L’humble séminaire 2019-2020

Séance 6

Séance 6 : pp. 114-153

L’humble séminaire 2019-2020

Séance 6 du 19 mai 2020

I. Outils mathématiques de modélisation : l’algèbre élémentaire

Pour commencer

J’amorce ici, non sans humilité, l’examen du rapport actuel de la position $\hat{\rho}_{\text{TAD}}$ de chercheur en didactique opérant dans le cadre de la TAD à un « grand » domaine mathématique, celui de l’*algèbre élémentaire*, que je noterai ci-après $\mathcal{A}$, regardé comme pourvoyeur – aujourd’hui – de la plupart des modèles ayant une teneur mathématique non nulle. Le lecteur de ces lignes est simplement supposé avoir un équipement praxéologique qui lui permette de modéliser minimalement le rapport institutionnel à $\mathcal{A}$ manifesté à travers les programmes et les manuels de mathématiques du collège et du lycée (français) de la période 1980-2020.

➤ Ce qui m’intéressera aujourd’hui, tout d’abord, c’est un fait que l’avènement historique de l’algèbre met en relief : le « trouble » culturel dans la relation entre l’*écrit* et l’*oral*. Lorsque, de nos jours, on « lit » sur le papier l’expression $2x(x + 3)$, nous savons qu’il s’agit, en essence, d’une expression *écrite*, qu’il nous faut alors *oraliser* en disant : « deux *x* facteur de *x* plus trois ». Cette expression orale n’est que l’oralisation d’une expression qui reste fondamentalement écrite. Or, le développement historique de l’écriture des langues fut d’abord, à l’inverse, la *mise par écrit* de réalités *orales*, dont il fallut ensuite apprendre à oraliser la forme écrite. Je reproduis ci-après le début d’une étude intitulée « Reading in Ancient Greece », due à Nancy A. Mavrogenes (1927-1995), publiée dans le *Journal of Reading* en mai 1980 (vol. 23, n° 8, pp. 691-697)[1] :

> Reading as we know it began with the ancient Greeks. Since they were the first people in the world to ascertain the basic relationship between spoken and written language, they were also the first to produce a complete set of symbols to represent every sound in their language (Mathews 1966). These letters were managable (less than thirty), accurate, in a fixed order, and individually named; therefore, they were highly efficient and could be easily memorized. Such an alphabet
>
> > produced a relatively clear, unambiguous and economical register of the exact sounds of what had been said. The reader therefore—and it is in the act of reading rather than writing that the secret of the alphabet subsists—the reader of any transcription who had previously memorised the proper

---

[1] Voir à l’adresse https://www.jstor.org/stable/40009140?seq=1. La citation de Eric A. Havelock (1903-1988) se retrouve dans son livre *The Literate Revolution in Greece and its Cultural Consequences* (Princeton, 1982, pp. 100-101).

> values could acquire automatic and rapid "recognition"—the Greek word for the act of reading—of what was being said (Havelock 1973, p. 343).
>
> Thus mass literacy became possible and a reading curriculum was born. (p. 691)

Il n'est alors rien dans l'écrit qui n'ait été d'abord de l'oral. Or ce que l'algèbre va imposer, c'est de l'écrit qui, si l'on peut dire, ne renvoie à aucune réalité orale préalable qui « justifierait » l'existence de cet écrit.

➤ Cela sans doute ne s'est pas fait d'un seul coup. Georg Heinrich Ferdinand Nesselmann (1811-1881) a proposé à cet égard[2] une tripartition demeurée célèbre que, dans le volume II de son ouvrage intitulé *History of mathematics* (1925/1958), David Eugene Smith (1860-1944) présente dans les termes suivants :

> It should also be stated as a preliminary to this discussion that Nesselmann (1842) has divided the history of algebra into three periods: the rhetorical, in which the words were written out in full; the syncopated, in which abbreviations were used; and the symbolic, in which the abbreviations gave place to such symbols as occur in statements like $\sqrt{x} - x^2 = a^{2/3}$. There are no exact lines of demarcation by which to establish these divisions, Diophantus, for example, having made use of certain features of all three; but the classification has some advantages and the student will occasionally find the terms convenient. (p. 379)

L'algèbre élémentaire à laquelle je me réfère ici est, bien sûr, l'algèbre « symbolique » de Nesselmann, encore que le problème que j'envisage aujourd'hui a dû surgir dès le temps de l'algèbre « syncopée »[3]. Diophante, ainsi, écrivait, dit-on[4], l'équation $x^3 - 2x^2 + 10x - 1 = 5$ de la façon suivante : $\mathrm{K}^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}\varsigma\,\overline{\iota}$ ⋔ $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\beta}\,\mathbf{M}\,\overline{\alpha}$ ἴσ $\mathbf{M}\,\overline{\varepsilon}$. Smith écrit encore[5] :

> When we speak of the early history of algebra it is necessary to consider first of all the meaning of the term. If by algebra we mean the science which allows us to solve the equation $ax^2 + bx + c = 0$, expressed in these symbols, then the history begins in the 17th century; if we remove the restriction as to these particular signs, and allow for other and less convenient symbols, we might properly begin the history in the 3d century; if we allow for the solution of the above equation by geometric methods, without algebraic symbols of any kind, we might say that algebra begins with the Alexandrian School or a little earlier; and if we say that we should class

---

[2] Dans son livre intitulé *Une tentative d'histoire critique de l'algèbre* (*Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra*, Berlin, 1842).

[3] L'adjectif *syncopé* signifie *abrégé*. L'*Online Etymology Dictionary* indique, à propos du substantif *syncope* : « 1520s, "contraction of a word by omission of middle sounds or letters," from Latin *syncope* "contraction of a word by elision," from Greek *synkope* "contraction of a word," originally "a cutting off, cutting up, cutting short," from *synkoptein* "to cut up," from *syn-* "together, thoroughly" (…) + *koptein* "to cut…" »

[4] Voir l'article « History of Algebra » de *Wikipedia* (https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_algebra).

[5] Sur l'École d'Alexandrie qu'évoque Smith dans ce passage, voir l'article « Alexandrian School » de *Wikipedia*.

> as algebra any problem that we should now solve by algebra (even though it was at first solved by mere guessing or by some cumbersome arithmetic process), then the science was known about 1800 B.C., and probably still earlier. (p. 378)

C'est donc plutôt à la période qui, à suivre Smith, commence vraiment avec le XVII^e siècle, que nous nous référerons dans ce qui suit[6].

L'évitement des formalismes : une étude de cas

L'algèbre élémentaire offre un formalisme de base invasif et ubiquitaire : il n'est aucune partie des mathématiques qui ne soit tributaire de ce formalisme de base. À rebours, j'examine ici un exemple actuel de ce qui est la règle dans la société « ordinaire » : *l'évitement* de tout formalisme numérico-algébrique.

➤ Un physicien et vulgarisateur français, Étienne Klein, publie le 31 mars 2020, dans la collection « Tracts de crise » de l'éditeur Gallimard (Paris), une courte étude intitulée *« Je ne suis pas médecin mais je… »*[7]. Il appert que l'un des objectifs de cette publication est de convaincre le lecteur qu'un test pour détecter une certaine maladie peut être *tout à fait illusoire* en ce sens qu'une personne que ce test déclarerait touchée par la maladie pourrait n'avoir qu'un risque très faible (de 2 % environ) d'être réellement malade. Voici les premières lignes de cet essai :

> Faisons une expérience de pensée. Imaginons que dans une population donnée apparaisse une nouvelle maladie, qui affecte une personne sur mille. Les symptômes de cette pathologie n'étant ni visibles ni ressentis, nul ne sait dire qui est malade et qui ne l'est pas. Mais les chercheurs s'activent et finissent par mettre au point un test de dépistage dont la fiabilité est de 95 %. Cela signifie que toute personne malade est détectée positive, mais que sur cent personnes non malades, en moyenne quatre-vingt-quinze sont effectivement négatives au test mais cinq sont ce qu'on appelle des « faux positifs », c'est-à-dire sont positifs [*sic*] au test sans être malades. Soit maintenant une personne qui se révèle positive au test : quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? Si vous réalisez un sondage dans votre entourage, vous constaterez que la proportion de ceux qui répondent « 95 % » à cette question est très élevée. Or, la bonne réponse est… seulement de 2 % !

Jusqu'ici rien n'est prouvé de ce qu'énonce l'auteur. La suite du texte fournit une explicitation que voici :

---

[6] Le seul problème des symboles écrits se pose en vérité bien avant. Les auteurs d'ouvrages d'algèbre, notamment, doivent interagir avec leurs imprimeurs à propos des signes écrits auxquels ils entendent recourir. Là-dessus, voir François Loget (2012), Printers and algebraists in mid-16th century France, *Philosophica, 87*, 85-116 (à l'adresse https://pdfs.semanticscholar.org/9cee/4ea5fbace5f0f86d192b9bde3ba19078204e.pdf).

[7] Il s'agit du « Tract de crise » n° 25. Voir à l'adresse suivante : https://tracts.gallimard.fr/fr/products/tracts-de-crise-n-25-je-ne-suis-pas-medecin-mais.

> Autrement dit, une personne positive au test a quatre-vingt-dix-huit chances sur cent de ne pas être malade ! Ce résultat violemment contre-intuitif s'obtient à l'issue d'un raisonnement qui est pourtant simple. Appliquons le test de dépistage à une cohorte de mille personnes. En vertu de notre hypothèse, cette population contiendra en moyenne une personne malade, qui sera à coup sûr positive au test, et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf personnes non-malades. Compte tenu de notre seconde hypothèse, cinq pour cent de ces dernières – soit cinquante personnes – seront donc détectées positives par erreur. Au total, cinquante et une personnes se révéleront positives au test, alors qu'une seule parmi elles est malade. La probabilité qu'une personne soit malade si elle a été positive au test est donc égale à un divisé par cinquante et un, soit environ 2 %.

Ce qui est d'abord notable ici, c'est que, hors la mention du pourcentage (2 %), *aucun chiffre n'apparaît* – les nombres sont écrits « en toutes lettres », comme dans « quatre-vingt-dix-huit chances sur cent ». Cela vaut également pour la première citation, où l'on rencontre 95 % à côté de 2 %, mais où on lit par exemple que « sur *cent* personnes non malades, en moyenne *quatre-vingt-quinze* sont effectivement négatives ». On voit ainsi où passe la ligne de démarcation entre le possible (n %, où n est un entier positif) et ce que je nommerai, de manière volontairement excessive, l'*obscène*[8]. L'évitement de l'obscène s'impose au texte examiné.

➤ Pour le montrer mieux, je reproduis le premier extrait cité plus haut, mais en écrivant les nombres *en chiffres* :

> Faisons une expérience de pensée. Imaginons que dans une population donnée apparaisse une nouvelle maladie, qui affecte **1** personne sur **1000**. Les symptômes de cette pathologie n'étant ni visibles ni ressentis, nul ne sait dire qui est malade et qui ne l'est pas. Mais les chercheurs s'activent et finissent par mettre au point un test de dépistage dont la fiabilité est de 95 %. Cela signifie que toute personne malade est détectée positive, mais que sur **100** personnes non malades, en moyenne **95** sont effectivement négatives au test mais **5** sont ce qu'on appelle des « faux positifs », c'est-à-dire sont positifs [*sic*] au test sans être malades…

C'est ce qui apparaît ici **en gras** qui a été évité par l'auteur. Quant au second passage, il se récrit de même ainsi :

---

[8] D'après le *Trésor linguistique de la langue française informatisé* (TLFi), *obscène* vient du latin *obscenus* « sinistre, de mauvais augure; indécent, obscène, sale, dégoûtant, immonde ». Dans un texte intitulé « L'Obscène ou les malices du signifiant », paru dans le numéro 29 (octobre 1983) de la revue *Traverses* publiée par le Centre Pompidou, le philosophe Jean-Toussaint Desanti (1914-2002) écrivait : « Il est connu que le latin *obscenus* est un mot de la langue des augures : il désigne le mauvais signe, le présage fâcheux. Ce peut être un vol d'oiseaux, des entrailles de poulet, quelque événement insolite, qui se passe du mauvais côté. Encore faut-il s'entendre sur le mauvais côté : ce qui vient du côté gauche (*sinister*) peut être favorable ou défavorable selon que l'on regarde le sud ou le nord. De quel côté regarder ? Le rituel en décide. Les Étrusques regardaient le sud, les Grecs le nord. De toute manière, est de bon augure ce qui vient de l'est. Le côté de la nuit est fâcheux : *obscenus* dira-t-on. » Voir à l'adresse https://www.dado.fr/dado-desanti.pdf.

> Autrement dit, **1** personne positive au test a **98** chances sur **100** de ne pas être malade ! Ce résultat violemment contre-intuitif s'obtient à l'issue d'un raisonnement qui est pourtant simple. Appliquons le test de dépistage à une cohorte de **1000** personnes. En vertu de notre hypothèse, cette population contiendra en moyenne **1** personne malade, qui sera à coup sûr positive au test, et **999** personnes non-malades. Compte tenu de notre seconde hypothèse, **5** % de ces dernières – soit **50** personnes – seront donc détectées positives par erreur. Au total, **51** personnes se révéleront positives au test, alors qu'une seule parmi elles est malade. La probabilité qu'une personne soit malade si elle a été positive au test est donc égale à **1** divisé par **51**, soit environ 2 %.

En fait, la ligne de démarcation entre possible et obscène, commandée par l'évitement de l'obscène, peut être précisée encore : l'évitement de l'obscène engendre des comportements « arithmétiques » subrepticement illégaux. Voyons cela.

➤ Reprenons le second passage, préalablement « mis en chiffres » :

> Autrement dit, **1** personne positive au test a **98** chances sur **100** de ne pas être malade ! Ce résultat violemment contre-intuitif s'obtient à l'issue d'un raisonnement qui est pourtant simple. Appliquons le test de dépistage à une cohorte de **1000** personnes. En vertu de notre hypothèse, cette population contiendra en moyenne **1** personne malade, qui sera à coup sûr positive au test, et **999** personnes non-malades. Compte tenu de notre seconde hypothèse, **5** % de ces dernières – soit **50** personnes – seront donc détectées positives par erreur. Au total, **51** personnes se révéleront positives au test, alors qu'une seule parmi elles est malade. La probabilité qu'une personne soit malade si elle a été positive au test est donc égale à **1** divisé par **51**, soit environ 2 %.

Première approximation : 5 % de 999 individus, cela ne fait pas 50 de ces individus. On a en effet 5 % × 999 = 49,95. On voit ici surgir une autre modalité de l'obscène mathématique : le nombre *décimal*, qui lui-même euphémise une *fraction*. Ces réalités « immontrables » sont elles-mêmes masquées, ordinairement, par l'usage des *pourcentages* : il semble qu'il faille être un fort mathématicien pour savoir que l'on a 95 % = $\frac{95}{100}$ = 0,95 et, plus encore peut-être, 2 % = $\frac{2}{100}$ = 0,02 ! Un peu plus avant, une fraction (ou l'une de ses approximations décimales) est masquée par le recours à la *division* : « La probabilité qu'une personne soit malade si elle a été positive au test est donc égale à **1** divisé par **51**… ». Récrivons une fois encore le dernier passage examiné :

> Autrement dit, **1** personne positive au test a **98** chances sur **100** de ne pas être malade ! Ce résultat violemment contre-intuitif s'obtient à l'issue d'un raisonnement qui est pourtant simple. Appliquons le test de dépistage à une cohorte de **1000** personnes. En vertu de notre hypothèse, cette population contiendra en moyenne **1** personne malade, qui sera à coup sûr positive au test, et **999** personnes non-malades. Compte tenu de notre seconde hypothèse, **5** % de ces dernières – soit **49,95** personnes – seront donc détectées positives par erreur. Au total, **50,95** personnes se

> révéleront positives au test, alors qu'une seule parmi elles est malade. La probabilité qu'une personne soit malade si elle a été positive au test est donc égale à $\mathbf{\frac{1}{50{,}95}}$, soit environ…

On a : $\frac{1}{50{,}95} = \frac{100}{50{,}95}\ \% = 1{,}9627\ldots\ \% \lesssim 1{,}97\ \%$. Dernière réécriture donc :

> Autrement dit, **1** personne positive au test a **98** chances sur **100** de ne pas être malade ! Ce résultat violemment contre-intuitif s'obtient à l'issue d'un raisonnement qui est pourtant simple. Appliquons le test de dépistage à une cohorte de **1000** personnes. En vertu de notre hypothèse, cette population contiendra en moyenne **1** personne malade, qui sera à coup sûr positive au test, et **999** personnes non-malades. Compte tenu de notre seconde hypothèse, **5** % de ces dernières – soit **49,95** personnes – seront donc détectées positives par erreur. Au total, **50,95** personnes se révéleront positives au test, alors qu'une seule parmi elles est malade. La probabilité qu'une personne soit malade si elle a été positive au test est donc égale à $\mathbf{\frac{1}{50{,}95}}$, soit environ **1,97 %**.

Ainsi aperçoit-on ce qui, pour la culture ordinaire démathématisée, doit demeurer caché.

➤ Le degré supérieur de l'obscénité culturelle est atteint lorsqu'on introduit des *lettres* – qui renvoient à autant de *paramètres*. La fréquence de la maladie était supposée valoir $p = \frac{1}{1000}$. (Notons que cette fraction *n'apparaît pas* dans l'article cité : l'auteur y écrit pudiquement qu'une nouvelle maladie « affecte une personne sur mille ».) La fiabilité du test, f, était supposée valoir $f = 95\ \% = 0{,}95$. Soit une population – une « cohorte », dit l'auteur cité – de taille N : on avait $N = 1000 = 10^3$, on peut prendre aussi bien $N = 10^5$, etc. Le nombre de malades est donc égal à pN. Par hypothèse, le test les trouvera tous positifs. Le nombre de non-malades est égal à $N - pN = (1 - p)N$. Parmi ceux-ci, quelques-uns seront trouvés positifs : leur nombre est égal à $(1 - f)\,(1 - p)N$. Le nombre total de positifs est donc $pN + (1 - f)\,(1 - p)N = [p + (1 - f)\,(1 - p)]N$. La probabilité d'être malade lorsqu'on est positif au test est donc égale à $\varpi = \frac{pN}{[p + (1 - f)\,(1 - p)]N}$. On voit d'abord que cette probabilité ϖ ne dépend pas de N : elle est égale à $\frac{p}{p + (1 - f)\,(1 - p)}$. C'est là, au reste, une formule que donne l'auteur dans une note de bas de page où il écrit ceci[9] :

> Dans le cas général, si l'on note *p* la proportion de malades dans la population et *f* la fiabilité du test telle que définie dans le texte, alors la probabilité qu'une personne positive au test soit malade est égale à p/[p + (1 – p)(1 – f)].

Mais à quoi une telle formule peut-elle bien servir ?

---

[9] On notera que, dans la formule elle-même, les lettres *p* et *f* sont en romain, alors que l'usage en mathématiques est de les écrire en italique, usage que respecte l'auteur dans le reste de sa note. On peut penser qu'il s'agit là d'une faute du prote.

➤ La note infrapaginale reproduite ci-dessus répond à un appel de note que l'auteur a inséré à la fin du passage suivant :

> Conclusion : pour le cas d'école ici envisagé, c'est-à-dire où la proportion de malades dans la population est faible (ce qui ne correspond nullement, je le précise afin d'éviter tout malentendu, à la situation actuelle), il apparaît qu'un test fiable à 95 %, ce qui semble être un bon score, en réalité ne sert pas à grand-chose, contrairement à ce que nous tendons à croire spontanément. Évidemment, il ne faudrait pas en déduire – ce serait à la fois stupide et faux – que les tests de dépistage sont toujours inutiles, mais simplement prendre conscience que la question de leur fiabilité est cruciale : dans l'exemple que nous avons choisi, pour que le test donne des résultats vraiment exploitables, il faut que sa fiabilité soit encore plus proche de 100 %, ainsi qu'une formule simple permet de le démontrer.

On voit en effet que, pour p fixé, si f se rapproche de 1, alors la probabilité $\varpi = \frac{p}{p + (1 - f)\,(1 - p)}$ se rapproche de $\frac{p}{p + (1 - 1)\,(1 - p)} = \frac{p}{p} = 1$. Plus généralement, quand f croît, le dénominateur $p + (1 - f)\,(1 - p)$ décroît et donc ϖ croît : la probabilité ϖ est une fonction croissante de f. C'est ce que montre encore la formule suivante, où l'on a « simplifié » le dénominateur de la fraction donnant ϖ : $\varpi = \frac{p}{p + (1 - f)\,(1 - p)} = \frac{p}{1 - f(1 - p)}$.

➤ Ce qui est clair dans le texte d'Étienne Klein c'est qu'il ne considère que la variation du paramètre f, non la variation éventuelle de p. Cela peut conduire le lecteur « faiblement mathématicien » à des conclusions erronées, où la probabilité d'être malade quand on est testé positif serait indépendante de la valeur de p. Un exemple de ce phénomène est fourni par un échange (sans doute en partie scénarisé) au cours de l'émission *C à vous* diffusée le 14 avril 2020 sur France 5 et animée par Anne-Élisabeth Lemoine. Alors en effet que le journaliste Patrick Cohen, qui participe régulièrement à cette émission, entreprend de rendre compte des considérations d'Étienne Klein évoquées ici, l'échange suivant se produit[10] :

> Anne-Élisabeth Lemoine. Parce que le problème, c'est toujours cette question de la fiabilité des tests…
> Patrick Cohen. Oui ! C'est un gros problème. Aucun test aujourd'hui n'est fiable à 100 %. Le virologique dépend de la qualité du prélèvement, il faut remonter assez loin dans la fosse nasale et les sérologiques sont en cours de validation. Et pourquoi c'est crucial ? Alors je vais emprunter une démonstration faite récemment par le physicien Étienne Klein. Si vous avez une maladie qui touche une personne sur mille, et un test fiable à 95 %, c'est-à-dire qu'il produit

[10] On trouvera l'enregistrement correspondant à l'adresse suivante : https://www.france.tv/france-5/c-a-vous/c-a-vous-saison-11/1370503-c-a-vous.html. (L'échange commence à environ 7 min 42 s.) Notons que Roselyne Bachelot, qui participe à cet échange avec quelque réticence, est docteure en pharmacie et a été ministre de la santé (et des sports) de 2007 à 2010.

5 % de faux résultats… euh, dans cette hypothèse, des faux positifs, c'est-à-dire des malades qui ne le sont pas, quelle est la probabilité qu'une personne testée positive soit réellement malade ?
AEL. Moi j'aurais tendance à dire 95 % mais je sais que c'est un piège…
Roselyne Bachelot. *Rire complice.*
PC. Voilà ! Non, c'est vraiment contre-intuitif, c'est… La… la bonne réponse, c'est 2 %. Deux pour cent seulement parce que sur mille personnes vous avez en moyenne un seul malade et 5 % d'erreurs, donc 50 faux malades, ce qui fait un vrai malade sur 51, ça fait 2 %. Autant dire que votre test fiable à 95 %...
AEL. … il vaut rien…
PC. … il vaut pas grand-chose... Il vaut 2 %, quoi !
AEL. Voilà pourquoi il faut attendre… atteindre…
PC à RB. Vous avez compris ou pas ?
RB. J'ai pas tout compris… mais je vais réfléchir…
AEL. Un test valable qu'à 95 %, ce n'est pas suffisant…
PC. Ah non ! Il faut approcher des 100 %. Et ça veut dire aussi qu'il faut se méfier du bon sens qu'on peut avoir sur ce genre de choses et considérer l'effroyable complexité du problème à résoudre.
AEL. Donc Roselyne, on est bien d'accord, vous auriez dit 95 %, comme moi ?...
RB. Oui, j'aurais sans doute dit… Mais enfin, c'est pour vous faire plaisir, Anne-Élisabeth ! *Rires*

Sans doute peut-on saluer la clarté de la présentation faite par le journaliste – tout en notant sa légère hésitation sur ce que signifie ici (selon Étienne Klein) la « fiabilité » à 95 % (le test identifie à coup sûr les malades mais se trompe en moyenne 5 fois sur 100 sur les non-malades). Cela dit, le fait que la probabilité ϖ *dépend* de la fréquence p de la maladie n'apparaît guère. Récrivons ainsi la formule donnant ϖ :

$$\varpi = \frac{p}{1-f(1-p)} = \frac{1}{f+\frac{1-f}{p}}$$

On voit que, pour f fixé, lorsque p augmente, la fraction $\frac{1-f}{p}$ diminue, et il en est donc de même du dénominateur $f+\frac{1-f}{p}$, en sorte que la probabilité ϖ augmente. Par exemple, si p = 50 %, avec, toujours, f = 95 %, on a $\varpi = \frac{p}{1-f(1-p)} = \frac{0,5}{1-0,95\times 0,5} = \frac{1}{2-0,95} = \frac{1}{1,05} =$ 0.95238… ≈ 95,24 %. Comme on le voit, à son insu même, l'animatrice de l'émission n'avait pas complètement tort…

➤ Plus généralement, si l'on regarde l'égalité $\varpi = \frac{1}{f+\frac{1-f}{p}}$ comme une équation (se ramenant au premier degré) en p, avec toujours f = 0,95, on arrive à la solution $p = \frac{1-f}{\frac{1}{\varpi}-f}$. Si l'on veut avoir ϖ = 2 %, il faut ainsi prendre $p = \frac{0{,}05}{\frac{1}{0{,}02} - 0{,}95} = \frac{0{,}05}{50 - 0{,}95} = \frac{0{,}05}{49{,}05} = \frac{5}{4905} = \frac{1}{981}$, soit un peu plus d'un cas sur 1000. Pour avoir ϖ = 50 % = 0,5, de même, on doit prendre $p = \frac{1-f}{\frac{1}{\varpi} - f} = \frac{0{,}05}{2 - 0{,}95} = \frac{0{,}05}{1{,}05} = \frac{5}{105} = \frac{1}{21} \approx 4{,}76$ %. Pour avoir ϖ = 80 % = 0,8, on doit prendre $p = \frac{1-f}{\frac{1}{\varpi} - f} = \frac{0{,}05}{1{,}25 - 0{,}95} = \frac{0{,}05}{0{,}3} = \frac{1}{6} \approx 16{,}67$ %. Donc 1 cas de maladie sur 981, 1 sur 21, 1 sur 6 et 1 sur 2 entraînent respectivement, quand on est testé positif, une probabilité d'avoir la maladie de 2 %, 50 %, 80 % et plus de 95 %. *It's algebra, stupid!*

➤ L'auteur cité s'en tient, lui, à sa conclusion quant à la fiabilité de *f*. Voici ce qu'il écrit :

> Cette conclusion surprenante prouve que notre cerveau peut être victime, ici ou ailleurs, de biais cognitifs. Elle illustre également le fait que la science ne se confond ni avec la déclinaison en roue libre de l'intuition, qu'elle prend souvent à contre-pied, ni avec le fameux « bon sens », qu'elle contredit presque toujours.

Cette analyse se réduit à exhiber quelques expressions du langage psychologico-culturel d'hier ou d'aujourd'hui : *biais cognitif*, *intuition*, *bon sens*. « Moi j'aurais tendance à dire 95 %... », commente l'animatrice de *C à vous*. À cela, qui serait le fruit de notre cognition entendue comme réalité quasi transcendante (« notre cerveau »), Klein oppose la science, qui nous obligerait à penser contre notre cerveau, comme l'illustre l'annonce ci-dessous[11].

Dans cette vidéo filmée le 4 décembre 2019, Klein présente apparemment le « même » exemple que dans sa publication chez Gallimard datée du 31 mars 2020. À ceci près qu'il s'entortille dans son récit :

> Vous allez voir un médecin, qui vous explique que… une nouvelle maladie est apparue en France, qui touche… qui touche mille personnes sur mille [*sic*], et il n'y a pas de symptômes extérieurs facilement observables, de sorte que, devant une personne donnée, on ne sait pas dire

[11] Voir à l'adresse https://www.youtube.com/watch?v=KB5w5ZGzy5Q.

> si elle est malade ou non. Les chercheurs cherchent, trouvent et mettent au point un test qui permet de savoir de savoir si une personne est positive à cette maladie ou pas. Alors ce test, il a une efficacité de 95 % – c'est beaucoup, hein ! Alors l'efficacité de 95 %, ça veut dire que, sur 100 personnes… euh… diagnostiquées positives, 95 seront effectivement malades et 5 seront des faux positifs c'est-à-dire seront positifs [*sic*] au test sans être malades. Question : on vous présente une personne qui est positive au test ; quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? Alors faites le test autour de vous… (*Rires*) Vous verrez que la plupart des gens – et là c'est plus des enfants, c'est des adultes ! – répondent 95 %. Le test est efficace à 95 %, donc, si j'ai une personne positive, il y a 95 chances sur 100 que cette personne soit malade. Or la bonne réponse, c'est 2 % ! C'est-à-dire… c'est-à-dire qu'en fait, si vous avez une personne positive au test, il y a 98 chances sur 100 qu'elle *ne soit pas* malade !

Bien entendu, si, sur 100 personnes diagnostiquées positives, 95 sont effectivement malades et 5 ne le sont pas, la probabilité qu'une personne positive au test soit malade est égale à… $\frac{95}{100} = 0{,}95 = 95\,\%$, contrairement à ce qu'affirme (ici) Klein ! Pourtant il semble (d'après l'enregistrement auquel je me réfère) que personne dans le public ne conteste ce qu'il avance, et même que le public, « bon enfant », se montre complice, pris dans un contrat institutionnel (gérant les relations entre les positions d'intervenant et de spectateur) dans lequel il est entendu 1) que chacun, du seul fait qu'il a « un cerveau », pourrait *dans l'instant* « connaître » la probabilité demandée (ce qui, en fait, est bien le cas ici !), et 2) que l'intervenant (Klein) a raison. Cette connivence contractuelle se voit tout aussi bien dans la scène de *C à vous*, à ceci près que Roselyne Bachelot « résiste », sans doute à cause de sa formation, ce qui lui fait dire qu'elle va « réfléchir », pour ne pas dire « calculer » – mot « obscène » que, dans la séance du 4 décembre 2019, Klein se risque, en conclusion, à prononcer tout en le retenant : « … c'est contre notre intuition, il faut même faire un petit calcul pour… pour découvrir que ce que j'ai dit n'est pas faux… »

➤ Les notions d'*intuition* et (plus moderne) de *biais cognitif* ne sont nullement éclairantes ici. Il suffit pour le voir d'imaginer un *changement de contrat institutionnel* : imaginons que les personnes évoquées plus haut (Patrick Cohen, Anne-Élisabeth Lemoine, etc.) aient à prendre part, par exemple dans le cadre d'un certificat de compétence professionnelle (je déraisonne…), à une *épreuve d'une heure de statistique et probabilités*. Il est exactement 9 h. Le sujet de l'épreuve leur est communiqué ; le voici :

> Dans une population, une certaine maladie touche en moyenne une personne sur mille. On dispose d'un test de dépistage qui est positif sur toute personne malade ainsi que sur 5 % des non-malades (il s'agit là de ce qu'on nomme des *faux positifs*). Si une personne est positive au test, quelle est la probabilité qu'elle soit malade (c'est-à-dire qu'elle ne soit pas un faux positif) ?

Il est plus que douteux que les candidats penseront alors qu'ils sont censés répondre *ex abrupto*, de chic en quelque sorte, à la question posée. Il en irait plus encore ainsi avec cette variante de l'énoncé :

> Dans une population, une maladie touche en moyenne une personne sur mille. On dispose d'un test de dépistage qui est positif sur toute personne malade ainsi que sur 5 % des non-malades (il s'agit là de ce qu'on nomme des *faux positifs*). Une personne est positive au test ; calculer la probabilité qu'elle soit malade (c'est-à-dire qu'elle ne soit pas un faux positif).

J'ajoute cette version « renforcée », qui ne laisse plus guère de doute :

> Dans une population, on dispose d'un test de dépistage d'une certaine maladie. Ce test est positif sur toute personne malade ainsi que sur 5 % des non-malades (il s'agit là de ce qu'on nomme des *faux positifs*). Une personne est positive au test. Dans chacun des cas suivants, calculer la probabilité qu'elle soit malade (c'est-à-dire qu'elle ne soit pas un faux positif) :
>
> a) la maladie touche une personne sur mille ;
> b) la maladie touche une personne sur 20 ;
> c) la maladie touche une personne sur 5 ;
> d) la maladie touche une personne sur deux.

Dernière version – un gang de populistes abaisse le niveau de l'épreuve en imposant la version ci-après :

> Dans une population, on dispose d'un test de dépistage d'une certaine maladie. Ce test est positif sur toute personne malade ainsi que sur 5 % des non-malades (il s'agit là de ce qu'on nomme des *faux positifs*). Une personne est positive au test. La probabilité ϖ que cette personne soit malade est donnée par la formule :
>
> $$\varpi = \frac{100}{95 + \frac{5}{p}}$$
>
> où p est la fréquence de la maladie dans population. Dans chacun des cas suivants, calculer la probabilité ϖ :
>
> a) $p = 1/1000$;
> b) $p = 1/20$;
> c) $p = 1/5$;
> d) $p = 1/2$.
>
> (On pourra utiliser sa calculatrice.)

On ne soulignera jamais assez combien les conditions et contraintes surdéterminent les conduites d'une personne.

➤ L'attitude instillée par le contrat instantanéiste qui gouverne notamment les échanges des plateaux de télévision conforte un rapport au connaître qui s'est insinué depuis des décennies dans les classes au sens où certaines conditions et contraintes conduisent une personne (un élève, etc.) à se supposer capable d'accomplir une certaine tâche t à partir de l'équipement cognitif et praxéologique qui est *hic et nunc* le sien, sans étude ni recherche : il n'y aurait pas à « s'adapter » à la tâche, le postulat est qu'on y serait d'emblée adapté. La rétrocognition triomphe et occulte presque totalement la procognition. Il y a là, en un tel cas, comme un faux sentiment de toute-puissance qui triompherait en dépit même de la pénurie de moyens praxéologiques. C'est là ce qu'on pourrait appeler le *syndrome apraxéologiste*, qui recouvre ce que j'avais appelé autrefois « syndrome de MacGyver », en référence au personnage de la série télévisée du même nom, dont on nous dit ceci[12] :

> La capacité la plus étonnante de MacGyver est l'application pratique et ingénieuse des sciences et de l'ingénierie combinée à l'utilisation des objets du quotidien, d'une manière inédite. Avec ce talent, MacGyver trouve une multitude de solutions étonnantes pour résoudre divers problèmes, comme l'évasion lors d'une captivité ou le désamorçage de charges explosives.

Je signalais en même temps que le rôle affecté à l'élève, qui, en une certaine tradition scolaire, était celui d'un « bon artisan » mettant patiemment au point ses techniques (et, plus largement, ses praxéologies), avait changé pour faire de l'élève, précisément, un « MacGyver » au petit pied, à qui l'on demanderait de tout affronter sans que le problème de l'adéquation des outils disponibles à la tâche envisagée soit posé. L'homme « non spécialisé » cher à Lucien Febvre devient ainsi un homme « sans praxéologies », un humain apraxéologique, et qui pourtant pourrait tout comprendre et tout faire. C'est contre cet élément « théorique » que la TAD s'inscrit en faux quand on y affirme que tout type T de tâches t appelle une technique τ idoine et un *logos* $\Lambda = [\theta\ /\ \Theta]$ à l'avenant. Bien entendu, lorsque l'homme « sans praxéologies » effectue une tâche t, il use tout de même d'une certaine technique dictée par un certain *logos*. À ce propos, l'auteur que nous avons suivi, et qui se montre au reste fort peu rigoureux sur ce point, à l'instar de ceux qu'il dénonce, écrit (nous l'avons vu plus haut) : « Si vous réalisez un sondage dans votre entourage, vous constaterez que la proportion de ceux qui répondent “95 %” à cette question est très élevée. » Si la chose était vraie, il serait notamment pertinent d'identifier un peu mieux le bloc praxique $[T\ /\ \tau]$ sous-jacent. Il est fort possible que, selon une clause traditionnelles des contrats didactiques scolaires en matière de « problèmes d'arithmétique », les personnes auxquelles Klein s'adresse – directement ou indirectement – tentent d'avancer une réponse en effectuant une opération simple sur les données de l'énoncé : en ce cas, elles sembleraient ne prendre en compte que la donnée de $f = 95$ % et ne savoir que faire de $p = 1/1000$ (qui est pourtant, comme nous l'avons vu, l'une des clés de l'aventure). Au lieu de « biais cognitif » il serait plus juste de parler de « biais situationnel ».

---

[12] Voir l'article « MacGyver » de *Wikipédia* à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/MacGyver.

La fonctionnalité de l'algèbre en question : l'oubli des lettres

Ainsi que l'illustre l'étude de cas précédente, la réception culturelle ordinaire (hors de mondes « spécialisés ») de l'outillage *écrit* de l'activité mathématique courante est des plus limitées.

➤ Pour ce qui est des nombres, on aperçoit de loin en loin des entiers s'écrivant avec peu de chiffres, des pourcentages simples (qui dissimulent leur caractère fractionnaire), quelques décimaux et quelques fractions, et, pour les décimaux, encore, peu de chiffres après la virgule – on a rarement l'occasion de rencontrer de monstrueuses obscénités ostensives telle que celle concernant la valeur en litres du baril dans le passage ci-après[13] :

> Le **baril** (symbole **bl** ou **bbl**) du gallo-romain *barriculus*, « barrique » puis du latin médiéval *barriclus* « petit tonneau », est une unité de mesure de volume surtout utilisée de nos jours pour le pétrole brut et ses dérivés. Un baril de pétrole équivaut à 42 gallons américains, soit environ 35 gallons impériaux (précisément 34,9723) ou 159 litres (précisément 158,987 294 928).

➤ L'impérieuse nécessité de signes écrits propre à l'algèbre élémentaire a influencé l'outillage de l'arithmétique : les signes « arithmétiques » utilisés aujourd'hui sont en fait, à l'origine, des signes algébriques. Mais ce processus d'algébrisation ostensive de l'arithmétique a d'abord été bien timide et finalement assez tardif, comme le rappelle Smith (1925/1958)[14] :

> The symbols of elementary arithmetic are almost wholly algebraic, most of them being transferred to the numerical field only in the 19th century, partly to aid the printer in setting up a page and partly because of the educational fashion then dominant of demanding a written analysis for every problem. When we study the genesis and development of the algebraic symbols of operation, therefore, we include the study of the symbols used in arithmetic. Some idea of the status of the latter subject in this respect may be obtained by looking at almost any of the textbooks of the I7th and 18th centuries. Hodder, for example, gives no symbols before page 201, then remarking: "Note that a + thus, doth signifie Addition, and two lines thus ═ Equality, or Equation, but a × thus, Multiplication," no other symbols being used. Even Recorde, who invented the modern sign of equality, did not use it in his arithmetic, the *Ground of Artes* (*c.* 1542), but only in his algebra, the *Whetstone of witte* (1557). (p. 395)

➤ Ce que l'algèbre apporte surtout en matière de signes écrits, c'est l'usage des *lettres* pour représenter des « quantités », c'est-à-dire des grandeurs. À cet égard, un tournant essentiel – que l'enseignement secondaire français actuel semble avoir oublié – se produit avec François

---

[13] Extrait de l'article « Baril » de *Wikipédia* : on le trouvera à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Baril.

[14] La première édition de l'*Arithmetic* de James Hodder (cité par Smith ci-après) a paru à Londres en 1661 : elle comportait 216 pages (voir à l'adresse https://bit.ly/2KAB2Fi). Sur Robert Recorde (v. 1512-1558), voir à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Recorde.

Viète (1540-1603) et son algèbre nouvelle[15]. Dans le tome I, intitulé « Calcul algébrique », de son *Cours développé d'algèbre élémentaire*, paru à Namur en 1897, le Père B. Lefebvre écrit à ce propos[16] :

> Cette Algèbre numérique, où l'inconnue est seule désignée par une lettre (ζ, N, …) ou par un mot (ἀριθμός, *res*, *radix*, *cosa*, …) et où les connues sont représentées par des nombres, a persisté à travers les âges jusqu'à l'époque de Viète.
> Cependant, longtemps avant Viète et même de tout temps, on a vu apparaître l'emploi des lettres non seulement pour représenter l'inconnue d'un problème, *mais même pour désigner dans la suite d'un raisonnement des quantités ou des objets soit déterminés soit indéterminés*. Aristote, Euclide, Archimède, Pappus raisonnent souvent sur des lettres ; Jean de Séville, Léonard de Pise quelquefois ; Jordanus de Saxe fréquemment, et d'autres encore, tels que Pacioli, Stifel, Regiomontanus, Peletier, Butéon, les uns plus, les autres moins, énoncent et démontrent des théorèmes de Mathématiques sur des lettres, qui expriment des quantités déterminées ou indéterminées. N'est-ce point déjà de l'Algèbre littérale ? Non. Mais soumettre au *calcul* ces lettres, ces quantités littérales ; figurer sur ces lettres des *calculs virtuels* qu'on ne peut exécuter que sur des nombres ; effectuer des *transformations* d'expressions algébriques ; résoudre des équations à coefficients littéraux ; en un mot entreprendre le calcul des symboles, c'est là l'objet de l'*Algèbre littérale* ou de la *Science des formules*. (p. XLII)

Nous avons là, sous la plume de l'auteur cité, une juste définition de ce que nous avons noté plus haut $\mathcal{A}$, l'algèbre élémentaire. Viète, quant à lui, désigne son algèbre comme *logica speciosa* (« logique des espèces ») par opposition à l'ancienne *logica numerosa*, « logique des nombres », dans laquelle « n'interviennent que des coefficients numériques »[17].

➤ Des coefficients littéraux, c'est bien ce que l'enseignement secondaire semble avoir aujourd'hui oublié : manière de transposer en simplifiant, jusqu'à dénaturer le savoir transposé. Car, privée de ces lettres pour représenter ce qui n'est pas nécessairement regardé comme inconnues, l'algèbre devient un outil dénué de prise dans les domaines où elle devrait servir à la fabrication de modèles mathématiques. Dans un ouvrage sur lequel je vais revenir (Moreux, 1926), sous le titre « Emploi des lettres dans les équations », prenant acte de cet arrangement avec le savoir savant tout en s'efforçant de le combattre, l'auteur écrit :

> Jusqu'à ce moment [de son livre, alors que la seule lettre utilisée a été l'inconnue *x*], direz-vous, l'Algèbre est facile, mais ce que nous venons d'apprendre ne ressemble guère à ce que nous

---

[15] Voir l'article « Algèbre nouvelle » de *Wikipédia* à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Algèbre_nouvelle.

[16] Voir à l'adresse https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k207267n.image.r=viète.f42.langFR. C'est moi qui souligne.

[17] Filippo Russo, La constitution de l'algèbre au XVI^e siècle : étude de la structure d'une évolution, *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, vol. 12, n° 3, 1959, pp. 193-208. Voir à l'adresse https://www.persee.fr/docAsPDF/rhs_0048-7996_1959_num_12_3_3753.pdf.

> avons vu dans les livres de Physique et de Mécanique remplis le plus souvent de formules qui ne renferment des chiffres qu'exceptionnellement.
>
> La plupart du temps, les expressions employées n'offrent que des lettres. Quelle en est la signification ?
>
> La réponse est très simple : tout problème d'Algèbre peut être généralisé par l'emploi des lettres.
>
> Ainsi, si je vous posais douze problèmes analogues au dernier, vous auriez vite fait de découvrir la marche générale de la solution. (pp. 16-17)

Je vais revenir sur ce qu'affirme l'abbé Moreux ici. Mais je voudrais rester encore un peu sur l'exemple du « test de dépistage » pour illustrer la notion d'algèbre « spécieuse » : on a trois « espèces », dénotées respectivement par les lettres p, f et ϖ, et liées par les égalités

$$\varpi = \frac{1}{f + \frac{1-f}{p}},\ p = \frac{1-f}{\frac{1}{\varpi} - f} \text{ et } f = \frac{\varpi - p}{\varpi - \varpi p}.$$

Ce sont là des formules que, pour les deux premières du moins, nous avons déjà sollicitées. Utilisons par exemple la troisième afin de déterminer la valeur que devrait avoir la fiabilité f pour que l'on ait par exemple une probabilité ϖ = 50 % d'être malade si l'on est testé positif dans une population dont une personne sur 100 en moyenne est malade. Il vient alors :

$$f = \frac{\varpi - p}{\varpi - \varpi p} = \frac{0{,}5 - 0{,}01}{0{,}5 - 0{,}5 \times 0{,}01} = 0{,}989898\ldots \lesssim 0{,}99.$$

Plusieurs observations importantes doivent être faites maintenant quant au sort réservé à l'algèbre élémentaire dans notre enseignement secondaire actuel.

Contre l'efficacité de l'algèbre, l'amuïssement du travail algébrique

L'algèbre couramment enseignée souffre donc d'un déficit *technique* : elle ne donne pas les moyens de modéliser la plupart des phénomènes mathématiques ou extramathématiques. Cela conduit presque mécaniquement à mettre en avant la « résolution d'équations » (sans paramètres) par rapport à la fabrication de modèles (avec paramètres), soit de formules littérales. Dans l'*Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* (1751), d'Alembert (1717-1783) écrivait dans l'article « Algèbre »[18] :

> … l'*Algèbre* a proprement deux parties : 1°. la méthode de calculer les grandeurs en les représentant par les lettres de l'alphabet : 2°. la manière de se servir de ce calcul pour la solution des problèmes. Comme cette dernière partie est la plus étendue et la principale, on lui donne souvent le nom d'*Algèbre* tout court, et c'est principalement dans ce sens que nous l'envisagerons dans la suite de cet article.

[18] Voir à l'adresse http://encyclopédie.eu/index.php/science/747258882-algebre/747258882-ALGEBRE.

L'importance donnée à la résolution d'équations (le point 2 de d'Alembert) est sans doute excessive par rapport à la place allouée à la *modélisation algébrique* (son point 1). Dans l'exemple du test, ci-dessus, il faut ainsi d'abord *arriver* aux « formules » équivalentes

$$\varpi = \frac{p}{p + (1 - f)\,(1 - p)} = \frac{p}{1 - f(1 - p)} = \frac{1}{f + \frac{1 - f}{p}}$$

avant d'en déduire, par résolution d'équations du premier degré, les formules donnant respectivement p et f :

$$p = \frac{1 - f}{\frac{1}{\varpi} - f} \text{ et } f = \frac{\varpi - p}{\varpi - \varpi p}.$$

Mais c'est ici qu'une importante remarque doit être faite. Pour passer de $\varpi = \varphi(p, f)$ à $p = \chi(f, \varpi)$ et $f = \psi(\varpi, p)$, il suffit chaque fois de résoudre *une* équation du *premier degré* (ou plutôt « se ramenant à une équation du premier degré »), en p et en f respectivement. Ces résolutions participent du « travail » du modèle qu'est, en l'espèce, la formule de base $\varpi = \frac{p}{p + (1 - f)\,(1 - p)}$. Comme toujours, ce travail suppose agilité technique et créativité technologique. Or il semble que ce travail, fondamental, soit aujourd'hui largement étranger à l'activité algébrique des élèves, au collège comme au lycée, où l'on observe depuis longtemps un « amuïssement » du discours explicatif en matière algébrique[19]. Il faut savoir qu'il en fut longtemps *tout autrement*. En revenant à Moreux, nous examinerons ici un exemple concernant les *tout débutants* en algèbre.

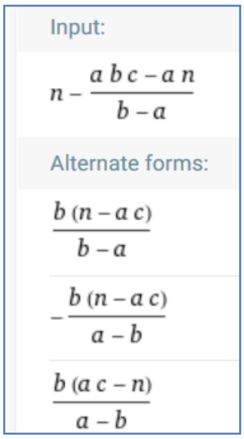
➤ Parmi les très nombreux volumes écrits par Théophile Moreux (1867-1954), dit abbé Moreux[20], je me réfère ici à son livre, déjà sollicité un peu plus haut, intitulé *Pour comprendre l'algèbre* publié en 1926 chez Doin[21], auquel je n'emprunterai, pour faire court, qu'un unique exemple. L'auteur propose d'abord ce problème : *Partager* 77 *en deux parties telles que la somme des quotients de l'une par* 8 *et de l'autre par* 5 *soit égale à* 13. Si la première partie est x, la seconde est $y = 77 - x$, si bien que la condition demandée s'écrit : $\frac{x}{8} + \frac{77 - x}{5} = 13$. On arrive ainsi à une équation du premier degré à une inconnue, *sans paramètres*. La résolution de cette équation, réalisée par l'auteur d'une manière des plus explicites mais

[19] Le verbe « amuïr », dérivé du latin populaire **admutire* « rendre muet », est aujourd'hui employé surtout, de manière restrictive, en linguistique. Nous revenons ici à son sens originel : voir à l'adresse https://www.cnrtl.fr/definition/amuïr.

[20] Voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Théophile_Moreux.

[21] Tous ces volumes paraissent dans la « Bibliothèque d'éducation scientifique » que dirige Théophile Moreux. Celui-ci est nommé .chevalier de la Légion d'honneur au titre de l'Instruction Publique le 1er février 1921.

que je ne reproduirai pas ici, conduit à $x = 32$ et (donc) à $y = 45$. Cela fait, Moreux annonce ensuite une « solution générale avec des lettres » : nous entrons alors pleinement dans l'algèbre élémentaire. Voici l'énoncé qu'il propose : *Partager n en 2 parts, de manière que la somme des quotients de l'une par a et de l'autre par b soit égale à c*. Le modèle algébrique auquel on aboutit est ici une généralisation presque immédiate du cas numérique étudié d'abord : $\frac{x}{a} + \frac{n-x}{b} = c$. Le travail du modèle comporte deux parties que l'auteur distingue beaucoup plus nettement : d'abord la résolution de cette équation en x, qui conduit à la formule $x = \frac{a(bc-n)}{b-a}$; ensuite, le calcul de la seconde part, $n - x$, soit le calcul de $n - \frac{(abc-an)}{b-a}$. Si je confie ce dernier calcul à WolframAlpha[22], ce « computational knowledge engine » répond quasi instantanément ce qu'on voit ci-contre[23]. L'auteur, pour sa part, aboutira à la première de ces expressions, soit $y = \frac{b(n-ac)}{b-a}$ et, présentant l'expression de x et celle de y en regard l'une de l'autre, conclura par ces mots (p. 64) : « Ces deux expressions offrent une certaine symétrie dans la forme et sont faciles à retenir. » La remarque « mnésique » peut nous sembler anachronique : elle n'en renvoie par moins à l'attention alors portée aux expressions littérales et à leur structure…



➤ Ce qui nous intéressera surtout, dans le « travail » de l'abbé Moreux, c'est le *commentaire explicatif et justificatif* qu'il fait du calcul qu'il mène. Ce calcul conduit de l'expression de départ de y, à savoir $y = n - \frac{a(bc-n)}{b-a}$, à l'expression d'arrivée, à savoir, donc, $y = \frac{b(n-ac)}{b-a}$. Se référant à l'expression

$$n - \left[\frac{abc-an}{b-a}\right]$$

Moreux écrit d'abord ceci[24] :

> Réduisons n au même dénominateur que la partie entre parenthèses ; il suffira de multiplier n par $\frac{b-a}{b-a}$, car nous avons vu en arithmétique (v. 1re leçon) que pour réduire 5 en quarts, je suppose, il suffit de multiplier 5 par l'unité ou $\frac{4}{4}$ et l'on a $\frac{5 \times 4}{4}$. De même ici, $b - a$ étant le dénominateur, l'unité sera $\frac{b-a}{b-a}$; donc, à la place de n, nous aurons :

[22] Voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/WolframAlpha ou https://en.wikipedia.org/wiki/WolframAlpha.

[23] Voir à l'adresse https://www.wolframalpha.com/input/?i=n+-+(abc+-+an)+%2F+(b+-+a).

[24] Notons que Moreux fait précéder ces développements de l'avertissement suivant (p. 62) : « Le lecteur peut négliger ce numéro à une première lecture, car les transformations deviennent ici un peu plus difficile à saisir. »

$$n \times \frac{b-a}{b-a} \text{ ou } \frac{n(b-a)}{b-a} \text{ ou } \frac{nb-an}{b-a}$$

et finalement :

$$n - \left[\frac{abc-an}{b-a}\right] = \left[\frac{nb-an}{b-a}\right] - \left[\frac{abc-an}{b-a}\right] = \frac{(nb-an)-(abc-an)}{b-a}$$

J'ai mis $b - a$ en dénominateur commun, comme si j'avais dit :

$$\frac{5}{4} + \frac{6}{4} = \frac{5+6}{4}$$

et *je n'ai pas supprimé les dénominateurs*, comme nous l'avons fait bien des fois, parce que je n'ai pas ici une équation, mais une simple différence des deux fractions à évaluer. (pp. 62-63)

La suite du calcul présente une « difficulté » sur laquelle Moreux va s'arrêter longuement :

Voyons d'abord à transformer le numérateur : $(nb - an) - (abc - an)$.
Je remarque que de $nb - an$ il faut *enlever* $abc - an$. J'enlève d'abord abc. Ici, pas de difficulté, il me suffira d'écrire : $nb - an - abc$, c'est-à-dire d'*ajouter* abc en mettant le signe de la soustraction. $nb - an$ est bien diminué de abc dans l'expression précédente ; mais il faut maintenant enlever encore $- an$, c'est-à-dire une quantité négative, puisque an a le signe –. (p. 63)

L'auteur poursuit ainsi :

Rappelez-vous l'exemple des dettes (n° 9), car, enlever une dette, c'est ajouter quelque chose à son avoir. Ôter moins 3 fr. d'un avoir, c'est en somme payer une dette, donc ajouter, si bien que toutes les fois que nous aurons *à retrancher une quantité négative*, c'est-à-dire affectée du signe –, nous aurons bien soin de changer son signe – en signe +, et c'est ainsi que

$$(nb - an) - (abc - an)$$

deviendra :

$$nb - an - abc + an.$$

Dans cette dernière expression, je remarque que j'ai à la fois $- an$ et $+ an$, ces deux quantités se détruisent et il ne reste que

$$nb - abc,$$

mettant b en facteur commun puisqu'il multiplie n et $- ac$, j'aurai finalement : b qui multiplie $n - ac$, ce qui s'écrit : $b(n - ac)$

On s'achemine ainsi vers la fin du calcul :

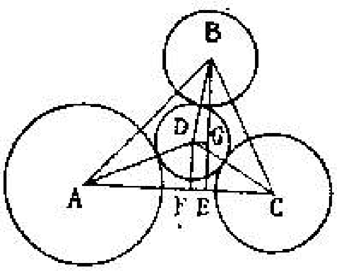
Voilà pour le numérateur. Ajoutons le dénominateur $a - b$ au dessous et nous aurons la valeur de la seconde part que nous avons obtenue en retranchant x de n.
Donc : $n - x$ ou 2^e^ part $= \frac{b(n-ac)}{b-a}$. (pp. 63-64)

On voit en tout cela le soin accordé au travail algébrique. Par contraste, il semble que la présentation d'un calcul algébrique se fasse aujourd'hui plutôt de façon « mécanique », par application de règles, sans exposé ni discussion de la *stratégie calculatoire* mise en œuvre.

C'est une telle stratégie, combinaison de considérations techniques et d'éléments technologiques, que nous rencontrerons maintenant, mais à un tout autre niveau.

➤ J'ajouterai à ce qui précède un témoignage capital, qui est en quelque sorte un chef d'œuvre en matière d'explication du travail algébrique. Il s'agit de l'analyse magistrale contenue dans une lettre datée de novembre 1643 adressée par René Descartes (1596-1650) à la princesse Élisabeth de Bohème (1618-1680)[25]. Je la reproduis sans commentaire[26].

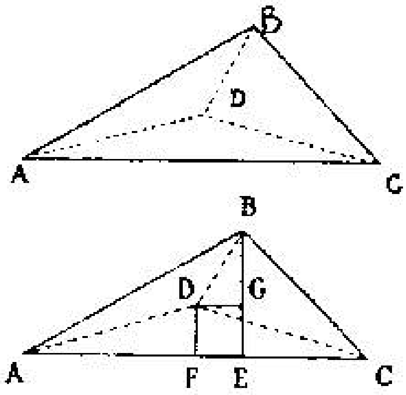
Descartes à Elisabeth – Egmond du Hoef, [17] novembre 1643

> Ayant su de Monsieur de Pollot que Votre Altesse a pris la peine de chercher la question des trois cercles, et qu'elle a trouvé le moyen de la résoudre, en ne supposant qu'une quantité inconnue, j'ai pensé que mon devoir m'obligeait de mettre ici la raison pourquoi j'en avais proposé plusieurs, et de quelle façon je les démêle.
>
> J'observe toujours, en cherchant une question de Géométrie, que les lignes, dont je me sers pour la trouver, soient parallèles, ou s'entrecoupent à angles droits, le plus qu'il est possible ; et je ne considère point d'autres théorèmes, sinon que les côtés des triangles semblables ont semblable proportion entre eux, et que, dans les triangles rectangles, le carré de la base est égal aux deux carrés des côtés. Et je ne crains point de supposer plusieurs quantités inconnues, pour réduire la question à tels termes, qu'elle ne dépende que de ces deux théorèmes ; au contraire, j'aime mieux en supposer plus que moins. Car, par ce moyen, je vois plus clairement tout ce que je fais, et en les démêlant je trouve mieux les plus courts chemins, et m'exempte de multiplications superflues ; au lieu que, si l'on tire d'autres lignes, et qu'on se serve d'autres théorèmes, bien qu'il puisse arriver, par hasard, que le chemin qu'on trouvera soit plus court que le mien, toutefois il arrive quasi toujours le contraire. Et on ne voit point si bien ce qu'on fait, si ce n'est qu'on ait la démonstration du théorème dont on se sert fort présente en l'esprit ; et en ce cas on trouve, quasi toujours, qu'il dépend de la considération de quelques triangles, qui sont ou rectangles, ou semblables entre eux, et ainsi on retombe dans le chemin que je tiens.
>
> 
>
>
> Par exemple, si on veut chercher cette question des trois

[25] Sur la princesse, voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Élisabeth_de_Bohême_(1618-1680) ou https://en.wikipedia.org/wiki/Elisabeth_of_the_Palatinate Sur sa correspondance avec Descartes, voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Correspondance_avec_Élisabeth. Pour la lettre de Descartes, voir à l'adresse https://fr.wikisource.org/wiki/Correspondance_avec_Élisabeth/Descartes_à_Élisabeth_-_Egmond_du_Hoef,_novembre_1643 ou encore à l'adresse http://philotextes.info/spip/IMG/pdf/1643.pdf. Sur Pollot, voir à l'adresse https://www.cambridge.org/core/books/cambridge-descartes-lexicon/pollot-alphonse-ca16021668/807439970B16CA62A844EB5FEE3BDDD2.

[26] Une seule remarque : l'usage qu'a Descartes de noter *aa*, *xx*, etc., ce que nous notons a^2, x^2, etc. Smith (1925/1958, p. 414) écrit : « This symbolism was commonly employed until well into the 18th century, even in writing a polynomial involving a^4; that is, before *c*. 1750 it was common to find expressions like $a^5 + a^4 + aaa + aa + 1$, or even $a^5 + aaaa + aaa + aa + 1$. »

cercles, par l'aide d'un théorème qui enseigne à trouver l'aire d'un triangle par ses trois côtés, on n'a besoin de supposer qu'une quantité inconnue. Car si A, B, C sont les centres des trois cercles donnés, et D le centre du cherché, les trois côtés du triangle ABC sont donnés, et les trois lignes AD, BD, CD sont composées des trois rayons des cercles donnés, joints au rayon du cercle cherché, si bien que, supposant x pour ce rayon, on a tous les côtés des triangles ABD, ACD, BCD ; et par conséquent on peut avoir leurs aires, qui, jointes ensemble, sont égales à l'aire du triangle donné ABC ; et on peut, par cette équation, venir à la connaissance du rayon x, qui seul est requis pour la solution de la question. Mais ce chemin me semble conduire à tant de multiplications superflues, que je ne voudrais pas entreprendre de les démêler en trois mois. C'est pourquoi, au lieu des deux lignes obliques AB et BC, je mène les trois perpendiculaires BE, DG, DF, et posant trois quantités inconnues, l'une pour DF, l'autre pour DG, et l'autre pour le rayon du cercle cherché, j'ai tous les côtés des trois triangles rectangles ADF, BDG, CDF, qui me donnent trois équations, pour ce qu'en chacun d'eux le carré de la base est égal aux deux carrés des côtés.



Après avoir ainsi fait autant d'équations que j'ai supposé de quantités inconnues, je considère si, par chaque équation, j'en puis trouver une en termes assez simples ; et si je ne le puis, je tâche d'en venir à bout, en joignant deux ou plusieurs équations par l'addition ou soustraction ; et enfin, lorsque cela ne suffit pas, j'examine seulement s'il ne sera point mieux de changer les termes en quelque façon. Car, en faisant cet examen avec adresse, on rencontre aisément les plus courts chemins, et on en peut essayer une infinité en fort peu de temps.

Ainsi, en cet exemple, je suppose que les trois bases des triangles rectangles sont

AD = $a + x$

BD = $b + x$

CD = $c + x$

et, faisant

AE = d, BE = e, ou CE = f,

DF ou GE = y, DG ou FE = z,

j'ai pour les côtés des mêmes triangles :

AF = $d - z$ et FD = y

BG = $e - y$ et DG = z,

CF = $f + z$ et FD = y.

Puis, faisant le carré de chacune de ces bases égal au carré des deux côtés, j'ai les trois équations suivantes :

$aa + 2ax + xx = dd - 2dz + zz + yy,$

$bb + 2bx + xx = ee - 2ey + yy + zz,$

$cc + 2cx + xx = ff + 2fz + zz + yy,$

et je vois que, par l'une d'elles toute seule, je ne puis trouver aucune des quantités inconnues, sans en tirer la racine carrée, ce qui embarrasserait trop la question. C'est pourquoi je viens au second moyen, qui est de joindre deux équations ensemble, et j'aperçois incontinent que, les termes *xx*, *yy* et *zz* étant semblables en toutes trois, si j'en ôte une d'une autre, laquelle je voudrai, ils s'effaceront, et ainsi je n'aurai plus de termes inconnus que *x*, *y* et *z* tous simples. je vois aussi que, si j'ôte la seconde de la première ou de la troisième, j'aurai tous ces trois termes *x*, *y* et *z* ; mais que, si j'ôte la première de la troisième, je n'aurai que *x* et *z*. Je choisis donc ce dernier chemin, et je trouve

$$cc + 2cx - aa - 2ax = ff + 2fz - dd + 2dz,$$

ou bien

$$z = \frac{cc - aa + dd - ff + 2cx - 2ax}{2d + 2f}$$

ou bien

$$\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}f + \frac{cc - aa + 2cx - 2ax}{2d + 2f}$$

Puis, ôtant la seconde équation de la première ou de la troisième (car l'un revient à l'autre), et au lieu de *z* mettant les termes que je viens de trouver, j'ai par la première et la seconde :

$$aa + 2ax - bb - 2bx = dd - 2dz - ee + 2ey,$$

ou bien

$$2ey = ee + aa + 2ax - bb - 2bx - dd + dd - df + \frac{ccd - aad + 2cdx - 2adx}{d + f}$$

ou bien

$$y = \frac{1}{2}e - \frac{bb}{2e} - \frac{bx}{e} - \frac{df}{2e} + \frac{ccd + aaf + 2cdx + 2afx}{2ed + 2ef}.$$

Enfin, retournant à l'une des trois premières équations, et au lieu d'*y* ou de *z* mettant les quantités qui leur sont égales, et les carrés de ces quantités pour *yy* et *zz*, on trouve une équation où il n'y a que *x* et *xx* inconnus ; de façon que le problème est plan, et il n'est plus besoin de passer outre. Car le reste ne sert point pour cultiver ou recréer l'esprit, mais seulement pour exercer la patience de quelque calculateur laborieux. Même j'ai peur de m'être rendu ici ennuyeux à Votre Altesse, pour ce que je me suis arrêté à écrire des choses qu'elle savait sans doute mieux que moi, et qui sont faciles, mais qui sont néanmoins les clefs de mon algèbre. Je la supplie très humblement de croire que c'est la dévotion que j'ai à l'honorer, qui m'y a porté, et que je suis,

Madame,
De V. A.
Le très humble et très obéissant serviteur,
Descartes.

Je m'arrêterai là – ou presque – pour aujourd'hui sur la question de l'algèbre élémentaire. Je recommande au lecteur intéressé de prendre connaissance de la lettre par laquelle Élisabeth de Bohême répond à Descartes et de la réponse que Descartes fait alors à la princesse[27].

➤ Un mot encore cependant. Ayant cherché sur Internet une édition en anglais de la lettre de Descartes sur le problème des trois cercles – reproduite ci-dessus en version originale –, je suis tombé sur une édition de la correspondance de Descartes avec Élisabeth due au

[27] Voir à l'adresse http://www.ac-grenoble.fr/PhiloSophie/old2/file/descartes_elisabeth.pdf, p. 24 pour la première, pp. 25-28 pour la seconde.

philosophe britannique Jonathan Bennett, qui a mis sur son site, pour les étudiants, de très nombreux textes de « early modern philosophy ». Je cite la présentation de son édition de la correspondance[28] :

> Every four-point ellipsis .... indicates the omission of a brief passage that seems to present more difficulty than it is worth. Longer omissions are reported on, between [brackets], in normal-sized type. This version aims mainly to present the *philosophical* content of the correspondence […]. But much material has been omitted; it can be found in Lisa Shapiro's informative edition (Chicago University Press, 2007)

Quand on recherche les lettres de novembre 1643, voici ce qu'on découvre alors dans l'édition de Bennett :

> **The letters of xi.1643:**
>
> [No reply by Descartes to the foregoing letter has been found. [He sent to the Princess a certain problem in geometry; she gave a solution to it that Descartes was told about; he wrote at length, explaining why his own first solution was less elegant than hers was said to be; she sent own solution, which Descartes heralded as 'very like the one I proposed in my Geometry'; and he wrote at length about the advantages of elegance and economy in mathematical proofs.
>
> [This evidently all happened in November 1643; some of the letters involved have been lost; the three that survive—two by him, one by her—are omitted from this version of the Correspondence.
>
> [The next letter that we have was written half a year later, by Descartes. It responds to one by Elisabeth that we do not have.]

Nous retrouvons là une manifestation essentielle de la *phobie culturelle des mathématiques*. Je précise que l'édition due à Lisa Shapiro comporte bien, elle, la lettre cherchée (pp. 73-77).

II. Élémenter la TAD : la dialectique des médias et des milieux

Une entrée en matière

Un média est un système $\mathcal{S}_{\breve{m}}$ qui émet des messages sur certains types de situations du monde, c'est-à-dire sur les états $\mathscr{s}$ de certains types de systèmes $\mathcal{S}$. Un livre est un média. Je m'arrête ici, à titre d'illustration, sur un ouvrage intitulé *An Introduction to the theory of numbers*, dont la 5e édition est cosignée par Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman et Hugh L. Montgomery (John Wiley, New York, 1991)[29]. J'ai

> Leonhard Euler (1707–1783) conjectured that no nth power is a sum of fewer than n nth powers (the Swiss name Euler is pronounced "Oiler"). For $n = 3$, this would assert that no cube is the sum of two smaller cubes. This is true; it is proved in Theorem 9.35. However, a counterexample to Euler's conjecture was provided in 1968 by L. J. Lander and Thomas Parkin. As the result of a detailed computer search, they found that
>
> $$144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 135^5.$$
>
> In 1987, N. J. Elkies used the arithmetic of elliptic curves to discover that
>
> $$20615673^4 = 2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4,$$
>
> and a subsequent computer search located the least counterexample to Euler's conjecture for fourth powers.

[28] Voir à l'adresse http://www.earlymoderntexts.com/assets/pdfs/descartes1643.pdf.

reproduit ci-dessus un extrait de la page 2 de ce livre que je noterai $\mathcal{S}_{\breve{m}}$(NZM). Considérons la première des deux égalités indiquées, à savoir l'égalité $144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 135^5$. Le contenu de ce message est-il vrai ? Y a-t-il bien égalité ?

➤ Pour le vérifier, il est classique de considérer un système $\mathcal{S}_{\check{r}}$ censé *réagir* à certains types de *perturbations* $\check{p}$ selon ses lois propres, qui déterminent ses *réactions* $\check{r}$. C'est un tel système que, d'une manière générique, on appellera un *milieu*. En l'espèce $\mathcal{S}_{\check{r}}$ sera ici le *système de calcul* $\mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C})$ d'une certaine calculatrice $\mathbb{C}$. La perturbation à apporter à $\mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C})$ est créée par le système perturbateur $\mathcal{S}_{\check{p}}(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}$ à partir d'un message émis par une instance $\hat{w}$ qui active pour cela un système médiatique $\mathcal{S}_{\breve{m}}(\hat{w})$. Le système de calcul de $\mathbb{C}$, $\mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C})$, réagit alors en établissant un résultat que le système d'affichage de $\mathbb{C}$, $\mathcal{S}_{\breve{m}}(\mathbb{C})$, fait connaître à $\hat{w}$. On a ainsi la succession des *actions* représentées par les flèches ci-après :

$$\mathcal{S}_{\breve{m}}(\hat{w}) \Rightarrow \mathcal{S}_{\breve{m}}(\mathbb{C}) \Rightarrow \mathcal{S}_{\check{p}}(\mathbb{C}) \Rightarrow \mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C}) \Rightarrow \mathcal{S}_{\breve{m}}(\mathbb{C}) \Rightarrow \mathcal{S}_{\breve{m}}(\hat{w}).$$

L'instance $\hat{w}$ agit par le truchement de $\mathcal{S}_{\breve{m}}(\hat{w})$ en adressant un *message* au système perturbateur de $\mathbb{C}$, $\mathcal{S}_{\check{p}}(\mathbb{C})$. Ce dernier *perturbe* le système réacteur de $\mathbb{C}$, $\mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C})$, lequel réagit en créant un nouvel état $\mathbb{c}$ de $\mathbb{C}$, état qui fait alors l'objet d'une description que $\mathcal{S}_{\breve{m}}(\mathbb{C})$ adresse à $\hat{w}$ par le truchement de $\mathcal{S}_{\breve{m}}(\hat{w})$. Ici, un média $\mathcal{S}_{\breve{m}}$ est regardé comme un émetteur *et* un récepteur. On pourra si c'est utile distinguer deux systèmes, le système *émetteur*, noté $\mathcal{S}^{+}_{\breve{m}}$, et le système *récepteur*, noté $\mathcal{S}^{-}_{\breve{m}}$. La suite précédemment écrite pourrait alors être récrite ainsi :

$$\mathcal{S}^{+}_{\breve{m}}(\hat{w}) \Rightarrow \mathcal{S}^{-}_{\breve{m}}(\mathbb{C}) \Rightarrow \mathcal{S}_{\check{p}}(\mathbb{C}) \Rightarrow \mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C}) \Rightarrow \mathcal{S}^{+}_{\breve{m}}(\mathbb{C}) \Rightarrow \mathcal{S}^{-}_{\breve{m}}(\hat{w}).$$

➤ Dans le cas qui nous occupe, le premier message de $\hat{w}$ à $\mathbb{C}$ consiste à demander que $\mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C})$ réagisse à la perturbation constituée par la demande de calculer 144^5. La réponse de $\mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C})$ telle que la communique à $\hat{w}$ le média $\mathcal{S}_{\breve{m}}(\mathbb{C})$ est : $144^5 =_{\mathbb{C}} 61917364224$. Le second message de $\hat{w}$ à $\mathbb{C}$ consiste à lui demander, de même, de calculer $27^5 + 84^5 + 110^5 + 135^5$. Cette fois, $\hat{w}$ reçoit la réponse suivante : $27^5 + 84^5 + 110^5 + 135^5 =_{\mathbb{C}} 65141902706$. On voit aussitôt que, selon $\hat{w}$ et $\mathbb{C}$, c'est-à-dire selon le système formé des sous-systèmes $\mathcal{S}_{\breve{m}}(\hat{w})$, $\mathcal{S}_{\check{p}}(\mathbb{C})$, $\mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{S}_{\breve{m}}(\mathbb{C})$, le message affiché par $\mathcal{S}_{\breve{m}}$(NZM) est (mathématiquement) erroné. On peut évidemment changer $\hat{w}$ et/ou $\mathbb{C}$ pour contrôler le message envoyé par $\mathbb{C}$ perturbé par $\hat{w}$. On est ici déjà dans la *dialectique des médias et des milieux* – ou des milieux et des médias.

➤ Le message « $144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 135^5$ » semble donc *erroné*. Pour écarter cette conclusion, ou pour remplacer l'égalité supposée erronée par une égalité correcte, on peut

[29] Voir à l'adresse http://www.fuchs-braun.com/media/532896481f9c1c47ffff8077fffffff0.pdf ou encore à https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnx1Y3JpbWMyMDE1fGd4OjJiYzdjNTJlMDQyZjli.

rechercher des médias émettant des messages sur les égalités du type $n^5 = a^5 + b^5 + c^5 + d^5$ avec $n, a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Nous y reviendrons un peu plus loin. Pour le moment on peut tenter d'identifier l'erreur supposée. Faisons l'hypothèse que l'erreur n'affecte que *l'un* des termes élevés à la puissance 5, à savoir 144, 27, 84, 110, 135. Cette hypothèse est inspirée par l'idée que, si erreur il y a, il s'agirait d'une erreur de recopiage d'un scripteur en général attentif mais dont l'attention aurait été *une fois* prise en défaut. Comment alors repérer le terme « mal recopié » ? Supposons qu'il s'agisse de n : on retrouverait sa vraie valeur en calculant l'expression $\sqrt{a^5 + b^5 + c^5 + d^5}$. On obtient ceci : $\sqrt{a^5 + b^5 + c^5 + d^5} = 145{,}4695\ldots$ On déduit de là que le terme erroné *n'est pas* le nombre n. le Si le terme mal recopié était a, on le retrouvera en calculant l'expression $\sqrt[5]{n^5 - (b^5 + c^5 + d^5)}$. On obtient ici : $\sqrt[5]{144^5 - (84^5 + 110^5 + 135^5)} =_{\mathbb{C}} -79{,}672\ldots$ On en déduit que le terme erroné *n'est pas* le premier terme a mais figure parmi les trois suivants, b, c ou d. On teste donc ensuite s'il s'agirait de $b = 84$; on a : $\sqrt[5]{144^5 - (27^5 + 110^5 + 135^5)} =_{\mathbb{C}} 62{,}551\ldots$ Le terme supposé erroné n'est donc pas davantage le deuxième terme, 84. Serait-ce le troisième ? On a : $\sqrt[5]{144^5 - (27^5 + 84^5 + 135^5)} =_{\mathbb{C}} 105{,}193\ldots$ Si notre hypothèse est juste, le terme erroné ne peut donc être que le quatrième et dernier terme, 135… On a : $\sqrt[5]{144^5 - (27^5 + 84^5 + 110^5)} =_{\mathbb{C}} 133$. Nous avons ainsi trouvé le « coupable » ; l'égalité s'écrirait en fait $144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + \mathbf{133}^5$.

➤ Bien entendu, au lieu d'utiliser des milieux modélisant l'arithmétique, comme on l'a fait ici, on peut rechercher des *médias* émettant des messages sur les égalités du type $n^5 = a^5 + b^5 + c^5 + d^5$ avec $n, a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Dans l'ouvrage *Elementary Number Theory in Nine Chapters* de James J. Tattersall (Cambridge University Press, New York, 2005, p. 251), on trouve ainsi le passage ci-après[30].

> of fewer than n nth powers, that is, $x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n = z^n$ has nontrivial integral solutions if and only if $k \geqslant n$. However, in 1968, L.J. Lander and T.R. Parkin discovered that $144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5$. In 1988, N.J. Elkies found an infinite number of counterexamples to Euler's conjecture for the case when $n = 4$ including $20\,615\,673^4 = 2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4$ and the smallest counterexample known, namely $422\,481^4 = 95\,800^4 + 217\,519^4 + 414\,560^4$. In 1936, K. Mahler discovered the identity $(1 + 9n^3)^3 + (3n - 9n^4)^3 + (9n^4)^3 = 1$. Hence, 1 can be written infinitely many ways as the sum of three cubes.

[30] Voir à l'adresse https://bit.ly/2KMNMbQ.

Bien entendu, d'autres médias confirment cette égalité[31], et en particulier l'article original dans lequel ce contre-exemple a été publié, article qui tient tout entier dans l'encadré que l'on trouvera ci-contre[32].

> **COUNTEREXAMPLE TO EULER'S CONJECTURE ON SUMS OF LIKE POWERS**
>
> BY L. J. LANDER AND T. R. PARKIN
>
> Communicated by J. D. Swift, June 27, 1966
>
> A direct search on the CDC 6600 yielded
>
> $$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$
>
> as the smallest instance in which four fifth powers sum to a fifth power. This is a counterexample to a conjecture by Euler [1] that at least n nth powers are required to sum to an nth power, $n > 2$.
>
> REFERENCE
>
> 1. L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, Vol. 2, Chelsea, New York, 1952, p. 648.

On notera que les auteurs semblent y considérer comme allant de soi l'exactitude de l'égalité considérée, laquelle leur a été fournie par le super-calculateur $\mathbb{C}$ = CDC 6600[33]. C'est qu'en fait cette égalité a été établie, à leurs yeux, et sauf erreur due au média $\mathcal{S}_{\check{m}}(\mathbb{C})$, par le milieu $\mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C})$.

➤ Pourtant, prise en elle-même, comme un message sans émetteur, et non comme un message émis par $\mathcal{S}_{\check{m}}(\mathbb{C})$, cette égalité ne va nullement de soi : c'est ce que montre l'erreur de $\mathcal{S}_{\check{m}}$(NZM), qui semble n'avoir été repérée par aucun des trois auteurs au moment de la parution de leur ouvrage. Toutefois, il existe une liste, cosignée par eux, d'« alterations » à apporter aux deux premiers tirages de la 5e édition de leur ouvrage (à laquelle nous nous référons ici)[34]. La correction appropriée s'y trouve explicitement mentionnée : « for '135' read '133' » (voir ci-après).

Un pas de plus

J'ai appelé *milieu* un système $\mathcal{S}_{\check{r}}$ censé réagir à certains types de *perturbations* $\check{p}$ selon ses lois propres. Je prendrai encore, ici, le *système de calcul* $\mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C})$ d'une certaine calculatrice $\mathbb{C}$. La perturbation, que l'on suppose créée par une instance $\hat{w}$, résulte du message intimant à $\mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C})$

[31] Voir ainsi à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Lander,_Parkin,_and_Selfridge_conjecture#cite_note-1.

[32] Voir à l'adresse https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.bams/1183528522.

[33] Le CDC 6600 est (ou était) le Control Data 6600, super-ordinateur de la Control Data Corporation conçu par Seymour Cray, qui « a été l'ordinateur le plus puissant entre 1964 et 1969, date à laquelle il a été dépassé par son successeur, le CDC 7600 » : voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Control_Data_6600. Sur Seymour Cray, voir à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Seymour_Cray.

[34] Voir à l'adresse http://www-personal.umich.edu/~hlm/nzm/nzmerr1.pdf.

de calculer telle ou telle expression numérique, ce calcul constituant la perturbation imposée à $\mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C})$. Notons que le message adressé par le média $\mathcal{S}_{\check{m}}(\hat{w})$ à $\mathcal{S}_{\check{p}}(\mathbb{C})$ constitue une perturbation de $\mathcal{S}_{\check{p}}(\mathbb{C})$, milieu qui va réagir en perturbant $\mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C})$, qui a son tour réagit en établissant un résultat que le système d'affichage de $\mathbb{C}$, $\mathcal{S}_{\check{m}}(\mathbb{C})$, fait connaître à $\hat{w}$ par le truchement de $\mathcal{S}_{\check{m}}(\hat{w})$.

AN INTRODUCTION TO
THE THEORY OF NUMBERS
Fifth Edition, First and Second Printings
by
Ivan Niven
Herbert S. Zuckerman
Hugh L. Montgomery

John Wiley (New York), 1991

ALTERATIONS FOR THE FIRST AND SECOND PRINTINGS

PAGE/LINE	
v/-15ff	The publisher no longer distributes the Solutions Manual. A lab manual and sof
v/-8	for '(Section 2.4)' read '(Section 2.5)'
v/-7	for 'Hansel' read 'Hensel'
vi/7	for 'Appendixes' read 'Appendices'
vi/-4	after 'C. Pomerance' insert 'J. Rickert'
vi/-3	between 'H.' and 'C. Williams' delete 'J. Rickert'
vii/7	for 'Bionomial' read 'Binomial'
1/12,13	replace 'natural number such as' by 'natural number greater than 1 such as'
1/−2	replace 'any exponent' by 'any integral exponent'
2/5	replace 'natural numbers' by 'integers'
2/-11	for '135' read '133'

➤ Si je perturbe une calculette $\mathbb{C}$ en tapant le produit 3 × 6 (voir ci-dessous à gauche), je m'attends à ce que la réaction $\check{r}$ de $\mathbb{C}$ conduise à l'affichage de la suite de chiffres 1, 8 (ci-dessous à ,droite).

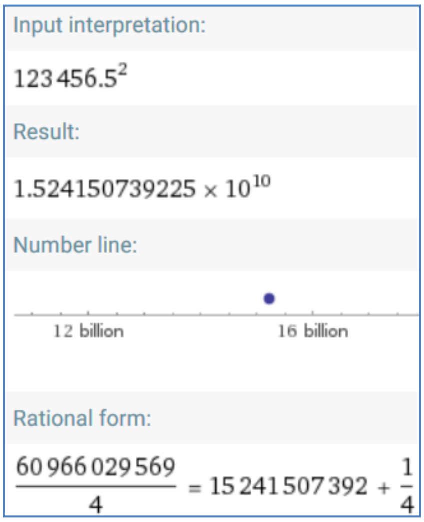
Si, maintenant, je demande à la calculatrice que je viens d'utiliser la valeur de 123456.5^2, elle affiche pour résultat le nombre 15241507392.3, qui est certainement *faux* : le nombre attendu doit en effet se terminer par 5 et le résultat exact est en vérité 15241507392.25. (Je reviens sur cet exemple un peu plus loin.) Par ailleurs, bien entendu, s'il s'agit d'une calculatrice matérielle (et non virtuelle) et si la température ambiante s'élève à 400 ℃, le système $\mathcal{S} = \mathbb{C}$ sera transformé d'une manière qui altérera de façon irréversible ses lois propres… Si la calculatrice utilisée est virtuelle – comme ci-dessus[35] –, on imagine aisément, de même, que l'on doive exclure le cas d'une interruption erratique de l'accès à Internet, par exemple.

➤ Le rapport à un système $\mathcal{S}$ regardé comme un milieu par une instance $\hat{w}$ relativement à une perturbation $\check{p}$ bute sur une difficulté déjà signalée : comment connaître la réaction $\check{r}$ de $\mathcal{S}$ à la perturbation $\check{p}$? La réponse générique est : par l'intermédiaire d'un système $\mathcal{S}$* qui émet un *message* à propos de l'état $\mathscr{s}$ de $\mathcal{S}$ après que $\check{p}$ a eu lieu. Un tel système $\mathcal{S}$* est un *média*, nous le savons. Un exemple familier à chacun est le cas où $\mathcal{S}$ est le corps d'une personne x et où $\mathcal{S}$* est un thermomètre axillaire, la perturbation $\check{p}$ consistant en l'espèce en la prise par x d'un antipyrétique. Ce schéma est universel : on n'accède à la connaissance (partielle, incertaine) de l'état $\mathscr{s}$ de $\mathcal{S}$ que par l'entremise d'un système $\mathcal{S}$* qui émet un message (« Sa fièvre a diminué », par exemple), message qui, en certains cas, peut être sibyllin, incompréhensible, voire vide.

➤ Revenons à la calculatrice $\mathbb{C}$ et distinguons le *système de calcul* $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\check{r}}(\mathbb{C})$, qui est un *milieu* pour $\hat{w}$ relativement à certains types de perturbations $\check{p}$, et un *système d'affichage* $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}_{\check{m}}(\mathbb{C})$, qui est un *média*. Ce que nous appelons ici « calculatrice » est un système formé de ces deux sous-systèmes, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$*. Cela noté, quand la calculatrice affiche pour carré de 123456.5 le résultat (arithmétiquement faux) 15241507392.3, s'agit-il d'une erreur du système de calcul $\mathcal{S}$ ou du système d'affichage $\mathcal{S}$* ? Est-ce le *milieu* qui est « fautif » ou est-ce le *média* ? Dans le cas examiné, il est peu douteux (quoique non certain) que la cause se trouve dans le *média*, qui émet ainsi un message inadéquat pour au moins certains usages. Mais il est des cas où il apparaît que c'est le système de calcul $\mathcal{S}$ dont la réaction $\check{r}$ n'est pas conforme au système (mathématique) des opérations arithmétiques (dont le système de calcul $\mathcal{S}$ est, et n'est que, un modèle). À la requête qui s'écrit « 1 + 10^15 - 10^15 » (perturbation $\check{p}_1$), la calculatrice de Google répond ainsi 0 (au lieu de 1). De même, à la requête « 120 * 119! - 120! » (perturbation $\check{p}_2$), cette même calculatrice répond -3.250565e+185 au lieu de 0. Ici, le système de calcul $\mathcal{S}$ obéit à ses « lois » propres, qui s'écartent apparemment de celles de l'arithmétique. Les messages émis par $\mathcal{S}$* (à savoir « 0 » et « -3.250565e+185 ») ne décrivent peut-être pas exactement l'état $\mathscr{s}$ de $\mathcal{S}$, mais ils semblent montrer que cet état n'est pas conforme aux véritables résultats mathématiques (à savoir 0 et 1, respectivement). On a là le point de départ de la dialectique des médias et des milieux.

[35] En l'espèce, il s'agit de la calculatrice de Google. Sur cette calculatrice en ligne, voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Calculatrice_Google.

➤ Soit plus généralement un *milieu* $\mathcal{S}$ supposé dont une instance $\hat{w}$ veut connaître la réaction $\check{r}$ à une perturbations $\check{p}$. Cela suppose un ou plusieurs médias $\mathcal{S}^*_1$, $\mathcal{S}^*_2$, etc., qui émettent des messages touchant l'état $\mathscr{s}$ dans lequel se trouve $\mathcal{S}$ après que la perturbation $\check{p}$ a eu lieu. Notons que, comme le montre l'exemple de la calculatrice, l'instance $\hat{w}$ peut ne s'intéresser à $\mathcal{S}$ que parce qu'elle regarde $\mathcal{S}$ comme un modèle d'un certain système $*\mathcal{S}$. Dans ce cas, $\hat{w}$ peut considérer d'autres systèmes $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}''$, etc., modélisant le *même* système $*\mathcal{S}$. Par exemple, $\hat{w}$ peut choisir d'utiliser une autre calculatrice, supposée plus « puissante ». C'est ainsi que la calculatrice WolframAlpha[36] affiche, elle, ce que l'on voit ci-contre.



➤ On peut aussi conserver la *même* calculatrice et concevoir une *autre* perturbation $\check{p}'$ ou un autre ensemble de perturbations $\check{p}'$, $\check{p}''$, etc. Par exemple, on peut écrire que

$$123456.5 = 123 \times 10^3 + 456.5,$$

ce qui conduit à : $123456.5^2 = 123^2 \times 10^6 + 2 \times 123 \times 456.5 \times 10^3 + 456.5^2$. La calculatrice Google donne, d'une part, $123^2 \times 10^6 + 2 \times 123 \times 456.5 \times 10^3 = 15241299000$ et, d'autre part, $456.5^2 = 208392.25 = 208000 + 392.25$, ce qui montre que les cinq derniers chiffres de 123456.5^2 sont ceux de 456.5^2, i.e., 392.25, et donc que, puisque $15241299 + 208 = 15241507$ (d'après la calculatrice de Google), on a finalement $123456.5^2 = 15241507392.25$. Bien entendu, d'autres stratégies de perturbation « non standard » de $\mathcal{S}$ permettraient de tirer de cette calculatrice la « vérité arithmétique » espérée, qu'elle ne livre pas « spontanément » dans le cas considéré ici. D'une manière plus générale, le maniement de la dialectique des médias et des milieux suppose chez $\hat{w}$ une certaine imagination technico-technologique.

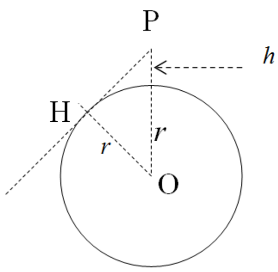
Une étude de cas

Je reprends ici un exemple présenté jadis à l'IUFM d'Aix-Marseille dans le cadre du séminaire de didactique des mathématiques pour les élèves professeurs stagiaires de l'année 2002-2003. Le système étudié au départ, $*\mathcal{S}$, est constitué d'un observateur x situé en un point P au-dessus de la surface de la Terre (par exemple sur un promontoire s'avançant en saillie dans la mer) et qui, depuis ce point P, regarde l'horizon, qui lui semble être à une certaine distance d. La perturbation $\check{p}$ consiste à faire que la hauteur à laquelle est située la personne

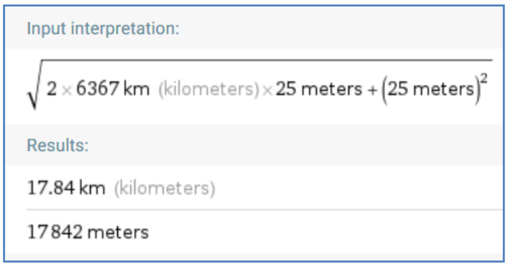
[36] Voir à l'adresse https://www.wolframalpha.com/.

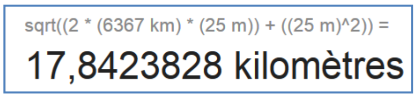
l’observateur x au-dessus de la surface terrestre s’élève. La distance d de x à l’horizon augmente-t-elle, diminue-t-elle, ou reste-t-elle inchangée ?

➤ Pour tenter de répondre, on va utiliser un modèle mathématique $\mathcal{S}$ du système $^*\mathcal{S}$, qui est d’abord un système *géométrique*, représenté sur la figure ci-contre. La Terre y est figurée par un cercle de centre O, de rayon r. La distance d est la distance du point P à H, la droite (PH) étant tangente au cercle en H. Quand P varie sur la verticale (PO), on voit (graphiquement) que la distance PH varie dans le même sens que la hauteur h à laquelle se situe le point P au-dessus du cercle : la distance d = PH augmente quand la hauteur h augmente. Cas limite : si P est sur le cercle, i.e., si $h = 0$, alors $d = 0$: la distance à l’horizon est nulle (cela correspond au cas d’un baigneur x qui aurait les yeux exactement au niveau de la mer).



➤ On peut mathématiser ce premier modèle $\mathcal{S}$ à l’aide du théorème de Pythagore appliqué au triangle PHO rectangle en H. On a : $d = \mathrm{PH} = \sqrt{\mathrm{PO}^2 - \mathrm{OH}^2} = \sqrt{(r+h)^2 - r^2} = \sqrt{2rh + h^2}$. Si, par exemple, $h = 25$ m et $r = 6367$ km, il vient : $d = \mathrm{PH} = \sqrt{2 \times 6367 \text{ km} \times 25 \text{ m} + (25 \text{ m})^2}$. Dans ce cas, WolframAlpha donne ce qu’on voit ci-après à gauche ; la calculatrice de Google, elle, renvoie le message ci-après à droite.





On notera le calcul avec les unités km et m, la calculatrice WolframAlpha fournissant elle-même le résultat et en kilomètres, et en mètres. (Une valeur numérique plus précise est 17.842382853498…)

➤ Nous disposons ainsi d’un modèle *algébrique* $\mathcal{S}'$, à savoir la *formule* $d = \sqrt{2rh + h^2}$. Pour tester la conjecture que d croît avec h, on peut « travailler numériquement » le modèle $\mathcal{S}'$ en faisant calculer les valeurs de d correspondant à différentes valeurs de h. Dans les tables de valeurs ci-après, on a pris respectivement pour accroissement $u = 1$ m (à gauche) et $u = 10$ m (à droite), les hauteurs h et les distances d étant mesurées, elles, en kilomètres. Ce qu’affiche le tableur utilisé montre clairement un accroissement de la distance à l’horizon d en fonction de h.

h	d
0,001	3,57
0,002	5,05
0,003	6,18
0,004	7,14
0,005	7,98
0,006	8,74
0,007	9,44
0,008	10,09
0,009	10,71
0,01	11,28

h	d
0,01	11,28
0,02	15,96
0,03	19,55
0,04	22,57
0,05	25,23
0,06	27,64
0,07	29,86
0,08	31,92
0,09	33,85
0,1	35,68

Ainsi donc, selon ce modèle, lorsque l'observateur x est à h = 10 m = 0,01 km au-dessus de la surface terrestre, l'horizon est à plus de 11 km de x. Lorsque h = 100 m = 0,1 km, l'horizon est, cette fois, à plus de 35 kilomètres.

➤ On peut encore travailler *algébriquement* le modèle algébrique, à savoir la formule $d = \sqrt{2rh + h^2}$. Si $d_1 = \sqrt{2rh_1 + h_1^2}$. On a ainsi :

$$d_1 - d = \sqrt{2rh_1 + h_1^2} - \sqrt{2rh + h^2} = \frac{(\sqrt{2rh_1 + h_1^2} - \sqrt{2rh + h^2})(\sqrt{2rh_1 + h_1^2} + \sqrt{2rh + h^2})}{\sqrt{2rh_1 + h_1^2} + \sqrt{2rh + h^2}}$$

$$= \frac{(2rh_1 + h_1^2) - (2rh + h^2)}{\sqrt{2rh_1 + h_1^2} + \sqrt{2rh + h^2}} = \frac{2r(h_1 - h) + (h_1^2 - h^2)}{\sqrt{2rh_1 + h_1^2} + \sqrt{2rh + h^2}} = \frac{(h_1 - h)(2r + h_1 + h)}{\sqrt{2rh_1 + h_1^2} + \sqrt{2rh + h^2}}.$$

On a donc $d_1 - d = K(h_1 - h)$ avec $K = \dfrac{2r + h_1 + h}{\sqrt{2rh_1 + h_1^2} + \sqrt{2rh + h^2}} > 0$. D'où la conclusion attendue : $h_1 > h \Leftrightarrow d_1 > d$.

➤ L'examen des tables de valeurs présentées plus haut fait apparaître un second phénomène :

h	d	Δ
0,01	11,28	
0,02	15,96	4,67
0,03	19,55	3,59
0,04	22,57	3,02
0,05	25,23	2,66
0,06	27,64	2,41
0,07	29,86	2,21
0,08	31,92	2,06
0,09	33,85	1,94
0,1	35,68	1,83
0,11	37,43	1,74
0,12	39,09	1,66
0,13	40,69	1,60
0,14	42,22	1,54
0,15	43,70	1,48
0,16	45,14	1,43
0,17	46,53	1,39
0,18	47,88	1,35
0,19	49,19	1,31
0,2	50,47	1,28

pour u fixé, l'accroissement Δ de d *diminue* quand la hauteur h augmente, comme on le voit sur la table ci-contre où l'accroissement de hauteur est u = 10 m = 0,01 km. Étudions ce phénomène de décroissance de l'accroissement de la distance à l'horizon. Afin de simplifier un peu la (relative) complexité ostensive, nous prendrons ici $u = 1$ (ce qui revient à prendre u pour unité de longueur). Posons alors $\Delta(h) = d(h + 1) - d(h) = \sqrt{2r(h + 1) + (h + 1)^2} - \sqrt{2rh + h^2}$. On veut s'assurer que $\Delta(h)$ diminue quand h augmente. Ici, nous le ferons en usant des outils les plus simples du calcul différentiel. On va donc montrer que Δ, regardée comme application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ est *strictement décroissante*. On a $\Delta'(h) = d'(h + 1) - d'(h)$ et $d'(h) > 0$ pour $h > 0$

(puisque la fonction d est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$) ; Δ' a donc le même signe que $d'^2(h+1) - d'^2(h)$. Comme $d^2 = (r + h)^2 - r^2$, on a $2dd' = 2(r + h)$, soit $d' = \dfrac{r+h}{d}$. Il vient ainsi :

$$d'^2(x + 1) - d'^2(x) = \frac{(r + h + 1)^2}{d^2(h + 1)} - \frac{(r + h)^2}{d^2(h)} = \frac{d^2(h)(r + h + 1)^2 - d^2(h + 1)(r + h)^2}{d^2(h)d^2(h + 1)}.$$

Il faut alors déterminer le signe de l'expression $\delta = d^2(h)(r + h + 1)^2 - d^2(h + 1)(r + h)^2$. Observons que l'on a : $\delta = (2hr + h^2)(r + h + 1)^2 - (2(h + 1)r + (h + 1)^2)(r + h)^2 = (2hr + h^2)[(r + h)^2+(2r + 2h + 1)] - [(2hr + h^2) + (2r +2h + 1)](r + h)^2$. Posons alors :

$$\begin{cases} a = d^2 = 2hr + h^2 \\ b = (r + h)^2 = a + r^2 \\ c = 2r + 2h + 1 \end{cases}$$

Il vient : $(r + h + 1)^2 = b + c$ et $d^2(h + 1) = a + c$. On a ainsi : $\delta = a(b + c) - (a + c)b = (a - b)c = -r^2c < 0$, CQFD.

➤ Pour compléter ce qui précède, je reproduis ci-après[37] les commentaires apportés en conclusion de cette étude lors du séminaire de didactique des mathématiques pour les élèves professeurs stagiaires de l'année 2002-2003 :

• L'exemple précédent permet d'illustrer un phénomène essentiel : le *travail (mathématique) du modèle (mathématique)* lui-même peut être pensé *en termes de modélisation mathématique*. Travailler un modèle mathématique, en effet, c'est en général construire – puis travailler – *un modèle mathématique de ce modèle mathématique*, l'unique différence consistant en ceci que le système à modéliser est alors, à chaque fois, *de nature mathématique*.

① Ainsi, associer à la *formule* $d = \sqrt{2hr + h^2}$ la *fonction* définie par $d(h) = \sqrt{2hr + h^2}$, c'est modéliser un système relevant *de l'algèbre élémentaire* par un modèle relevant *de l'analyse élémentaire*, ce qui permet alors de disposer de notions et de moyens de travail jusque-là non disponibles (monotonie, dérivabilité, etc.).

② De même, récrire l'expression $d^2(h)(r + h + 1)^2 - d^2(h + 1)(r + h)^2$ sous la forme $a(b + c) - (a + c)b$ revient à *modéliser la première expression par la seconde*. Celle-ci peut être regardée comme une « miniature » de la première : elle est en tout cas *plus facile à travailler*, et fournit donc à peu de frais l'information recherchée à propos du « système » étudié.

③ C'est le même principe de miniaturisation qui, dans l'étude des variations de la fonction Δ, avait conduit – très classiquement – à modéliser cette fonction par une autre fonction, sa dérivée Δ'.

➤ L'étude de cas précédente a mis en avant surtout les notions de modélisation, de modèle, de modèle d'un modèle, etc. Lorsqu'une instance $\hat{w}$ veut étudier un système $*\mathcal{S}$, qui est supposé être un *milieu* par rapport à un certain nombre de perturbations $*\check{p}_1$, $*\check{p}_2$, etc., il est

[37] J'ai seulement modifié les notations employées à l'origine de façon à les rendre compatibles avec celles adoptées dans ce qui précède.

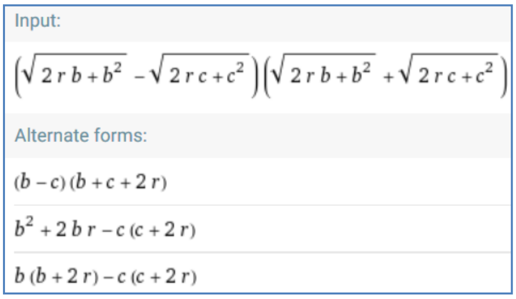
usuel que $\hat{w}$ considère un ou plusieurs modèles $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, etc., de $^*\mathcal{S}$ pour tenter d'apprendre de ces modèles ce que seraient les réactions $^*\check{r}_1$, $^*\check{r}_2$, etc., de $^*\mathcal{S}$ aux perturbations $^*\check{p}_1$, $^*\check{p}_2$, etc. (Bien entendu, $\hat{w}$ peut compter parmi les modèles de $^*\mathcal{S}$ le système $^*\mathcal{S}$ lui-même.) Dans l'exemple de la distance à l'horizon, on remplace le système $^*\mathcal{S}$ « concret » (la Terre, un observateur, etc.) par un *modèle géométrique* (un cercle, un point P extérieur au cercle, etc.), qui constitue lui-même un milieu, mais un milieu *mathématique*. Puis on modélise ce modèle géométrique $\mathcal{S}$ pour arriver à un nouveau milieu $\mathcal{S}'$, à savoir la *formule algébrique* $d = \sqrt{2rh + h^2}$. Pour $\hat{w}$, il s'agit alors de « faire parler » ce milieu $\mathcal{S}'$ en le « travaillant » adéquatement ; soit, en l'espèce, en lui imprimant une perturbation $\check{p}$ consistant à former la différence $d_1 - d = \sqrt{2rh_1 + h_1^2} - \sqrt{2rh + h^2}$. Plus haut, ce travail a abouti à l'émission d'un message prenant fondamentalement la forme de l'égalité suivante :

$$(\sqrt{2rh_1 + h_1^2} - \sqrt{2rh + h^2})(\sqrt{2rh_1 + h_1^2} + \sqrt{2rh + h^2}) = (h_1 - h)(2r + h_{1S} + h).$$

Qu'est-ce qui, ici, est le milieu, qu'est-ce qui est le média ? Le milieu, qui opère sur le système $\mathcal{S}'$, est un système de calcul « personnel » $\mathcal{S}''$, porté par une personne, l'auteur de ces lignes, ϟ. Le média est le système d'affichage $\mathcal{S}''^*$ associé. Pour mieux le voir, confions le soin d'effectuer le calcul au système de calcul $\mathcal{S}'''$ de WolframAlpha, auquel nous fournissons donc l'expression ci-après (pour obvier à certaines idiosyncrasies apparentes de WolframAlpha, nous avons remplacé les lettres h et h_1 respectivement par les lettres c et b) :

$$(\sqrt{2rb + b^2} - \sqrt{2rc + c^2})(\sqrt{2rb + b^2} + \sqrt{2rc + c^2}).$$

Voici alors le message du média associé $\mathcal{S}'''^*$ qu'est le système d'affichage de WolframAlpha :



Le message de $\mathcal{S}'''^*$ contient en particulier ce que nous « attendions », à savoir l'égalité

$$(\sqrt{2rb + b^2} - \sqrt{2rc + c^2})(\sqrt{2rb + b^2} + \sqrt{2rc + c^2}) = (b - c)(b + c + 2r),$$

ce qui se récrit avec nos notations :

$$(\sqrt{2rh_1 + h_1^2} - \sqrt{2rh + h^2})(\sqrt{2rh_1 + h_1^2} + \sqrt{2rh + h^2}) = (h_1 - h)(2r + h_1 + h).$$

Au cœur de la recherche de la vérité

La dialectique des médias et des milieux est essentielle dans « la recherche de la vérité »[38]. La situation de base est la suivante : une instance $\hat{w}$ énonce une assertion ϑ, i.e., $\hat{w} \vdash \vartheta$. Dans ce cas, $\hat{w}$ est un média $\mathcal{S}_{\check{m}}$. La situation la plus générale peut s'écrire : $\mathcal{S}_{\check{m}} \vdash \vartheta$ et on pourra récrire l'énoncé $\hat{w} \vdash \vartheta$ de la façon suivante : $\mathcal{S}_{\check{m}}(\hat{w}) \vdash \vartheta$. C'est ici l'occasion de faire une remarque laissée implicite dans ce qui précède : la notation $\mathcal{S}_{\check{m}}$ désigne rigoureusement le système $\mathcal{S}$ *en tant que média*, et cela *par rapport à certains types d'énoncés* ϑ. Il est usuel d'accorder à un média $\mathcal{S}_{\check{m}}$ une crédibilité *variable* en fonction du type d'énoncés émis, ce qui fait qu'il n'existe pas de média absolument crédible[39], même si certaines pratiques de communication de masse tendent parfois à promouvoir des « énonciateurs universels »[40]. Inversement, toute instance $\hat{w}$ – c'est-à-dire tout média $\mathcal{S}_{\check{m}}(\hat{w})$ – doit être, par méthode, regardée comme non absolument dépourvue de crédibilité, ainsi qu'il en va par exemple avec les élèves dans une classe. Ce principe rend plus nécessaire encore un développement adéquat de la dialectique des médias et des milieux et son emploi adéquat face à un énoncé ϑ émis par un média $\mathcal{S}_{\check{m}}$ donné, même lorsque celui-ci est émis par $\mathcal{S}_{\check{m}}$ en même temps que des réserves expresses quant à son exactitude (« Je crois, sans en être sûr, que… »).

---

[38] Je fais allusion ici au texte inachevé de René Descartes (1596-1650) intitulé *Recherche de la vérité par les lumières naturelles*. Voir à https://fr.wikipedia.org/wiki/Recherche_de_la_vérité_par_les_lumières_naturelles.

[39] Il semble que, longtemps, au début d'Internet au moins, certaines instances « pédagogiques » aient insisté sur la crédibilité supposée des sites du gouvernement, ce qui est d'une naïveté épistémologique obvie.

[40] Dans la crise déclenchée par la diffusion de la maladie à coronavirus 2019 (Covid-19), de nombreux commentateurs sont apparus, sur les plateaux de télévision, excipant de leur titre de médecin pour émettre des énoncés sur des matières où ils semblent n'avoir pas eu de magistère avéré. L'un des plus coupables à cet égard, à l'égal de plusieurs d'autres sans doute, à savoir Michel Cymes, a eu aussi une bonne analyse de la chose lors de l'émission *C à Vous* du 11 mai 2020, où il déclarait : « … il y aussi une forme de… Je ne vais pas dire qu'on est péremptoires quand on est dans la médecine ; mais, quand même, on nous apprend à dire “Je sais”. Quand vous allez voir un médecin, vous avez envie qu'il vous dise “Je sais ce que vous avez, je sais comment vous traiter, je sais comment je vais vous sortir de votre maladie ». L'animatrice intervient : « C'est presque un comportement qu'on vous inculque… » Michel Cymes reprend : « Pour donner confiance au patient, quand j'ai un patient qui vient me voir, si je lui dis “Je sais pas ce que vous avez, je sais pas comment je vais vous traiter”, c'est un peu problématique. Et pourtant on ne sait pas toujours. Et nous, notre formation de médecin, c'est souvent de dire “Voilà, nous sommes les sachants, nous savons.” Et on a probablement un peu trop dit “On sait” […] Je crois que cette crise sanitaire va nous apprendre à dire “On sait pas” et à avoir un peu plus d'humilité… » (Voir à l'adresse https://www.youtube.com/watch?v=QfUs5ELDHZY, à partir de 0,59 minute.) Quand, comme ici, « l'énonciateur universel » est une personne *x*, le mécanisme, bien décrit par Cymes, est le suivant : *x* occupe ordinairement une position *p* (ici celle de médecin) et, invité à occuper momentanément une position $p' \neq p$, ne parvient pas à s'émanciper de son assujettissement ordinaire à *p*, assujettissement devenu dominant en lui.

➤ Le crédit que nous accordons à un média $\mathcal{S}_{\check{m}}$ à propos d'un énoncé ϑ qu'il émet dépend des milieux $\mathcal{S}_{\check{r}}$ sur lesquels cet énoncé aura été mis à l'épreuve (directement ou indirectement), des perturbations $\check{p}$ en lesquelles auront consisté ces mises à l'épreuve, des réactions $\check{r}$ ainsi engendrées, telles du moins que les aura appréhendées $\mathcal{S}_{\check{m}}$. La question des milieux $\mathcal{S}_{\check{r}}$ est ainsi la grande question de la dialectique des médias et des milieux. Pour illustrer la chose, nous avons tous les cas vus plus haut auxquels, pour terminer aujourd'hui sur ce sujet, je voudrais ajouter deux exemples correspondant à deux questions fort différentes, que j'offre à votre sagacité enquêtrice.

➤ La première question est la suivante (elle découle des « messages » vus plus haut) :

> Q_1. L'égalité $20615673^4 = 2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4$ est-elle vraie ?

On a vu que cette égalité supposée a été publiée par le mathématicien Noam David Elkies[41]. L'article d'Elkies a paru en 1988, après sa thèse (1987). Il a tout simplement pour titre « On $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$ »[42]. La dialectique des médias et des milieux doit être mise en œuvre, ici, sur l'énoncé ϑ_1 suivant : « On a : $20615673^4 = 2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4$. »

➤ La deuxième question n'est pas « mathématique ». Elle a été inspirée à ϟ par les débats en cours autour de l'épidémie de coronavirus 2019 (Covid-19) :

> Q_2. Est-il exact que chacun de nous touche son visage plusieurs centaines de fois par jour ?

La dialectique des médias et des milieux doit être mise en œuvre, en l'espèce, sur l'énoncé ϑ_2 ci-après : « Chacun de nous touche son visage plusieurs centaines de fois par jour. » Cet énoncé a, dans des variantes diverses, été proféré à de multiples reprises dans les radios et télévisions françaises.

III. Le forum des questions

Je reviens enfin sur la question qui nous a été proposée Jean-Pierre Bourgade après la séance 2 (le 10 décembre 2019), question que je reproduis une fois encore :

> Ma question porte sur la notion de « question de recherche ». Il me serait précieux qu'à l'occasion tu parles un peu des conditions et contraintes de production de questions de recherche. Formulée naïvement, très naïvement, comme tu dis, ma question serait : « Comment sait-on qu'une question est une question de recherche ? », ce qui, cela va sans dire, signifie plutôt : « Comment sait-on qu'une question de recherche est une *bonne* question de

---

[41] Sur Elkies, voir à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Noam_Elkies. Notons que dans le livre de Niven, Zuckerman et Montgomery, Elkies avait pour initiales des prénoms N. J. Il semble que, dans son livre paru en 2005, James J. Tattersall ait simplement recopié cette erreur.

[42] Voir à l'adresse https://www.ams.org/journals/mcom/1988-51-184/S0025-5718-1988-0930224-9/S0025-5718-1988-0930224-9.pdf.

> recherche ? », ou encore, quelles instances évaluatrices $\hat{v}$ sont en position de juger que telle question est une *bonne* question de recherche, et selon quels critères ?
>
> La réponse « Le chercheur lui-même qui formule la question ! » n'est pas une bonne réponse, bien sûr : elle néglige toute la sociologie du fonctionnement du champ scientifique. Néanmoins, la réponse opposée « Les chercheurs dominants ! » n'est pas meilleure parce qu'elle néglige la part spécifique du domaine de recherche qui joue un rôle dans la formation de la « qualité » de la question. Une question n'est pas bonne *seulement* du fait du domaine de recherche, elle n'est pas bonne *seulement* du fait de qui la formule, ni de qui est en position dominante.
>
> Ma question pourrait se reprendre ainsi. Pour prendre l'exemple de la TAD, en « gelant » provisoirement les variables « sociologiques » (intérêt des relecteurs des revues de didactique, intérêts des collègues proches, état des luttes entre ces divers intérêts, etc.) : quelle technique la TAD est-elle en mesure de produire pour produire de « bonnes » questions ? Des questions qui soient « bonnes », disons, du point de vue de la position de « chercheur en TAD » – plus ou moins aguerri, etc., je dis bien de la « position » et non du point de vue de telle ou telle personne occupant la position en question. Il me semble qu'une réponse peut provenir de l'étude de la dynamique de la théorie : quelles sont les directions de développement rapide, ou au contraire les points de blocage, etc. Tiens, et au passage, cette question, « Comment sait-on qu'une question de recherche est une bonne question de recherche ? » est-elle une bonne question de recherche ? ☺

Voici donc, *humblement*, quelques matériaux pour, peut-être, ébaucher une réponse.

Considérations préliminaires

Pour commencer, il me faut préciser l'emploi en TAD de quelques mots clés. Comme vous le savez sans doute, *étudier une question Q*, c'est aussi *enquêter sur la question Q*, c'est conduire une *enquête* sur la question *Q*, laquelle est appelée alors la question *génératrice* de l'enquête. Le but de l'enquête est de construire une réponse *R* à la question *Q*, réponse qui satisfasse à certaines conditions dans lesquelles je n'entrerai pas ici. Cela noté, pourquoi avoir cette double terminologie, celle de l'étude et celle de l'enquête ? Cela résulte du double sens qui a été donné en TAD au substantif *étude*. Une enquête sur une question se traduit par la réalisation d'un *parcours d'étude et de recherche*, d'un PER. C'est l'expression « étude et recherche » qui donne la solution. Quand on « étudie » la question *Q*, on réalise « une étude et (une) recherche ». Ici, « étude » signifie à la fois « étude et recherche » (c'est-à-dire le processus *global* d'enquête), et, restrictivement, la partie « étude » de ce processus, soit l'étude « au sens restreint.

➤ Examinons le schéma herbartien $(S(X, Y, Q) ➦ M) ➥ R^{\heartsuit}$, où l'on a :

$$M = \{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \ldots, R_m^{\Diamond}, O_{m+1}, O_{m+2}, \ldots, O_n, D_{n+1}, D_{n+2}, \ldots, D_p,\ Q_{p+1}, Q_{p+2}, \ldots, Q_q\}.$$

Je rappelle que la notation $R_i^\lozenge$ (« r poinçon ») désigne une réponse (partielle) « apportée » dans le milieu M du système didactique $S(X, Y, Q)$, et « poinçonnée » par une institution quelconque – qui peut être, entre autres choses, un livre, le professeur ou… un élève de la classe (dans le cas d'un système didactique « scolaire » au sens usuel du terme). Ce qui, pour toute institution autre que $S(X, Y, Q)$, est une réponse $R^\heartsuit$ (la réponse à laquelle un élève est parvenu, par exemple) est, dans le même temps, une réponse $R^\lozenge$ pour $S(X, Y, Q)$. La notation O_j désigne une œuvre quelconque (une théorie, une expérience, un historique, une analyse grammaticale, philosophique, etc.), la notation D_k renvoie à un corpus de données quelconque, enfin la notation Q_l représente une *question* engendrée par le processus d'étude et de recherche – par l'enquête sur Q, qui est la question génératrice de l'enquête. L'utilisation de ces ressources que sont les réponses $R_i^\lozenge$, les œuvres O_j, les corpus D_k et les questions Q_l soulèvent des questions (incluses formellement dans la suite des questions Q_l), qui sont *engendrées* par l'enquête sur la question génératrice Q. En principe, le fait de pouvoir répondre à une question, Q_l, commande la poursuite du parcours d'étude et de recherche sur lequel X s'est engagé (même si, parfois, X peut avancer en *évitant* Q_l). Supposons donc, ici, que X doive s'affronter à Q_m. Plusieurs cas se présentent alors.

➤ Il se peut qu'il existe à Q_m une réponse $R_m^\lozenge$ « bien connue », qu'il échoit ainsi à X d'étudier : c'est là la partie *étude*, au sens « restreint » du terme, du processus d'étude et de recherche. Voici de cela un exemple. Il se peut que X se pose la question de calculer la dérivée du produit uv de deux fonctions u et v d'une variable. L'étude, sur ce point, conduira X à rencontrer cette œuvre qu'est la formule $(uv)' = u'v + uv'$. Cette œuvre fut pourtant, autrefois, la réponse à une question *de recherche* (au sens que nous adopterons ici). Voici par exemple ce qu'écrit Morris Kline dans son ouvrage *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Oxford University Press, 1972) à propos de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) :

> By July 11, 1677, Leibniz could give the correct rules for the differential of sum, difference, product, and quotient of two functions and for powers and roots, but no proofs. In the manuscript of November 11, 1675, he had struggled with $d(uv)$ and $d(u/v)$, and thought that $d(uv) = du\, dv$. (p. 376)

Le grand Leibniz, donc, a pu penser un temps que l'on aurait $(uv)' = u'v'$.

➤ Il se peut aussi qu'il existe à Q_m une réponse $R_m^\lozenge$ « bien connue » mais inadéquate pour l'usage que X vise dans le cadre de l'enquête sur Q_m. Ici, je citerai à nouveau l'ouvrage de

Morris Kline, à propos d'un exemple – « l'intégrale de Stieltjes » – associé au nom du mathématicien français d'origine néerlandaise Thomas-Joannes Stieltjes (1856-1894)[43] :

> Actually the first extension of the notion of integral came from a totally different class of problems than those just described. In 1894 Thomas Jan Stieltjes (1856-94) published his "Recherches sur les fractions continues," a most original paper in which he started from a very particular question and solved it with rare elegance. This work suggested problems of a completely novel nature in the theory of analytic functions and in the theory of functions of a real variable. In particular, in order to represent the limit of a sequence of analytic functions Stieltjes was obliged to introduce a new integral that generalized the Riemann-Darboux concept. (p. 1041)

➤ Je voudrais maintenant m'arrêter sommairement sur un autre cas dans lequel la question Q_m peut relever soit de l'étude, soit même de la recherche : il s'agit du cas où Q_m est regardée comme relevant d'un champ de connaissance qui ne serait pas celui où le collectif X est censé évoluer. Cela oblige X à s'affranchir des limites conventionnellement imposées à sa « discipline » – à laquelle il est assigné ou à laquelle il s'est *lui-même* assigné – et, ne tenant compte que des besoins épistémiques de son enquête, à effectuer ce qui sera vu par d'aucuns comme autant de « razzias » praxéologiques en territoire « étranger ». À propos de l'attitude que cela suppose, j'ai employé l'aimable adjectif *codisciplinaire* et parlé d'*enquête codisciplinaire*, laquelle peut conduire, en quelques cas, rares sans doute, à réaliser un travail de recherche sur un domaine regardé comme extérieur à sa discipline.

➤ Cette situation est d'autant plus fréquente aujourd'hui que l'évolution de la cartographie des disciplines est allée, historiquement, vers une *externalisation praxéologique* qui a fabriqué des disciplines tenues académiquement pour séparées et indépendantes, comme il en va avec l'*histoire*, l'*épistémologie* ou la *philosophie* « des mathématiques ». Alors que, face à une œuvre donnée, il semble non déraisonnable de se demander ce qui a motivé sa création (« historiquement »), sous quelles conditions cela a été fait, en quoi les conditions actuelles (en termes de ressources praxéologiques disponibles, notamment) modifierait la problématique de sa création ou de son emploi, pour certaines instances du moins, l'instance questionnante X serait frappée d'illégitimité « épistémologique » (en vérité, académique) à vouloir satisfaire à cet égard ses besoins praxéologiques. Contre cela, la TAD pousse en avant une attitude faite tout à la fois d'audace épistémologique et d'indifférence aux grognes « académiques » allogènes.

---

[43] Voir à https://fr.wikipedia.org/wiki/Thomas_Joannes_Stieltjes (lecture recommandée à qui ne connaît pas) et, pour les travaux de Stieltjes cités par Kline, à http://www.numdam.org/article/AFST_1894_1_8_4_J1_0.pdf et à http://www.numdam.org/article/AFST_1895_1_9_1_A5_0.pdf.

➤ Dans cette perspective, j'ai été frappé récemment par un détail dans le portrait que brosse, après d'autres, Kenneth O. May (1915-1977), « mathématicien et historien des mathématiques » américain, dans son « Biographical sketch of Henri Lebesgue », qui figure en introduction à l'édition en anglais de l'ouvrage de Lebesgue intitulé *La mesure des grandeurs*[44]. Je n'en retiendrai que ce bref passage[45] :

> Lebesgue was not a narrow specialist. He was a great student, innovator, and teacher. His ideas came from thoughtful questioning of the past. When one of his students, Lucienne Felix, asked him about his work in the history of mathematics, he replied, "I don't do history of science. I do science". He considered observation and study of previous work to be an essential part of scientific research. […] In an article on Jordan, he said that "the mathematician must carefully examine the domain in which he works, observe the role of the different mathematical entities which he meets, look at them live… in brief, the mathematician transforms himself into a naturalist." (p. 4)

La phrase clé, ici, est celle attribuée à Lebesgue par May[46] : « I don't do history of science. I do science. » Elle mérite certainement d'être méditée.

Éléments de réponse

Ce qui précède permet de faire le départ, quoique avec circonspection, entre « question de recherche » et « question d'étude ». Je crois qu'une grande partie de l'activité d'un chercheur est, par force, consacrée à l'étude (au sens restreint du terme). En sens inverse, cependant, dans une science commençante comme l'est la didactique, toute question semble avoir des chances non négligeables d'être une question « de recherche ». Dans un domaine de recherche $\mathcal{R}$ donné, une question de recherche est une question Q regardée comme *ouverte* par une instance de recherche $\hat{r}$ au moins, parce que les réponses $R^\lozenge$ éventuellement disponibles sont jugées par $\hat{r}$ inadéquates pour avancer dans une ou plusieurs recherches en cours ou envisagées. S'il en est ainsi, Q est un *problème* pour $\hat{r}$, problème qui pourra être reconnu tel,

---

[44] Henri Lesbesgue, *Measure and the Integral*, edited with a biograhical essay by Kenneth O. May (1966, San Francisco, Holden Day). Voir à l'adresse https://fr.scribd.com/doc/274680861/Measure-and-the-Integral.

[45] Les deux références auxquelles l'auteur renvoie dans ce passage sont Arnaud Denjoy, Lucienne Felix et Paul Montel (1957). Henri Lebesgue, le savant, le professeur, l'homme. *Enseignement Mathématique, 2*(3), 1-18, p. 11 ; et Henri Lebesgue (1957). Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan [originellement lu à l'Académie des sciences en 1923 (*sic*)]. *Enseignement mathématique*, *2*(3), p. 97.

[46] Au moment où j'écris ces lignes, je n'ai pas pu consulter le texte (en français) de Lucienne Felix référencé dans la note précédente.

plus ou moins rapidement, par d'autres instances au sein de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire qui pourra gagner le statut de problème au sein de $\mathcal{R}$[47].

➤ Deux critères encore peuvent être considérés. Tout d'abord, la question Q est-elle reconnue comme relevant du domaine de recherche $\mathcal{R}$? Pour nous, en l'espèce, est-elle une question « de didactique » ? Il s'agit là d'une condition qui, dans certaines circonstances, peut devenir décisive : si Q paraît relever d'un autre domaine de recherche $\mathcal{R}'$, l'instance $\hat{r}$ devra-t-elle se résoudre à attendre que la question soit « résolue » au sens de $\mathcal{R}'$? Ou bien décidera-t-on de passer outre en tentant, avec les ressources que l'on saura se rendre disponibles au sein de $\mathcal{R}$, de « bricoler » une réponse $R^{\heartsuit}$ jugée appropriée par $\hat{r}$? Pour $\mathcal{R}$ = physique et $\mathcal{R}'$ = mathématiques, par exemple, on pourra penser au cas fameux de la *théorie des distributions*[48] Bien entendu, on pensera aussi à ce que nous disions à propos de Lebesgue et de l'histoire des mathématiques.

➤ Un autre critère, qui paraît essentiel, est ce qu'on peut appeler la *récurrence* et la *crucialité* de la question, soit le fait qu'elle commande l'accès à plus ou moins de parcours d'étude et de recherche, c'est-à-dire le fait que sa non-résolution empêche d'emprunter certains chemins potentiels d'étude et de recherche. C'est là un caractère qui, certes, ne se découvre en général que lentement, mais qui, au fur et à mesure, tend à faire apparaître cette question comme un problème crucial dans le développement d'au moins certaines parties du domaine de recherche considéré.

➤ Il me semble que la question énoncée à la fin de la séance 2 de cet *Humble séminaire*, qui a, semble-t-il, en partie motivé la question de Jean-Pierre, était de cette sorte. Elle formule un problème indéfiniment récurrent, que j'appellerai, pour faire court, le problème du *choix praxéologique*, lequel est au cœur de toute analyse praxéologique et didactique. J'en rappelle ici l'énoncé :

> Q_{∂}. Un problème P étant donné, quels sont les *outils* qu'un instance $\hat{\imath}$ peut mobiliser pour le résoudre et quels *usages* l'instance $\hat{\imath}$ peut-elle faire de ces outils ? Quelles sont les *conditions et contraintes* sous lesquelles $\hat{\imath}$ est amenée à opérer qui, étant donné P, déterminent le choix des outils et de leurs usages ?

Nous y reviendrons.

ϟ

---

[47] Sur la notion de *question ouverte* ou de *problème ouvert*, on pourra voir l'article « Open problem » de *Wikipedia* (à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Open_problem).

[48] Voir par exemple à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Distribution_(mathématiques).

La prochaine séance de l'*Humble séminaire*, qui sera aussi la dernière de l'année 2019-2020, devrait avoir lieu le **mardi 16 juin 2020**, à partir de 16 h 30. D'ici là, vos remarques et vos questions seront les bienvenues !

YC.