou de « scientifique ») ainsi que par des commentateurs psittacistes. Or c'est là une manière d’interdire pratiquement aux citoyens de s’enquérir des justifications existantes de l’assertion ϑ proférée. Que l’on accepte cette pratique et ce sera, insidieusement, une façon pour le citoyen – individuel ou collectif – de courber la tête devant des minorités autoproclamées s’octroyant un pouvoir non débattu d’*imposer* leur vérité en la proposant comme *allant de soi*, ou même comme *bien connue*. Ce sera une manière de renoncer à être un citoyen « complet ».

➤ Finalement, ce qui seul « autorise » une instance $\hat{w}$ à proférer une assertion ϑ relativement à une question *Q*, c’est, semble-t-il, de se trouver dans l’un des trois cas suivants : 1) $\hat{w}$ a étudié *Q* en usant de certains milieux et est arrivé ainsi, sans en rabattre sur la dialectique des médias et des milieux, à la conclusion ϑ, même si celle-ci ne constitue pas une réponse développée à *Q* (c’est là le cas des équipes australienne et japonaise qui ont étudié le *face touching*) ; 2) $\hat{w}$ a étudié les messages (sous forme d’articles scientifiques notamment) émis par des instances rentrant sous 1 et a fait écho à leur conclusion (c’est le cas de Pierre Bouvier rédigeant son article paru dans *Le Monde*) ; 3) $\hat{w}$ a pris connaissance des messages émis par des instances rentrant sous 2 (c’est le cas de ϟ lisant – étudiant – l’article de Pierre Bouvier). Tout cela n’implique pas, bien entendu, que $\hat{w}$ tienne l’énoncé ϑ pour (définitivement) vrai, mais seulement que l’on a $\hat{w} \nvdash \neg\vartheta$, c’est-à-dire que $\hat{w}$ considère que, en tout cas, la fausseté de ϑ n’est pas établie. Ayant cela en tête, après l’hostilité aux demandes d’information et la floraison sans principes d’assertions réputées aller de soi (ou regardées comme bien connues), nous pouvons considérer un troisième stigmate de l’antique interdit pesant sur le questionnement du monde.

➤ À partir du XVI^e siècle en Europe, cet interdit général imposé par des institutions religieuses ou politiques a, peu à peu, laissé la place à un « encadrement » du questionnement par l’apparition de *disciplines* regardées chacune comme le lieu autorisé (mais toutefois surveillé) d’un *certain* questionnement, c’est-à-dire où des questions d’un certain type (d’histoire littéraire, de physique, de géographie, de physiologie, etc.) pouvaient être légitimement étudiées. Ce compartimentage du questionnement n’est pas tout. Il a permis autrefois qu’un chercheur ξ se déplace d’un compartiment à un autre, qu’il soit par exemple physicien le matin et physiologiste l’après-midi, passant d’un laboratoire de physique le matin à un laboratoire de physiologie l’après-midi. En ce cas, les « cases » (les disciplines) sont fixées, mais ceux qui s’y activent peuvent changer de cases. Or on sait que cet encadrement a, depuis au moins un siècle et demi, été redoublé par l’assignation des chercheurs à une résidence disciplinaire invariante (même si quelques-uns changent de case, volontairement ou involontairement, au cours de leur vie de chercheur) : on n’est pas chercheur mais chercheur-en-telle-discipline. Le phénomène produit mécaniquement l’augmentation du prix d’entrée dans un champ disciplinaire donné, ce qui fait diminuer encore le nomadisme interdisciplinaire[44]. Il y a là un facteur important de réduction du questionnement « non spécialisé », dès lors que toute question est assignée à une discipline déterminée. Cela, en outre, va à l'encontre de la création de nouveaux domaines de recherche, nécessaires lorsqu'on souhaite étudier des questions ne relevant pleinement d'aucun des champs disciplinaires existants, sauf à y être transposées d'une manière plus ou moins fortement réductrice.

➤ La réduction disciplinaire de la recherche, dont la finalité principale est, bien entendu, de donner à cette recherche *une plus grande puissance*, a une autre conséquence négative, et presque perverse, qu'illustre la question des « touchers faciaux ». Étant donné une question Q regardée comme relevant d'une discipline $\mathcal{D}$, non seulement cette question sera interdite à qui ne peut se réclamer pleinement de $\mathcal{D}$, mais, à l'inverse, elle sera encore la « proie » des « $\mathcal{D}$-istes », qui se sentiront légitimes, et parfois contraints par l'étiquette qu'ils ont faite leur, d'apporter une réponse à Q (« jusqu'à 3000 fois dans la journée »), alors même *qu'ils n'ont pas étudié cette question*, en aucun sens du terme, en ne lui consacrant pas même quelques heures, voire quelques minutes, de leur réflexion. C'est là sans doute une des formes les plus insidieuses d'empêchement au questionnement citoyen du monde. La formation et l'évolution des disciplines, des « matières », des sciences, dont l'objectif premier est de donner à ceux qui s'y assujettissent les moyens matériels et intellectuels d'une dialectique des médias et des milieux plus efficiente, ont aussi des effets « pervers ».

III. Miscellanées

En cette dernière séance de l'année universitaire 2019-2020, j'ouvre ici une nouvelle rubrique, que j'ai hésité à nommer : « Varia », « Spicilège », « Miscellanées » ? Je me suis résigné à employer ce dernier terme, qui peut sembler aujourd'hui plutôt recherché[45] mais qui,

---

[44] Un des facteurs aggravant de ce phénomène tient aux curriculums conduisant au champ disciplinaire où il apparaît légitime d'étudier un ensemble $\boldsymbol{Q}$ donné de questions, quand ces curriculums exigent l'étude d'œuvres sans véritable pertinence pour l'étude de $\boldsymbol{Q}$ (alors que, dans le même temps, des questions Q_l « rencontrables » restent ignorées). Pour n'évoquer ici qu'un exemple majeur, en France l'enseignement de l'économie à l'université a longtemps cantonné celle-ci « au rang de discipline auxiliaire du droit », et ce fait a longuement marqué, même après la création d'UER (Unités d'Enseignement et de Recherche) autonomes de sciences économiques (1968), l'enseignement universitaire de l'économie : là-dessus voir l'article de Denis Clerc à l'adresse https://www.cairn.info/revue-nouvelles-fondations-2006-2-page-76.htm#.

[45] Voir à https://fr.wikipedia.org/wiki/Miscellanées. Le mot vient du latin *miscellanea*, « choses mêlées », « pot-pourri », par substantivation de l'adjectif *miscellaneus* « mêlé, mélangé », de *miscere* « mêler, mélanger ».

dans la Rome antique, n'en désignait pas moins la nourriture on ne peut plus antidiététique donnée aux gladiateurs[46]. Cela dit, le but de cette rubrique est d'apporter des *précisions*, en fonction des besoins repérés, sur tel ou tel point, sans développer l'exposé de façon systématique (sinon exhaustive), ainsi qu'il en va notamment, en principe, dans la rubrique *Élémenter la TAD*. Les points choisis dépendront des observations que j'aurai faites ou qui auront été portées à ma connaissance.

À propos du symbole ♥

➤ Aujourd'hui, je voudrais d'abord examiner ce qui peut apparaître comme une ambiguïté. J'ai utilisé le symbole ♥ dans le schéma herbartien semi-développé ($S(X, Y, Q)$ ➦ M) ➥ $R^♥$ pour dire ceci : dans la classe $[X, Y]$ où s'est formé le système didactique $S(X, Y, Q)$, une fois que la réponse $R^♥$ a été institutionnalisée, elle est – provisoirement, sans doute – *la* réponse de la classe à la question Q : en d'autres termes, en tant que réponse à Q, elle est *au cœur* de la classe – de là le symbole utilisé.

➤ Une difficulté surgit quand on utilise, comme j'ai pu le faire aussi, la notation $S(X, Y, ♥)$ pour désigner un système didactique dont *l'enjeu didactique* – l'objet d'étude – est aussi désigné par le symbole ♥. Lors de la séance 2 de cet *Humble séminaire*, j'ai noté une classe $[X, Y, \mathcal{O}]$, où $\mathcal{O}$ est l'ensemble des œuvres o à étudier. Dans le plus classique des schémas pédagogiques, la classe se constituera successivement (ou simultanément) en systèmes didactiques $S(X, Y, o)$, où $o \in \mathcal{O}$ est une œuvre « au programme de la classe ». C'est un tel système didactique que j'ai noté en certains cas $S(X, Y, ♥)$, où $♥ = o$, là encore pour exprimer que l'œuvre o est (provisoirement) *au cœur* de l'activité du système didactique. Lorsque l'œuvre o à étudier est une question Q, nous retrouvons la situation précédemment évoquée : la question Q est *au cœur* de l'activité de la classe constituée en système didactique $S(X, Y, Q)$, comme le fruit même de cette activité, à savoir la réponse $R^♥$, sera *ensuite* au cœur de l'activité de la classe chaque fois que la question Q se présentera à elle.

➤ Que se passe-t-il lorsque l'œuvre o à étudier – c'est-à-dire l'œuvre qui est au cœur de l'étude – *n'est pas* une question, mais une organisation praxéologique ou un composant d'une telle organisation, que je noterai génériquement $\wp$? L'étude de l'œuvre $o = \wp$ consiste alors à *questionner* o et à s'efforcer d'apporter des réponses solides et satisfaisantes à ces questions. À l'ensemble de questions Q', Q'', Q''', Q'''', etc., à propos de o va correspondre la formation et l'activité de systèmes didactiques $(S(X, Y, Q')$, $(S(X, Y, Q'')$, $(S(X, Y, Q''')$, $(S(X, Y, Q'''')$, etc.,

[46] Le lecteur que rien ne rebute pourra aller voir à https://archive.archaeology.org/0811/abstracts/gladiator.html.

ce qui s'exprimera par les schémas herbartiens ($S(X, Y, Q') \Rightarrow M'$) $\Rightarrow R'^{\heartsuit}$, ($S(X, Y, Q'') \Rightarrow M''$) $\Rightarrow R''^{\heartsuit}$, ($S(X, Y, Q''') \Rightarrow M'''$) $\Rightarrow R'''^{\heartsuit}$, ($S(X, Y, Q'''') \Rightarrow M''''$) $\Rightarrow R''''^{\heartsuit}$, etc.

➤ Il faut souligner encore qu'il y a une différence non négligeable entre l'étude d'une œuvre O dans le cadre du paradigme de la visite des œuvres et l'étude de cette « même » œuvre dans le cadre du paradigme du questionnement du monde. Dans le premier cas, l'intérêt pour l'œuvre O n'est pas motivé par l'étude d'une question Q déterminée : il procède d'un intérêt « culturel » général dans le cadre de la discipline $\mathcal{D}$ à laquelle l'œuvre O est censée « appartenir » (dans le curriculum considéré). Les questions Q', Q'', Q''', Q'''', etc., sont déterminées par cette problématique, sous les contraintes régnantes. Cela privilégie les questions sur la structure de O et sur son fonctionnement, mais écarte par exemple les questions sur ses origines et ses raisons d'être originelles, qui sont aujourd'hui préemptées par « l'histoire de » la discipline $\mathcal{D}$ et ne trouvent généralement pas de place dans un (simple) « enseignement de $\mathcal{D}$ ». On sait que, dans ce contexte, la question « À quoi sert O ? » a été souvent entendue par les professeurs comme signifiant surtout « À quoi cela (nous) sert-il d'étudier O ? » et donc comme une question contestataire de l'enseignement donné et reçu. Je vois plutôt en cela un symptôme de la situation objective actuelle de la position d'enseignant de $\mathcal{D}$ dans le paradigme de la visite des œuvres. Par contraste, dans le paradigme du questionnement du monde, la question « À quoi sert O ? » est une question cruciale dans le cadre d'une enquête sur la question « Qu'est-ce que O ? ». Bien entendu, si l'œuvre O apparaît dans le cadre d'une enquête sur une question Q, une question essentielle sera surtout : « En quoi O peut-elle aider à répondre à Q ? »

Une remarque sur les moments de l'étude

J'ai mentionné à deux reprises – lors des séances 4 et 5 –, mais en passant, ce qu'on appelle le *modèle des moments de l'étude* ou *moments didactiques*. C'est là une question qui mériterait, certes, tout un développement (et même plusieurs, sans doute) dans la rubrique *Élémenter la TAD*. Ici, je m'en tiendrai à un seul aspect de cette question. J'indique d'abord que ce modèle est un *outil d'observation et d'analyse didactiques*, avant (et afin même) d'être un outil *d'ingénierie didactique*. Mais j'en viens donc à la difficulté annoncée.

➤ Cette difficulté concerne le moment *de l'évaluation*. Une personne, et notamment un professeur, qui découvre la TAD et le paradigme du questionnement du monde, qu'il regarde comme une élaboration noosphérienne *nouvelle*, tend à projeter sur cette réalité subjectivement *neuve* des attentes allogènes, engendrées notamment par un *logos* pédagogique « moderne » – qui remonte au moins au début du XX^e^ siècle, pour ne mentionner ici que la suédoise Ellen Key (1849-1926) et son livre *The Century of the Child* (1909), dont la version originale, *Barnets århundrade*, est, elle, parue en 1900. Ce que d'aucuns peuvent donc s'attendre à rencontrer dans le cadre de la TAD, c'est par exemple le privilège donné à l'*auto-évaluation*, qui exclurait pratiquement les évaluations « sommatives » exigées généralement dans les systèmes éducatifs nationaux. C'est là une anticipation non fondée, à la fois théoriquement et pratiquement. S'il est vrai que, dans le monde « moderne » (le verbe *self-evaluate* est utilisé pour la première fois en 1910, selon le dictionnaire en ligne Merriam-Webster), l'idée et la pratique de l'auto-évaluation sont semble-t-il bien installées, cette forme d'évaluation, que symbolise la formule $R(x, R(x, o))$, est *un* composant d'un système d'évaluation usuellement plus complexe (à moins que x ne soit seul et abandonné de tous et de tout). Le dictionnaire que je viens de mentionner cite ainsi un auteur, Michael P. Hewitt (Université du Maryland), spécialiste d'éducation musicale, qui écrit par exemple : « Self-evaluations were collected and the teacher provided written feedback about the self-evaluations the following day. » Ici, le professeur y évalue $R(x, R(x, o))$, c'est-à-dire explicite (par écrit) certains aspects de son rapport $R(y, R(x, R(x, o)))$. Z D'une manière générale, le rapport $R(x, o)$ peut ainsi faire fait l'objet *d'une multitude de jugements* par diverses instances « évaluatrices » $\hat{v}$, dont l'instance x elle-même, chaque instance $\hat{v}$ se référant à un rapport $R(\hat{s}, o)$, où $\hat{s} = (I, p)$ est prise pour *instance standard*[47].

➤ Il est bon de se remettre en mémoire ce qui suit, présenté dès la séance 1 de cet *Humble séminaire* :

> Soit $\hat{w}$ une instance, que nous nommerons dans la suite l'*instance de référence*. Soit une instance $\hat{\imath}$ et un objet o, et soit $R(\hat{\imath}, o, t)$ le rapport de l'instance $\hat{\imath}$ à l'objet o au temps t. Le couple $\bar{n} = (\hat{\imath}, o)$ est appelé la *base cognitive*. Soit encore t_1 et t_2 deux instants tels que $t_2 > t_1$. Quand donc une instance $\hat{w}$ assertera-t-elle que, entre les instants t_1 et t_2, l'instance $\hat{\imath}$ a appris (un peu plus, un peu mieux) l'objet o ? Qu'il y a donc eu *apprentissage* relatif à o, de la part de $\hat{\imath}$?
>
> Pour qu'une telle assertion soit possible, je postule d'abord que, pour $\hat{w}$, il existe une position institutionnelle $\hat{s} = (I, p)$, qu'on appellera l'*instance standard*, et une *instance évaluatrice* $\hat{v}$ qui,

---

[47] Sans développer ici, j'ajoute deux remarques. Tout d'abord, dans la vie ordinaire des personnes et des institutions, l'auto-évaluation est toujours présente, dans les petites plutôt que dans les grandes choses sans doute, même si elle n'est pas dogmatiquement cultivée. Ensuite, lors d'un apprentissage relatif à un objet o qui – comme lorsque o est une langue étrangère par exemple – suppose un temps d'étude de quelque durée, x parvient souvent à saisir que son rapport $R(x, o)$ a commencé à évoluer vers le mieux alors qu'aucune autre instance ne perçoit encore cette évolution ; ou, encore, le professeur y a lui aussi saisi un progrès, qui reste souvent insaisissable par les parents de x quand ils n'ont pour toute information à propos de cette évolution que les notes attribuées par y à x.

du point de vue de certaines instances $\hat{\jmath}$, serait à même d'évaluer (d'estimer, etc.) la proximité (ou la ressemblance, etc.), pour au moins certaines instances $\hat{\imath}$, entre le rapport $R(\hat{\imath}, o, \hat{t})$ et le rapport standard $R(\hat{s}, o) = R_I(p, o)$. Le couple $\underline{n} = (\hat{s}, \hat{v})$ est appelé *cadre de référence cognitif*. Le quadruplet $\tilde{n} = \bar{n} {}^\frown \underline{n} = (\hat{\imath}, o, \hat{s}, \hat{v})$ est un *noyau cognitif*.

Étant donné un élève x, on peut bien évidemment supposer que l'on a $\hat{w} = x$, $\hat{\imath} = x$ et $\hat{v} = x$, l'élève x étant supposé en outre imaginer une « instance standard », $\hat{s} = (I, p)$, par rapport à laquelle il évaluera l'évolution de son rapport $R(x, o)$. Mais, bien évidemment, rien n'empêche, institutionnellement parlant, que l'on ait $\hat{w} \neq x$ et $\hat{v} \neq x$, par exemple que l'on ait $\hat{v} = y$, où y est le professeur de la classe de x. On pourra avoir aussi $\hat{v} = \bar{y}$, où $\bar{y}$ est un autre professeur (enseignant dans le même établissement ou dans un autre établissement), et surtout $\hat{v} = \check{y}$, où $\check{y}$ est un examinateur dans un dispositif d'examen national ou régional, etc. Celles et ceux qui m'ont accompagné depuis plusieurs décennies se souviennent que, dans le cadre de l'IREM d'Aix-Marseille, nous avons organisé pendant plusieurs années un dispositif dit d'*évaluation externe* proposé aux professeurs de l'acémie d'Aix-Marseille, qui pouvaient y inscrire leur classe pour avoir de cette classe une autre évaluation que la leur[48]. Les professeurs avaient accès à la distribution des notes attribuées à leurs élèves sur une épreuve commune aux classes de même niveau scolaire de l'académie qui avaient été inscrites, mais sans savoir quel élève avait obtenu telle ou telle note. D'une manière générale, étant donné une base cognitive $\bar{n} = (\hat{\imath}, o)$, on observe, dans la vie personnelle et institutionnelle ordinaire, un nombre plus ou moins important d'instances de référence $\hat{w}$ se référant à au moins autant de noyaux cognitifs $\tilde{n} = \bar{n} {}^\frown \underline{n} = (\hat{\imath}, o) {}^\frown (\hat{s}, \hat{v}) = (\hat{\imath}, o, \hat{s}, \hat{v})$. L'évaluation ne se limite jamais, de ce point de vue, à une unique forme d'évaluation, qui, en quelque sorte, annulerait toutes les autres.

➤ Pour ne pas trop développer ces commentaires mais en ajoutant à ce qui précède un élément décisif, je reproduis ci-après un paragraphe consacré au moment de l'évaluation dans un enseignement que j'ai donné en 2009-2010 en première année de master de sciences de l'éducation :

f) Le *sixième moment* est le moment *de l'évaluation*, où l'on évalue sa maîtrise de l'organisation praxéologique créée, mais aussi *où l'on évalue cette organisation praxéologique elle-même*, c'est-à-dire où l'on tente d'estimer la *valeur* que l'on peut attribuer à l'une et à l'autre dans la perspective d'un certain *projet* – plus vaste – d'élaboration praxéologique. On soulignera donc

---

[48] Il s'agissait de classes « sans examen », à savoir, au collège, la quatrième (mais non la troisième), et au lycée la seconde et la première (mais non la terminale).

> que, à l'instar des autres moments didactiques, l'évaluation *n'est pas* un artefact *scolaire*, mais participe *de l'activité humaine en général*, où qu'elle prenne place. Qu'est-ce que cela *vaut* pour ce qu'on *veut en faire* ? Telle est la question cardinale à cet égard, à tous propos et en tout lieu.

Je souligne en particulier que, c'est au cours du moment de l'évaluation que la classe [X, y] considère la *valeur* de (par exemple) la réponse $R^{\heartsuit}$ à laquelle elle sera arrivée. Pour cela, une technique consiste à confronter $R^{\heartsuit}$ à d'autres réponses « institutionnelles » non encore examinées, $\bar{R}^{\Diamond}_1$, $\bar{R}^{\Diamond}_2$, etc., que la classe trouvera pas exemple dans d'autres manuels scolaires, ou sur Internet, etc. Bien entendu, la valeur de ce que l'on a construit dépend du projet dans lequel la réponse $R^{\heartsuit}$ doit être engagée (un changement dans ce projet pouvant au reste conduire la classe à revenir sur $R^{\heartsuit}$). À cet égard, et pour terminer, je proposerai au lecteur estival désœuvré la petite enquête suivante : la formule classique donnant les solutions d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ s'écrit, comme on le sait, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Dans l'article « Quadratic equation » de *Wikipedia* on trouve aussi la formule non traditionnelle suivante :

$$x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Mais à quoi cette formule sert-elle ? En quoi améliorerait-elle la réponse usuelle à la question « Comment résoudre une équation du second degré ? » ?

ϟ

Ainsi se termine la dernière séance de l'*Humble séminaire* 2019-2020. J'ai laissé de côté provisoirement bien des questions des plus intéressantes qui m'ont été signalées par tel ou tel d'entre vous. Elles ne perdront rien pour attendre ! À plus tard.

YC.