L’humble séminaire 2019-2020

Séances 1 à 5

L'humble séminaire 2019-2020

Séance 1 du 5 novembre 2019

I. Le nom d'*Humble séminaire*

L'*Humble séminaire* a commencé à exister, de la manière la plus discrète qui soit, en 2018-2019. Cette année-là, en vérité, il ne s'est réuni que trois fois, de mars à mai 2019[1].

Il fallait choisir un nom pour ce séminaire. Le premier qualificatif qui m'était alors venu à l'esprit était *petit* : « petit séminaire », donc. Mais, dans l'histoire éducative française, l'expression « petit séminaire » a un passé qui pourrait induire en erreur : dans l'organisation formative de l'église catholique, en effet, le « petit séminaire » était une préparation au « grand séminaire », lequel préparait lui-même à la prêtrise au sein de cette église. Le passage suivant de l'article « Séminaire (catholicisme) » de Wikipédia[2] en dit assez à ce propos, me semble-t-il, pour le moment :

> En France, le séminaire proprement dit est appelé ***Grand séminaire***. Par opposition, le ***Petit séminaire*** est une école de niveau secondaire (collège, lycée) qui forme aussi bien des futurs *séminaristes* du grand séminaire que des élèves qui resteront laïcs. Le terme et l'institution sont désuets en Europe, mais le petit séminaire a eu une grande importance sociale jusqu'au milieu du XX[e] siècle. C'était souvent l'un des seuls moyens de s'instruire pour les enfants intellectuellement doués vivant à la campagne, que les curés de paroisse repéraient et dont l'Église prenait en charge les années d'études secondaires, en proposant aux meilleurs d'accéder au grand séminaire. C'est aussi au petit séminaire que la petite bourgeoisie catholique envoyait de préférence ses garçons pour qu'ils reçoivent une éducation classique de qualité dans un milieu moralement exigeant. L'internat était la règle et la discipline rigoureuse.

Pour aller un peu plus loin à propos des usages du mot *séminaire*, on pourra parcourir la notice consacrée à ce mot par le CNTRL[3]. On y verra notamment l'origine de l'emploi du mot, qui nous est familier aujourd'hui, dans les contextes institutionnels de recherche.

Finalement, j'ai proposé de nommer ce « petit séminaire » l'*humble* séminaire, optant pour un qualificatif qui, me semble-t-il, est assez juste – et, par-dessus le marché, plutôt seyant.

II. L'Humble séminaire comme dispositif

L'*Humble séminaire* devrait avoir lieu à raison d'une séance par mois. Contrairement à ce qui était le cas de l'ancien séminaire qui a longtemps eu lieu dans les locaux du site de la

---

[1] Les 14 mars, 18 avril et 16 mai 2019.

[2] Voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Séminaire_(catholicisme).

[3] Voir à l'adresse https://www.cnrtl.fr/definition/séminaire.

Canebière (Marseille) de l'IUFM-ESPE, je ne rédigerai pas à l'avance l'intégralité de mon propos (avant de le corriger et de l'amender à l'issue de la séance). En revanche, très modestement, j'enregistrerai nos propos et je rendrai ces enregistrements disponibles à celles et ceux qui le souhaiteront. Il en sera de même, après quelques correctifs et additifs, des présentes notes que j'utilise pour me repérer dans la structure et le contenu de la séance.

Chaque séance comportera en outre un moment consacré à apporter des éléments de réponse aux questions que les participants actuels et potentiels auront formulées (par courriel, de préférence).

III. Situation de la TAD

Le sujet permanent de l'Humble séminaire est *la situation de la TAD dans le champ didactique* – les avancées, les résistances, les débats, les combats même.

La période récente a vu se succéder trois événements notables. Le premier a été, en janvier 2018, le 6e Congrès international sur la TAD (CITAD 6), tenu à Autrans près de Grenoble, auquel ont participé quelque cent personnes. On a là un signe clair de la vitalité et de la dynamique de la TAD dans la période actuelle. Le deuxième a été le programme de recherche intensif qui a réuni un certain nombre de collègues et amis à Bellaterra (près de Barcelone), dans le cadre du Centre de rencontre mathématique (CRM), en juin et juillet 2019[4]. Ce fut, je crois, une réussite considérable, dans un climat de raison et d'amicale courtoisie : nous y reviendrons.

Le troisième événement digne de remarque a été la 20e école d'été de didactique des mathématiques, tenue elle aussi à Autrans du 13 au 19 octobre 2019, et organisée par une vaillante équipe emmenée par Hamid Chaachoua (à qui nous devons déjà l'organisation du CITAD 6).

Cette semaine a été l'occasion, pour moi et, je suppose, pour d'autres que moi, de mieux saisir la présence d'un problème au sein de la communauté française actuelle de didactique des mathématiques. C'est un problème qu'il n'est pas facile de formaliser parce qu'il se dissimule dans une masse compacte d'attitudes et de propos hostiles à la TAD notamment. Tout cela a atteint une intensité palpable au cours de la semaine à Autrans, durant laquelle j'ai progressivement ressenti une animosité qui, allant au-delà des débats usuels en toute

[4] Ce séjour de deux mois « au loin » est la raison pour laquelle l'Humble séminaire 2018-2019, commencé tardivement pour des raisons personnelles, a pris fin dès le mois de mai 2019.

communauté scientifique, me paraît étrangère à l'éthique scientifique et, en particulier, préjudiciable au travail de production et de partage des connaissances.

Pourtant le problème qui doit d'abord nous préoccuper est, me semble-t-il, ailleurs. Il concerne les jeunes générations qui, souhaitant se livrer à des recherches en didactique, sont en certains lieux de recherche nourries de rumeurs, de préjugés, de *fake news* à l'encontre de la TAD plutôt que d'une connaissance positive de cette théorisation. La prévention qui en résulte apporte sans doute à nos jeunes camarades un « bénéfice secondaire » en leur épargnant l'effort spécifique que requerrait l'étude idoine de cette construction scientifique en devenir. Mais aujourd'hui le développement de la TAD est tel qu'une obligation éthique, dont la raison d'être est épistémologique et scientifique, s'impose à nous. Tout d'abord, nous devons énoncer sans ambages, à l'adresse de quiconque prétend s'intéresser aux faits didactiques, que la TAD est, pour cela, *selon nous*, un outil essentiel par sa capacité à modéliser le didactique où qu'il apparaisse. C'est là, sans doute, un point de vue que l'on peut ne pas partager. Mais il est un second point qui, semble-t-il, ne souffre guère discussion : cette théorisation du didactique ne saurait aujourd'hui s'apprendre en quinze jours, notamment (mais pas seulement) parce qu'elle rompt avec la plupart des doxas « éducatives » et que chacune de ses ruptures avec l'opinion établie prend du temps. Le temps d'étude ne peut se contracter à volonté. Ni quantitativement (la matière à maîtriser commence à devenir imposante), ni qualitativement (les contenus praxéologiques de la TAD, et en particulier son *logos*, sont souvent perçus, au début, comme subtils et complexes), la TAD ne saurait se conquérir aisément. Ce qu'on pourrait appeler une *working knowledge* de la TAD – une maîtrise théorique et pratique pratiquement efficace pour le chercheur en didactique – ne saurait consister en quelques notions et recettes apprises rapidement, à vil prix. En la matière la facilité n'est pas de mise.

C'est une telle *déclaration*[5] qu'il me semblerait donc utile de formuler, aujourd'hui, à l'adresse des générations montantes, dans des formes appropriées auxquelles je vous invite ainsi à réfléchir. Nous verrons bien !

---

[5] Le CNRTL définit ainsi le mot *déclaration* : « Mise en forme écrite ou orale exprimant nettement la prise de position, la décision officielle d'un chef ou d'un groupe vis-à-vis d'un autre groupe, de l'opinion publique ou d'une personne. » (Voir à l'adresse https://www.cnrtl.fr/lexicographie/déclaration.) *Déclarer*, c'est, étymologiquement, « rendre clair ».

IV. « La TAD pour les nuls »

Dans la perspective précédente, il me semble qu'il serait bon de pouvoir disposer d'un ouvrage du style « La TAD pour les nuls » – qui, bien entendu, ne porterait pas, officiellement, ce titre (certaines personnes, vous le savez, sont si susceptibles !). Pour fixer les idées, j'indique d'abord que cet « ouvrage » serait constamment disponible en ligne et aurait des contenus indéfiniment évolutifs.

De quel type de texte s'agirait-il ? Il devra s'adresser aux chercheurs en didactique, ceux-là même que je désigne génériquement par la lettre grecque ξ. Par l'expression de chercheur en didactique, je ne désigne particulièrement ni des chercheurs « aguerris » ni des chercheurs « novices » : je désigne *quiconque assume d'occuper la position de chercheur en didactique*, position que je noterai par la lettre grecque ρ surmontée d'un accent circonflexe : $\hat{\rho}$. Cette assomption peut être récente ou sembler avoir toujours existé : je regarde comme chercheur en didactique quiconque s'assume comme tel, fût-ce depuis dix secondes, ou de façon intermittente.

Cette notion de « chercheur en… » a une conséquence importante : à l'instar des séminaires que j'ai animés antérieurement, cet humble séminaire n'offrira rien de particulier pour telle ou telle catégorie de chercheurs, fussent-ils de complets débutants. Aux nouveaux venus, il m'est parfois arrivé de dire (et, en tout cas, je l'ai toujours pensé) : « Venez… Au début sans doute vous ne comprendrez rien ou si peu que rien. Un chercheur (et en fait tout "étudiant", et donc tout citoyen) doit savoir supporter ce genre de "frustrations". Mais à la fin de l'année, vous verrez, vous commencerez à comprendre, au point peut-être de ne plus comprendre comment diable vous aviez fait, quelques mois plus tôt, pour ne pas comprendre ! »

La solution à ce paradoxe tient, je pense, dans la notion d'*éléments d'une science* telle que l'entend l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* (1751-1772) publiée sous la direction de Denis Diderot (1713-1784) et Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783). Voici un extrait clarificateur de l'article « Éléments des sciences » signé de d'Alembert[6] :

> … il est facile de distinguer les propositions ou vérités générales qui servent de base aux autres, & dans lesquelles celles-ci sont implicitement renfermées. Ces propositions réunies en un corps, formeront, à proprement parler, les *élémens* de la science, puisque ces *élémens* seront comme un germe qu'il suffiroit de développer pour connoître les objets de la science fort en détail. Mais on peut encore considérer les *élémens* d'une science sous un autre point de vûe : en effet, dans la

[6] Voir à l'adresse https://fr.wikisource.org/wiki/L'Encyclopédie/1re_édition/ELEMENS_DES_SCIENCES.

> suite des propositions on peut distinguer celles qui, soit dans elles-mêmes, soit dans leurs conséquences, considerent cet objet de la maniere la plus simple ; & ces propositions étant détachées du tout, en y joignant même les conséquences détaillées qui en dérivent immédiatement, on aura des *élémens* pris dans un second sens plus vulgaire & plus en usage, mais moins philosophique que le premier. Les *élémens* pris dans le premier sens, considerent pour ainsi dire en gros toutes les parties principales de l'objet : les *élémens* pris dans le second sens, considerent en détail les parties de l'objet les plus grossieres. Ainsi des *élémens* de Géométrie qui contiendroient non-seulement les principes de la mesure & des propriétés des figures planes, mais ceux de l'application de l'Algebre à la Géométrie, & du calcul différentiel & intégral appliqués aux courbes, seroient des *élémens* de Géométrie dans le premier sens, parce qu'ils renfermeroient les principes de la Géométrie prise dans toute son étendue ; mais ce qu'on appelle des *élémens de Géométrie ordinaire*, qui ne roulent que sur les propriétés générales des figures planes & du cercle, ne sont que des *élémens* pris dans le second sens, parce qu'ils n'embrassent que la partie la plus simple de leur objet, soit qu'ils l'embrassent avec plus ou moins de détail. Nous nous attacherons ici aux *élémens* pris dans le premier sens ; ce que nous en dirons pourra facilement s'appliquer ensuite aux *élémens* pris dans le second.

C'est bien dans le premier sens distingué par d'Alembert, le sens « philosophique », que je parlerai désormais *d'éléments de la TAD*. Ces éléments ne sont jamais donnés de façon évidente : il faut indéfiniment *élémenter* une science, c'est-à-dire en dégager et en pointer les éléments. On aboutit alors, si l'opération est réussie – comme il en fut avec les *Éléments* (en grec, Στοιχεῖα *Stoicheia*) constitués par Euclide vers 300 AEC – à un traité *élémentaire* (au sens « philosophique » du terme) de la science élémentée (et non « élémentarisée »), qui est, pour nous, ici, la TAD.

En première approximation, j'identifierai ces éléments aux ingrédients praxéologiques qui apparaissent *cruciaux*, *décisifs*, ou, pour le dire simplement, *qui changent quelque chose* dans ladite science.

Pour illustrer la notion d'élément en TAD, je prendrai, comme tout premier exemple, les notions géminées de *personne* et *d'institution*, qui sont au point de départ de la théorisation anthropologique du didactique. Bien entendu, un chercheur en didactique ξ doit les entendre en se déprenant des adhérences culturelles diverses qui en bloqueraient l'usage adéquat en TAD. Tout être humain, c'est-à-dire tout spécimen de l'espèce humaine, est ainsi une personne au sens de la TAD, et cela quel que soit son âge (un nouveau-né est une personne) ou son prestige par exemple[7]. Tout être humain est assujetti à de multiples institutions dès

[7] En particulier, *personne* ne doit pas être utilisé à la manière dont est parfois utilisé le mot *monsieur*, lorsqu'on dit : « C'est un monsieur ! » Le CNTRL cite à ce propos Charles Nodier (1831), qui campe ainsi l'un de ses personnages : « Monsieur !... reprit-il en souriant... je ne suis pas un monsieur. On m'appelle Michel, et plus

avant sa naissance, qui le constituent *ipso facto* en une personne[8]. Une institution, de même, est une entité construite par des humains et où des personnes vivent en partie en y occupant diverses *positions* (mot qui n'est pas sans lien avec l'adjectif *positif*). À nouveau, dans une civilisation donnée, nombre d'institutions semblent comme naturalisées, comme si, pour les personnes qui ont commerce avec elles, elles avaient été toujours-déjà-là – ce qui n'est *jamais* le cas.

V. Avancées récentes : l'excentration instantielle

L'expression qui donne son titre à cette section peut sembler barbare. De quoi s'agit-il ? Tout d'abord, l'adjectif *instantiel* renvoie à la notion *d'instance*. J'appelle *instance* une entité – un *objet*, c'est-à-dire une « réalité » (re)connue par au moins une personne ou une institution (à travers l'une au moins de ses positions institutionnelles) – qui peut être soit une personne x, soit une position institutionnelle (I, p). Je désigne généralement une instance par une lettre surmontée d'un accent circonflexe, comme il en va des symboles $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$, etc.

Il y a quelque temps maintenant, j'ai introduit une rupture dans l'ordre discursif usuel où il est d'usage de supposer une « instance suprême » à laquelle nous, humbles mortels, nous tendons à nous identifier, en particulier en mathématiques, où nous écrirons par exemple : « *On a* $2^3 = 8$. » Si je désigne l'auteur de cette assertion par la lettre grecque archaïque ϟ (koppa), je dirai que « ϟ tient que (juge que, asserte que, etc.) $2^3 = 8$ », ce que je note ainsi : ϟ ⊦ "$2^3 = 8$". Plus généralement, je note $\hat{w} \vdash \vartheta$ pour exprimer que l'instance $\hat{w}$ juge que l'énoncé ϑ est vrai, qu'il « dit juste ».

Bien entendu, l'instance $\hat{w}$ peut être un didacticien ξ, et nous écrirons alors : $\xi \vdash \vartheta$. Mais ξ, du point de vue de la TAD, ne s'intéresse pas qu'à ce qu'il ou elle pense en tant que chercheur·e ; ou plutôt ξ s'intéresse à ce qu'il ou elle pense de ce que pense telle autre instance $\hat{\imath}$, ou de ce que pense $\hat{\imath}$ de ce que pense telle instance $\hat{\jmath}$, etc. C'est ce déplacement vers le point de vue *d'autres instances* que je nomme *excentration* : ξ s'excentre de sa propre

communément Michel le charpentier, parce que c'est mon état. » (Voir à l'adresse suivante : https://www.cnrtl.fr/definition/monsieur.)

[8] On sait que le latin *persona* désigne d'abord un masque de théâtre, puis le personnage joué par l'acteur portant ce masque. On peut voir dans ces masques la métaphore des assujettissements institutionnels de la personne. À ceci près que nombre de personnes ne se vivent pas comme masquées, du moins pour ce qui est de certains au moins de leurs assujettissements, progressivement « naturalisés » : là s'ouvre le pernicieux débat sur la question de l'*identité*.

pensée afin même de pouvoir la construire. Le « on » universel[9], mathématique et autre, cède ainsi la place à une instance $\hat{w}$, et qui opine : $\hat{w} \vdash \vartheta$ ou $\hat{w} \vdash \neg\vartheta$. L'introduction des fonctions logiques $\hat{w} \vdash \ldots$ constitue la rupture « rhétorique » annoncée plus haut. Nous allons voir de cela des exemples, qui « changent quelque chose » dans la théorisation proposée.

VI. Avancées récentes : la notion d'apprentissage

Soit $\hat{w}$ une instance, que nous nommerons dans la suite l'*instance de référence*. Soit une instance $\hat{\imath}$ et un objet o, et soit $R(\hat{\imath}, o, ŧ)$ le rapport de l'instance $\hat{\imath}$ à l'objet o au temps $ŧ$. Le couple $\bar{n} = (\hat{\imath}, o)$ est appelé la *base cognitive*. Soit encore $ŧ_1$ et $ŧ_2$ deux instants tels que $ŧ_2 > ŧ_1$. Quand donc une instance $\hat{w}$ assertera-t-elle que, entre les instants $ŧ_1$ et $ŧ_2$, l'instance $\hat{\imath}$ a appris (un peu plus, un peu mieux) l'objet o ? Qu'il y a donc eu *apprentissage* relatif à o, de la part de $\hat{\imath}$?

Pour qu'une telle assertion soit possible, je postule d'abord que, pour $\hat{w}$, il existe une position institutionnelle $\hat{s} = (I, p)$, qu'on appellera l'*instance standard*, et une *instance évaluatrice* $\hat{v}$ qui, du point de vue de certaines instances $\hat{\jmath}$, serait à même d'évaluer (d'estimer, etc.) la proximité (ou la ressemblance, etc.), pour au moins certaines instances $\hat{\imath}$, entre le rapport $R(\hat{\imath}, o, ŧ)$ et le rapport standard $R(\hat{s}, o) = R_I(p, o)$. Le couple $\underline{n} = (\hat{s}, \hat{v})$ est appelé *cadre de référence cognitif*. Le quadruplet $\tilde{n} = \bar{n}\frown\underline{n} = (\hat{\imath}, o, \hat{s}, \hat{v})$ est un *noyau cognitif*.

J'affaiblis tout de suite le postulat relatif au cadre de référence cognitif $\underline{n} = (\hat{s}, \hat{v})$ afin de le rendre davantage « réaliste » : en bien des cas, en effet, les instances $\hat{s}$ et $\hat{v}$ sont seulement *supposées* par $\hat{w}$. Pour cette raison, on note parfois ces instances en faisant précéder leur symbole d'un astérisque : $*\hat{s}$, $*\hat{v}$, etc. L'instance $\hat{w}$ suppose qu'il existe $\hat{s} = *\hat{s}$ et $\hat{v} = *\hat{v}$ formant un cadre de référence cognitif supposé $*\underline{n} = (*\hat{s}, *\hat{v})$.

Que signifie la supposition que $\hat{v}$ est une instance évaluatrice du rapport $R = R(\hat{\imath}, o, ŧ)$ comparé au rapport $\bar{R} = R(\hat{s}, o)$? Cela signifie que $\hat{v}$ est jugé capable, au moins par $\hat{w}$, d'estimer le degré de conformité $\varphi(R, \bar{R})$ entre $R = R(\hat{\imath}, o)$ and $\bar{R} = R(\hat{s}, o)$. Plus exactement, étant donné des rapports R_1 and R_2 à o, $\hat{v}$ est jugé capable de produire l'un des trois « verdicts » suivants :

$$\hat{v} \vdash \varphi(R_2, \bar{R}) < \varphi(R_1, \bar{R})\ ;\ \hat{v} \vdash \varphi(R_2, \bar{R}) > \varphi(R_1, \bar{R})\ ;\ \hat{v} \vdash \varphi(R_2, \bar{R}) \approx \varphi(R_1, \bar{R}).$$

Prenons alors $R_1 = R(\hat{\imath}, o, ŧ_1)$ et $R_2 = R(\hat{\imath}, o, ŧ_2)$, et considérons le premier cas : si $\hat{w} \vdash (\hat{v} \vdash \varphi(R_2, \bar{R}) < \varphi(R_1, \bar{R}))$, $\hat{w}$ juge que, selon $\hat{v}$, R_2 est plus proche de $\bar{R}$ que R_1 et qu'il y a donc eu

[9] Le CNTRL rappelle, comme nous le savons tous, que « on » s'emploie « dans l'énoncé de vérités d'expérience, considérées comme universelles, c'est-à-dire vraies pour n'importe qui ». (Pour plus de détails, voir à l'adresse https://www.cnrtl.fr/definition/on.)

apprentissage de l'objet o par l'instance $\hat{\imath}$ entre les instants t_1 et t_2. Le deuxième cas, semblablement, indique un *désapprentissage*, tandis que le troisième cas indique un *non-apprentissage*.

Retenons en ce point que, parler d'apprentissage (ou de désapprentissage, ou de non-apprentissage) est un fait nécessairement *relatif*, qui met en scène une instance de référence $\hat{w}$ et un noyau cognitif $\tilde{n} = (\hat{\imath}, o, \hat{s}, \hat{v})$: nous retrouverons fréquemment ce schéma, dont la *portée* reste à explorer. Notons par exemple que l'on peut avoir $\hat{v} = \hat{w}$, ce qui pose en particulier la question des instances $\hat{\jmath}$ reconnaissant à $\hat{w}$ une légitimité en matière d'évaluation de $R(\hat{\imath}, o)$: il se peut ainsi, bien sûr, que la seule instance $\hat{\jmath}$ reconnaissant $\hat{w}$ comme instance évaluatrice légitime soit… l'instance $\hat{w}$ elle-même.

VII. Avancées récentes : le possiblement didactique

On postule ici que ce qui apparaît formellement, dans ce qui précède, comme *changement du rapport* d'une même instance $\hat{\imath}$ à un même objet o à deux instants différents t_1 et t_2 est dû à un *changement dans l'ensemble* $\mathcal{C}$ *des conditions prévalentes*, $\mathcal{C}$ étant remplacé par un nouvel ensemble $\mathcal{C}'$ de conditions : $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}'$. Je ne m'arrêterai pas aujourd'hui sur la notion de *condition*, que je prends ici comme une notion primitive. Je considère seulement la question suivante : quel « statut » donner aux actions – aux « gestes » – des différentes instances de la société *qui changent* $\mathcal{C}$?

Un noyau cognitif $\tilde{n} = (\hat{\imath}, o, \hat{s}, \hat{v})$ étant donné, soit une instance $\hat{u}$ qui fait un certain « geste » δ. Ce geste change l'ensemble $\mathcal{C}$ des conditions en un ensemble $\mathcal{C}'$ que l'on note $\mathcal{C}' = \mathcal{C}^{ʎ\delta}$, ce qui se lit « $\mathcal{C}$ dérangé par δ »[10]. $\mathcal{C}' = \mathcal{C}^{ʎ\delta}$ est un *dérangement* de $\mathcal{C}$. Le quadruplet $\varsigma = (\tilde{n}, \hat{u}, \delta, \mathcal{C})$ désigne alors une *situation possiblement didactique*[11]. On dira que le geste δ est, du point de vue de l'instance de référence $\hat{w}$, un geste *didactique* (ou qu'il est $\hat{w}$*-didactique*) si $\hat{w}$ juge, au temps t_1 où le geste δ survient, que, étant donné l'ensemble $\mathcal{C} = \mathcal{C}(t_1)$ des conditions prévalentes à cet instant, l'instance évaluatrice $\hat{v}$ jugera, *après* la survenue de δ, en un temps t_2 idoine, que, toutes choses égales par ailleurs, l'instance $\hat{\imath}$ aura « appris davantage » l'objet o –

[10] Le symbole ʎ est le « lambda d'insertion » utilisé en typographie pour signifier qu'il convient de « rajʎuter une lettre ou ʎmot [ʎo ʎun] » (voir ainsi à l'adresse http://www.alain.les-hurtig.org/pdf/signes-de-correction.pdf). En anglais, le signe ʎ est appelé « caret insertion point », le latin *caret* signifiant « il manque ».

[11] Le symbole ς n'est rien d'autre qu'une variante de la lettre σ utilisée lorsque celle-ci doit apparaître en position finale dans un mot. L'article « Sigma » de *Wikipédia* précise ainsi : « La forme bas-de-casse du sigma possède deux variantes typographiques : la première, σ, est utilisée au début et à l'intérieur des mots ; la deuxième, ς, n'est utilisée qu'en fin de mot. On écrit ainsi Ὀδυ**σσ**εύ**ς** (*Odusseús*, Ulysse). » (Voir par exemple à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Sigma.)

en d'autres termes qu'il y aura eu *apprentissage* de o de la part de $\hat{\imath}$ entre les instants t_1 et t_2. Si $\hat{w}$ juge que $\hat{v}$ prononcera, au contraire, un verdict de *désapprentissage*, on dira que δ est, du point de vue de $\hat{w}$, un geste *antididactique* (ou qu'il est un geste $\hat{w}$-*antididactique*). Enfin, si $\hat{w}$ prévoit que $\hat{v}$ prononcera un verdict de *non-apprentissage*, on dira que δ est, du point de vue de $\hat{w}$, un geste *isodidactique* (ou qu'il est un geste $\hat{w}$-*isodidactique*). On dira de même, alors, que la situation *possiblement* didactique $\varsigma = (\tilde{n}, \hat{u}, \delta, \mathcal{C})$ est, pour $\hat{w}$ et par rapport à $\tilde{n}$ et $\mathcal{C}$, selon le cas, *didactique, antididactique* ou *isodidactique*.

De même qu'à propos du schéma $\tilde{n} = (\hat{\imath}, o, \hat{s}, \hat{v})$, il convient d'explorer la *portée* du schéma $\varsigma = (\tilde{n}, \hat{u}, \delta, \mathcal{C})$. Supposons par exemple que $\hat{u}$ soit le professeur y d'une certaine classe et $\hat{\imath}$ la position d'élève de cette classe ; il se peut alors que, pour $\hat{w}$, $\hat{v} = y$ (évaluation interne) ou que $\hat{v}$ soit une instance extérieure à la classe (évaluation externe). Un type de cas important est considéré notamment dans la TSD[12] : il se peut en effet que l'accomplissement de δ par $\hat{u}$ aille de pair avec le fait que $\hat{u}$ regarde δ comme ($\hat{u}$-)didactique relativement à $\tilde{n}$ et $\mathcal{C}$, cas où l'on peut éventuellement parler d'*intention didactique* de la part de $\hat{u}$. Mais il se peut aussi qu'on ne trouve pas de telle intention « didactique » chez $\hat{u}$ à propos de δ et que $\hat{w} = \hat{u}$ ne regarde pas δ comme didactique, à l'endroit de $\tilde{n}$ et $\mathcal{C}$ ou même de quoi que ce soit d'autre : nous dirons alors que le geste δ est $\hat{w}$-*non didactique* (i.e., ici, $\hat{u}$-*non didactique*). De tels gestes constituent sans doute la grande majorité des gestes sur lesquels ξ peut être amené à s'interroger, et cela même quand il lui semble que, pour l'immense majorité des instances $\hat{w} \neq \xi$, $\hat{w}$ tient δ pour non didactique.

Cette remarque peut être généralisée. Avec les notations déjà utilisées, on peut écrire de façon plus précise : $\mathcal{C}(t_2) = \mathcal{C}' = \mathcal{C}^{/\delta} = \mathcal{C}_0 \cup \mathfrak{D}_\delta$, où $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C} = \mathcal{C}(t_1)$ et $\mathfrak{D}_\delta \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Dans l'étude des changements cognitifs, nombre d'instances se préoccupent essentiellement de gestes δ qu'elles regardent comme *n'étant pas non didactiques* (alors que, d'après ce qui a été défini plus haut, ξ regarde a priori *tout* geste comme *possiblement didactique*). Parmi ceux-ci, il faut inclure en général les gestes que leur auteur $\hat{u}$ ou, plus généralement, une instance $\hat{w}$ quelconque mais ayant droit de cité auprès d'un certain nombre d'instances $\hat{\jmath}$, présente comme didactiques, c'est-à-dire, donc, qui sont *déclarés didactiques*, en d'autres termes qui sont des *gestes didactiques déclarés* par quelque instance $\hat{w}$ « reconnue ».

De ce type de considérations résulte l'hypothèse que ne sont guère pris en compte, dans l'analyse ordinaire du possiblement didactique, que certains ensembles $\mathfrak{D}_\delta$ de conditions dérangeantes, qui, au reste, ne le sont sans doute que partiellement. L'attention, en tout cas,

[12] Voir à l'adresse http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf.

semble ne guère porter sur l'ensemble $\mathcal{C}_0$ des conditions *non dérangées*, comme s'il n'était possible aux humains que de prendre en compte les conditions qu'ils supposent engendrées par leurs propres actions. Nous reviendrons sur cette hypothèse, que l'on doit situer, dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique, au plus haut niveau, celui de l'*humanité*. Il résulte de tout cela que bien peu de conditions sont en fait prises en compte. On a là, en particulier, le germe de la notion de *unknown unknown* – d'inconnue inconnue –, sur laquelle je reviendrai. Rappelons-nous encore que la didactique peut être regardée comme la science de l'élaboration sociale – ou, plus précisément, *instantielle* – du didactique, de l'antididactique et de l'isodidactique.

VIII. Avancées récentes : production et formation positionnelles

Où observer le possiblement didactique ? Souventes fois, ξ est tenté de centrer son regard sur le *didactique déclaré*, en ignorant le reste du monde institutionnel. La rupture avec ce point de vue traditionnel, institutionnellement docile, et très prégnant chez nombre de didacticiens, doit être approfondie.

Pour cela je partirai de la notion générique de *position institutionnelle* (I, p), sans privilégier a priori les positions d'élève et de professeur dans une classe scolaire. Le point de vue courant, dualiste, peut certainement être résumé ainsi : dans une position déclarée comme « didactique », les personnes assujetties à cette position seraient là pour apprendre, pour les uns, pour enseigner, pour les autres ; alors que, dans une position supposée « non didactique », les sujets de la position seraient là pour « faire des choses » (sous-entendu : qu'ils savent faire), lesquelles dépendent bien sûr de la position considérée, mais qui ne consistent pas à apprendre ou à enseigner. À cette vision dualiste je voudrais substituer un rapport *unitaire* à la notion de position institutionnelle. On verra ultérieurement que cette modélisation unitaire, introduite dans mon « cours » à la récente école d'été, est appelée (notamment) par la modélisation de la notion de ***curriculum***, à laquelle ce cours était largement consacré.

Avant d'aller plus loin, je note ceci : toute position institutionnelle p vit *en association* avec d'autres positions p', p'', p''', etc. On notera $\mathcal{A} = \{p, p', p'', p''', \dots\}$ l'*association positionnelle* correspondante. Par exemple, en nombre de sociétés, la position de père est associée à la position de mère, et ces deux positions sont associées à celle d'enfant (fils ou fille de). De même, dans une classe, la position d'élève est associée avec la position de professeur. Étant donné deux positions p et p', on considère aussi, en certains cas, la position $p'' = p \vee p'$. Dans le cas où p est la position d'enseignant et p' celle d'élève dans une classe donnée, $p'' = p \vee p'$

est la position de « membre de la classe » qu'occupent indifféremment tous ceux que l'on voit, traditionnellement, sur les « photos de classe ». Dans le cas où p est la position de mère et p' celle de père dans une famille donnée, $p'' = p \vee p'$ est la position de parent dans ladite famille. Cette remarque se généralise à une association positionnelle quelconque : on écrira par exemple $\bar{p} = \vee\mathcal{A} = \vee\{p, p', p'', \ldots\}$.

Cela dit, toute position institutionnelle p est le lieu d'une certaine *activité* de la part des personnes qui l'occupent. Cette activité comporte deux composantes liées entre elles. Tout d'abord, les sujets de p accomplissent des *tâches de production* : c'est la composante *productive* de l'activité dont p est le lieu, que nous regarderons comme manifestant la fonction principale de p. Une personne est en p pour produire certaines choses. L'exécution de ces tâches productives peut être *non coopérative* : un sujet de p les accomplit alors en *autonomie personnelle*. Elle peut être aussi menée à bien en coopération avec d'autres personnes x', x'', etc., occupant la *même* position p, donc en *autonomie positionnelle* : il y a alors *coopération intrapositionnelle*. Enfin, la réalisation d'un type de tâches donné peut appeler une *coopération interpositionnelle*, avec intervention de personnes occupant différentes positions p', p'', etc.

C'est cette fonction productive de p dont nous témoignons quand nous considérons que, dans une famille, les parents « produisent » des repas, du linge propre, des sorties en famille, etc. De la même façon, un enseignant produit des cours, des activités, des « situations », des devoirs, des notes, tandis que l'élève produit des solutions d'exercices, des devoirs écrits, des exposés oraux, des contestations des notes qu'il reçoit, etc.

La fonction principale d'une position institutionnelle p, c'est donc la réalisation d'un certain *travail*. Les produits de ce travail sont des composants praxéologiques qui alimentent l'activité productive d'autres positions p', p'', etc. Au devoir remis par l'élève répond l'attribution d'une note par le professeur. Cette note sera « consommée » par une instance idoine pour produire des appréciations, des classements et autres éléments décisionnels (en fait de redoublements, d'exclusions, etc.).

Le travail de production (ou de coproduction) accompli dans une position p donnée suppose une seconde composante, à savoir un *travail de formation* visant à permettre aux sujets de p d'accomplir les tâches de production en question. Cette fonction *formative* vise d'abord à *conformer* les sujets de p à l'équipement praxéologique $\pi(p)$ mis en jeu dans les tâches de production dont p est le lieu. Ce travail formatif est donc avant tout à visée *conformative*. Mais il peut participer aussi, en certaines périodes de la vie de p, d'un travail *réformatif*, qui change $\pi(p)$ en $\pi'(p)$ et, de façon plus ou moins coordonnée, conforme les sujets de p à ces nouvelles contraintes du travail de production en p. Nous reviendrons là-dessus.

Ne retenons ici, en attendant, que ce principe d'une analyse didactique « matérialiste » : au lieu de partir des « objectifs de savoir » de la position p considérés abstraitement, comme d'aucuns le font généralement lorsque p est déclarée didactique, examinons concrètement les *tâches de production* attendues des sujets de p. C'est là une perspective fondamentale sur laquelle nous aurons à revenir. Pour aller plus loin, il conviendra de mettre en relation tous ces phénomènes avec *l'exigence curriculaire* dans la société considérée, ce sur quoi nous reviendrons aussi.

IX. Avancées récentes : les assortiments d'outils et leurs usages

L'analyse « matérialiste » évoquée ci-dessus conduit à considérer le système d'*outils* mobilisés pour accomplir une tâche de production donnée, ainsi que la *manière* d'utiliser ces outils. Plus précisément, considérons la tâche consistant à produire une solution à un problème de mathématiques P. Imaginons un « mathématicien » μ qui peut être aussi bien un « élève-mathématicien » d'une classe de mathématiques de 4^e qu'un médaillé Fields. Considérons les œuvres auxquelles μ recourt pour produire sa solution $S(P)$, c'est-à-dire ce que nous nommerons *l'assortiment d'outils* que μ utilise ; et considérons en même temps l'usage que μ fait de ces outils : *l'analyse de cet assortiment d'outils et de leur usage* constitue une production essentielle du travail du didacticien.

Je n'en dirai pas davantage ici. Pour terminer, j'invite simplement chacun à se pencher sur le problème P suivant, non pas seulement pour lui procurer une solution, mais surtout pour analyser cette solution du point de vue de l'assortiment d'outils qu'elle met en jeu et de l'emploi qu'elle en fait :

> Votre tiroir à chaussettes contient 24 chaussettes, dont 12 bleues, 8 rouges et 4 vertes. Pressé par le temps, vous prenez une poignée de chaussettes sans les regarder et vous les mettez dans votre valise. Quel est le plus petit nombre de chaussettes qu'il vous faut prendre ainsi dans le tiroir pour que vous soyez sûr d'avoir avec vous deux fois deux chaussettes de même couleur (= deux paires de chaussettes) ?

ϟ

La prochaine séance de l'*Humble séminaire* devrait avoir lieu le **mardi 3 décembre 2019** à partir de 16 h 30. N'hésitez pas à me faire parvenir avant cette date votre production relative au problème des chaussettes !

YC.

L'humble séminaire 2019-2020

Séance 2 du 10 décembre 2019

I. *La TAD pour les nuls*, donc

Le travail annoncé lors de la séance 1, à savoir l'examen « au long cours » de la *situation de la TAD*, prendra en particulier la forme d'un travail d'apparence plus spécifique relatif au projet de créer, sous le titre parodique *La TAD pour les nuls*, un exposé *élémentaire* de la TAD.

Ce travail d'élémentation prendra la forme d'un « cabotage » combinant – pour emprunter au langage de l'informatique[13] – *accès séquentiel* et *accès direct* (ou *aléatoire*) aux constituants praxéologiques de la TAD. Je note que, pour chaque élément, notre examen sera par nécessité tout à la fois *partiel* et *provisoire*.

II. Élémenter la TAD : pour commencer, la notion de *pédagogie*

L'usage du mot de pédagogie en TAD est, *in globo*, conforme à l'usage commun, sous lequel le lecteur pressé pourrait être tenté de le subsumer. Mais ce serait alors oublier l'apport propre de la TAD à cette notion.

La position de pédagogue

Partons du commencement. Le pédagogue grec, à l'origine, est un « esclave chargé de conduire les enfants de son maître à l'école » (CNTRL). Ce que je retiens de cela, c'est une métaphore dont les réalisations concrètes sont à étudier chaque fois à nouveaux frais : *une* pédagogie, c'est une manière de conduire l'*étudiant* supposé vers l'*œuvre* à étudier. L'œuvre o à étudier peut être une *question* Q ou non – ce peut être en fait alors *n'importe quelle* réalité *praxéologique* $\wp$.

J'introduis ici une position que l'on confond usuellement avec celle de l'enseignant y : la position du *pédagogue* $\bar{y}$, que j'imagine faisant équipe avec y – même si, comme souvent aujourd'hui, y et $\bar{y}$ sont une seule et même personne… L'enseignant y ainsi que les élèves x ont des *besoins pédagogiques*, que le pédagogue $\bar{y}$ doit identifier, analyser et contribuer à satisfaire.

Une pédagogie donnée est composée d'une foule de *gestes* pédagogiques accomplis par $\bar{y}$ ou, indirectement, par son entremise. Ces gestes créent les *conditions et contraintes* situées, dans

[13] Voir les notices « Accès direct » et « Accès séquentiel » de l'encyclopédie en ligne *Wikipédia*, respectivement aux adresses https://fr.wikipedia.org/wiki/Accès_direct et https://fr.wikipedia.org/wiki/Accès_séquentiel.

l'*échelle des niveaux de codétermination didactique*, au niveau « pédagogique », celui des pédagogies. Je rappelle ici la structure de la partie de cette échelle qui nous intéresse directement ici :

…
⇂↾
Sociétés
⇂↾
Écoles
⇂↾
Pédagogies
⇂↾
Systèmes didactiques
⇂↾
…

Dans ce qui suit, je ne m'arrêterai un instant que sur quelques-uns des gestes pédagogiques possibles.

Gestes pédagogiques : usages naturalisés, usages oubliés

Le premier geste pédagogique, sans doute, consiste traditionnellement à affecter des *locaux* déterminés, supposés « adaptés » – ce qui est d'abord un problème pédagogique[14] –, à une école, créant ainsi ce qu'on appellera un *établissement scolaire*. Je reviendrai sur le sens donné en TAD au mot *école* ; retenons seulement, pour le moment, qu'une institution regardée par une instance $\hat{w}$ comme une école a ainsi, sauf exception, un ou plusieurs établissements, dans lesquels les personnes assujetties à cette institution (en des positions diverses) se rendent, physiquement, à de certains moments. (Je laisse de côté la question de la possible « dématérialisation » – plus ou moins poussée – d'une école. Nous y reviendrons.)

Dans une école I donnée, ou à partir d'elle, depuis l'une de ses positions institutionnelles p, il devient possible de rencontrer, par le moyen de gestes pédagogiques appropriés, un certain ensemble $\mathcal{O}$ d'œuvres o. À ce niveau – celui de l'école – le rapport $R(p, o)$ est encore largement indéfini. La pédagogie de l'école relativement à $\mathcal{O}$ constituera alors une donnée lourde en ce qui concerne l'*écologie* de ce rapport, c'est-à-dire pour déterminer ce qu'il

[14] De tels locaux sont souvent conçus sans souci des besoins pédagogiques de la classe : ainsi de ces « salles d'informatique » composées de « postes de travail » où l'élève regarde vers les murs de la salle au lieu de regarder vers le centre, où se trouve *y*.

pourra être ou ne pourra pas être : elle va décider dans une assez grande mesure quel rapport $R(p, o)$ pourra exister ou non. D'une manière générale, tout geste pédagogique va modifier et l'ensemble $\mathcal{O}$ des œuvres o « rencontrables » (c'est-à-dire auxquelles un rapport $R(p, o)$ non vide pourra se former) et le *contenu* des rapports $R(p, o)$, pour $o \in \mathcal{O}$.

Un autre geste pédagogique traditionnel (quoique en rien obligatoire) consiste notamment à diviser les élèves de l'école y occupant une *même* position institutionnelle p en classes disjointes, les « classes » de l'école hébergeant cette position p. C'est à partir d'une classe, par exemple d'une classe du type $[X, \{y, \bar{y}\}, \mathcal{O}]$, que seront constituées les différents *systèmes didactiques* $S(\check{X}, \{y, \bar{y}\}, o)$ où $\check{X} \subseteq X$ et $o \in \mathcal{O}$. Si l'on suppose que y occupe en même temps la position de pédagogue assignée ici à $\bar{y}$, on aura plus simplement une classe $[X, y, \mathcal{O}]$ et des systèmes didactiques $S(\check{X}, y, o)$. Bien entendu, on peut avoir des organisations pédagogiques d'apparence plus sophistiquées, avec, par exemple, des classes $[X, Y, \mathcal{O}]$, où Y contient plus d'un enseignant y, et des systèmes didactiques $S(\check{X}, \check{Y}, o)$, où $\check{Y} = \{y_1, y_2, \ldots, \bar{y}\} \subseteq Y$ et $o \in \mathcal{O}$.

D'autres organisations encore sont possibles. Ainsi en va-t-il lorsque le *cours* se substitue à la *classe* en tant qu'élément structurant de l'activité de l'école, comme le rappelle Antoine Prost dans son *Histoire de l'enseignement en France 1800-1967* (Armand Colin, 1968)[15] :

> Il en allait tout autrement dans les écoles centrales, où le cours était l'essentiel de l'enseignement et où, par conséquent, les élèves se groupaient de manière différente pour chaque cours, suivant leur niveau. Ce régime leur survécut parfois : on cite, sous l'Empire, au lycée de Bordeaux, des élèves qui suivent le cours de latin avec une classe et celui de mathématiques avec une autre. Mais, dès le Consulat, la classe devient un groupement stable et rigide… (p. ?)

Cette *pédagogie du cours*, où l'on accède à un système didactique $S(X, Y, o)$ *sans passer* par une classe, continue cependant d'exister, mais marginalement, par exemple lorsqu'un établissement scolaire met en place des séances d'atelier de renforcement ou de révision sur un sujet donné, si du moins un tel atelier peut accueillir des élèves de différentes classes (de même niveau, voire de niveaux différents), ou encore dans une institution de recherche

---

[15] Les *écoles centrales* ont été établies en 1795 (donc pendant la Révolution française) en remplacement des collèges des facultés des arts des anciennes universités. Elles seront supprimées en 1802 à la création des lycées par Napoléon (voir à https://fr.wikipedia.org/wiki/École_centrale_(Révolution_française). Petit rappel d'histoire de France : « Le Consulat est un régime politique français issu du coup d'État du 18 Brumaire an VIII (9 novembre 1799), qui renverse le régime du Directoire (1795-1799). La constitution de l'an VIII établit alors un régime politique autoritaire dirigé par trois consuls et en réalité par le seul Premier consul Napoléon Bonaparte, qui deviendra consul à vie en 1802. Le Consulat a duré jusqu'au 18 mai 1804 (28 floréal an XII), date de la fin de la Première République française et de la proclamation du Premier Empire. » (*Wikipédia*, « Consulat (histoire de France) », https://fr.wikipedia.org/wiki/Consulat_(histoire_de_France)).

proposant à ses membres des séminaire sur des sujets ponctuels animés par exemple par un chercheur invité.

II. Pédagogie et dialectique *in absentia* / *in praesentia*

Comment faire qu'une personne *x* en position *p* rencontre une œuvre *O* ? L'espace des possibles est ici bipolaire. En un premier pôle « ontologique », la personne *x* en position *p* peut se trouver en présence de l'œuvre *O* dans sa matérialité, si l'on peut dire, comme le suggère l'image ci-après[16] : l'œuvre est bien là, mais qu'est-elle au juste ? Nous dirons que l'œuvre est alors *absente* in praesentia.

À l'autre pôle, l'œuvre *O* est présente *in absentia* : elle est seulement évoquée, sans paraître matériellement devant *x*. Elle est l'émergent supposé d'un discours qui conjugue différents registres ostensifs, mais elle demeure « matériellement » insaisissable.

C'est ainsi que l'on rencontre ordinairement la plupart des objets – des œuvres – qui composent une culture humaine : ils deviennent d'abord présents *in absentia*[17]. Devant l'œuvre *O* absente *in praesentia*, quelque *y* produira des énoncés qui prétendront faire que cette œuvre devienne présente *in absentia*, sans qu'on sache vraiment si les deux se correspondent. Tel est le destin de la dialectique de l'absence *in praesentia* et de la présence *in absentia*, dont le dépassement est souvent indéterminable.

Cela noté, l'une des caractéristiques essentielles du travail formatif humain est la possibilité de rendre les œuvres à « étudier » présentes *in absentia* grâce au *langage* et aux divers

[16] Voir à l'adresse https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQSOq95T_CBhDAl1xaLk6nLnV-nCj7QrkNFlQ3vQagjm6KYU6cuGQ&s. L'œuvre que l'on aperçoit sur la photo est l'une des « machines » de Jean Tinguely (1925-1991).

[17] Dans son *Court traité*, Spinoza situe ainsi, au plus humble niveau, la connaissance « par ouï-dire ». Voir par exemple à l'adresse https://spinoza.fr/les-genres-de-connaissance-%E2%80%93-court-traite-ii-1-et-2-extraits/.

registres *ostensifs*, notamment *formels*[18], dont celui-ci peut être enrichi. Pour le dire autrement, une œuvre *O* est un système *S* dont on construit divers modèles *M* permettant de produire des connaissances relatives à *S* sans avoir à manipuler pleinement *S* lui-même.

De l'absence *in absentia* à la présence *in praesentia*

Toute une tradition formative a inscrit ce fait fondamental dans une hiérarchie descendante de formats pédagogiques le long de laquelle le degré d'explicitation *in praesentia* de l'œuvre *s'accroît*.

Le niveau « supérieur », c'est-à-dire le niveau de plus faible présence *in praesentia* de l'œuvre, c'est celui du *cours magistral*, soit ce qu'on nomme en anglais *lecture*[19]. Traditionnellement, à l'université, le cours (magistral) est l'affaire du *professeur*.

Le niveau suivant est celui de la *conférence*, où l'apparition *in praesentia* de l'œuvre *O* est déjà plus forte :

Cours magistral

⇵

Conférence

⇵

…

L'accroissement de l'explicitation *in praesentia* de l'œuvre, typique de la conférence par rapport au cours, doit être croisée avec la notion de *topos* – de *y* et (surtout) de *x*. L'œuvre n'est plus seulement *évoquée* : certaines au moins de ses parties sont maintenant *montrées*, *manipulées*, y compris dans leur matérialité, par le « conférencier », qui pourra ainsi réaliser devant son auditoire une expérience de physique, par exemple, alors que (au sens indiqué ci-dessus), le professeur décrit et analyse l'expérience, sans la réaliser. Plus généralement, le conférencier « résout des problèmes » (de mathématiques, de finance, de diététique, etc.) devant ses « étudiants ». Les conférences étaient, à l'origine, l'affaire du *maître de conférences*. La position de « conférencier » peut être occupée par un professeur au sens administratif du terme, de la même façon que la position de « professeur » (« qui professe » en délivrant des cours magistraux) peut être assumée par un non-professeur (au sens administratif du terme, toujours). L'apparence peut être trompeuse : les « cours » que j'ai donnés pendant des années aux élèves professeurs de l'IUFM d'Aix-Marseille étaient en fait

[18] Je reviendrai ultérieurement sur la notion d'ostensif ainsi que sur l'emploi de formalismes en TAD.

[19] Dans ce qui suit, j'utilise de façon générique des dénominations spécifiques de l'organisation pédagogique française à l'université.

des conférences, comme l'étaient les « cours » que j'ai pu donner dans certaines écoles d'été de didactique des mathématiques, dont la plus récente, ou en d'autres institutions.

Dans la conférence, *y* peut opérer (partiellement) sur l'œuvre *O* ; *x* est, lui, spectateur, observateur, témoin, analyste, mais non opérateur. Il en va autrement au troisième niveau, celui des *travaux dirigés* : là, quoique « dirigés » par *y*, qui reste, par places, un enseignant, les « travaux » sont effectués par *x*, qui a progressivement la main à l'œuvre. Au quatrième niveau, celui des *travaux pratiques*, *x* opère en principe *motu proprio*, *y* devenant une simple vigie.

Vers la « maîtrise » d'une œuvre

On a ainsi la hiérarchie suivante de « formats » pédagogiques :

Cours magistral
⇅
Conférence
⇅
Travaux dirigés
⇅
Travaux pratiques

Lues de haut en bas, la différenciation de ces structures pédagogiques peut être exprimée en termes *praxéologiques*. Alors que le cours magistral évoque un complexe praxéologique dans sa structure, son économie, son écologie, la conférence vise à en mettre en œuvre, par le truchement du seul enseignant *y*, au moins certaines techniques et leur accompagnement technologico-théorique, ce qui, dans les travaux dirigés, sera alors le lot de *x*, quoique encore sous l'impulsion et le contrôle de *y*. Les travaux pratiques transfèrent enfin à *x* le rôle assumé par *y* dans la conférence et, partiellement, dans les travaux dirigés : c'est là que *x* doit éprouver et rechercher une maîtrise praxéologique « complète », notamment à travers le « travail de la technique ». C'est alors que la distance entre l'*in absentia* et l'*in praesentia* pourra se résorber.

Ce dernier point est cependant *toujours* problématique. Il l'est plus certainement encore quand l'organisation pédagogique à quatre niveaux ci-dessus évoquée[20], n'étant plus comprise, se

[20] Cette organisation pédagogique peut, dans la réalité institutionnelle, prendre des formes variées. Dans la formation des élèves professeurs stagiaires de mathématiques qui a existé à l'IUFM d'Aix-Marseille, les deux premiers niveaux (cours + conférence) étaient pris en charge, chaque semaine ouvrable, par le séminaire que

désagrège : les fonctions pédagogiques esquissées en termes de dialectique *in absentia* / *in praesentia* ne sont dès lors plus assumées, et cela d'abord parce qu'elles tendent à être ignorées, si bien que le « rendement didactique » de l'organisation pédagogique primitivement entendue diminue. C'est là *l'un* des aspects de ce que je nommerai *le* problème pédagogique (qui se résout en différents problèmes « de pédagogie »).

III. Le problème pédagogique

Le *problème pédagogique* comporte plusieurs composants plus ou moins étroitement liés. Le premier aspect problématique tient à l'oubli qu'une organisation pédagogique est un moyen au service de l'étude d'une œuvre O ou d'un ensemble d'œuvres $\mathcal{O}$: elle offre la possibilité de rencontrer telle ou telle œuvre, elle permet son étude, *elle ne se substitue pas à cette étude, elle ne la constitue pas*. Elle n'a donc pas la puissance formative que certains – les pédagogues-quand-ils-se-croient-seuls-au-monde – sont prompts à lui attribuer en sa supposé généricité didactique.

Il est donc deux grandes façons de méconnaître le rôle d'une organisation pédagogique : soit en la regardant comme l'essentiel d'une organisation didactique (c'est là, répétons-le, l'erreur des pédagogues-qui-croient-pouvoir-n'être-que-cela –, soit, à l'inverse, en la tenant pour sans grand effet, au fond, sur l'économie et l'écologie du didactique.

Dans le premier cas, on recherchera souvent, jusqu'à l'absurde parfois, l'« innovation pédagogique » ; on espérera même ce que j'ai pu appeler, dans un moment d'agacement, l'« orgasme pédagogique », qui devrait nous délivrer du mal et dont la simple promesse jettera obstinément dans l'action pédagogique militante de maigres armées noosphériennes. Dans le second cas, on reconduira sans plus y penser l'organisation pédagogique léguée par la tradition, sans s'interroger davantage sur ce qu'elle permet ou interdit ou gêne.

Dans les deux cas, ce qui semble prévaloir, c'est l'absence d'une *analyse didactique approfondie de l'organisation pédagogique*, à égale distance de l'enthousiasme des uns et de l'indifférence des autres. Ces derniers, au reste, tendent souvent à décompliquer l'organisation pédagogique régnante, comme s'ils pensaient pouvoir arriver à une (introuvable) quintessence pédagogique. Les premiers, eux, prétendent faire du neuf, qui n'a souvent que cette vertu, et qui, en vérité, bien souvent, n'a même pas cette vertu.

---

j'animais (je reviendrai plus loin sur le mot *séminaire* employé ici), tandis que les TD et TP avaient pour lieu le système formé du groupe de tutorat et du stage en responsabilité notamment.

IV. Un exemple d'avant-hier : l'*akroasis*

Le cas du cours magistral est éclairant. Du côté de la *praxis*, on a pu voir, en certaines institutions universitaires, le système pédagogique à quatre niveaux se réduire au seul niveau du cours magistral, comme si celui-ci pouvait pourvoir à tous les besoins pédagogiques d'une activité didactique « raisonnable ». Du côté du *logos*, on a vu se développer, en sens contraire, une détestation « moderne » du cours magistral, tenu au plus haut point pour antididactique. Paradoxalement, ces deux postures ont en commun une même mésintellection de cette structure pédagogique, en cela qu'elles oublient l'une comme l'autre les composants pédagogiques que, dans une forme ou une autre, le cours suppose et appelle. L'un des symptômes de cette « crise » est l'apparente certitude que l'auditeur d'un cours serait, de fait, et même nécessairement, « passif ». Contre ce credo, on peut bien arguer que, tout au contraire, l'auditeur d'un cours magistral est censé s'engager à fond dans une absorbante et parfois éprouvante activité d'écoute, d'analyse, de mémorisation du texte du cours : mais c'est là, bien souvent, peine perdue ! C'est qu'un *changement civilisationnel* s'est produit, qui a – provisoirement ? – l'évidence des vérités de nature. Il est vrai que, malgré tout, nous continuons à user des cours magistraux (sous la forme de *lectures*, par exemple, lesquelles, il est vrai, dans l'éthos anglo-saxon d'aujourd'hui, dégénèrent souvent en aimables « causeries »). Mais il y a en cela, alors, une forme de « vrillage » praxéologique, où, par un phénomène d'hystérésis, la *praxis* persévère alors même que le *logos* la condamne.

Un type insolite de tâches productives

Pour mieux mettre en valeur ce changement institutionnel, je prendrai un exemple qui remonte à notre plus ancien passé. Il a trait à un type d'exercices, *l'audition*, décrit par divers auteurs, et, en particulier, par Aélius Théon, sophiste alexandrin du premier siècle de notre ère, dans un texte intitulé *Progymnasmata* (« Exercices préparatoires »), lequel était vraisemblablement une annexe à un traité de rhétorique. L'audition se distingue de la *lecture* (de textes), qui nous est plus familière, mais avec laquelle néanmoins elle fait couple ici. J'extrais d'un ouvrage dû à l'helléniste Pierre Chiron, intitulé *Manuel de rhétorique. Comment faire de l'élève un citoyen* (Les Belles Lettres, Paris, 2018), le passage suivant[21] :

> L'audition *(akroasis)* n'était pas une audition passive mais une audition active avec pour

[21] Les *Progymnasmata* de Théon ont été édités par Michel Patillon et Giancarlo Bolognesi en 1997 (Les Belles Lettres, Paris). La citation de Quintilien figurant dans le texte d'Henry Fruteau de Laclos ci-après est tirée de l'*Institution oratoire* (= Éducation de l'orateur), rédigée par Quintilien vers l'an 92. Sur Nicolaos de Myra, voir à l'adresse https://cutt.ly/oeVA6t3. On pourra retrouver le passage du livre de P. Chiron cité ici à l'adresse suivante : https://laviedesclassiques.fr/article/extrait-manuel-de-rhétorique-de-pierre-chiron.

objectif l’appropriation et la reproduction du modèle. En pratique, le professeur emmenait ses élèves, une fois par jour, écouter une prestation oratoire publique. On peut citer ici la thèse d’Henry Fruteau de Laclos [1999] sur les *Progymnasmata* de Nicolaos de Myra :

> Il faut en conclure que la cité abonde en séances publiques de tout ordre et que, loin d’être le lieu fermé où les élèves suent sang et eau sur des tâches autant rébarbatives que répétitives, l’école se voit désertée une fois le jour, et que la ville est sillonnée de théories d’enfants menées par leur maître au théâtre, *bouleutérion,* ou autre édifice public pour l’audition quotidienne.
>
> Le maître indique aux élèves quelles parties ils auront à retenir et à imiter. Celui qui réussit l’exercice est celui qui, après avoir entendu un texte, est capable de le rédiger en entier ou de le restituer oralement.
>
> Le jeune homme avait le droit de prendre des notes, mais – très probablement – ces notes concernaient seulement les passages les plus réussis, c’est-à-dire ceux que le public avait salués d’un murmure ou d’applaudissements. Un passage de Quintilien évoque les *commentarii,* les « cahiers de notes » des enfants, en ces termes : « … cahiers de notes où ces derniers consignent les passages qui ont été loués dans les déclamations auxquelles ils ont assisté ».

Michel Patillon souligne la complémentarité entre lecture et audition : si les deux fondent la production personnelle de l’élève sur la reproduction de modèles, les modèles sont dans un cas classiques, dans l’autre, contemporains ; la reproduction est dans un cas directe, dans l’autre, médiée par un travail d’écriture.

Si la lecture procède d’une imprégnation physique et mentale, l’audition fait davantage appel aux procédures de rétention, de mémorisation [Patillon, 1997, p. 106] : « On n’essaiera pas de dire sur-le-champ à soi-même ou à un autre le texte prononcé, mais on rappellera par écrit et à loisir le souvenir de ce texte. »

Théon souligne le caractère progressif de la reconstitution du texte entendu, qui sera, à force de travail, de plus en plus précise, de plus en plus complète. Il élargit ce travail « musculaire » à la reconstitution de souvenirs, même non textuels. Et l’on s’approche alors de notre rédaction, à ceci près que la narration de spectacles vus ou d’épisodes vécus se donne comme objectifs non seulement la qualité de l’écriture, mais la précision des souvenirs, et la capacité du texte écrit à les faire revivre.

Détail qui n’en est pas un : Théon souligne dès le début de son petit chapitre que la restitution finale requiert de la part du public un accueil « franc et amical », condition *sine qua non* de l’utilité de l’exercice. (pp. 189-191)

L’objet rapidement décrit peut surprendre : quel étrange type de tâches pour nous ! Il s’agirait donc de restituer oralement, non sans un certain secours de l’écrit, certes, et devant un public « franc et amical », un discours entendu quelque part dans la ville ? Tel est donc le type des tâches productives assignées aux élèves, type de tâches que le mot grec *akroasis* étiquette. On voit ici un fait majeur pour notre propos. L’idée clé est que l’on peut mémoriser un discours entendu une fois pour le restituer publiquement : le rapport à la mémorisation est alors, semble-t-il, fort différent du nôtre.

Imaginons, à titre de contre-épreuve, la technique de sélection suivante. Les candidats à une certaine institution de formation (qui ne peut accueillir en chaque promotion qu'un nombre limité de postulants) doivent assister, sans prendre de notes ni utiliser d'enregistreur, à un exposé soigné, fait posément, et cela durant, disons, vingt minutes (ou trois-quarts d'heure, etc.). L'exposé fini, les candidats ont deux heures (ou trois, etc.) pour mettre cet exposé par écrit ; et c'est la qualité de cette production écrite qui vaudra à chacun d'eux d'être admis ou refusé. Il y a fort à parier que cette manière de faire serait aujourd'hui critiquée, au plan du *logos* bien sûr, mais même au plan de la simple *praxis* déjà – comment voulez-vous que les candidats retiennent de mémoire un discours d'une demi-heure !

Pour donner plus de substance au type de tâches productives choisi ici pour l'évaluation à l'entrée de notre institution imaginaire, voici une autre présentation de l'*akroasis* (ἀκρόασις) – je l'emprunte à l'ouvrage intitulé *Progymnasmata. Greek Texbooks of Prose composition and Rhetoric*, avec introduction et notes de George A. Kennedy (Leiden et Boston, Brill, 2003)[22] :

> In listening (*akroasis*), the most important thing is to give frank and friendly attention to the speaker. Then the student should recall the subject of the writing, identify the main points and the arrangement, finally recall also the better passages. If at first he cannot recall the words or their arrangement, it is still useful for him to try, but not everything at once. Have him write it down at leisure. Begin with the prooemion, and then, after practicing with that for several days, continue to the narration, then move on to the arguments, two or three at a time.
>
> Some younger orators acquired so good an ability by listening to famous orators that their works were attributed to the master. Theopompus, who had heard Demosthenes deliver his speech against Leptines, was inspired by the words of the orator in his own work. Some critics, including the great Dionysius of Halicarnassus, say that the speeches *Against Aristogeiton* are by one of Demosthenes' auditors rather than by himself. One should not practice this exercise at every reading, but reserve it for important authors. To prevent students from choosing bad texts through ignorance, it should usually be the teachers who choose the daily exercise in listening.
>
> If on a particular day nothing has been read aloud, it is useful for students to describe what they did in the recent past or what has happened to their friends or to describe some public event, such as a riot, a procession, a spectacle, or political agitation. If they undertake such a composition, they will make good use not only of the words and

[22] Voir à https://cutt.ly/7eVgz18. Sur le discours *Contre Leptine* de Démosthène (384-322 AEC), voir à https://en.wikipedia.org/wiki/Against_Leptines.

> phrases they have learned but also the facts and characterizations. (pp. 69-70)

À cela s'ajoute encore la note de bas de page que voici :

> Theon's suggestion that students write essays about their own experiences ("What I did on my summer vacation") is unparalleled and surprising from an ancient teacher. There would have been ample opportunity to describe riots, processions, spectacles, and political agitation in ancient Alexandria. (pp. 69-70)

On aura noté, notamment dans le premier paragraphe, les formes que prend ici la dialectique in absentia / in praesentia, qui guide l'étude : on se rapproche de l'objet d'étude, puis on le met à distance par une série de médiatisations (mémorisations, notes écrites, rappels, etc.), avant de revenir vers l'œuvre en tentant de la restituer.

Cela noté, on voit donc que l'élève est amené en particulier à endosser le rôle de reporteur (*reporter*), qui peut témoigner d'une série de faits aussi bien que d'un discours, et cela à l'adresse d'un public supposé « franc et amical », public qui lui-même, peut-on penser, sait écouter… Le type de tâches demandé à l'élève est bien un transposé d'un type de tâches existant dans la vie sociale. Mais revenons maintenant à la question de la pédagogie.

Un dispositif pédagogique « innovant »

Au-delà de la question de l'audition (*listening*) d'un discours – qui semble devoir reprendre aujourd'hui un peu de son antique vigueur[23] –, ce que montre en vérité le type de tâches examiné, c'est le dispositif pédagogique que sa réalisation requiert : chaque jour, les élèves, sous la direction de leur professeur agissant alors comme *pédagogue* $\bar{y}$, quittent les locaux de l'école et vont à travers la ville en quête de quelque déclaration publique jugée « intéressante » par l'*enseignant y*. Ce qui est essentiel pour nous, c'est que de telles sorties sont motivées par le désir de *rencontrer un certain objet à étudier* : elles sont ainsi *didactiquement motivées*, et ne sont pas l'expression de raisons « purement pédagogiques » qui pourraient aussi bien justifier *toute* sortie scolaire (regardée par exemple comme bonne en soi, en dehors de toute motivation didactique). Notons que, paradoxalement, c'est au pédagogue $\bar{y}$ qu'il revient de vérifier que les gestes pédagogiques effectués (et donc telle sortie scolaire en particulier) sont bien ordonnés à l'étude de l'œuvre visée, et ne sont pas une simple extravagance, une divagation (par exemple du fait de *y*, emporté par telle ou telle

---

[23] À propos notamment de l'apprentissage des langues étrangères (voir à https://en.wikipedia.org/wiki/Listening) mais pas seulement : on peut dire aujourd'hui que « Listening is one of the most important skills you can have ». (Voir à https://www.academia.edu/27716647/Listening_is_one_of_the_most_important_skills_you_can_have.) Notons que l'anglais *listen* signifie un peu plus qu'*écouter* : voir à https://www.onelook.com/?w=listen&ls=a. Je ne développerai pas davantage ce point ici.

passion didactique), ce que $\bar{y}$ devrait alors signaler comme telle afin que y, de concert avec $\bar{y}$, rectifie le cours de l'étude.

V. Diversité pédagogique et adéquation didactique

Avant de quitter (provisoirement) la question pédagogique, je voudrais signaler une cinquième structure, qui, nous le verrons ultérieurement, est d'importance notamment en relation avec la notion de *questionnement du monde* : le *séminaire*. Je n'en parlerai guère, ici, que pour mémoire et me contenterai de rapporter, pour le plaisir, une anecdote contée par Louis Althusser (1918-1990) dans son livre *L'avenir dure longtemps* (Paris, Flammarion, 2013). Parlant de Jean Hyppolite, philosophe qui dirigea l'École normale supérieure de la rue d'Ulm de 1954 à 1963 avant d'être nommé au Collège de France, Althusser écrit :

> Hyppolite annonça la couleur dès son discours d'entrée : « J'ai toujours su que je serais un jour directeur de l'École… l'École doit être une maison de tolérance, vous me comprenez. » Et il se mit à mettre en place des séminaires, dont il avait toujours le mot à la bouche. La chose se sut, et il reçut un jour une longue lettre manuscrite d'une main tremblante, et signée d'un colonel de cavalerie en retraite, retiré à Cahors, qui lui disait tout son intérêt pour ses initiatives, lui confiait ses propres expériences pédagogiques dans l'armée, où il avait depuis longtemps organisé lui aussi des séminaires, et proposait un échange d'expérience. Il y avait une lettre jointe, signée de sa fille, disant papa s'intéresse vraiment beaucoup à la chose, si vous pouviez lui répondre. Hyppolite lui répondit, et une longue correspondance, qui devait durer des années, s'établit entre eux. Le colonel vint voir, malgré ses blessures de guerre, Hyppolite à Paris, et il fit à l'École une conférence qui plut, malgré son vocabulaire un peu trop militaire. Ce colonel s'appelait C. Minner. (pp. 377-378)

Cette anecdote n'est là que pour nous rappeler plaisamment la question de la *diversité* des formats pédagogiques, qui paraissent utiles, voire indispensables, du point de vue de telle ou telle instance $\hat{w}$, à la réalisation de tel projet d'étude de telle œuvre donnée. L'apparente généricité de ces formats, qui en effet se réfèrent chacun à des *genres* distincts de tâches formatives, ne doit pas faire oublier que leur *pertinence didactique* ne peut être analysée qu'à propos d'une œuvre o (ou d'un ensemble d'œuvres $\mathcal{O}$).

VI. Élémenter la TAD : la notion de *curriculum*

J'ai abordé récemment cette notion dans mon « cours » à la 20e école d'été de didactique des mathématiques tenue à Autrans du 13 au 19 octobre 2019. Vous pouvez bien sûr vous référer au texte de ce cours tel que je l'ai rendu disponible depuis lors. Mais ma présentation a dû se faire, ce jour-là, devant des auditeurs dont plus d'un avait oublié d'être « franc et amical », et donc dans une atmosphère d'allure très antididactique (à mes yeux au moins), en sorte que, sans doute, bien peu de ces « auditeurs » ont alors pu véritablement entendre correctement et complètement mon propos. Ce que j'ai exposé à cet égard est pourtant, à mes yeux, très largement neuf : d'où le fait que j'y revienne ici. Pour mémoire, je rappelle d'abord la notion commune de curriculum telle qu'elle est généralement entendue dans le monde anglo-saxon aujourd'hui, en empruntant pour cela à l'*Online Etymology Dictionary*[24] :

> "a course, especially a fixed course of study at a college, university, or school," 1824, from a Modern Latin transferred use of classical Latin *curriculum* "a running, course, career" (also "a fast chariot, racing car"), from *currere* "to run" (from PIE root ***kers-** "to run"). Used in English as a Latin word since 1630s at Scottish universities.

En français non noosphérien, le mot *curriculum* n'apparaît, nous dit le CNTRL, que vers 1900, dans l'expression bien connue *curriculum vitae* (« déroulement de la vie »). Comme dans le cours d'Autrans, je parlerai volontiers, ici, pour des raisons qui, je l'espère, vont devenir claires, de *curriculum vitae et studiorum*, de « déroulement de la vie et des études ». Je ne ferai pas de développement, ici, sur la sémantique institutionnelle actuelle, en France et ailleurs, du mot *curriculum* : je vous laisserai constater que les usages observables du mot se laissent subsumer sous la notion qui sera formellement définie ci-après.

La notion généralisée de *curriculum*

J'ai rappelé, lors de la séance 1 de cet Humble séminaire, l'un des apports majeurs (à mes yeux) de ma « conférence » d'Autrans (car le « cours » que j'y ai donné, je le répète, était, pédagogiquement parlant, du genre « conférence »), à savoir ce fait que toute position institutionnelle (I, p) a d'abord une fonction *productive* : les sujets de p (pères, mères, élèves, professeurs, etc.) s'affairent à des tâches productives qui sont en quelque sorte « l'objet social » de la position considérée[25]. Pour cette raison même, la position p possède aussi une fonction *formative* à l'endroit de ses sujets, afin qu'ils deviennent capables d'accomplir de telles tâches de production.

J'insiste à nouveau sur le caractère novateur de cette vision des choses, qui, d'un côté, nous invite à voir du formatif (et donc du possiblement didactique) en *toute* position institutionnelle (celles d'enseignant, de père, d'amant, de malade, de citoyen imposable, d'élu municipal, etc.), ce qui, par delà le *terroir* scolaire, nous restitue ce qui est véritablement le *territoire* du didacticien, et qui, d'un autre côté, nous rappelle que ce qui définit une position, c'est d'abord

---

[24] Voir à l'adresse https://www.etymonline.com/word/curriculum.

[25] J'emploie ici l'expression « objet social » de façon métaphorique. En France, la loi précise que « l'objet social ne peut pas avoir un caractère illicite, ni être contraire aux bonnes mœurs » (voir, là-dessus, à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Objet_social). Il est clair que l'emploi fait ici de cette expression s'affranchit de telles restrictions (sans pour autant les ignorer, mais en les rapportant alors à une certaine instance $\hat{w}$).

un ensemble $\boldsymbol{T}_p$ de types de tâches que les sujets de p ont à accomplir, ou encore, plus complètement, l'équipement praxéologique $\pi(p)$ de la position p.

Pour définir un curriculum du point de vue d'une instance de référence $\hat{w}$, on commence par considérer une relation dite d'*antécédence*, $A_{\hat{w}}(p, p')$, que l'on notera aussi $\hat{w} \vdash p \rightsquigarrow p'$ et qui a lieu lorsque $\hat{w}$ juge qu'une personne x ayant occupé la position p (et dont l'équipement praxéologique vu par $\hat{w}$, $\pi_{\hat{w}}(x)$, peut donc être jugé conforme à $\pi_{\hat{w}}(p)$), sera autorisée, par une certaine *instance évaluatrice* $\hat{v}$, à venir occuper la position p', parce que, après examen de son « dossier », $\hat{v}$ jugera x *capable de se conformer*, par un travail formatif déterminé, réalisé dans la position p', à l'équipement praxéologique $\pi_{\hat{w}}(p')$. On dira alors que, pour $\hat{w}$, *p précède p'* ou encore que la position p est *$\hat{w}$-antécédente* de la position p'.

La définition de la notion de curriculum se fait alors en trois temps. Premier temps : on définit la notion de *parcours positionnel $\dot{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ selon $\hat{w}$*, ou *$\hat{w}$-parcours positionnel*, par

$$\hat{w} \vdash \forall\, i\ [1 \leq i \leq n \Rightarrow \exists\, j\ (0 \leq j \leq i{-}1 \wedge p_j \rightsquigarrow p_i)].$$

Deuxième temps : on définit le *$\hat{w}$-parcours formatif* $\tilde{p} = (\pi_{\hat{w}}(p_0), \pi_{\hat{w}}(p_1), ..., \pi_{\hat{w}}(p_n))$. Deux remarques méritent d'être explicitées à ce propos. Tout d'abord, on pourrait aussi bien parler de $\hat{w}$-parcours *productif* – c'est là rappeler la dialectique du *productif* et du *formatif*. Ensuite, on doit souligner qu'une personne x qui parcourt $\dot{p}$ aux yeux de $\hat{w}$ occupe en général dans le même temps un grand nombre d'autres positions que $\hat{w}$ n'inclut pas dans $\dot{p}$ parce que cette instance ignore (volontairement ou non) les effets formatifs de ces positions en définissant le parcours formatif $\tilde{p}$. Troisième temps : étant donné $\dot{p}$ et $\tilde{p}$, on définit le *$\hat{w}$-curriculum* correspondant comme le couple $\mathscr{k} = (\dot{p}, \tilde{p})$.

L'instance $\hat{w}$ peut regarder un parcours positionnel donné, $\dot{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$, comme constitutif d'un ($\hat{w}$-)curriculum $\mathscr{k} = (\dot{p}, \tilde{p})$, avec $\tilde{p} = (\pi_{\hat{w}}(p_0), \pi_{\hat{w}}(p_1), ..., \pi_{\hat{w}}(p_n))$. Cela est vrai aussi pour toute personne x, soit *prospectivement* – x se propose de suivre tel curriculum supposé –, soit *rétrospectivement* – x relit son parcours positionnel personnel comme parcours formatif. Ces remarques conduisent à deux notions duales dont la prise en considération paraît essentielle.

VII. La dualité CIO / CPV : l'exemple et l'exception

Si $(\hat{I}, \hat{p})$ est une position institutionnelle au sein de $\hat{I}$ qui, aux yeux de $\hat{w}$, propose un parcours positionnel $\dot{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$, où $p_0, p_1, \ldots, p_n$ sont des positions de $\hat{I}$, comme base d'un parcours formatif $\tilde{p} = (\pi_{\hat{w}}(p_0), \pi_{\hat{w}}(p_1), ..., \pi_{\hat{w}}(p_n))$, on dira que le $(\hat{I}, \hat{p})$-curriculum $\mathscr{k}_{\hat{I}} = (\dot{p}, \tilde{p})$ est, aux yeux de $\hat{w}$, un *curriculum institutionnellement offert* (CIO) par $\hat{I}$. Telle est la notion qui nous est sans doute la plus familière, parce qu'elle exprime le point de vue des institutions qui proposent – qui offrent – des curriculums auxquels nous sommes souvent assujettis. Je reviendrai là-dessus un peu plus loin. Mais je veux d'abord introduire la notion duale de celle de CIO, soit la notion de *curriculum personnellement vécu* (CPV).

C'est donc la seconde possibilité évoquée ci-dessus qui nous importe maintenant : une personne x passe par une succession de positions p_0, p_1, …, p_n qu'aucune instance peut-être (hormis la personne x elle-même) ne songe à regarder comme le parcours positionnel d'un certain curriculum. En quelque sorte, de façon délibérée ou contingente, x « construit » son curriculum, et cela doublement : par le choix de fait des positions p_i que x va occuper et par les équipements praxéologiques $\pi_x(p_i)$ que x redéfinit alors, en partie, de façon délibérée ou contingente, en faisant en sorte, en principe, de se regarder et d'être regardé comme pouvant occuper la position suivante dans son parcours positionnel.

Le curriculum personnel de Freud

Avant de poursuivre sur la voie ainsi ouverte, je voudrais donner un premier exemple de CPV. (J'emprunte ici aux matériaux que j'avais préparés pour mon « cours » d'Autrans.) Il s'agit en l'espèce du CPV de Sigmund Freud (1856-1939), et plus précisément de son curriculum « médical », que je résumerai en reproduisant le passage suivant d'un livre récent intitulé *Freud étudiant* (Houssier, 2019) :

> Freud fait plusieurs rencontres décisives au long de ses études de médecine. En première année, en 1873, il suit le cours de Carl Claus sur la biologie générale et le darwinisme. Trois ans plus tard, il entame sa carrière de chercheur à l'Institut d'anatomie comparée, dirigé par ce même Claus ; c'est là qu'il se concentre sur l'anatomie des anguilles et qu'il obtient une bourse d'étude pour se rendre, à deux reprises, au laboratoire expérimental de Trieste, ville alors autrichienne… En octobre 1876, il entre comme étudiant-chercheur à l'Institut de physiologie du professeur Ernst von Brücke tout en continuant à suivre des enseignements. Devenu médecin en mars 1881, il commence à être indépendant financièrement, quoique soutenu par des collègues ou des amis comme Josef Breuer.
>
> Devant la ferme position de Brücke, qui lui indique qu'il n'y a pas d'avenir pour lui au sein de son laboratoire, Freud quitte ses fonctions en juin 1882… Il décide alors de pratiquer la médecine et, pour cela, de réaliser plusieurs stages cliniques dans divers domaines. Stagiaire en novembre 1883 dans le service de médecine interne du professeur Hermann Nothnagel, il y est nommé aspirant et touche un maigre salaire. Quelques mois plus tôt, en mai, un stage de trois mois puis une inscription comme chercheur dans la clinique psychiatrique du professeur Theodor Meynert ont laissé des traces durables dans son parcours. Enfin, de décembre 1883 à l'été 1885, Freud travaille dans un service médical consacré aux maladies nerveuses et du foie dirigé par le docteur Franz Scholz, lequel s'intéresse à la neurologie alors que, dès 1883, Freud souhaite lui-même se spécialiser en neuropathologie. Nommé maître assistant (*Privatdozent*) en neuropathologie en septembre 1885, il obtient une nouvelle bourse pour un séjour de six mois à l'étranger et part en octobre à Paris pour un stage à l'hôpital de la Salpêtrière, dans le service du

> professeur Jean-Martin Charcot. (pp. 93-94)

Voilà donc, en résumé, ce que l'auteur cité nomme le « parcours élaboratif » du jeune Freud[26]. Ajoutons une autre position visitée par Freud après la Salpétrière de Charcot : à Nancy, auprès d'Hippolyte Bernheim (1840-1919).

Comme presque toujours, le parcours positionnel évoqué résulte de choix de la personne *x* (ici, du jeune Sigmund Freud), des positions existantes et des occasions qui s'offrent ou se refusent. Ce parcours positionnel apparaît souvent désordonné et presque contingent, et il en va de même du parcours *formatif* suivi – le lecteur sera peut-être surpris de découvrir par exemple que Freud, qui obtient « son diplôme de médecin le 31 mars 1881 après huit années d'études, au lieu des cinq attendues », a durant ces huit années « effectué deux séjours en 1876 dans la station de zoologie marine expérimentale de Trieste, sous la responsabilité de Carl Claus », séjours d'étude pour lesquels il bénéficie de deux bourses accordées par le Ministère de l'Éducation « pour lui permettre d'étudier les anguilles mâles de rivière ». Les dissections qu'il effectue à Trieste « confirment l'existence de testicules chez l'anguille mâle ». Ces résultats seront « publiés en 1877 devant l'Académie des sciences de Vienne »[27].

L'offre curriculaire médicale à Vienne du temps de Freud

Bien entendu, on ne peut comprendre le CPV du jeune Freud qu'en le mettant en relation avec les CIO « médicaux » *possibles* en son temps à Vienne. Dans son livre *Freud: A Life for Our Time* (2006), Peter Gay écrit à cet égard[28] :

> During his time at the University of Vienna as student and researcher, the medical faculty was a superb, highly select fraternity. Most of its members had been imported from Germany: Carl Claus, who headed the Institute of Comparative Anatomy, had recently been acquired from Göttingen; Ernst Brûcke, the famous physiologist, and Hermann Nothnagel, who headed the Division of Internal Medicine, had both been born in Northern Germany and trained in Berlin; Theodor Billroth, a celebrated surgeon, gifted amateur musician, and one of Brahms's closest

---

[26] Tous ces éléments biographiques sont bien connus. À titre complémentaire, voir par exemple la notice consacrée à Freud par l'encyclopédie Wikipédia (à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Sigmund_Freud).

[27] Ces éléments sont tirés de la notice de Wikipédia sur Freud (https://fr.wikipedia.org/wiki/Sigmund_Freud). Pourquoi sont-ils alors regardés comme importants ? Dans son ouvrage *Freud: A Life for Our Time* (2006), Peter Gay répond en ces termes (pp. 31-32) : « He [Freud] went [to Trieste] with an assignment that reflected Claus's long-standing interest in hermaphroditism: to test the recent assertion of a Polish researcher, Simone de Syrski [1824-1882], that he had observed gonads in eels. This was an astonishing discovery—if it could be substantiated. For, as Freud laid out the issue in his report, "there had been innumerable efforts through the centuries" to find the eel's testes, and all had failed. If Syrski was right, the traditional view of the eel as hermaphroditic would be shown to be baseless. »

[28] Voir à l'adresse https://cutt.ly/Me966yU.

> friends, had been lured to Vienna after holding chairs in his native Germany and in Zurich. These professors, luminaries in their fields, lent an air of intellectual distinction and cosmopolitan breadth to parochial Vienna. It is no accident that during those years the medical school attracted scores upon scores of students from abroad—from other parts of Europe and from the United States. (p. 30)

Un phénomène clé : l'opportunisme curriculaire

Rétrospectivement, le parcours freudien peut apparaître exceptionnel, et par l'offre curriculaire exploitable, et par le vigoureux engagement formatif du jeune Freud. Mais je voudrais surtout souligner ici un trait que, semble-t-il, on retrouve *quasiment toujours* dans les biographies curriculaires : à savoir un vrai *opportunisme curriculaire*[29], que manifeste la liberté de choix et d'usage des positions institutionnelles parcourues. *Cela vaut pour tous et pour chacun*. Certes, Freud fut au lycée un brillant élève[30], dont la voie pouvait sembler « toute tracée d'avance ». Nous savons aujourd'hui, rétrospectivement, qu'il n'en fut rien.

VIII. La dualité CIO / CPV : l'ordinaire des choses

Je prendrai maintenant un second exemple, collectif, lui, où les personnes impliquées, bien que disposant de moins de ressources propres, n'en montrent pas moins un opportunisme curriculaire propre à déconcerter, voire à offenser les logiques institutionnelles de l'offre curriculaire et le narcissisme des institutions offrantes.

C'est le cas, en France aujourd'hui, de ces étudiants qui, dans le cadre récemment créé du système « Parcoursup » d'entrée à l'université[31], ont obtenu un « Oui si », ce qui signifie qu'ils sont admis dans une formation qu'ils ont demandée *sous la condition* de suivre un parcours « renforcé », c'est-à-dire un curriculum modifié.

---

[29] Le mot *opportunisme* est souvent pris en mauvaise part, ce qui ne saurait être le cas ici. On retiendra cette explicitation concise du mot *opportunism* proposée par l'*Online Etymological Dictionary* : « policy of adopting actions to circumstances while holding goals unchanged. » (V. https://www.etymonline.com/word/opportunism.) L'adjectif *opportun*, rappelons-le, dérive du latin *ob portus veniens* « qui vient vers le port » (à propos du vent).

[30] Dans la notice, déjà mentionnée, que lui concacre l'encyclopédie en ligne *Wikipedia*, on lit ainsi : « Brillant élève, il est le premier de sa classe pendant ses sept dernières années de scolarité secondaire au lycée communal, le "Sperlgymnasium"… Il obtient la mention "excellent" à son examen de maturité en 1873. »

[31] Voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Parcoursup.

Une enquête journalistique

J'emprunte ci-après des données fournies par une enquête journalistique récente à l'université de Clermont d'Auvergne[32]. Voici un premier cas rapporté par la journaliste Camille Stromboni :

> Sur le papier, les premiers pas de Marion à l'université ont été un échec. La jeune femme, en dépit du parcours renforcé qu'elle a suivi, n'a pas réussi à valider sa première année de licence de droit à l'université Clermont Auvergne. Mais cette étudiante de 19 ans ne voit pas les choses ainsi : *« Je m'en serais toujours voulu de ne pas avoir essayé. Et ça m'a beaucoup servi. »* Elle ne rêve plus de devenir avocate et a décidé de changer de voie. En septembre, elle a fait sa rentrée en IUT (institut universitaire de technologie).

D'emblée, on observe ainsi l'opportunisme curriculaire dont je parlais plus haut. Voici de même, en quelques mots, deux autres cas :

> Pour Lucas, qui repique sa première année, le soutien supplémentaire n'a pas été suffisant. Le problème était ailleurs, d'après le bachelier technologique. C'est le *« travail personnel »* qui lui a manqué. Il dit avoir *« appris de* [ses] *erreurs »* et compte bien passer le cap. Pour Nour, diplômée d'un bac scientifique obtenu ric-rac, les heures de soutien ont, à l'inverse, été *« vraiment utiles »* dans la dernière ligne droite pour valider sa première année de licence de justesse, avec 10 sur 20.

Dans ces deux derniers cas, le curriculum « renforcé » offert par l'université a été soit insuffisant, soit juste suffisant. En revanche il a été tenu pour profitable (et donc utile) par les deux étudiants concernés, même si, observé depuis l'institution offrante, il n'a sans doute pas été aussi efficace qu'espéré.

Par contraste, cette même offre curriculaire a joué un rôle clé dans le cas que voici :

> Après avoir suivi le parcours renforcé en droit – comme 120 étudiants de sa promo –, Khadija a obtenu un 13,7 sur 20. La jeune femme de trente ans, en reconversion professionnelle après dix ans d'exercice comme aide-soignante, y a vu une vraie *« béquille »*, pour *« approfondir les cours »* ou *« apprendre à structurer une copie »* en petits groupes.

Le parcours d'un autre étudiant témoigne de la fonction d'aide à la construction d'un parcours personnel que peut assumer une offre curriculaire alors même – et en cela même – qu'elle est *refusée* par son « utilisateur » opportuniste[33] :

> Hugo le reconnaît, *« intérieurement »*, il sentait bien que *« ça n'allait pas le faire »* en droit. Après trois semaines à la fac, avant même que les ateliers du parcours « oui si » n'aient

---

[32] Voir à l'adresse https://www.lemonde.fr/campus/article/2019/10/02/a-l-universite-de-clermont-un-bilan-mitige-pour-les-parcours-renforces_6013850_4401467.html.

[33] Le « bac STMG » dont il est question dans ce passage est le bac « Sciences et Technologies du Management et de la Gestion ».

> commencé, il a plié bagage. Il faut dire qu'il n'était pas là par choix : *« J'avais été refusé dans tous les BTS, mais je ne me voyais pas faire des études longues à la fac »*, raconte le jeune homme de 21 ans, titulaire d'un bac STMG. Après une année d'intérim et de petits jobs, il vient enfin de décrocher sa place en BTS.

L'opportunisme formatif est encore plus clairement apparent, enfin, dans un autre cas, celui de Julie, « qui vient de faire sa rentrée en licence de psychologie » :

> La bachelière littéraire, orientée en parcours « oui si », compte bien suivre les cours en petits groupes, en biologie et en mathématiques, mais pour… quitter la fac. Elle veut passer les concours d'auxiliaire de puériculture.

On a ainsi d'une part un CIO – le « parcours adapté » offert, voire imposé, par l'institution d'accueil – et d'autre part des *usages personnels*, plus ou moins détournés et inventifs, de ce CIO, qui créent autant de « parcelles » de CPV.

La leçon de cet exemple doit être entendue dans toute sa portée : car, répétons-le, on a là l'illustration d'une *loi générale*. En classe même, un élève aura, vis-à-vis du curriculum offert par l'enseignant, un comportement opportuniste, déterminé *en partie* par ses assujettissements allogènes (nous y reviendrons), ce qui déconcerte ou irrite l'enseignant quand cela ne le décourage pas.

X. La réduction des questions aux œuvres et le figement curriculaire

Y a-t-il en tout cela une « difficulté » indépassable ? La dualité CIO / CPV est-elle consubstantielle à la diffusion sociale des praxéologies ? Sans doute en grande partie. Mais il semble qu'il y ait, dans le commerce entre institutions offrantes, d'une part, et étudiants opportunistes et gyrovagues[34], d'autre part, une écoute réciproque aussi nécessaire qu'elle est, très souvent, défaillante, et cela pour une raison que nous ne connaissons que trop bien et que nous allons retrouver maintenant.

---

[34] J'ai déjà utilisé (métaphoriquement) cet adjectif pour prôner la gyrovaguie des didacticiens eux-mêmes ! L'article « Gyrovague » de *Wikipédia* précise ceci (voir à https://fr.wikipedia.org/wiki/Gyrovague) : « Le terme est emprunté au bas latin *gyrovagus* "errant", un mot hybride composé du grec ancien γῦρος (*guros*) "cercle" et du verbe latin *vagor*, "errer, vagabonder". Apparu seulement au VIe siècle dans un traité monastique d'inspiration bénédictine, *Règle du maître* (ou *Regula Magistri*), il traduit, pour la condamner, la pratique de ses adeptes de mener une vie solitaire itinérante entre différents monastères. Les termes copte *sarakôte* et arabe *serakuda* semblent désigner la même réalité. Le terme *gyrovague* est d'ailleurs parfois utilisé à leur place pour désigner un simple moine (donc non forcément chrétien) itinérant et solitaire, comme dans *derviche gyrovague*. »

Visite des œuvres ou questionnement du monde ?

Comment se définit ordinairement un curriculum offert par une institution de formation ?[35] Pour répondre, revenons à la situation curriculaire de base, que l'on peut condenser dans le couple formé de l'écriture $\hat{w} \vdash p \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \bar{p}$ et de cette question : quelles sont les *praxéologies* dont la rencontre par le sujet x de p donnera à la noosphère de $\bar{p}$ (et en particulier à l'instance évaluatrice $\hat{v}$) le sentiment que x pourra venir valablement occuper la position $\bar{p}$?

En vérité, cette formulation est ambiguë en cela qu'elle est de nature à être exprimée spontanément en termes de *visites des œuvres* : quelles sont les œuvres que x, lorsqu'il est en p, devrait visiter pour que la noosphère de $\bar{p}$ (et en particulier l'instance évaluatrice $\hat{v}$) le regarde comme capable de venir occuper, au double plan productif et formatif, la position $\bar{p}$? À cet égard, il convient de souligner que la décision d'accueillir x en $\bar{p}$, qu'on suppose devoir être prise par une instance évaluatrice $\hat{v}$ agissant pour le compte de $\bar{p}$, se fonde sur la connaissance de ce *qu'aura réalisé* x en p (et en d'autres positions p', p'', …, antécédentes à $\bar{p}$), et non directement sur ce que *ferait* x en $\bar{p}$, puisque x n'y a pas encore accédé.

Le fait de poser le problème curriculaire en termes d'œuvres à visiter éloigne d'une autre formulation de la question des conditions favorables à la transition de la position p à la position $\bar{p}$, formulation qui serait en fait la suivante : quelles questions Q doit-on rencontrer et étudier en p pour être jugé capable de venir occuper la position $\bar{p}$? Le privilège traditionnellement donné à la visite des œuvres conduit à formuler la réponse en termes de champs et de sous-champs de connaissance tels qu'ils sont institutionnalisés en telle ou telle institution (qui, au demeurant, reste souvent imprécise) – il faudra que x ait « fait », par exemple, du calcul différentiel et intégral, de la biochimie, etc.

D'une manière générale, alors qu'une position $\bar{p}$ a des besoins praxéologiques qui s'expriment normalement en termes de *questions* Q auxquelles il convient d'apporter réponse (« Comment accomplir des tâches du type T ? » (*praxis*) et « Pourquoi le faire ainsi ? » (*logos*)), ces questions Q s'implicitent (et souvent disparaissent) dans le « récit » (*story*) praxéologique qui leur fait écho, où n'apparaissent plus guère que les « œuvres » à l'aide desquelles d'aucuns supposent qu'il *devrait être possible* de construire des réponses R adéquates.

[35] Dans ce qui suit, je reprends parfois, de façon non fortuite, des passages de mon récent cours d'Autrans.

Un exemple révélateur

Pour illustrer ce phénomène, je vais me référer à un texte rendu public le 21 octobre 2016 intitulé « Propositions pour le futur programme de mathématiques du lycée »[36]. Ce texte, issu des travaux d'un groupe constitué par des membres de diverses sociétés savantes en matière de mathématiques et d'informatique (SFdS, SIF, SMAI, SMF), était précédé d'un texte non publié daté du 17 octobre 2016 où apparaissent notamment des commentaires de l'un des participants au groupe de travail, lui-même membre de la SMAI (Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles). Voici deux de ses commentaires :

> – Dans la réunion, on avait mentionné des questions de topologie, comme la distance de Hamming, ainsi que la notion de partition, principalement pour le codage canal. On ne les met pas ?
> – Idem pour les fonctions booléennes, qui sont utilisées si j'ai bien compris pour faire du hashage ou du codage (fonction de diffusion et de confusion ?).

On a là un phénomène typique : la question, évoquée de façon quelque peu floue (elle concernerait le « codage canal » dans un cas, le « hashage » [*sic*] et le « codage » dans l'autre), laisse la place à des *œuvres* supposées mises en texte, prêtes à être ainsi « racontées » (« distance de Hamming », « fonctions booléennes », etc.). Il y a là le début d'un processus qui conduira à la monumentalisation du complexe praxéologique dont certains éléments, au départ, devaient *seulement* participer à la fabrication des réponses R aux questions Q mais qui, désormais, tendent à éclipser ces questions mêmes.

Figement et défigement curriculaires

L'étude de *questions* Q suggérées par $\bar{p}$ fait ainsi place à l'étude d'*œuvres* O transposées en p, hors du contexte de leur mise en jeu pertinente. L'*enquête* sur des questions laisse place à du *storytelling* sur l'œuvre considérée (qu'il s'agisse de la distance de Hamming ou de la fonction exponentielle par exemple), sans qu'on sache pourquoi cette œuvre O devrait intéresser les sujets de p en tant que tels. La *mise en discours* et, généralement, *en texte* des praxéologies, avec éclipse des questions originellement génératrices, produit un *figement praxéologique*, contemporain de la préservation et de la pérennisation, par routinisation, de l'équipement praxéologique d'une position institutionnelle.

Pour *défiger* un curriculum, il conviendra donc de le questionner sur les œuvres qu'il charrie – « Pourquoi O ? Qu'avez-vous à en faire au juste » – étant bien entendu qu'un usage déterminé

[36] Voir à l'adresse https://www.societe-informatique-de-france.fr/wp-content/uploads/2016/11/2016-10-21-maths-info-lycee-propositions.pdf.

de quelque œuvre que ce soit est curricularement légitime dès lors que ce recours est praxéologiquement justifié. Pourquoi, donc, la fonction exponentielle ? Pourquoi au juste la distance de Hamming ? Pour un utilisateur opportuniste, une œuvre *O* donnée est en règle générale ouverte à des usages jusque-là inédits : de là l'importance de considérer ces questions attentivement.

Le *storytelling* des œuvres, que la tradition scolaire situe quasi exclusivement dans le *topos* du professeur, est une composante essentielle de la visite des œuvres. Mais le *paradigme de la visite des œuvres* est aujourd'hui partout en crise : il devient de plus en plus écologiquement improbable, quelle que soit la position *p*. En sens inverse, le *paradigme du questionnement du monde* n'a cessé de monter en puissance, de manière certes anarchique, et dans des formes ambiguës (l'ambiguïté se trouvant par exemple déjà dans le qualificatif « inquiry-*based* » souvent usité dans l'anglais noosphérien international), à travers lesquelles le vieux monde fait de la résistance sous les oripeaux trompeurs du questionnement du monde.

Questionner un complexe praxéologique que le passage du temps institutionnel a surchargé d'approfondissements et de commentaires – qu'ils se veuillent épistémologiquement savants ou didactiquement bienveillants, ou les deux – est la voie la plus directe pour combattre le figement curriculaire, pour défiger ce que l'arrêt du questionnement (et déjà l'oubli des questions initialement génératrices ou, plus tard, régénératrices) a coagulé, pour trier à nouveaux frais le pertinent de l'*anciennement* pertinent, que l'on conserve souvent parce qu'on le croit supérieurement « formateur », comme il en va aujourd'hui au primaire – exemple parmi d'autres – de l'algorithme traditionnel, si scolairement résilient, de division des nombres entiers ou décimaux.

IX. Assortiments d'outils et manières de faire

Je m'efforcerai plus loin d'expliciter la problématique de ce thème de recherche. Mais je rappelle d'abord le problème *P* pour lequel je vous avais sollicité à la fin de la séance 1 :

> Votre tiroir à chaussettes contient 24 chaussettes, dont 12 bleues, 8 rouges et 4 vertes. Pressé par le temps, vous prenez une poignée de chaussettes sans les regarder et vous les mettez dans votre valise. Quel est le plus petit nombre de chaussettes qu'il vous faut prendre ainsi dans le tiroir pour que vous soyez sûr d'avoir avec vous deux fois deux chaussettes de même couleur (= deux paires de chaussettes) ?

Avant d'en venir à ce problème-ci, je voudrais rappeler quelques notions générales, tout d'abord à propos de la notion même de *problème*.

Qu'est-ce qu'un problème ?

Une question *Q* est un problème *P* pour une instance *î* si la production d'une réponse validable à *Q*, *R*, est une tâche *t* d'un type *T* pour lequel *î* ne dispose pas d'une technique τ « convenable », autrement dit qui permette à *î* d'accomplir la tâche *t* « sans problèmes » : la tâche *t* n'est donc pas à la *portée* de la technique τ, du moins telle que *î* l'utilise. On dira alors que la question *Q*, ou la tâche *t*, *est problématique pour î*. C'est la disponibilité pour *î* d'une autre technique, τ′, relative à un type *T′* dont la tâche *t* peut être regardée comme un spécimen, et qui « réussit » sur *t*, qui rendra *Q* (et *t*) *non problématique* pour *î*.

Cela rappelé, il y a plus, cependant, dans la notion de problème que ce qu'on vient de préciser. Voici par exemple ce que nous dit du mot (anglais) *problem* le *Dictionary of Word Origins* de John Ayto (1990) :

> **problem** [14] A *problem* is etymologically something 'thrown forward.' The word comes via Old French *probleme* and Latin *problēma* from Greek *próblēma,* a derivative of *probállein* 'throw forward.' This was a compound verb formed from the prefix *pro-* 'forward' and *bállein* 'throw' (source of English *ballistic. emblem, parable,* etc). Things that are 'thrown out' project and can get in the way and hinder one, and so *próblēma* came to be used for an 'obstacle' or 'problem' – senses carried through into English *problem.*

Un problème, c'est ainsi une difficulté (une énigme, etc.) « lancée au-devant », c'est-à-dire à l'adresse d'une communauté d'étude, qui l'accueillera ou pas.

Le problème des chaussettes

Le problème *P* proposé lors de la première séance de ce séminaire répond exactement à la définition que je viens de préciser. Il a été proposé, avec quelques autres problèmes, le 14 octobre 2019, dans le cadre du dîner de gala de la conférence annuelle de MatRIC (Centre for Research, Innovation and Coordination of Mathematics Teaching) tenue à Bergen (Norvège) par le mathématicien d'origine australienne Tyson Ritter (de l'Université de Stavanger, Norvège)[37]. C'est par ce problème que je voudrais inaugurer ici la question de *l'analyse praxéologique et cognitive de l'activité humaine*.

Une des propriétés de ce problème qui peut nous inciter à l'analyser (en tant que tâche possiblement problématique) est que sa compréhension correcte est à la portée, non certes sans un peu d'attention et de soin, d'une large majorité de gens, y compris s'agissant de ceux

[37] Ce problème m'a été communiqué par Heidi Strømskag (Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norvège).

qui ont déserté depuis longtemps la « frontière » mathématique où l'enseignement primaire et secondaire leur avait imposé naguère de séjourner un temps.

Avant d'aller plus loin, nous examinerons d'abord un compte rendu d'*une* étude du problème des chaussettes.

Le problème des chaussettes : compte rendu d'une étude possible

1. Le tiroir à chaussettes contient 12 chaussettes noires, et donc 6 paires noires, 8 chaussettes rouges, et donc 4 paires rouges, enfin 4 chaussettes vertes, et donc 2 paires vertes : il contient donc, au total $6 + 4 + 2 = 12$ paires de chaussettes.

2. Pour analyser ce problème, on construit un modèle du système sur lequel il porte. Soit $\hat{C}$ l'ensemble des chaussettes ; on a $\#\hat{C} = 24$. Une « poignée » de chaussettes est une partie quelconque $\hat{p}$ de $\hat{C}$, en sorte que $0 \leq \#\hat{p} \leq 24$. Le nombre maximal de paires qu'une poignée $\hat{p}$ peut contenir est égal à $\lfloor \#\hat{p} / 2 \rfloor$: par exemple si $\#\hat{p} = 17$, le nombre maximal de paires que $\hat{p}$ peut contenir est 8.

3. Soit alors k un entier compris entre 0 et 12 et soit P_k l'ensemble des entiers n compris entre 0 et 24 ayant la propriété suivante : quelle que soit la poignée $\hat{p}$ de n chaussettes, $\hat{p}$ contient au moins k paires de chaussettes. Notons que les ensembles P_k ne sont jamais vides puisqu'on a toujours $24 \in P_k$: il n'y a qu'une poignée $\hat{p}$ de 24 chaussettes, à savoir $\hat{p} = \hat{C}$ et, bien entendu, $\hat{C}$ contient au moins k paires de chaussettes, quel que soit $k = 0, 1, 2, \ldots, 12$.

4. Étant non vide, l'ensemble P_k a un plus petit élément ν_k (puisque $[\mathbb{N}, \leq]$ est *bien ordonné*). Une poignée $\hat{p}$ telle que $\#\hat{p} = \nu_k$ contenant au moins k paires de chaussettes, on a $\nu_k = \#\hat{p} \geq 2k$. On a ainsi : $2k \leq \nu_k \leq 24$, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, 12$.

5. L'ensemble P_k est sans trou : $P_k = \{n \in \mathbb{N} \mid \nu_k \leq n \leq 24\}$. Si, en effet, $\nu_k \leq n \leq 24$ et si $\#\hat{p} = n$, soit $\hat{p}' \subset \hat{p}$ avec $\#\hat{p}' = \nu_k$; alors $\hat{p}'$ contient au moins k paires de chaussettes et il en est donc de même de $\hat{p} \supset \hat{p}'$.

6. Identifions une poignée $\hat{p}$ comme un triplet (b, r, v), où b, r et v sont respectivement les nombres de chaussettes bleues, rouges et vertes dans cette poignée. On a : $\#\hat{p} = b + r + v$. Si $\#\hat{p} = 2$, on pourra avoir ainsi $\hat{p} = (2, 0, 0)$ ou $\hat{p} = (1, 1, 0)$: la première poignée contient une paire (bleue), la seconde n'en contient pas. Donc on a $\nu_1 > 2$. Si $\#\hat{p} = 3$, on peut avoir $\hat{p} = (1, 1, 1)$; donc, de même, on a $\nu_1 > 3$.

7. Dans le cas où $\#\hat{p} = 4$, d'après le « principe des tiroirs » (ou *pigeonhole principle*), l'une des trois coordonnées au moins est supérieure ou égale à 2 : on aura par exemple $\hat{p} = (2, 1, 1)$. Par conséquent $\nu_1 = 4$.

8. La technique employée pour montrer que $\nu_1 > 3$ permet de conclure que l'on a aussi $\nu_2 > 5$: il suffit de considérer la poignée $\hat{p} = (3, 1, 1)$.

9. Que se passe-t-il pour une poignée $\hat{p}$ de cardinal 6 ? Soit $\hat{p}' \subset \hat{p}$, avec $\#\hat{p}' = 4$. Posons : $\hat{p} \setminus \hat{p}' = \{c_1, c_2\}$. La poignée $\hat{p}'$ contient au moins une paire de chaussettes, $\{c, \bar{c}\}$. Posons alors $\{c_3, c_4\} = \hat{p}' \setminus \{c, \bar{c}\}$. On a donc : $\hat{p} = \{c_1, c_2\} \cup \hat{p}' = \{c_1, c_2\} \cup (\{c, \bar{c}\} \cup \{c_3, c_4\}) = \{c, \bar{c}\} \cup (\{c_1, c_2\} \cup \{c_3, c_4\}) = \{c, \bar{c}\} \cup \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. La poignée $\hat{p}'' = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ contient 4 chaussettes et contient donc au moins une paire de chaussettes : il en résulte que la poignée $\hat{p} = \{c, \bar{c}\} \cup \hat{p}''$

> contient au moins *deux* paires de chaussettes. On en conclut que l'on a $\nu_2 = 6$.

Une question de recherche

La question qui m'a poussé à vous proposer ce problème est la suivante : un problème P étant donné, quels sont les *outils* qu'un instance $\hat{\imath}$ peut mobiliser pour le résoudre et quels *usages* l'instance $\hat{\imath}$ peut-elle faire de ces outils ? Quelles sont les *conditions et contraintes* sous lesquelles $\hat{\imath}$ est amenée à opérer qui, étant donné P, déterminent le choix des outils et de leurs usages ?

Aujourd'hui, je ne ferai sur cette question – naïve, forcément naïve – que fort peu de commentaires. En guise d'illustration, je m'arrêterai cependant un instant sur deux outils qui apparaissent dans le compte rendu d'étude ci-dessus.

Le premier est l'usage des triplets (b, r, v) pour démontrer qu'un entier n *n'est pas* un minimum ν_k, c'est-à-dire que l'on a $\nu_k \neq n$ (et donc $\nu_k > n$). On peut ainsi montrer que l'on a $\nu_3 \neq 7$: il suffit pour cela de considérer la poignée $\hat{p} = (3, 3, 1)$.

Le second outil est la technique permettant de montrer qu'un entier n est égal au minimum ν_k. Montrons ainsi que l'on a $\nu_3 = 8$ par un travail analogue à celui fait pour prouver que $\nu_2 = 6$. Soit une poignée $\hat{p}$ de cardinal 8 et soit $\hat{p}' \subset \hat{p}$ tel que $\#\hat{p}' = 6$. Posons : $\hat{p} \setminus \hat{p}' = \{c_1, c_2\}$. La poignée $\hat{p}'$ contient au moins deux paires de chaussettes, $\{c, \bar{c}\}$ et $\{c', \bar{c}'\}$. Posons $\{c_3, c_4\} = \hat{p}' \setminus (\{c, \bar{c}\} \cup \{c', \bar{c}'\})$. On a : $\hat{p} = \{c_1, c_2\} \cup \hat{p}' = \{c_1, c_2\} \cup ((\{c, \bar{c}\} \cup \{c', \bar{c}'\}) \cup \{c_3, c_4\}) = \{c, \bar{c}\} \cup \{c', \bar{c}'\} \cup (\{c_1, c_2\} \cup \{c_3, c_4\}) = \{c, \bar{c}\} \cup \{c', \bar{c}'\} \cup \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. La poignée $\hat{p}'' = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ contient 4 chaussettes et contient donc au moins une paire de chaussettes : il en résulte que la poignée $\hat{p} = \{c, \bar{c}\} \cup \{c', \bar{c}'\} \cup \hat{p}''$ contient au moins *trois* paires de chaussettes. On en conclut (puisque $\nu_3 \neq 7$) que l'on a $\nu_3 = 8$.

Un approfondissement

Avant d'aller plus loin (lors de la séance 3 de ce séminaire), je vous propose un problème qui naît des remarques précédentes : Peut-on généraliser les résultats obtenus jusqu'ici (pour $k = 1, 2, 3$) en démontrant la formule « générale » $\nu_k = 2k + 2$? Sinon, que se passe-t-il ?

X. Le forum des questions

Jean-Pierre Bourgade m'écrit ceci :

> Je suis en train de lire les notes de la dernière séance de l'humble séminaire. Quelque chose m'a un peu chiffonné (mais ce n'est rien de fondamental). Tu écris : « Prenons alors $R_1 = R(\hat{\imath}, o, \hat{t}_1)$ et $R_2 = R(\hat{\imath}, o, \hat{t}_2)$, et considérons le premier cas : si $\hat{w} \vdash (\hat{v} \vdash \varphi(R_2, \bar{R}) < \varphi(R_1, \bar{R}))$, $\hat{w}$ juge que, selon $\hat{v}$, R_2 est plus proche de $\bar{R}$ que R_1 et qu'il y a donc eu… » Tu définis par ailleurs φ comme le « degré de conformité ». Pour moi, le degré de conformité *augmente* lorsque R devient plus

conforme à $\bar{R}$. Par conséquent, $\varphi(R_2, \bar{R}) < \varphi(R_1, \bar{R})$ correspond plutôt à un « désapprentissage ».
Il semblerait qu'ici, il y ait une hésitation dans tes notes entre
– définir φ comme un degré de conformité (qui devrait donc augmenter avec l'apprentissage) et
– définir φ comme une distance (qui devrait donc diminuer avec l'apprentissage).
À mes yeux, il vaudrait mieux rester sur une vision « degré de conformité » qui me paraît mieux installée dans la théorie des rapports telle que tu l'as développée à ce jour (c'est pratique de pouvoir parler de « rapport conforme », de « rapport plus ou moins conforme à un rapport attendu », etc.), alors qu'introduire une notion de distance entre rapports me paraît préjudiciable à l'économie de la théorie des rapports.
De ce point de vue, je serais donc partisan de dire que $\varphi(R_2, \bar{R}) < \varphi(R_1, \bar{R})$ signifie que le rapport R_2 est moins conforme que le rapport R_1 au rapport attendu $\bar{R}$.

Je suis en vérité tout à fait d'accord avec Jean-Pierre. Dont acte. Les définitions que j'ai adoptées conduiraient en effet à dire que « lorsque le degré de conformité croît, la conformité décroît ». Cette incohérence est si surprenante qu'elle doit avoir une origine dans les *conditions et contraintes* – autrement dit dans les *assujettissements* institutionnels – qui ont pesé sur ϟ (i.e., sur moi-même). En y réfléchissant, il m'est revenu en mémoire un fait qui m'avait autrefois marqué et que je n'ai jamais oublié. Dans son livre de topologie (paru chez Masson en 1964), que j'ai pratiqué lorsque j'étais étudiant, Gustave Choquet introduisait la notion de « module de continuité » comme suit :

Soit φ une application croissante de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$, continue au point 0, telle que $\varphi(0) = 0$; et soit f une application d'un espace métrique E dans un espace métrique F. On dit que f admet φ pour *module de continuité* si, pour tous $x, y \in$ E, on a $d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y))$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 0$, f est uniformément continue. Inversement, si… (pp. 67-68)

Sans doute doit-on voir dans mon « choix » maladroit de la séance 1 un écho lointain de cette écriture qui m'avait alors fasciné (consciemment et, sans doute, inconsciemment), à savoir l'inégalité $d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y))$. *Sic transit gloria mundi !* (Là, je plaisante.)

ϟ

La prochaine séance de l'*Humble séminaire* devrait avoir lieu le **mardi 28 janvier 2020** à partir de 16 h 30. N'hésitez pas à me faire parvenir avant cette date votre production relative au problème des chaussettes « approfondi » (voir ci-dessus).

YC.

L’humble séminaire 2019-2020

Séance 3 du 28 janvier 2020

I. Élémenter la TAD : un avertissement !

Certains éléments de la TAD ont d’ores et déjà été rencontrés. Avant de poursuivre notre cheminement, une remarque s’impose : ce qui été dit à propos de telle ou telle notion n’est jamais que *provisoire* et pèche sans doute *et par défaut* (certaines observations possiblement cruciales n’ont pas encore été formulées), *et par excès* (certains énoncés proposés sont sans doute inessentiels). Il s’agit donc en règle générale d’*ébauches*, sur lesquelles nous pourrons être amenés à revenir.

Aujourd’hui, après notamment *pédagogie* et *problème*, nous nous arrêterons sur le mot de *théorie*.

II. Élémenter la TAD : la notion de théorie

Un conflit récurrent avec le sens commun

Je rappelle sommairement ce que j’ai nommé le *principe de Humpty Dumpty*, que j’ai emprunté à l’ouvrage *Through the Mirror, and what Alice found there* (1871) de Lewis Carroll (1832-1898) : « When *I* use a word,” Humpty Dumpty said, in rather a scornful tone, “it means just what I choose it to mean—neither more nor less. » La notion de *praxéologie* suppose que l’on ait ce principe présent à l’esprit. La notion de praxéologie a largement diffusé et cela, comme il est usuel en pareil cas, de façon mal contrôlée : tout le monde, a-t-on pu penser, sait par exemple ce que le mot de *théorie* – qui entre dans la définition de la notion de praxéologie – « veut » dire ! Or c’est là sans doute une des notions de la TAD qui entrent le plus violemment en conflit avec la sémantique du langage ordinaire : pour nombre d’utilisateurs potentiels de la TAD, une théorie *reste* une construction « rigoureuse », « scientifique », qui aurait la prétention d’asséner la « vérité » face à des élaborations « idéologiques » diverses, toutes vouées à l’erreur ou à l’illusion. Par opposition à cette notion « paranoïaque » de théorie, j’ai souvent donné l’exemple suivant (ou un exemple voisin) : « Un enfant de trois ans a une théorie des papas. » Cela devrait suffire à faire comprendre qu’on ne saurait entendre la notion « anthropologique » de théorie à partir de certains usages actuels du mot. Ce n’est pourtant pas ce qui se passe : pour certains, leur assujettissement à une telle notion allogène de théorie semble indépassable. Avant d’aller plus loin, j’ajoute que, étant donné un objet o et une instance $\hat{\imath}$, on peut parler de « la théorie de l’objet o propre à (ou : du point de vue de) l’instance $\hat{\imath}$ ».

Premier point : comme avec le mot *pédagogie*, la TAD conserve quelque chose des origines du mot de *théorie* que nous rappelle le *Dictionary of Word Origins* de John Ayto (1990) :

> The etymological notion underlying *theory* is of 'looking'; only secondarily did it develop via 'contemplation' to 'mental conception.' It comes via late Latin *theōria* from Greek *theōríā* 'contemplation, speculation, theory.' This was a derivative of *theōrós* 'spectator,' which was formed from the base *thea-* (source also of *theā́sthai* 'watch, look at,'·from which English gets *theatre*). Also derived from *theōrós* was *theōreī́n* 'look at,' which formed the basis of *theṓrēma* 'speculation, intuition, theory,' acquired by English via late Latin *theōrēma* as *theorem* [16]. From the same source comes *theoretical* [17].

De cela, la notion commune de théorie retient l'idée qu'il y a, dans l'attitude « théorique », quelque chose de contemplatif, d'abstrait, de distant et en même temps de puissamment génératif. Rien de cela n'est étranger au concept de théorie développé en TAD. Mais ce n'est pas là la fin de l'histoire.

Une ébauche d'analyse praxéologique

Quand on considère la technologie θ d'une technique τ on ne peut manquer d'apercevoir que le discours technologique comporte des présupposés, des implicites, des allants de soi, des « évidences ». Il peut certes s'agir d'éléments *technologiques* ; mais il peut s'agir aussi d'éléments *théoriques*.

Voyons cela sur un exemple. On peut constater, à l'aide d'une calculatrice, que, étant donné deux nombres strictement positifs a et b, si $b < 1$, alors $ab < a$. Il s'agit là, à l'évidence, d'un résultat *technologique*, qui peut servir à démontrer d'autre propriétés technologiques, par exemple celle-ci : si $a < 1$, alors $a^2 = aa < a$. Mais comment démontrer la première propriété ? Voici une possibilité : si $b < 1$, alors il existe c (> 0) tel que $b = 1 - c$, en sorte qu'il vient $ab = a(1 - c) = a - ac < a$. La conclusion suit.

Comme on l'aura observé, cette démonstration contient au moins *deux* présupposés. À la fin, on considère – ce sera l'énoncé θ_1 – qu'un nombre a auquel on *retranche* un nombre strictement positif est *moindre* que a. S'il n'en était pas ainsi, nous serions sans doute déboussolés : car cela nous paraît *aller de soi*. Au début, de même, il y a un autre présupposé – ce sera l'énoncé θ_0 –, à savoir que, si un nombre b est plus petit que 1, alors il existe un nombre positif c tel que $b = 1 - c$. Cette propriété semble moins évidente pour tout un chacun : d'après la propriété précédente θ_1, s'il existe un tel nombre c, alors $b < 1$; mais cette propriété *suffisante* est-elle *nécessaire* ? On peut penser qu'il faut pour cela qu'*il existe assez de nombres* : car, au contraire, on pourrait imaginer que l'on ait $b < 1$ mais qu'il n'existe pas de nombre c idoine ! Où intervient donc la notion de théorie là-dedans ?

La théorie et le théorique

Il est d'usage d'utiliser le mot *théorie* pour désigner une *totalité praxéologique*, qui inclut des types de tâches, des techniques, leurs technologies et… la composante théorique de cette organisation praxéologique. C'est cette dernière qui, en TAD, est appelée au sens strict *la* théorie (de l'objet *o*, propre à *î*). Même quand on est incapable de l'expliciter complètement (on va voir que, en vérité, c'est *toujours* le cas), c'est la théorie au sens strict qui, *par définition*, « permet » les composantes technologiques, techniques et pratiques (les types de tâches), c'est-à-dire qui détermine la totalité praxéologique que nous nommons au sens large la théorie de *o* propre à *î*, soit ici, « notre » théorie des nombres, dans laquelle les énoncés θ_0 et θ_1 sont réputés vrais. Le problème toujours ouvert est alors celui du *contenu* de la théorie au sens strict : c'est, par définition, je le répète, un contenu tel que ce que *î* tient pour avéré à propos de *o* en résulte.

Bien entendu, une théorie, au sens strict comme au sens large, peut être plus ou moins élaborée, organisée, voire formalisée. On peut avoir par exemple dans la théorie considérée ce que l'article « Natural number » de *Wikipedia* énonce dans le passage ci-après[38] :

> A total order on the natural numbers is defined by letting $a \leq b$ if and only if there exists another natural number c where $a + c = b$. This order is compatible with the arithmetical operations in the following sense: if a, b and c are natural numbers and $a \leq b$, then $a + c \leq b + c$ and $ac \leq bc$.

Il s'agit là d'un écho de la mise en ordre « théorique » liée à la « modernisation » des mathématiques qui se diffuse à partir des années 1950 dans les différents systèmes éducatifs. Voici une telle mise en forme figurant, à titre d'exercice, dans un livre paru en 1981, dû à John D. Lipson, et intitulé *Elements of Algebra and Algebraic Computing*[39] :

8. (*Ordered domains.*)

Definition. An *ordered domain* is an integral domain in which there is a special subset $D^+ \subset D$, called the set of positive elements of *D*), that satisfies

1. $a, b \in D^+ \Rightarrow a + b, ab \in D^+$;

2. For each $a \in D$, exactly one of the following holds: $a \in D^+$, $a = 0$, or $-a \in D^+$ (*trichotomy*).

(a) In an ordered domain prove that $a^2 \in D^+$ if $a \neq 0$. Conclude that $1 \in D^+$.

---

[38] Voir à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Natural_number.

[39] Voir à l'adresse https://id.b-ok2.org/book/3374627/5f49dd. Un « domaine intégral » est un anneau commutatif non trivial dépourvu de diviseurs de zéro.

(b) Show that the only way to make the integers $\mathbb{Z}$ and reals $\mathbb{R}$ into ordered domains is the familiar one. (A reassuring result.)

(c) Show that there is no way of making the complex field $\mathbb{C}$ into an ordered domain. Also show that there is no way of making a finite field into an ordered field.

Definition. In an ordered domain D, the binary relation < ("less than") is defined by

$$a < b \Leftrightarrow b - a \in D^+.$$

(Thus a > 0 $\Leftrightarrow$ $a \in D^+$.)

(d) Verify the following familiar laws of order:

(i) For any $a, b \in D$, exactly one of the following holds:

$a < b$, $a = b$, or $a > b$ (*trichotomy*)

(ii) $a < b$ and $b < c \Rightarrow a < c$ (*transitivity*);

(iii) $b < c \Rightarrow a + b < a + c$ (*isotonicity for sums*);

(iv) $a > 0$ and $b < c \Rightarrow ab < ac$ (*isotonicity for positive factors*). (pp. 138-139)

Le même ouvrage poursuit avec un exercice qui peut aussi nous intéresser :

9. Let D be an ordered domain. Show that its field of quotients, $Q = Q(D)$, becomes an ordered domain if we define Q^+ by

$$(*)\ a/b \in Q^+ \Leftrightarrow ab \in D^+.$$

Verify that $D^+ \subseteq Q^+$ (i.e., verify that the order of D is *extended* to Q). Further argue that this extension of the order of D to Q is unique, in that (*) provides the only ordering of Q^+ that satisfies $D^+ \subseteq Q^+$. [Hint: $a/b = ab(1/b)^2$.] (p. 139)

Tout cela participe d'une théorie « moderne » des nombres. Mais le chercheur en didactique travaillant dans le cadre de la TAD doit évidemment apprendre à identifier et à analyser *les* théories (au sens large et au sens strict) *propres à telle ou telle instance î.*

Ainsi, si l'on remonte un peu dans le temps de l'histoire, jusque dans la première moitié du XIX[e] siècle, une théorie des nombres « naïve » – c'est-à-dire faiblement mathématisée – était enseignée au niveau élémentaire. Ses principes essentiels étaient qu'un *nombre* est la *mesure* d'une *grandeur*, relativement à une grandeur de même espèce prise pour *unité*, le cas des longueurs étant ici emblématique. On y admettait de façon semi-implicite mais cruciale que, étant donné deux grandeurs g_0 et g_1, avec $g_0 \neq 0$, il existe un *nombre* $x > 0$ tel que $g_1 = xg_0$. Dans ce cadre *théorique*, il devient alors « évident » que, par exemple, étant donné des longueurs l_1 et l_2 de mesures respectives a et b, si $a < b$, il existe c tel que $a + c = b$: il s'agit du nombre qui est la mesure de la longueur différence $l_3 = l_2 - l_1$ par rapport à l'unité de longueur considérée.

Je note encore que, puisque d'après le théorème de Pythagore le diamètre d'un carré de côté unité a pour mesure un nombre x tel que $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, nombre dont on savait depuis les anciens Grecs qu'il n'est pas rationnel (= qu'il n'est pas égal à un rapport d'entiers), la théorie « naïve » des nombres évoquée ici forçait ses utilisateurs à aller *au-delà des rationnels*.

Énoncés technologiques, énoncés théoriques

Y aurait-il une différence intrinsèque entre énoncés *technologiques* et énoncés *théoriques* ? En dépit de ce qui a été dit plus haut, la réponse est résolument *négative* : c'est le *rôle* que jouent de tels énoncés dans l'organisation praxéologique considérée qui leur assigne l'un ou l'autre statut. (Cette affirmation sera nuancée un peu plus loin.)

Commençons par un premier exemple mathématique. L'énoncé suivant, attribué à Peano, est la base technologique – appelée « principe d'induction » – d'une technique de démonstration bien connue qu'on nomme traditionnellement *en français* « raisonnement par récurrence » :

$$\forall\, \mathbf{P} \subseteq \mathbb{N}\ (0 \in \mathbf{P} \wedge (\forall x\ (x \in \mathbf{P} \Rightarrow \sigma(x) \in \mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbb{N})$$

où $\sigma(x)$ est le « successeur » de x[40].

Qu'est-ce qui peut justifier cet énoncé ? La réponse usuelle est : un énoncé – ou un ensemble d'énoncés – de plus haut niveau de *générativité* et d'*abstraction*. Une réponse traditionnelle, du moins en France, a été avancée par Henri Poincaré (1854-1912), pour qui les « raisonnements » par récurrence procèderaient en dernier ressort d'une intuition spécifique, exprimant la puissance de notre esprit – point de vue que Poincaré explicite dans un livre qui aura une large diffusion dans le grand public cultivé, *La science et l'hypothèse* (1902)[41] :

> Pourquoi ce jugement s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence ? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition

[40] Le mathématicien italien Giuseppe Peano (1858-1932), reprenant des travaux antérieurs de Richard Dedekind (*Was sind und was sollen die Zalhen ?*, 1887), a proposé, d'abord dans ses *Arithmetices Principia, novo methodo exposita* (1889), puis dans le volume II de son *Formulaire de mathématiques* (1898), une axiomatique formalisée de l'ensemble des entiers naturels, qui deviendra célèbre sous le nom d'axiomes de Peano (on parle aussi quelquefois d'axiomes de Dedekind-Peano). L'ensemble $\mathbb{N}$ y apparaît comme un ensemble possédant un élément noté 0 et sur lequel est définie une application σ (de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) tels que : (1) $\forall x\ \forall y\ (\sigma(x) = \sigma(y) \Rightarrow x = y)$; (2) $\forall x\ (\sigma(x) \neq 0)$; (3) $\forall\, \mathbf{P} \subseteq \mathbb{N}\ (0 \in \mathbf{P} \wedge (\forall x\ (x \in \mathbf{P} \Rightarrow \sigma(x) \in \mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbb{N})$. Dans un article publié en 1891, Peano démontre que l'axiome 3 ne peut se déduire des autres axiomes. À partir des axiomes de Peano, il est possible de définir la structure habituelle de $\mathbb{N}$ (addition, multiplication, ordre) : la fonction σ n'est alors pas autre chose que la fonction successeur $\sigma(x) = x+1$ (voir par exemple à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Peano_axioms).

[41] Voir (par exemple) à l'adresse http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/chp/hp-pdf/hp1917sh.pdf.

> directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience. (pp. 23-24)

La « théorie » de Poincaré justifiant le principe d'induction est ainsi de type « spiritualiste ». Ce point de vue recevra une large diffusion culturelle, et reste encore bien vivant de nos jours. En particulier, il tend à imposer l'idée que les techniques de démonstration par récurrence relèvent d'une « logique *naturelle* » – il s'agirait de « simples » *raisonnements* –, qui ne demanderait pas à être travaillée sous l'angle technologico-théorique – ce qui ne laisse pas d'avoir des effets dans l'étude de ces techniques de démonstration dans l'enseignement français.

D'une manière générale, le travail « théorique » dans l'élaboration d'une organisation praxéologique s'achève sur des « énoncés » qui demeurent plus ou moins implicites, sous-entendus, cachés ou, quand on en prend conscience (comme l'écrit Poincaré), qu'on assume quelquefois explicitement, en mathématiques, à partir du XVII^e^ siècle, sous le nom de *postulat*, mot que le *Dictionary of Word Origins* de John Ayto (1990) présente ainsi :

> The noun *postulate* originally meant 'demand, request.' It was an anglicization of *postulātum*, a noun of the past participle of *postulāre* 'demand, request.' It was used in the mid-17th century by mathematicians and logicians for a proposition that (because it was a simple aand uncontentious one) 'demanded' to be taken for granted for the sake of further reasoning, and from this it spread to more general usage.

Notons en passant que l'emploi général de *postulat* – en anglais et dans d'autres langues européennes – prendrait donc son origine dans l'usage *mathématique* du mot.

La mathématisation des couches supérieures de la théorie participe du phénomène général de « modernisation » des organisations mathématiques. Pour ce qui est du principe d'induction de Peano, on peut alors le « justifier » en montrant qu'il découle d'un énoncé censé être encore plus « évident » : le fait que tout ensemble *non vide* d'entiers naturels possède un plus petit élément (= un premier élément), soit le fait que l'ordre usuel de $\mathbb{N}$ est un *bon ordre*[42]. Voici la démonstration que donne à cet égard l'ouvrage de Lipson déjà cité :

> An important consequence of the well-orderedness of $\mathbb{N}$ is
> **Theorem 1** (*Induction Property of* $\mathbb{N}$). If $S \subseteq \mathbb{N}$ satisfies
> 1. $0 \in S$,
> 2. $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$,

[42] La notion de *bon ordre* (en allemand *Wohlordnung*) a été introduite (comme généralisant l'ordre sur les entiers naturels) par Georg Cantor (1845-1918) dans son ouvrage *Grundlagen einer allgemeinenMannigfaltigkeitslehre* (1883).

then $S = \mathbb{N}$. (In words: Any subset of $\mathbb{N}$ that contains 0, and contains $n + 1$ whenever it contains n, must be all of $\mathbb{N}$.)

Proof. Let S satisfy the hypotheses of the theorem. Let $T = \mathbb{N} - S$. If T is empty, then the theorem is proved. Assume, to the contrary, that T is nonempty. By well-orderedness, T contains a least element, call it l. Now 0 is not in T by hypothesis 1. Hence $l > 0$, so that $l \geq 1$ by Exercise 1(a). (Do this exercise!) It then follows that $l - 1$ is a nonnegative integer that is not in T (because l is the *least* element of T) while l is in T, which is to say that $l - 1$ is in S while l is not in S. But this contradicts hypothesis 2. Thus the assumption that T is nonempty is untenable, giving $S = \mathbb{N}$ as required. □ (p. 38)

Pourtant, en vérité, on peut aussi démontrer la *réciproque* de cette implication : le principe d'induction de Peano *implique* que l'ordre usuel sur $\mathbb{N}$ est un bon ordre. Supposons en effet un ensemble $S \subseteq \mathbb{N}$ qui n'aurait pas de premier élément : nous allons montrer que, alors, $S = \emptyset$. Considérons l'ensemble $\mathbf{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall\, k \in \mathbb{N}\ (k \leq n \Rightarrow k \notin S\}$[43]. On a $0 \in \mathbf{P}$ puisque $0 \notin S$ (sinon 0 serait le plus petit élément de S). Si l'on suppose que $k \notin S$ pour tout $k \leq n$, alors $n + 1 \notin S$, i.e., $n + 1 \in \mathbf{P}$ (sinon $n + 1$ serait le premier élément de S). D'après le principe d'induction, on a donc $\mathbf{P} = \mathbb{N}$, i.e., $S = \emptyset$.

C'est là un fait qui peut paraître curieux à première vue[44]. Mais les exemples *mathématiques* de ce type de faits pourraient être multipliés. Considérons ainsi le cas du « postulat d'Euclide », tel que l'explicite l'article « Parallel postulate » de *Wikipedia*[45] :

Probably the best known equivalent of Euclid's parallel postulate, contingent on his other postulates, is Playfair's axiom, named after the Scottish mathematician John Playfair, which states:

In a plane, given a line and a point not on it, at most one line parallel to the given line can be drawn through the point.

This axiom by itself is not logically equivalent to the Euclidean parallel postulate since there are geometries in which one is true and the other is not. However, in the presence of the remaining axioms which give Euclidean geometry, each of these can be used to prove the other, so they are equivalent in the context of *absolute geometry*.

Many other statements equivalent to the parallel postulate have been suggested, some of them appearing at first to be unrelated to parallelism, and some seeming so self-evident that they were unconsciously assumed by people who claimed to have proven the parallel postulate from Euclid's other postulates. These equivalent statements include:

---

[43] L'œil exercé du spécialiste reconnaîtra ici l'usage d'une induction « forte » (*strong* ou *complete* en anglais, *fuerte* en espagnol), par contraste avec l'induction ordinaire (dite aussi « faible », *weak* en anglais, *débil* en espagnol).

[44] Il est pourtant « bien connu » : voir ainsi l'article « Raisonnement par récurrence » de *Wikipédia*.

[45] Sur le quadrilatère de Saccheri mentionné dans l'énoncé 14 ci-après, voir l'article correspondant de Wikipedia à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Saccheri_quadrilateral.

1. There is at most one line that can be drawn parallel to another given one through an external point. (Playfair's axiom)
2. The sum of the angles in every triangle is 180° (triangle postulate).
3. There exists a triangle whose angles add up to 180°.
4. The sum of the angles is the same for every triangle.
5. There exists a pair of similar, but not congruent, triangles.
6. Every triangle can be circumscribed.
7. If three angles of a quadrilateral are right angles, then the fourth angle is also a right angle.
8. There exists a quadrilateral in which all angles are right angles, that is, a rectangle.
9. There exists a pair of straight lines that are at constant distance from each other.
10. Two lines that are parallel to the same line are also parallel to each other.
11. In a right-angled triangle, the square of the hypotenuse equals the sum of the squares of the other two sides (Pythagoras' Theorem).
12. The Law of cosines, a general case of Pythagoras' Theorem.
13. There is no upper limit to the area of a triangle. (Wallis axiom)
14. The summit angles of the Saccheri quadrilateral are 90°.
15. If a line intersects one of two parallel lines, both of which are coplanar with the original line, then it also intersects the other. (Proclus' axiom)

Lorsqu'on parcourt cette liste d'énoncés, certains semblent plutôt technologiques, tel le théorème de Pythagore (énoncé 11), et d'autres plutôt théoriques (tel l'énoncé 13, selon lequel il existe des triangles d'aire aussi grande que l'on veut).

Ce dernier mérite un commentaire particulier. Dans un exposé présenté le 11 juillet 1663, le mathématicien oxonien John Wallis utilisa en fait l'hypothèse « évidente » qu'il existerait deux triangles *semblables et de tailles différentes* (énoncé 5) pour *démontrer* le postulat d'Euclide. L'hypothèse de Wallis peut sembler aller de soi, et c'est bien là ce qu'avanceront encore, par exemple, les mathématiciens Émile Borel et Robert Deltheil dans leur ouvrage, paru en 1931, intitulé *La géométrie et les imaginaires* (Paris, Albin Michel)[46] :

> L'indépendance de la grandeur et de la forme est un postulat admis par tous, même par ceux qui n'ont jamais réfléchi à la géométrie ; cela vient de l'habitude qu'acquièrent très vite les jeunes enfants de *reconnaître* les objets vus à des distances différentes ; bien que ces objets apparaissent plus petits, on les identifie même quand ils sont plus éloignés, à condition que leur distance ne soit pas excessive. Lorsque nous voyons une image reproduite à deux échelles différentes, nous disons que c'est la *même*, parce qu'elle a la même forme et peut être considérée comme représentant le même objet vu à des distances différentes. (pp. 42-43)

Tel est en effet le point de vue le plus commun. Dans son ouvrage *Worlds Out of Nothing. A Course in the History of Geometry in the 19th Century*, paru chez Springer en 2007, Jeremy Gray nous rappelle cependant ceci :

---

[46] Voir à l'adresse https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k48053521.texteImage.

> However, the concept of form indepndent of size is no more self-evident than the concept of parallels, and mathematicians, Wallis among them, recognised that they must accept a weaker conclusion: the existence of similar triangles is equivalent to the existence of parallel lines. In other words, if there is to be a geometry in which the parallel postulate fails, then it can contain no figures of the same shape but arbitrarily different sizes. Figures cannot shrink or expand without distortion. (p. 81)

Le *travail théorique* effectué sur une organisation praxéologique donnée consiste ainsi, en particulier, à expliciter en les regardant comme non « évidents » des énoncés tenus jusqu'alors pour aller de soi, au point souvent de passer inaperçus.

Je note ici fermement que tout cela s'applique *aussi bien* aux organisations praxéologiques *non mathématiques*, par exemple celles qui « font » notre vie quotidienne, dont un effort d'explicitation théorique révèle souvent les aspects discutables – en forme de préjugés parfois odieux : sexisme, racisme, âgisme, etc. – qui en sont constitutifs.

Le travail de repérage et d'analyse théorique d'une organisation praxéologique constitue sans aucun doute une dimension essentielle du travail « didactique » que doit conduire une *société* sur ses « acquis » en tout domaine.

III. Vers le questionnement du monde

Paradigmes d'étude

Dans le cadre d'un cours – le cours 3 – donné à Bellaterra (près de Barcelone) durant l'été 2019, j'ai élargi un peu le modèle des paradigmes d'étude usité jusqu'alors en distinguant, en plus des deux paradigmes « classiques » (visite des œuvres et questionnement du monde), deux autres paradigmes, sur lesquels je voudrais ici revenir un instant.

Mais c'est peut-être le lieu d'énoncer d'abord ce qui reste, à ce jour, un implicite *théorique* de la TAD. Là où d'autres théories du comportement humain voit l'explication de ce comportement dans l'individu observé lui-même, là où elles veulent, par exemple, l'aider à « réaliser son potentiel », à « devenir lui-même », etc., la TAD s'inscrit dans une autre problématique : la personne humaine – la formule est maintenant ancienne – y est regardée comme la *résultante de ses assujettissements institutionnels* passés et présents – fût-ce sous la forme de *projets*, donc de projections de soi dans le futur. Cette formulation peut être aujourd'hui renouvelée dans les termes suivants : toute personne, et plus largement toute instance, est la résultante de son commerce avec les œuvres de la société où elle existe *et est le fruit de ses propres œuvres*. Je rappelle au passage que, parmi ces œuvres, il y a bien sûr toutes les *questions* qu'une instance – personnelle ou institutionnelle – peut être amenée à soulever et à étudier.

C'est avec cet énoncé théorique en tête que nous examinerons la série des quatre paradigmes annoncés, que je désignerai pour faire court par les notations ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 et ϖ_4, en mettant au centre de cet examen la notion d'*accès aux œuvres*. Plus spécialement encore, je mettrai au cœur de l'analyse la notion de *livre*, un livre étant regardé comme *une œuvre* (écrite ou, exceptionnellemet, orale) *donnant un accès à une ou des œuvres*.

Le premier paradigme ϖ_1 est celui de *la lecture du Livre*. Ce que j'appelle *le* Livre est un texte en lequel se reconnaît une société ou un ensemble de sociétés, un texte qui soulève des questions et apporte des réponses jugées essentielles : on peut penser ici à la Bible ou au Coran notamment. L'auteur présumé du Livre est une divinité, une figure légendaire, ou même une personne qui a pu exister mais dont l'œuvre a été anonymisée par le temps[47]. *Le* Livre constitue en principe une « encyclopédie totale » pour la société qui le fait sien.

Un cas antérieur aux grands monothéismes nous est fourni par Homère, l'auteur supposé – « légendaire » – de l'*Iliade* et de l'*Odyssée*, dont on peut regarder l'ensemble comme l'encyclopédie totale du monde hellénique, où les jeunes Hellènes étudiaient « leur » monde, et à propos desquels Eric Alfred Havelock (1903-1988) a écrit ceci dans son ouvrage classique intitulé *Preface to Plato* (1963)[48] :

> To approach Homer in the first instance as a didactic author is asking a good deal from any reader and is not likely to win his early sympathy. The very overtones of the word 'epic', implying as they do the grandiose sweep of large conceptions, vivid action, and lively portraiture, seem to preclude such an estimate of Europe's first poet. Surely for Homer the tale is the thing. Didactic or encyclopedic elements that may be there—one thinks for example of the famous Catalogue of the Ships—are incidental to the epic purpose and likely to weigh as a drag on the narrative. However, we are going to explore the argument that the precise opposite may be the case; that the warp and woof of Homer is didactic, and that the tale is made subservient to the task of accommodating the weight of educational materials which lie within it. (p. 61)

On peut reconnaître une descendance substantielle au paradigme de l'encyclopédie *totale* dans une forme devenue classique, celle de l'encyclopédie *partielle* ℓ, qui, de plus, a souvent un auteur, et qui souvent lui confère son nom : on parlait il y a quelques décennies « du Feller » (William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 1957) comme de la « bible » des probabilités, par exemple ; dans ma génération, on parlait de même « du

---

[47] Le mot *légende*, du latin *legere* « lire », signifiait à l'origine « ce qui doit être lu ». De même, le mot arabe *al-Qorʾān* signifie « la récitation » (voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Coran).

[48] Dans une note de bas de page, l'auteur commente en ces termes l'adjectif "didactique" qu'il utilise (p. 84, note 2) : « This adjective may mislead, if it suggests an emphatically conscious purpose on the part of the oral poet, yet it is difficult to choose a better. He is didactic by necessity, but also in large part unconsciously. »

Rudin » (Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, 1966), entre autres « bibles » dont nous devions nous imprégner.

On pourrait parler à cet égard de *paradigme de la lecture du livre* (avec un *l* minuscule), qu'on pourrait noter ϖ_1*, au sens où existerait *le* livre qui surpasse (aux yeux de certaines instances au moins) tous les autres sur le même sujet. La désignation de ce livre par le nom de l'auteur – « le Feller », « le Rudin » – ne suppose nullement que l'utilisateur – le lecteur – connaisse celui-ci ni qu'il cherche à le connaître mieux – ce qui participe d'une manière formellement paradoxale au processus d'*anonymisation des œuvres*, sur lequel je vais revenir.

Ce paradigme, encore très vivant, sera distingué du paradigme ϖ_2, sans doute plus anciennement installé, dit *de la célébration des grands auteurs*. Dans ce paradigme, on s'intéresse à une œuvre parce qu'on s'intéresse *d'abord à son auteur*. On n'étudie pas – pas encore – la science politique mais la *Politique* d'Aristote ; on n'étudie pas les mathématiques mais les *Éléments* d'Euclide ; etc. Dans l'étude des ouvrages de ces « grands auteurs », le lecteur de haut niveau étudiera non seulement les *questions* abordées et les *réponses* apportées ou ébauchées, mais aussi les *milieux didactiques* mobilisés et la *dialectique des médias et des milieux* mise en œuvre par l'auteur étudié[49].

Ce paradigme est porteur d'une tradition de haute exigence intellectuelle qui joue encore un grand rôle dans certains mondes savants – de filiation essentiellement « littéraire ». Pour prendre ici un exemple de cette vie maintenue du paradigme de la célébration des grands auteurs, voici un extrait quelque peu inattendu du livre du philosophe Louis Althusser (1918-1990) intitulé *L'avenir dure longtemps* (Flammarion, 2013), où cet auteur ne s'épargne guère[50] :

> Je suis donc un citoyen de la politique, et je vois de loin, à distance, cet autre domaine, où je ne suis pas vraiment installé, qui est le domaine de la philosophie. J'ai dû à Martin d'en connaître à distance, et de pouvoir y reconnaître à distance, quelques points de repère, et quelques directions d'orientation essentielles. Mais le domaine de la philosophie m'est toujours resté extérieur. Je ne connais pas (ce qui s'appelle connaître, même sur le plan de la simple lecture) ni Kant ni Husserl, ni Nietzsche, ni Fichte, ni Schelling, ni Leibniz. Je connais très mal Platon et ne connais pas Aristote, je connais mal Descartes, mal Bergson, pas du tout Heidegger. Je connais un peu Malebranche, qui m'amusait beaucoup (justement sans doute parce que Vuillemin le trouvait ridicule) comme fournisseur de concepts aux Idéologues de l'utilitarisme du XVIIIe s. et des physiocrates. Je ne connais bien que Rousseau et le jeune Marx, puis j'ai connu le Marx de

[49] Sur la *Politique* d'Aristote, voir ainsi à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Politique_(Aristote).

[50] L'ami cité par Louis Althusser, Jacques Martin, était entré à l'École normale supérieure de la rue d'Ulm en 1941. Il s'est suicidé en 1963.

la maturité, avec tous les problèmes que ces connaissances m'ont posés : c'étaient des philosophes où la philosophie était en fait politique quasi de part en part. (p. 455)

Le paradigme ϖ_2 est celui où le degré d'anonymat est évidemment minimal. Mais, historiquement, il va conduire au paradigme ϖ_3, celui de la *visite des œuvres*, où l'anonymat triomphe, tempéré par les vestiges du paradigme $\varpi_1^\star$.

Ce paradigme apparaît dans les universités du Moyen Âge, où le cours d'études se structure en un premier cycle appelé *trivium*, soit l'étude des « trois voies » que sont la *grammaire*, la *logique* et la *rhétorique*, matières regardées comme des arts « mineurs »[51]. La division supérieure est le *quadrivium*, qui comprend les quatre arts « majeurs » que sont l'*arithmétique*, la *géométrie*, la *musique* et l'*astronomie*[52]. Nous avons là les prémisses du paradigme de la visite des œuvres ϖ_3, où l'on étudie des « matières » (des disciplines), et non plus des auteurs.

Dans les paradigmes ϖ_1 et $\varpi_1^\star$, l'enseignant, quand il existe, a un rôle de « lecteur » (de *reader*, comme on dit en anglais), qui présente et commente le texte d'un « maître » – pour $\varpi_1^\star$ et l'enseignement secondaire, c'est là ce que j'ai appelé la « pédagogie de régent ». Par contraste, dans le paradigme ϖ_3, l'enseignant est un *professeur* (et non un simple lecteur ou régent), qui ne renvoie à aucun autre « maître » que lui-même et constitue *hic et nunc* la source et le garant du discours qu'il promeut : le latin *professor* désigne « celui qui se déclare expert dans un art ou une science »[53].

Ici, l'anonymat est culminant. Pourtant, si le professeur se porte garant du contenu enseigné, en même temps il semble affirmer : « Vous pouvez me croire, parce que ce n'est pas de moi, ni de quiconque ! Les « créateurs » de l'œuvre s'évanouissent. Cette situation d'apparence incommode – parce que paradoxale – est pourtant un invariant anthropologique. Dans un petit livre récent, *Fondamentaux de la vie sociale* (2019), Maurice Godelier écrit ainsi :

> Le domaine de l'imaginaire est celui de la production de deux ensembles immenses de réalités. En effet, peindre *La Joconde*, construire une chapelle, sculpter la Vierge Marie, représenter le Christ qu'on n'a jamais vu, c'est transformer des idéalités en réalités, en richesse, en patrimoine, etc. Ces réalités n'existent pas par elles-mêmes puisqu'on les a créées.

---

[51] De là l'adjectif *trivial*.

[52] Ce curriculum des « arts libéraux » existait dès l'antiquité, même si les noms *trivium* et *quadrivium* ne vinrent qu'ultérieurement : voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Quadrivium.

[53] Le vocabulaire académique anglosaxon a conservé quelque chose de ce système différencié de positions. Selon le *Macmillan Dictionary*, "someone begins as a lecturer, then becomes a senior lecturer, then sometimes a reader, and finally a professor".

> En revanche, les productions de la pensée religieuse ou politico-religieuse se présentent comme existant par elles-mêmes, à la différence de *La Joconde.* Lévi-Strauss écrit, dans le premier de ses quatre volumes des *Mythologiques,* que les mythes n'ont pas d'auteur. En fait, ils en ont. Mais structurellement un récit ne peut fonctionner comme mythe que s'il n'a pas d'auteur. Le mythe est une parole fondamentale qui traverse les époques. Les contenus de la pensée mythique et religieuse, sont vécus comme s'ils n'étaient pas produits par l'humanité, comme si l'humanité les avait reçus. Ce sont des vérités révélées auxquelles on croit parce qu'on les considère comme vraies. (pp. 76-77)

Le professeur est ainsi une figure séculière qui s'apparente à celle du prêtre – nous sommes en cela assez loin de la science fruit du travail humain ! On va voir qu'il s'agit là, en vérité, d'un phénomène qui prend place dans un ensemble plus vaste de changements paradigmatiques.

Monumentalisation et démonumentalisation

J'ai évoqué, lors de la séance 2, le phénomène du figement curriculaire. Lorsqu'il s'exerce dans le cadre du paradigme ϖ_3 de la visite des œuvres, il va de pair avec la *monumentalisation* des œuvres enseignées – d'où découle la métaphore de la *visite* des œuvres. De quoi s'agit-il ? Un texte d'accès à des œuvres est en principe une présentation de questions et de réponses, ainsi que des matériaux – des œuvres – qui servent à engendrer ces questions et à construire et valider ces réponses. Mais la monumentalisation fait en général *perdre les questions*. Dès lors, les réponses n'apparaissent plus comme telles : le texte énonce des assertions qui ne répondent explicitement à aucune question, tout en continuant à exhiber des œuvres qui, anciennement, étaient les outils par excellence d'une économie – devenue « vestigiale » – vouée à la production de réponses. L'un des symptômes essentiels est alors que tant les étudiants que les « enseignants » ne savent plus guère répondre aux questions du type « À quoi sert la notion de… » ou, plus largement, « Quelles sont les raisons d'être de… ».

Si on les juge aux besoins des usagers potentiels, les complexes d'œuvres enseignées dans ce cadre apparaissent comme des œuvres monumentales, dans lesquelles on chercherait souvent en vain les outils adéquats, technologiquement ou techniquement, à un type de tâches donné. En fait, quand on les étudie en vue de répondre à une question donnée, on découvre en ces « monuments » deux aspects contraires : d'une part, ils intègrent une pléthore d'éléments praxéologiques dont l'utilité pour le projet que l'on poursuit ne saute pas aux yeux ; d'autre part, ils sont muets sur des aspects que pourraient utiliser qui y cherche des outils idoines. La raison de cette double inadéquation est simple dans son principe : ces élaborations praxéologiques sont l'écho de besoins d'étude allogènes anciens, ce qui explique à la fois la profusion en leur sein d'éléments devenus inutiles et l'absence d'éléments dont le besoin n'a pas encore été éprouvé dans les contextes institutionnels où cet ensemble monumental s’est construit.

En quoi peut consister alors ce que j’ai appelé la *démonumentalisation* ? À défiger le curriculum en n’y admettant tendanciellement que ce dont l’enquête sur des questions a révélé, de manière directe ou indirecte, l’utilité. En d’autres termes, c’est l’entrée dans le paradigme ϖ_4 du *questionnement du monde* qui à la fois suppose et implique un défigement du curriculum existant et une démonumentalisation des œuvres qui y figurent.

Un tel processus historique de remplacement de ϖ_3 par ϖ_4 est corrélatif d’un changement dans l’organisation *politique*, et en particulier dans les *politiques cognitives*[54] de nos sociétés. Le paradigme ϖ_3 a été construit autour d’une séparation majeure, antédémocratique, entre les élites du pouvoir et de la culture, qui ont éventuellement un usage des œuvres enseignées (ainsi que de quelques autres œuvres qui, elles, ne sont pas enseignées), et la masse des gens (le peuple, en y incluant les couches inférieures et moyennes de la bourgeoisie), à qui l’on montre ces œuvres dont ils n’ont « fianelement » pas l’usage (sauf à changer de classe sociale), pour qu’ils les reconnaissent et les admirent.

Le paradigme ϖ_4 a toujours été celui des élites et notamment des élites du « savoir » et de la science et ne se généralise aujourd’hui encore que fort lentement dans l’enseignement de la « masse » (au sens large déjà précisé). Bien entendu, là encore, il suppose et implique tout à la fois la *démocratisation cognitive* de nos sociétés fondée sur le principe suivant : tout citoyen, tout vivant a le droit de considérer toute question qu’il ou elle souhaite et de pouvoir accéder dans des conditions raisonnables, collectivement, aux moyens d’y apporter une réponse validable. C’est là un combat qui est, aujourd’hui encore, loin d’être gagné.

Démonumentalisation et opportunisme formatif

Nous nous sommes arrêtés sur le phénomène de l’*opportunisme formatif* d’un « étudiant » x supposé, en nommant CPV (curriculum personnel vécu) le *curriculum vitae et studiorum* correspondant à un parcours positionnel $\dot{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$. L’opportunisme formatif se traduit, pour l’observateur extérieur, par le caractère apparemment anomique de la suite des positions p_i adoptées par x, en particulier au regard des CIO (curriculums institutionnellement offerts) existants.

Cette anomie est sans doute multifactorielle, mais il ne semble pas déraisonnable de mettre en avant à propos de sa survenue le facteur suivant, lié au figement curriculaire qui s’observe du

[54] L’adjectif *cognitif* est pris ici au sens que lui donne la TAD.

côté des institutions offrantes : les œuvres proposées à l'étude sont souvent des composés pléthoriques, surabondants, où, si l'on veut étudier l'objet o, on doit *aussi* étudier les objets o', o'', o'''… Il y a là, de fait, un comportement institutionnel qui s'apparente à ce qu'on nomme en matière commerciale une « vente forcée » : pour acquérir l'objet o, x doit aussi s'acquitter du prix réclamé par l'institution s'agissant des objets o', o'', o'''… – sans qu'il lui soit démontré nettement que cette acquisition imprévue (pour x) est nécessaire au bon usage de o qu'il espère faire. Le comportement de x semble donc soumis au principe « Ça, je prends / Ça, je n'en ai pas besoin, je laisse ».

Ces remarques concernant une personne x peuvent être étendues à l'intérieur d'un enseignement suivi par x : pour chaque thème θ étudié, on peut introduire la position $p_{é,\theta}$ d' « élève étudiant le thème θ ». En pratique, on observera que x pourra choisir d'occuper telle position $p_{é,\theta}$ mais fuira telle ou telle autre position $p_{é,\theta'}$: l'anomie est ainsi au cœur même de l'enseignement « suivi ».

Un élément de réponse à la question « Comment réduire l'opportunisme formatif et l'anomie des parcours formatifs ? » tient donc certainement dans le fait de proposer l'étude de questions « intéressantes » pour le public potentiel considéré. Lors de mon discours de réception du doctorat *honoris causa* de l'Université de Santiago du Chili, le 13 janvier dernier, j'ai avancé que l'idéal de toute institution de formation devrait être : *Aquí es donde se aprenden cosas interesantes*. « Ici, on apprend des choses intéressantes », c'est-à-dire des choses plus qu'utiles : qui suscitent l'intérêt des étudiants. Mais comment cela peut-il se faire ?

IV. Mathématiques, mathématiciens, etc.

Projets et problèmes

Le schéma général que je considérerai maintenant est celui-ci : un collectif $\mathcal{C}$ (qui peut se réduire à une personne ou s'élargir à toute une communauté) en vient à se donner un projet Π qu'il doit concevoir et réaliser. Dans ce processus surgissent des questions Q qui se posent à $\mathcal{C}$ (mais que, peut-être, personne ou presque, dans $\mathcal{C}$, ne se pose). Ce qui peut « intéresser » les membres de $\mathcal{C}$, ce sont de telles questions. Même si l'on peut imaginer des questions qui pourraient intéresser « tout le monde », ou, du moins, l'essentiel d'une classe d'âge par exemple, la mise en évidence de telles questions exige un travail considérable – qui a commencé à s'accomplir, dans certains contextes institutionels.

De façon évidemment spécifique, la création continuée d'une formation supérieure destinée aux futurs *professeurs de mathématiques* m'a conduit (avec d'autres, dont Gisèle Cirade) à identifier nombre de questions qui se posent à ceux-ci mais qui ne sont guère posés dans leur profession – ou plutôt dans leur *semi-profession* – telle qu'elle existe à ce jour. Dans ce qui suit, je m'arrêterai plus particulièrement, s'agissant de cette profession en devenir, sur le cas des questions problématiques de nature *mathématique*.

Mathématiciens et autres dans la noosphère

Ce que je nomme « noosphère » ici est la *noosphère* de l'enseignement des mathématiques, au triple niveau primaire, secondaire et tertiaire. Mais tout ce qui suit devrait pouvoir être adapté au cas d'une autre « matière » ou « discipline » (biologie, chimie, littérature, histoire, sociologie, etc.) : même si chaque « cas » a ses particularités, il existe aussi de grands *invariants*, que je laisserai le lecteur découvrir pour son propre compte.

La noosphère ainsi entendue contient tous ceux qui, à un moment donné, marquent d'une manière déterminée leur intérêt pour la question générale de l'enseignement (des mathématiques, ici) en un ensemble donné de sociétés. Cette question générale se décline en questions plus spéciales : où – en quelles positions – la personne *x* peut-elle apprendre des mathématiques ? Avec qui ? Et quelles mathématiques ? Comment ? Etc. Bien entendu, une question qui se pose dans la position $\hat{\rho}$ qui est celle *de chercheur en didactique*, est celle-ci : Où – en quelles positions – au sein de la noosphère, ces questions sont-elles posées ? En quels termes ?

Un élément de réponse important est à cet égard le suivant : généralement, en un certain nombres de positions noospériennes $\hat{n}$, de telles questions *ne sont pas posées*. Quand elles le sont, plus ou moins fugitivement, les recherches visant à leur apporter des réponses validées semblent presque inexistentes. Bref, la « mobilisation » autour de telles questions peine durablement à se faire. Pourquoi cela ?

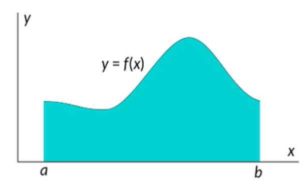
Une réponse d'ensemble est liée à l'état de *semi-profession* des métiers de l'enseignement, qui fait se succéder périodes de surexcitation – lorsqu'une nouvelle mode pédagogique, impulsée par quelque nouveau gourou, apparaît – et période ordinaires d'apathie. Mais on doit évoquer aussi, semble-t-il, ce qu'on peut nommer le phénomène de *figement institutionnel*, et plus particulièrement de *figement curriculaire*, où tant les $\hat{n}$-parcours positionnel $\dot{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ que les $\hat{n}$-parcours formatifs $\tilde{p} = (\pi_{\hat{n}}(p_0), \pi_{\hat{n}}(p_1), ..., \pi_{\hat{n}}(p_n))$ semblent durablement immobiles : « Le monde est très bien comme il est », semble-t-on nous dire.

Dans ce qui suit, je m'arrêterai sans doute trop rapidement sur la position de mathématicien $\hat{n}_\mu$ au sein de la noosphère, position qui, au demeurant, n'est souvent que très partiellement occupée. Quand on observe ce qui s'y passe, on peut parvenir à cette explication : la venue en

$\hat{n}_\mu$ de mathématiciens n'est pas ordinairement nécessaire, soit parce qu'il n'y aurait pas de problèmes (en dehors des élèves et des professeurs, qui font ce qu'ils peuvent), soit parce que ces problèmes seraient d'avance résolus, parfois depuis fort longtemps, dans l'institution mathématicienne.

Cela noté, il arrive de loin en loin que des mathématiciens, de façon quelque peu erratique, « montent » en position $\hat{n}_\mu$ – ils se font, dans des formes variées, militants de l'enseignement des mathématiques. Souventes fois, ils cherchent alors querelle aux didacticiens, ou, plus exactement, à la position $\hat{\rho}$ elle-même. Une attaque « classique » consiste ainsi à railler les notions emphatiques dont les didacticiens se rengorgent, en déclarant ces notions à la fois ridicules et inutiles. Entendez : « Nous, mathématiciens, n'avons pas besoin de cela ! » Et ajoutez encore ce mantra : « Nous, nous sommes tout action ! » Car il suffirait d'agir – du moins quand on « est » mathématicien.

Je voudrais pointer ici un fait curieux. Un mathématicien donné, si éruptif soit-il, n'est pas censé être capable de résoudre *tous* les problèmes mathématiques que se pose, à un moment donné, la communauté scientifique à laquelle il s'honore d'appartenir : chacun d'eux a sa spécialité, et, au cours d'une carrière, à de rarissimes exceptions près, ne change de spécialité, lorsque cela arrive, qu'à grand peine. Or ce précieux axiome cesse d'avoir cours quand ce même mathématicien en vient à occuper si peu que ce soit la position $\hat{n}_\mu$: sans même qu'on y pense, il se regarde et *on* le regarde alors comme devant être capable de résoudre *tous* les problèmes éventuels de l'enseignement des mathématiques…



L'intégrale $A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ peut être interprétée comme l'aire du domaine délimité par : (1) la courbe représentative de la fonction f (d'équation $y = f(x)$), (2) l'axe des abscisses et (3-4) les droites verticales d'abscisses a et b.

Avant de revenir sur cette simple remarque, qui renvoie à l'image fantasmatique d'un mathématicien tout-puissant, je voudrais prendre *un* exemple des questions de mathématiques qui se posent aux professeurs – en fait, à leur profession –, même si ceux-ci ne se les posent pas – en fait, si leur semi-profession ne se les pose pas. L'un des thèmes saillants des mathématiques du secondaire, c'est le lien entre *primitive et aire*. Voici (ci-contre) un encadré que l'on trouve dans l'article « Intégration (mathématiques) » de *Wikipédia*[55]. Et voici maintenant les toutes premières lignes du corps de l'article :

[55] Voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Intégration_(mathématiques)#Calcul_d'aire.

Dans un plan muni d'un repère cartésien, on choisit comme unité d'aire, l'aire du quadrilatère OIKJ où O est l'origine du repère et I, J et K les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1) et (1 ; 1).

Si f est une fonction réelle positive continue prenant ses valeurs dans un segment $I = [a, b]$, alors l'**intégrale** de f sur I, notée

$$\int_{x \in I} f(x)\, dx$$

est l'aire d'une surface délimitée par la représentation graphique de f et par les trois droites d'équation $x = a$, $x = b$, $y = 0$…

Où est donc le problème ici ?, demandera-t-on peut-être. Tel est bien le problème ! Le problème reste invisible à beaucoup de noosphériens patentés. Mais on peut en même temps considérer que la profession devrait l'avoir identifié et résolu d'une manière satisfaisante pour elle. Dans cette perspective, je me permets de noter que, dans le séminaire de didactique des mathématiques pour les élèves professeurs de l'IUFM d'Aix-Marseille pour l'année 2004-2005, j'avais développé les considérations suivantes, que je reproduis ici *ne varietur*[56] :

Séance 24 : mardi 26 avril 2005

② Qu'en est-il, maintenant, de la notion d'***aire*** ? S'il est relativement facile de définir l'aire des régions ***polygonales*** du plan, il est plus difficile de définir l'aire de régions non polygonales, telle qu'un ***disque***.

❶ Henri Lebesgue (1875-1941) a autrefois dénoncé, avec une mordante ironie, le tour de passe-passe qui consiste à affirmer qu'on obtient l'aire d'un disque en considérant la limite des aires p_K de polygones réguliers à K côtés inscrits dans le cercle correspondant, ***alors même qu'on n'a pas défini l'aire du disque !*** Ainsi écrivait-il :

> Si la limite des p_K avait été dénommée le tarababoum du cercle on ne se serait certes pas permis d'en déduire la valeur des tarababoums du secteur et du segment [de cercle] ; on ne se le permet que parce qu'au lieu du mot tarababoum on a utilisé le mot aire !

Lebesgue concluait alors sur un bilan sans concession : « Il faut donc de toute nécessité, être en possession de la notion d'aire avant de calculer des aires. »

❷ Pour compléter les observations précédentes, on esquisse maintenant la construction de la notion mathématique d'aire, qui s'opère en deux temps.

③ Dans le plan $\prod$, on considère la famille Γ de parties de $\prod$ formées des réunions finies de régions triangulaires (côtés inclus ou non). Si A, $B \in \Gamma$ alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B \in \Gamma$: Γ est un ***clan***.

---

[56] On utilise dans ce qui suit la notion de *clan*, appelée aussi, entre autres, « algèbre d'ensembles » : voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Algèbre_d'ensembles. Sur l'origine de cette appellation, voir par exemple à l'adresse http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./c/clan.html.

❶ À tout élément A de Γ on associe son aire $\mu(A)$ en prenant pour définir l'aire d'une région triangulaire la formule usuelle (qui revient à prendre, pour un rectangle, le produit des mesures des côtés), et en démontrant que deux décompositions différentes d'une région A $\in \Gamma$ en régions triangulaires donnent bien la ***même*** aire.

❷ On vérifie alors qu'on obtient ainsi, sur le clan Γ, une ***mesure positive***, c'est-à-dire une application μ de Γ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :
M_1. μ est ***additive*** : pour tous A, $B \in \Gamma$, A et B disjoints ($A \cap B = \emptyset$), on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;
M_2. μ est ***positive*** : pour tous A, $B \in \Gamma$, si $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$;
M_3. μ a la propriété de ***continuité dénombrable*** : si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ est une suite décroissante d'éléments de Γ, d'intersection vide ($\bigcap_{n \geq 1} A_n = \emptyset$), alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mu(A_n) = 0$. ($M_3$ correspond au ***principe d'exhaustivité*** des mathématiciens grecs.)

④ Pour définir l'aire de régions autres que les plaques polygonales du plan, on procède alors selon un schéma aujourd'hui classique.

❶ Pour toute partie D bornée de Π, on définit la ***mesure intérieure*** de D, $\mu_I(D)$, comme la borne supérieure des aires des éléments de Γ contenues dans D : $\mu_I(D) = \sup\limits_{A \in \Gamma,\, A \subset D} \mu(A)$.

❷ De même, on définit la ***mesure extérieure*** $\mu_S(D) = \inf\limits_{A \in \Gamma,\, D \subset A} \mu(A)$. On a bien sûr $\mu_I(D) \leq \mu_S(D)$ et, dans le cas où $D \in \Gamma$, $\mu(D) = \mu_I(D) = \mu_S(D)$.

❸ On dit alors que D est ***quarrable*** (= que D a une aire) si $\mu_I(D) = \mu_S(D)$. L'aire de D, $\mu(D)$, est, ***par définition***, égale à ces mesures : $\mu(D) = \mu_I(D) = \mu_S(D)$.

⑤ On peut alors démontrer que tout disque est quarrable, ainsi que l'ensemble des faits usuellement tenus pour aller de soi dans la manipulation de la notion d'aire…

Je voudrais conclure sur une remarque essentielle à mes yeux. Pas plus qu'un mathématicien, un professeur de mathématiques n'a à être capable de résoudre par ses propres moyens *tous* les problèmes qu'il rencontre : si on le croit du mathématicien s'agissant de l'enseignement des mathématiques, ce n'est pas à cause de sa supposée omniscience, puisqu'on le croit aussi du « simple » professeur de l'enseignement secondaire ; mais c'est bien pour la même raison, à savoir que les métiers de l'enseignement sont des semi-professions, qui traitent d'une matière sans noblesse, dont tout un chacun pourrait être tenu pour expert.

En fait, c'est à la *profession* qu'il revient de chercher à identifier et à résoudre les problèmes de la profession, en recherchant pour cela les collaborations appropriées – exactement comme dans le cas des problèmes que cherchent à résoudre les mathématiciens !

Le professeur n'a pas non plus à connaître *à l'avance* les outils qui entreront dans la solution donnée par la profession à tel ou tel problème : il devra les apprendre en temps utile – il doit être résolument *procognitif* et, pour cela, s'affranchir des *normes rétrocognitives* traditionnelles. « L'important n'est pas ce que tu sais, mais bien ce que tu peux apprendre à partir de maintenant, *s'il le faut*. »

Je terminerai à cet égard par un épisode, dont le cadre est celui d'une préparation intensive aux olympiades mathématiques mettant en scène Grigori [Grisha] Perelman (né en 1966), épisode que le rapporte Masha Gessen dans son livre consacré à ce mathématicien hors normes, et intitulé *Perfect Rigor: A Genius and the Mathematical Breakthrough of a Lifetime* (Icon Books, 2011)[57] :

> "One time one of the coaches reproached him by saying, 'You know, Grisha, everyone else knows derivatives and you don't,'", recalled Samborsky. "That was a part of mathematical analysis, and strictly speaking, as a secondary-school student, he wasn't required to know. But he responded, 'So what, I'll solve the problems without it.' It sounded brazen, but in essence, he was right." And then Samborsky added something that showed he remembered Grisha Perelman perhaps more accurately than he himself realized: "I suspect he knew a lot more than he let on." In fact he probably knew derivatives. But he left this information out because he was there to solve problems, not to prove anything to the coaches. (p. 71)

Comme pour d'autres épisodes rapportés sur la vie de Perelman, il se peut que la légende s'insinue, ici, dans le récit des faits. Mais, comme toute légende, celle-là est faite pour être lue et méditée – *se non è vero, è ben trovato.*

Une question de recherche (rappel)

Je rappelle la question de recherche formulée lors de la séance précédente, qui n'est pas sans rapport avec le petit récit mettant en scène Perelman ci-dessus :

> Un problème P étant donné, quels sont les *outils* qu'un instance $\hat{\imath}$ peut mobiliser pour le résoudre et quels *usages* l'instance $\hat{\imath}$ peut-elle faire de ces outils ? Quelles sont les *conditions et contraintes* sous lesquelles $\hat{\imath}$ est amenée à opérer qui, étant donné P, déterminent le choix des outils et de leurs usages ?

Faute de temps, je me limiterai à ce rappel, qui m'amène aussi à rappeler le « matériel » sur lequel je vous ai proposé de travailler pour le moment – « le problème des chaussettes » – augmenté par la question indiquée à la fin de la séance précédente, que revoici :

> Peut-on généraliser les résultats obtenus jusqu'ici (pour $k = 1, 2, 3$) [concernant le problème des chaussettes] en démontrant la formule « générale » $v_k = 2k + 2$? Sinon, que se passe-t-il ?

---

[57] Voir l'article de *Wikipédia* qui lui est consacré à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Grigori_Perelman. Sergei Samborsky, cité par Masha Gessen, faisait partie de l'équipe de réserve (Gessen, 2011, p. 71).

ϟ

La prochaine séance de l'*Humble séminaire* devrait avoir lieu le **mardi 3 mars 2020** à partir de 16 h 30. N'hésitez pas à me faire connaître les questions qui vous importent.

YC.

L’humble séminaire 2019-2020

Séance 4 du 3 mars 2020

I. Élémenter la TAD : la notion d’objet

Une notion génétiquement et structurellement décisive

L’élément de la TAD que diverses circonstances m’ont amené à sélectionner pour cette quatrième séance de l’*Humble séminaire* est la notion d’*objet*. Plus encore peut-être que pour les éléments précédemment travaillés (pédagogie, problème, théorie, etc.), j’ai le sentiment qu’il s’agit là d’une notion à laquelle même des « férus » de la TAD ne prêtent guère attention, alors que, dans la genèse de la TAD à partir de la théorie de la transposition didactique, l’introduction et le travail de la notion d’objet ont joué un rôle clé, qui a conduit à développer une *théorie de la cognition*, elle-même préalable à la *théorie des praxéologies*.

La notion commune d’objet

D’après le CNTRL[58], un objet, c’est d’abord « toute chose qui affecte les sens et en particulier la vue » (Nicolas Oresme). Plus tard (1784), le mot s’emploie pour « tout ce qui est doté d’existence matérielle ». Mais dès la fin du XIV^e^ siècle, il désigne aussi « tout ce qui se présente à la pensée, qui est occasion ou matière pour l’activité de l’esprit » (Nicolas Oresme, encore). Pour Ronsard (1556), il se dit « de ce qui, être ou chose, est la cause, le motif d’un sentiment ». Pour Descartes (1647), il s’emploie pour « ce qui est donné par l’expérience » et « existe indépendamment de l’esprit ». Il est aussi, au début du XVII^e^ siècle, « ce vers quoi tendent les désirs, la volonté, l’effort et l’action» (Mathurin Régnier). Pour Pascal (1669), on désigne par ce mot ce qui est « matière, substance, sujet d’une étude, d’un ouvrage » (ainsi en va-t-il de « l’objet de la géométrie » ou de « l’objet de la médecine »). Ce n’est que plus tard qu’apparaît l’usage grammatical du mot, comme dans *compléments d’objet*.

Le même dictionnaire ajoute :

> Emprunté au latin scolastique *objectum* proprement « ce qui est placé devant » (participe passé substantivé neutre de *obicere* « placer devant ») d’où « ce qui possède une existence en soi, indépendante de la connaissance ou de l’idée que des êtres pensants en peuvent avoir » (…), s’oppose à *sujet* surtout en grammaire. et en philosophie, bien que dans la langue courante la distinction ne soit pas toujours observée.

[58] Voir à l’adresse https://www.cnrtl.fr/definition/objet.

De cela[59] la TAD retient l’idée d’un objet o existant « indépendamment » (je reviendrai là-dessus) d’une instance $\hat{\imath}$, qui peut le connaître ou non, selon que son rapport à l’objet, noté, comme on le sait, $R(\hat{\imath}, o)$, est non vide ($R(\hat{\imath}, o) \neq \emptyset$) ou est vide ($R(\hat{\imath}, o) = \emptyset$). Il y a ainsi une relativité des *rapports* instantiels à un objet. Il y a existence d’un objet o dès lors qu’il existe au moins une instance $\hat{\imath}$ pour laquelle o existe, i.e., telle que $R(\hat{\imath}, o) \neq \emptyset$, c’est-à-dire, en fin de compte, telle qu’il existe $\hat{\jmath}$ vérifiant $\hat{\jmath} \vdash R(\hat{\imath}, o) \neq \emptyset$. (Bien entendu, on peut avoir $\hat{\jmath} = \hat{\imath}$.)

Pour ce qui est de l’anglais, l’*Online Etymology Dictionary* confirme ce que nous venons de voir ; on y lit notamment ceci[60] :

> Sense of “purpose, thing aimed at” is from early 15c., from Latin *obiectus* “that which presents itself to the sight.” Meaning “that toward which a cognitive act is directed” is from 1580s. Grammatical sense of “a member of a sentence expressing that on which the action of the verb is exerted” is from 1729.

L’un des grandes questions que soulève l’emploi de la notion d’objet en TAD est celle-ci : *Quelles sont les conditions sous lesquelles un objet o existe pour une instance* $\hat{\imath}$ *?* Avant d’examiner ce problème, nous nous arrêterons sur deux autres questions clés.

Quels objets ? Et quels rapports ?

Deux points doivent être soulignés en priorité. Tout d’abord, la notion d’objet a, en TAD, une portée universelle : *tout* est objet, ou plus exatement, tout ce qui existe pour une instance au moins est un objet ou une association d’objets. C’est là un des aspects « anthropologiques » de la notion : même si une position institutionnelle $\hat{\imath} = (I, p)$ ou une personne $\hat{\imath} = x$ ne connaît, à un instant donné, qu’un ensemble limité d’objets – c’est son *univers objectal*, qu’on peut noter $\Omega(\hat{\imath}, ŧ) \overset{\text{def}}{=} \{o \mid R(\hat{\imath}, o, ŧ) \neq \emptyset\}$ –, le chercheur en didactique ξ doit être attentif, par delà les séparations « disciplinaires » et autres, à tout objet potentiellement pertinent o et s’efforcer de « construire » son rapport $R(\xi, o, ŧ)$ à cet objet. Par principe, ξ ne saurait *ignorer définitivement aucun objet possible*. Concrètement, le nombre d’objets qui existent pour ξ comme *éventuellement* pertinents à propos de l’étude d’une question Q donnée semble devoir être très supérieur à ce qu’il est ordinairement dans d’autres approches du didactique.

Sur cette « floraison » des objets, la TAD rejoint partiellement la *phénoménologie* d’Edmund Husserl (1859-1938), à laquelle, ici, je me réfèrerai de façon fort succincte, en citant d’abord

---

[59] Notons tout de même que la TAD ne saurait confondre « objet » et « sujet ». Tout est objet, nous l’avons dit, et donc toute personne x est un objet. Mais un tel objet – une personne – est assujetti, simultanément et successivement, à une foule de positions institutionnelles dont elle donc chaque fois l’un des sujets parmi d’autres.

[60] Voir à l’adresse https://www.etymonline.com/word/object.

ce très court extrait du livre de Sarah Bakewell intitulé *At the Existentialist Café* (Londres, Vintage, 2016)[61] :

> On n'aura sans doute jamais fini de décrire convenablement une tasse de café. C'est pourtant une tâche libératrice : elle nous renvoie au monde dans lequel nous vivons. Elle n'est jamais plus efficace que pour les choses que nous ne tenons généralement pas pour un matériau philosophique : une boisson, un chant mélancolique, une promenade, un coucher de soleil, une atmosphère de malaise, une boîte de photos, un moment d'ennui. Elle rétablit ce monde personnel dans sa richesse, situé à portée de notre regard mais généralement pas mieux perçu que l'air. (p. 71)

Le passage ci-après du livre de Sarah Bakewell explicite la notion d'*intentionalité* empruntée par Husserl à Franz Brentano (1838-1917), dont Husserl suivit les cours (à l'instar de Sigmund Freud d'ailleurs) :

> Husserl avait repris cette idée de son vieux professeur Franz Brentano, lors de son séjour à Vienne. Dans un bref paragraphe de son livre *Psychologie du point de vue empirique,* Brentano nous propose d'approcher l'esprit au niveau de ses « intentions » – un terme trompeur qui peut faire croire à des fins délibérées. il signifie en fait une accession générale ou une prolongation, de la racine latine *in-tend*, qui veut dire s'étendre vers ou dans quelque chose. Selon Brentano, ce « tendre vers » les objets est ce que notre esprit fait tout le temps. Nos pensées sont invariablement *de* ou *à propos de* quelque chose, écrivit-il : « dans l'amour, [c'est] quelque chose qui est aimé ; dans la haine, quelque chose qui est haï [...] ; dans le jugement, quelque chose qui est admis ou rejeté ». Même lorsque j'imagine un objet qui n'est pas présent, ma structure mentale est encore dans 1'« à propos » ou 1'« appartenance à ». Si je rêve qu'un lapin blanc me dépasse en vérifiant sa montre à gousset, je suis en train de rêver *de* mon lapin de rêve fantastique. Si je contemple le plafond en tentant de donner du sens à la structure de la conscience, je suis en train de penser *à propos* de la structure de la conscience. Sauf dans le sommeil le plus profond, mon esprit est toujours appliqué dans cet « à propos » : il possède 1'« intensionnalité ». (pp. 73-74).

Retenons que l'intentionalité n'est pas, chez Brentano puis Husserl, ce que suggère le langage ordinaire. Pour ce qui est de l'anglais, à nouveau, voici à ce propos un extrait de l'entrée *intend* du *Dictionary of Word Origins* de John Ayto (1990) :

> **intend** [14] The Latin verb *intendere* (a compound formed from the prefix *in-* 'towards' and *tendere* 'stretch') had a variety of metaphorical meanings, some of which have come through into English. Principal among them was 'form a plan or purpose,' an extension of an earlier 'direct or 'stretch' one's thoughts towards something,' which has given English *intend* and the derived *intention* [14]. The noun *intent* [13] belongs with this group, but the adjective *intent*

---

[61] Pour faciliter la lecture, je cite ici la traduction en français due à Pierre-Emmanuel Dauzat et Aude de Saint-Loup (*Au café existentialiste*, Albin Michel, Paris, 2018). Ce passage se trouve p. 43 de l'édition originale en anglais.

[17] looks back to the earlier ‘direct one’s mind towards a particular thing,’ and *intense* [14] comes from the even more literal ‘stretched tight.’

Le sens « brentanien » – *direct one’s mind towards a particular thing* – serait ainsi premier, tandis que le sens « ordinaire » – *form a plan or purpose* – serait second.

La TAD recueille une partie au moins de cet héritage « philosophique » dans la notion même de *rapport à un objet*, $R(\hat{\imath}, o)$, et, plus complètement, *d’équipement cognitif* de $\hat{\imath}$ au temps t, à savoir $\Gamma(\hat{\imath}, t) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \{(o, R(\hat{\imath}, o, t)) \mid o \in \Omega(\hat{\imath}, t)\}$. Pour ce qui est des contenus du rapport $R(\hat{\imath}, o)$, à savoir tout ce par quoi l’instance $\hat{\imath}$ peut se rapporter à l’objet o, ses « modes intentionnels », je citerai cette indication que l’on trouve dans l’article « Intentionnalité » de *Wikipédia*[62] : « Husserl met en évidence la multiplicité des modes intentionnels qui gouvernent notre relation au monde : pensée, perception, imagination, volonté, affectivité, impression, rêve, etc. sont tous des modes différents par lesquels notre subjectivité opère. » On retrouve ici la profusion bohème des objets qui, à un moment donné, peuplent l’univers objectal $\Omega(x, t)$ d’une personne x.

Objets « naturels », objets « artificiels » ?

Quelle est pourtant, se demandera-t-on peut-être, la « substance » d’un objet ?[63] L’encyclopédie *Wikipédia* en français contient une page d’homonymie intitulée « Objet » qui intéresse à plus d’un titre notre examen de la notion d’objet en TAD[64]. Les rédacteurs indiquent d’abord ce que nous savons déjà, à savoir qu’un objet, c’est « étymologiquement “ce qui est placé devant”, c’est-à-dire tout ce qui peut être perçu ou pensé. Ainsi une couleur peut être objet de notre vue ou une personne peut être objet de notre désir ». Ils donneront à cette première définition une extension décisive qui repose toutefois sur une opposition fragile, comme ils le reconnaissent eux-mêmes :

> … certains objets sont incorporels (c’est-à-dire qu’ils ne sont pas ‘objet’ des sens) : créations de l’esprit, idéalités, concepts, fantaisies, fictions, constructions mathématiques, classes ou catégories, définitions universelles, but poursuivi, et cetera. Ces objets manquent de concrétude, mais sont, pourtant, les uns réels, les autres irréels... sans exclure une troisième catégorie d’objets : ceux qui, n’étant pas réels aujourd’hui, *peuvent* le devenir demain (une œuvre d’art, un immeuble, la concrétisation d’une démarche ou d’une procédure, par exemple), ou l’étaient autrefois. En raison du caractère complexe des notions de réalité et d’existence, il peut être difficile d’établir si un objet est réel ou non.

---

[62] Voir à l’adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Intentionnalité.

[63] Le mot *substance* vient du latin *substantia* « être, essence, existence, réalité d’une chose », lui-même dérivant de *substare* « être dessous, se tenir dessous ».

[64] Voir à l’adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Objet.

À cette amplification, ils ajoutent une distinction, qui peut sembler évidente, portant sur les objets « réels », la distinction entre objets « naturels » et objets « artificiels », le mot *objet* désignant alors « une entité (une *chose*) définie dans un espace à trois dimensions, soit naturelle, soit fabriquée par l'homme (un artefact ou un produit de fabrication industrielle), qui a une fonction précise, désignable par une étiquette verbale (un nom) ».

Nous allons revenir sur cette caractérisation, mais il nous faut encore, avant cela, entendre une autre indication des rédacteurs de cette page d'homonymie :

> Les objets des sciences, ou des disciplines académiques sont, selon l'opinion commune, des objets *naturels*. Les philosophes constructivistes prétendent que ces objets deviennent, du fait que ce sont des objets d'études et qu'ils sont mis en équation et en formulations spécifiques à l'observation ou l'usage qu'on en fait, des *créations* humaines, des inventions ou des artéfacts. Toujours est-il que chaque discipline a son objet (ou ses objets), et que le sens de ce mot, au sein d'une discipline, est relatif à celle-ci.

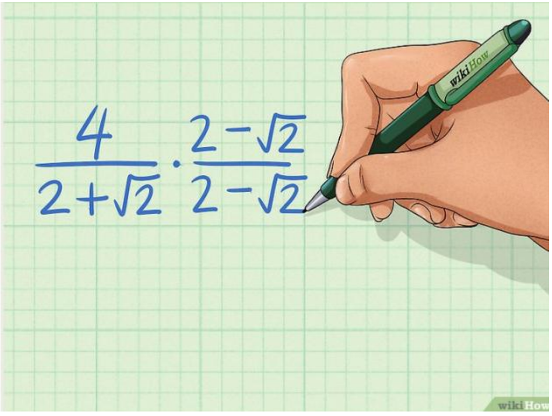
Le point de vue constructiviste ne change pas le fait qu'il y aurait des objets « naturels » et des objets « créés » par des humains, mais déplace (d'une manière que l'on peut débattre, certes) la ligne de démarcation entre les uns et les autres. Nous allons voir que tout cela peut être subsumé sous la définition d'objet que retient la TAD – on l'a vu, un objet est tout ce qui existe pour au moins une instance (personnelle ou institutionnelle) : cette montagne est tout autant un objet que la notion de produit scalaire, par exemple.

Le point de vue de la TAD : examen d'un exemple

Comment un objet se met-il à exister pour une instance ou un ensemble d'instances ? Telle est la grande question à laquelle je m'arrêterai maintenant. On va voir que, pour l'essentiel, il importe peu que l'objet soit tenu pour naturel par certaines instances et par artificiels par d'autres, ou encore qu'il soit regardé comme réel ou irréel, etc. Dans la majorité des cas, un objet est accompagné d'un nom – le nom étant lui-même un objet, bien sûr (tout « mot » est un objet).

Comme le suggère le formalisme introduit en TAD, un objet o doit être considéré relativement à une instance $\hat{\imath}$, et notamment à ces instances $\hat{\imath}$ qui connaissent o, c'est-à-dire telles que $R(\hat{\imath}, o) \neq \emptyset$. Le rapport $R(\hat{\imath}, o)$ est regardé comme la résultante de l'ensemble des praxéologies $\wp$ connues de $\hat{\imath}$ et dans lesquelles l'objet o apparaît, à quelque niveau praxéologique que ce soit – dans la définition d'un type de tâches, dans la structure ou le fonctionnement d'une technique, ou dans la technologie et la théorie associées.

➤ Je voudrais donner ici un exemple « classique ». Dans les classes de mathématiques françaises, on apprend traditionnellement à « rationaliser » le dénominateur d'une fraction comportant un radical, telle la fraction $\frac{4}{2+\sqrt{2}}$ par exemple. La technique « traditionnelle » consiste à faire ce qu'on voit sur le dessin ci-après[65] :



Faire cela, c'est « multiplier haut et bas » par l'*expression conjuguée* du dénominateur, expression obtenue en changeant $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$. L'expression conjuguée : tel est ici l'objet *o* que la technique fait rencontrer, en même temps que son nom : l'expression $2 - \sqrt{2}$ est conjuguée de l'expression $2 + \sqrt{2}$ figurant au dénominateur. On notera que le rapport à cet objet *o* est induit par un usage *unique* de l'objet en question, lequel est une sorte de *hapax* praxéologique, avant du moins qu'on ne le rencontre dans certains problèmes élémentaires de détermination de limites, comme en témoigne l'extrait suivant d'un site Web[66] :

> Posté par
> **rastarocket** 16-12-09 à 21:06
> Salut tout le monde!
> Est ce que quelqu'un pourrait m'expliquer comment fonctionnement ces choses étranges que sont les expressions conjuguées. Je suis dans le chapitre sur le nombre dérivée et les limites, et ça me bloque dans toutes mes résolutions.
> Je n'y comprend rien, à quoi ça sert? Et comment a marche?
> Voila d'avance merci
> Posté par
> prof2math 16-12-09 à 21:22
> hello
> une expression conjuguée c'est une expression qui permet d'utiliser une identité remarquable
> ex si tu prends 3x + 2, son expresssion conjuguée est 3x -2 comme cela , le produit des 2 est égal à $9x^2$ -4

[65] Voir à l'adresse https://fr.wikihow.com/supprimer-les-racines-en-dénominateur.

[66] Voir à l'adresse https://www.ilemaths.net/sujet-expression-conjuguee-324035.html.

l’utilisation est fréquente quand on veut supprimer des radicaux au dénominateur de fractions. comme on a des carrés dans l’identité remarquable, les radicaux s’enlevent. j’espère avoir été clair

Posté par

rastarocket 16-12-09 à 21:26

Donc l’expression conjuguée sert à factoriser c’est ça?

Posté par

prof2math 16-12-09 à 21:27

non pas vraiment, souvent on l’utilise pour réduire au meme dénominateur

ou pour simplifier les dénominateurs compliqués

Posté par

rastarocket 16-12-09 à 21:49

... $\rightarrow$

peut être que sur un exemple ça sera plus simple: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{0}{0}$ donc c’est indeterminée

On utilise la relation conjuguée de $\sqrt{x+4}-2$

c’est à dire $\sqrt{x+4}+2$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} [(\sqrt{x+4}-2)\ (\sqrt{x+4}-2)\ /\ x(\sqrt{x+4}+2)]$

le problème que j’ai c’est que je ne comprend pas comment arriver à cette relation la

Posté par

prof2math 16-12-09 à 21:52*

donc au numérateur tu as une forme du style (a-b) (a +b) = a² - b²

Posté par

rastarocket 16-12-09 à 22:21

je dois trouver un facteur commun et ainsi les « éliminer » pour garder seulement celui qui est utile?

De façon grossière c’est ça?

Posté par

prof2math 16-12-09 à 22:24

c’est un peu ça, le but est d’éliminer pour rendre la limite possible

Posté par

rastarocket 16-12-09 à 22:27

je vous remercie !!

Bonne soirée

On voit que, pour « Rastarocket », l’objet « factoriser » invisibilise l’objet « rationaliser ». Cela dit, il faut noter encore que, dans l’enseignement français, on n’étend pas le type de tâches considéré ici à certains autres types de tâches où il conviendrait pourtant de « rationaliser une expression ».

Dans le premier volume de son ouvrage *Algebra. An elementary text-book for the higher classes of secondary schools and for colleges* (1904), dont la première édition est de 1886, le mathématicien écossais George Chrystal (1851-1911) propose ces deux spécimens élémentaires page 196[67] :

Example 1. To express $1/(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ as a sum of rational multiples of square roots. Rationalising the denominator we obtain by successive steps,

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\times 2} = \frac{1}{4}(\sqrt{2}+2-\sqrt{6})$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$$

Example 2. Evaluate $(x^2 - x + 1) / (x^2 + x + 1)$, where $x = \sqrt{3} + \sqrt{5}$

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} = \frac{9+2\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{9+2\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{(9+2\sqrt{15})^2 - 2(9+2\sqrt{15})(\sqrt{3}+\sqrt{5}) + (\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}{(9+2\sqrt{15})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{149-38\sqrt{3}-30\sqrt{5}+38\sqrt{15}}{133+34\sqrt{15}} = \frac{(149-38\sqrt{3}-30\sqrt{5}+38\sqrt{15})(133-34\sqrt{15})}{133^2-34^2\times 15}$$

$$= \frac{437+46\sqrt{3}-114\sqrt{5}-12\sqrt{15}}{349}.$$

Dans la tradition curriculaire française, ce qui précède – la présence de plus d'un radical – n'existe à peu près pas. Des expressions telles $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$ (ou celles, plus complexes, que nous rencontrerons plus loin) seraient inconnues de nous, ou du moins très peu familières.

➤ Ce qui est remarquable, c'est que l'objet « Expression conjuguée » d'une expression de la forme $a + b\sqrt{r}$ *pourrait être évité* – l'objet o en question demeurant alors inconnu – en usant d'une *autre technique* dérivant d'un théorème élémentaire sur les fractions qu'on peut énoncer ainsi (en supposant les nombres concernés tous non nuls) : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\lambda a \pm \mu c}{\lambda b \pm \mu d}$, où les coefficients λ et μ sont quelconques.

Étant donné la fraction $\frac{a}{b}$ à rationaliser, on fabrique une fraction $\frac{c}{d}$ égale en multipliant haut et bas par $\sqrt{r}$ et on choisit alors les coefficients λ et μ de façon à faire disparaître le radical $\sqrt{r}$ du dénominateur. On a par exemple ceci :

$$\frac{4}{2+\sqrt{2}} = \frac{4}{2+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2} = \frac{-2\times 4+4\sqrt{2}}{(-2)(2+\sqrt{2})+(2\sqrt{2}+2)} = \frac{-4+2\sqrt{2}}{-1} = 4-2\sqrt{2}.$$

Pour le calcul de limites, on a semblablement :

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \times \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}} = \frac{x+4-2\sqrt{x+4}}{x\sqrt{x+4}} = \frac{x}{2x+x\sqrt{x+4}} = \frac{1}{2+\sqrt{x+4}}.$$

D'où la limite de la fraction donnée quand x tend vers 0 : $\frac{1}{2+\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

[67] Voir à l'adresse http://djm.cc/library/Algebra_Elementary_Text-Book_Part_I_Chrystal_edited.pdf.

Si cette technique avait été adoptée, la technique « classique » serait pour nous invisible et, avec elle, l'objet « expression conjuguée ».

➤ Notons encore que la raison d'être de la « rationalisation », qui peut sembler claire dans le cas de la levée d'une indétermination (même si cette raison ne l'est pas pour « Rastarocket »), semble ignorée dans l'enseignement que j'ai appelé « traditionnel ». Sur l'un des sites Web cités plus haut, on lit ainsi : « Par convention, un dénominateur (la partie inférieure d'une fraction) ne doit pas comporter de racine carrée ou être irrationnel. Lorsque le dénominateur comporte une racine carrée, vous devez le rationaliser… » Nous sommes ici à l'étiage. Par contraste, voici la note de bas de page dont Chrystal a fait suivre les exemples reproduits plus haut :

> Besides its theoretical interest, the process of reducing a rational function of quadratic irrationals to a linear function of such irrationals is important from an arithmetical point of view ; inasmuch as the linear function is in general the most convenient form for calculation. Thus, if it be required to calculate the value of $1/(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ to six places of decimals, it will be found more convenient to deal with the equivalent form $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$. (p. 196)

L'intérêt calculatoire invoqué par Chrystal n'a cependant plus guère de portée pour le simple usager d'aujourd'hui, qui dispose de moyens de calcul qui n'existaient pas du temps de George Chrystal.

➤ Je note que, au reste, une calculatrice assez puissante permet aujourd'hui de déterminer les valeurs exactes des rationnels a et b tels par exemple que $\frac{4}{2+\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$. On a en effet $a + b\sqrt{2} = \frac{4}{2+\sqrt{2}}$ et (donc) $a - b\sqrt{2} = \frac{4}{2-\sqrt{2}}$ en sorte qu'il vient

$$2a = (a + b\sqrt{2}) + (a - b\sqrt{2}) = \frac{4}{2+\sqrt{2}} + \frac{4}{2-\sqrt{2}} =_{\text{calc}} 8 = 2 \times 4$$

$$2b = [(a + b\sqrt{2}) - (a - b\sqrt{2})] \,/\, \sqrt{2} = \left(\frac{4}{2+\sqrt{2}} - \frac{4}{2-\sqrt{2}}\right) / \sqrt{2} =_{\text{calc}} -4 = 2 \times (-2).$$

On retrouve ainsi l'expression déjà obtenue : $\frac{4}{2+\sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}$.

Comment on en vient à connaître un objet

Une instance $\hat{\imath}$ connaît l'objet o parce que cet objet apparaît dans au moins une praxéologie $\wp_o$ qui appartient à l'*équipement praxéologique* de $\hat{\imath}$. On désigne par $\Omega^{✦}(\hat{\imath})$ l'*univers praxéologique* de $\hat{\imath}$, défini par $\Omega^{✦}(\hat{\imath}) \overset{\text{def}}{=} \{\wp \mid R(\hat{\imath}, \wp) \neq \emptyset\}$; et on appelle alors équipement praxéologique de $\hat{\imath}$ l'ensemble $\Gamma^{✦}(\hat{\imath})$ défini par $\Gamma^{✦}(\hat{\imath}) \stackrel{\text{def}}{=} \{(\wp, R(\hat{\imath}, \wp)) \mid \wp \in \Omega^{✦}(\hat{\imath})\}$[68]. On a évidemment $\Omega^{✦}(\hat{\imath}) \subset \Omega(\hat{\imath})$ et $\Gamma^{✦}(\hat{\imath}) \subset \Gamma(\hat{\imath})$. L'équipement praxéologique $\Gamma^{✦}(\hat{\imath})$ doit être regardé comme « partie génératrice » de l'équipement cognitif $\Gamma(\hat{\imath})$: pour tout objet o, le rapport $R(\hat{\imath}, o)$ émerge des rapports $R(\hat{\imath}, \wp)$, où $\wp \in \Omega^{✦}(\hat{\imath})$ est une praxéologie qui implique cet objet o, à quelque niveau praxéologique que ce soit.

En ce point, une précision importante doit être explicitée. Je reprends pour cela l'exemple de l'expression conjuguée. Une personne x peut connaître cet objet parce que, *hic et nunc*, x pratique, comme élève ou comme professeur, la technique de rationalisation vue plus haut et donc la praxéologie $\wp$ dont elle est partie intégrante. Mais on peut connaître une praxéologie $\wp$ autrement qu'en la pratiquant : nombre de personnes par exemple « connaissent » une praxéologie et les objets qu'elle met en jeu en voyant ou même en apercevant sa mise en œuvre par d'autres personnes. Le rapport $R(\hat{\imath}, \wp)$ ne dit rien a priori à cet égard. Lorsque $\hat{\imath}$ est une position institutionnelle, il se peut, certes, que les sujets de $\hat{\imath}$ « pratiquent » $\wp$. Mais si $\hat{\jmath}$ est une position où $\wp$ ne se pratiquent pas, et $R(\hat{\jmath}, R(\hat{\imath}, \wp)) \neq \emptyset$ (parce qu'une partie de l'activité de $\hat{\imath}$ est « visible » depuis $\hat{\jmath}$), il se peut que l'on ait $R(\hat{\jmath}, o) \neq \emptyset$, c'est-à-dire que, d'une certaine façon, les sujets de $\hat{\jmath}$ connaissent o. C'est ainsi que nous connaissons tous la Reine d'Angleterre, que tous les Français connaissaient Johnny Halliday, que tous les Italiens connaissent – je crois – Gianna Nannini, que le monde entier connaît Pablo Neruda, etc. En résumé, le fait que l'on connaisse un objet o ou en particulier une praxéologie $\wp$, c'est-à-dire que l'on ait $R(\hat{\imath}, o) \neq \emptyset$ ou $R(\hat{\imath}, \wp) \neq \emptyset$, ne dit pas *comment* on connaît o : le rapport $R(\hat{\imath}, o)$ *doit chaque fois être étudié de façon spécifique*. Il s'agit là, bien sûr, d'une question centrale en didactique. Mais il y a cependant une question associée qui semble plus encore mystérieuse.

Comment on en vient à ne pas connaître un objet

La question annoncée est celle-ci : pourquoi tel objet o n'existe-t-il pas pour telle instance $\hat{\imath}$? Pourquoi arrive-t-il que l'on ait $R(\hat{\imath}, o) = \emptyset$? Cela semble aller de soi : l'instance $\hat{\imath}$ n'a sans doute jamais « croisé » l'objet o. Ou bien une telle rencontre a eu lieu mais s'est effacée de la mémoire de $\hat{\imath}$.

Ce sont là des cas apparemment « faciles ». Sauf lorsque l'on croit constater que $R(\hat{\imath}, o) = \emptyset$ *en dépit* de tentatives répétées pour faire exister o pour $\hat{\imath}$. L'apprentissage, si l'on peut dire, ne « prend » pas, et on peut alors se demander pourquoi. Le cas sur lequel je voudrais m'arrêter plus particulièrement est celui dans lequel il semble que $\hat{\imath}$ ne « repère » pas l'existence de o, $\hat{\imath}$

[68] $\Gamma^{✦}(\hat{\imath})$ n'est pas autre chose que ce que, avec les notations de la séance 1, on écrirait $\pi(\hat{\imath})$.

paraissant « ignorer » *o*. À cet égard l'examen du verbe anglais *to ignore* est intéressant. L'*Online Etymology Dictionary* lui consacre cette notice[69] :

> **ignore (v.)** 1610s, "not to know, to be ignorant of," from French *ignorer* "be unaware of" (14c.), or directly from Latin *ignorare* "not to know, be unacquainted; take no notice of, disregard" (see **ignorant**). The original sense in English is obsolete. Sense of "pass over without notice, pay no attention to" in English first recorded 1801 (Barnhart says "probably a dictionary word"), and OED indicates it was uncommon before c. 1850.

Comme on le voit, le sens « ne pas savoir », bien vivant en français, serait en anglais « obsolète ». Le sens moderne et actuel en anglais de *to ignore* est celui de « ne pas voir », « ne pas considérer », « ne pas prêter attention », comme lorsque l'on dit « Il m'a ignoré ». Or, c'est cela que pourraient dire, s'ils étaient doués de la parole, nombre d'objets *o* à propos de nombre d'instances *î* : souventes fois, ce n'est pas que *î* n'ait pas « croisé » l'objet *o*, c'est que, le croisant, *î* l'a ignoré, comme si *o* n'existait pas, le rapport *R*(*î*, *o*) demeurant alors étonnamment vide.

➤ Je donnerai de cela un type d'exemples qui m'est cher. Dans les médias audiovisuels français, le nom du quotidien britannique *The Guardian* est très souvent prononcé « gOUardian », comme il en va avec les mots français *gouache*, *gouaille*, etc. Ici, l'objet *o* qui semble être invisible pour beaucoup, c'est la prononciation correcte du mot en anglais, que rappelle, entre mille autres sources, le tout début de l'article de *Wikipédia* consacré à ce fleuron de la presse d'outre-Manche[70] : « ***The Guardian*** /ðə ˈɡɑːdɪən/ (litt. "Le Gardien" en anglais) est un journal d'information britannique fondé en 1821… »

De la même façon, la prononciation correcte en espagnol du prénom *Miguel* semble invisible à nombre de locuteurs français, qui prononcent obstinément « MigOUel »[71], etc. Comment analyser la chose ? On a ici une *tâche*, spécimen d'un *type* consistant à prononcer « en français » un nom « étranger », en l'espèce espagnol. L'exemple de *guardian* nous suggère cependant que c'est le caractère « étranger » (i.e., « non français ») qui semblerait importer d'abord. La technique inventée – ou adoptée – consiste à *prononcer* la lettre *u* qui apparaît dans le nom, et à la prononcer « ou ». Comment ce geste technique est-il justifié ?

---

[69] Voir à l'adresse https://www.etymonline.com/word/ignore.

[70] Voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/The_Guardian.

[71] La notice « Miguel » de Wikipedia en allemand commence ainsi : « **Miguel** (span. [miˈɣɛl], port. [miˈɣɛɫ]) ist die spanische und portugiesische Form des männlichen Vornamens Michael. Die katalanische Variante des Namens ist Miquel. » Voir à l'adresse https://de.wikipedia.org/wiki/Miguel.

On trouve sur Internet une page (parmi d'autres) qui suggère *la* réponse[72]. Un intervenant, Shmandrake, y pose la question suivante :

> Quelqu'un peut-il me dire comment on prononce le prénom Miguel en espagnol ? Est-ce « miguel » ou « migouel » ? Y a-t-il une différence avec la prononciation argentine ?

Un « savant » (mais qui connaît ses limites…), Jnoxen, répond :

> Le *u* se prononçant *ou*, il semble que la bonne prononciation soit MigOUel.
> Je ne connais pas la prononciation argentine.

L'affirmation de Jnoxen, fausse, sera rectifiée dans l'échange éclairant qui suit :

> **Shmandrake**
> Merci pour votre réponse. Pourtant, on m'a dit qu'en Espagne, ce pronom se prononce « miguel » à la française.
>
> **Julien Élie**
> N'étant pas espagnol, je ne peux pas l'affirmer. Mais il me semble avoir entendu « Miguel » prononcé à la française (du côté de Barcelone où j'avais travaillé pendant deux mois ; peut-être est-ce une prononciation en catalan, je ne sais pas).
>
> **Barnabé**
> Oui, « Miguel » se prononce « à la française ». Le *u* est là après le *g* pour ne pas que cela se prononce « mijel ».
>
> **subaquatic**
> Ce prononce « Miguel » comme en français, pas de « ouel » j'en suis sûr à 100 car je me suis fait reprendre des tas de fois pour ça par des espagnols ;-).
>
> **goldo**
> on ne prononce jamais MIGOUEL et ça dans n'importe quel pays d'amerique latin ou en espagne
> je viens d'Uruguay et l'espagnol est la langue natale
> chaque fois que j'entends des gens dire migouel j'ai mal aux oreilles.

Techniquement, notons que le débat *n'est pas* entre « migOUel » (\miˈɣuɛl\) et « migUel » (\miˈɣɥɛl\), et qu'il n'y a pas non plus débat entre « migUel » (\miˈɣɥɛl\) et « miguel » (\miˈɣɛl\). Chose révélatrice, la prononciation « miguel » (\miˈɣɛl\) est désignée comme étant la prononciation « à la française », ce qui est oublier le verbe français *arguer*, dont la prononciation correcte est « argUer » (\aʁ.gɥe\), et non \aʁ.ge\, au point que l'on a proposé de l'écrire *argüer* pour rappeler que « le *u* se prononce »[73].

[72] Voir à l'adresse https://fr.lettres.langue.espagnole.narkive.com/Woan4iii/miguel.

[73] Voir à l'adresse https://fr.wiktionary.org/wiki/arguer.

La désignation de la prononciation « miguel » (\miˈɣɛl\) comme prononciation « à la française » montre ce qui semble bien être ici l'élément technologique clé, qu'on peut reconstituer ainsi : « Un prénom *espagnol* ne saurait se prononcer "à la française" ; il se prononce donc autrement. Comme la lettre *u* se prononce "ou" en espagnol, ce ne peut être que "migOUel" (\miˈɣuɛl\). » Notons que nombre de présentations élémentaires de la prononciation de l'espagnol précisent imprudemment que, en espagnol, « toutes les lettres se prononcent », sauf la lettre *h* ajoute-t-on fréquemment[74]. S'il en était ainsi, le choix serait entre \miˈɣɥɛl\ et \miˈɣuɛl\, la prononciation correcte (\miˈɣɛl\) étant a priori exclue ! La règle « complète » semble être en réalité celle que donne par exemple le *Wiktionnaire*[75] :

> En espagnol, toutes les lettres se prononcent sauf :
>
> - le *u* dans les syllabes *gue*, *gui*, *que*, *qui* hormis s'il porte un tréma : *vergüenza* ;
> - le *h* muet.

➤ Ce qui précède montre que nous sommes en face d'une praxéologie $\wp$ presque « complète » : $\wp = [T\ /\ \tau\ /\ \theta\ /\ \ldots]$. Mais que dire ici de la théorie Θ, qui remplirait la place que je viens de laisser vide ? Deux éléments théoriques semblent particulièrement insistants. Le premier « axiome » théorique peut s'énoncer ainsi (attention, ce n'est là un truisme qu'en apparence) : « Le français est la langue des Français, l'espagnol des Espagnols, etc. » La pierre de touche du « parler français » (respectivement, du « parler espagnol », etc.), c'est le parler *des* Français (resp., *des* Espagnols, etc.)[76]. De là que l'intervenant Jnoxen, sûr que le prénom *Miguel* se prononce MigOUel en espagnol (il ne voit pas comment il pourrait en être autrement), ne puisse dire ce qu'il en est *en Argentine* (car, selon le premier axiome ci-dessus, les Argentins devraient parler… l'argentin). De même, Julien Élie n'est pas sûr de ce qu'il avance à propos de la prononciation du prénom Miguel *parce qu'il n'est pas espagnol* : « N'étant pas espagnol, je ne peux pas l'affirmer », écrit-il de façon consistante. Semblablement, s'il a entendu prononcer « Miguel » (et non MigOUel ou, bien sûr, MigUel) près de Barcelone, ne serait-ce pas là une prononciation « catalane » du prénom (le catalan étant… la langue des Catalans) ?

Le plus notable peut-être est le propos de « goldo » (qui est, lui, hispanophone) : pour contrebattre des croyances idiotes (la prononciation MigOUel lui fait « mal aux oreilles »), après avoir « avoué » qu'il est originaire d'Uruguay (où, d'après le même axiome, on devrait

[74] Voir à l'adresse https://bit.ly/2SaN10V.

[75] Voir à l'adresse https://fr.wiktionary.org/wiki/Annexe:Prononciation/espagnol.

[76] Il y a, en consonance avec cet élément théorique, un autre axiome, vivace dans la culture de la société française, de nature politique au sens fort, qu'on peut exprimer par la devise : *Une nation, une langue, un État*, les trois étant indissociables.

donc parler… « l'uruguayien »), « goldo » précise qu'en Uruguay l'espagnol est la « langue natale », qualificatif qui pourrait donner lieu à commentaire – l'espagnol ne serait pas « vraiment » « la langue de l'Uruguay » (puisque c'est la langue de l'Espagne !) mais « la langue *natale* de l'Uruguay ».

Un second élément théorique est plus implicite mais non moins prégnant. C'est l'axiome d'*étrangèreté linguistique* : le français n'est pas l'espagnol, l'espagnol est une langue « étrangère » et ne saurait donc être prononcé « à la française » – d'où l'incrédulité et les hésitations des intervenants cités plus haut devant ce fait qui semble à certains incontestable : les hispanophones prononcent \miˈɣɛl\, *« à la française »*. Paradoxalement, cet axiome technologique implique qu'un locuteur francophone « a le droit » de prononcer les mots étrangers « à la française » puisque, *sauf exception*, leur prononciation serait radicalement étrangère…

Voir ne suffit pas : encore faut-il désirer !

L'exemple de « Miguel » montre un phénomène fondamental : lorsqu'un objet *o* est invisible pour une instance $\hat{\imath}$, c'est que l'équipement praxéologique de $\hat{\imath}$ contient une praxéologie $\wp$ qui, si bizarrement chantournée soit-elle, *invisilise* l'objet *o*[77]. Au cas de Miguel nous pouvons ajouter celui de « l'expression conjuguée », vu plus haut : la visibilité de la technique « standard » utilisant l'expression conjuguée empêche de voir la technique « nonstandard » que j'ai sommairement présentée. D'une manière générale, devant de tels cas d'invisibilité, on doit faire l'hypothèse de l'existence d'une praxéologie « standard » $\wp_s$, souvent routinisée et même automatisée, qui fait sourdement obstacle à la reconnaissance de l'objet *o* considéré et qui maintient son « invisibilité ».

Cela soulève un immense problème de didactique. Que font, que peuvent faire les instances « enseignantes » $\hat{\imath}$, celles qui souhaitent diffuser une praxéologie $\wp$ auprès d'instances $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$,

[77] Après avoir écrit ces lignes, je suis tombé sur un exemple typique, entendu dans l'émission « Les Grosses têtes » du mardi 11 février 2020. L'animateur Laurent Ruquier y parle d'un certain « Miguelito » (le personnage du Docteur Miguelito Lovelace de la série télévisée *Les Mystères de l'Ouest*, joué par l'acteur de petite taille Michael Dunn [1934-1973]). Sa prononciation du prénom – MigOUeli***to*** – est doublement fautive, puisqu'il place l'accent tonique sur la dernière syllabe. L'une des « Grosses têtes », Marcela Iacub, d'origine argentine, le reprend de manière réflexe ; il se corrige quant à l'accent tonique, mais n'entend pas la correction portant sur la syllabe *guel* et prononce donc alors MigOUe***li***to. En d'autres termes, s'il entend la deuxième correction, la première reste pour lui « invisible » (en l'espèce, inaudible). Voir à l'adresse https://www.rtl.fr/culture/medias-people/les-grosses-tetes-a-strasbourg-7800050551 (à partir de 26 min et jusqu'à 28 min environ).

etc. ? Il s’agit là d’une question cruciale en didactique, à propos de laquelle je ne ferai ici que quelques remarques simples.

Une première stratégie consiste sans doute à… ne pas voir le phénomène d’invisibilisation, en ignorant les propriétés différentielles de réceptivité de $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$, etc., vis-à-vis de la praxéologie $\wp$, en ignorant donc les questions d’*écologie praxéologique* que soulèveraient l’intégration de $\wp$ dans l’équipement praxéologique de $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$, etc.

Une deuxième stratégie consiste à limiter la diffusion de $\wp$ à des instances $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$, etc., dont on puisse penser qu’elles sont praxéologiquement « vierges » concernant $\wp$. C’est ce qui se produit avec la plupart des matières scolaires, avec des exceptions – pour le sport, la musique, notamment, certains élèves ont déjà tout un bagage qui parfois fait obstruction. Les mathématiques, à partir du collège, du moins, sont très largement dans ce cas « favorable ». Mais on voit alors où est le point faible : que $\wp$ soit absent de l’équipement praxéologique $\Gamma^{\text{✦}}(\hat{\imath})$ en général *ne suffit pas*. Encore faut-il qu’existe en $\hat{\imath}$ une *envie* de $\wp$ (ou de quelque partie de $\wp$), pour quelque raison que ce soit ; bref qu’il y ait en $\hat{\imath}$ un *désir* de $\wp$[78]. Ce désir peut être motivé par la conscience du *besoin* de $\wp$, qui se traduit alors par une *demande* si résignée soit-elle.

Ce schéma s’applique en règle générale dans les formations à une profession, $\hat{\imath}$ étant alors la position de formé ou encore l’une des personnes qui occupent cette position. Plus généralement, $\hat{\imath}$ peut être une *position de projet*, la praxéologie $\wp$ apparaissant aux personnes x qui viennent à l’occuper comme indispensable (ou au moins utile) au projet Π poursuivi. Dans cette même perspective, le « désir de $\wp$ » est susceptible d’émerger dans une *pédagogie de l’enquête* – et donc dans le *paradigme du questionnement du monde*, dans lequel le problème de l’invisibilisation des objets doit pouvoir être posé autrement.

« Pourquoi ces notes ? »

Je voudrais terminer ces première remarques en m’arrêtant brièvement sur un type de situations que j’ai dû affronter depuis presque trente ans en tant que « formateur » d’enseignants de mathématiques, mais aussi en tant que chercheur en didactique.

---

[78] Le mot *envie* que j’emploie ici est foncièrement ambigu. Selon le *Dictionnaire historique de la langue* française (1993), « à partir du milieu du XIIe s., le mot est employé dans les deux acceptions aujourd’hui en usage : *envie* se dit (v. 1155) d’un sentiment de jalousie haineuse devant les avantages d’autrui, d’où le proverbe *il vaut mieux faire envie que pitié*, et signifie à la même date « désir (de qqch.) »… C’est ce dernier sens que je retiens, même si le motif d’un tel désir peut être l’envie au sens premier du terme.

J'imagine ici un formateur *y* qui doit tenter d'instruire des élèves professeurs *x*, que je suppose « sérieux ». Son « cours » (au sens large : fragments de séminaires, de conférences, de travaux dirigés, voire de travaux pratiques) a la structure d'un discours dans lequel s'articule du « faire ». Je suppose que *y* s'adresse oralement aux *x*, qui prennent des notes. Se pose à ces *x* ce problème : *que noter ?* L'observation semble montrer que les étudiants *x* notent de préférence… ce qui leur paraît « notable » : une expression qui leur semble bien tournée ou, du moins, « importante », un calcul assez bref mais regardé comme non entièrement trivial, un mot inconnu que le formateur prend soin d'écrire au tableau. Selon de tels critères de « tri », beaucoup du discours du formateur ressemble à de l'eau qui leur passerait entre les doigts : il n'en restera quasiment rien dans les notes des étudiants.

Tout se passe – ou semble se passer, depuis la position qu'occupe *y* – comme si rien – ou si peu ! – ne valait d'être retenu, étudié, médité, mémorisé – comme s'il se fût agi d'un rêve qui s'efface de notre souvenir au réveil. C'est là l'expérience qui a été la mienne à la rentrée 1991 quand, avec Odile Schneider, j'eus à « former » une première promotion d'élèves professeurs, fraîchement certifiés ou agrégés de mathématiques. Très vite, je pris la décision de *rédiger* les notes préparatoires à chacune des séances hebdomadaires, et cela afin de disposer ainsi d'un *texte* qui survive à l'évanescence de la parole et qui, même s'il n'était pas étudié par ces *x* – car, alors, je n'y croyais guère, je l'avoue –, vienne témoigner silencieusement d'un fait qui se fût énoncé ainsi : « Voyez, voici la matière, qui n'est pas vide, qui n'est pas rien, qui mérite examen, de la séance vécue ensemble l'autre jour;.. » Je pris à ce moment-là une habitude qui ne m'a pas quitté depuis. D'où les présentes notes, que vous pouvez avoir *envie* de lire.

II. Quel théorème ?

Une « question de recherche »

Je reviens ici à la question Q_∂ posée dès la séance 2, dont je reproduis à nouveau l'énoncé :

> Q_∂. *Un problème P étant donné, quels sont les* outils *qu'un instance î peut mobiliser pour le résoudre et quels* usages *l'instance î peut-elle faire de ces outils ? Quelles sont les* conditions et contraintes *sous lesquelles î est amenée à opérer qui, étant donné P, déterminent le choix des outils et de leurs usages ?*

Avant de retrouver brièvement le problème des chaussettes, je m'arrêterai sur un « problème » rencontré un peu plus haut : rationaliser l'expression $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, ce qui est une tâche assurément problématique au secondaire français, où ce type de tâches est, traditionnellement, inconnu.

Quelle praxéologie ?

Si l'on ne regarde que la réalisation de ce type de tâches telle que la montre l'ouvrage de Chrystal, on peut croire apercevoir une technique fort proche de la technique que nous connaissons pour le type de tâches « classique » où le dénominateur ne comporte qu'*un* radical. Revoici en effet les deux exemples traités par Chrystal :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{2\times 2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}.$$

$$\frac{9+2\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{9+2\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{9+2\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{9+2\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \times \frac{(9+2\sqrt{15})-(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(9+2\sqrt{15})-(\sqrt{3}+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{(9+2\sqrt{15})^2 - 2(9+2\sqrt{15})(\sqrt{3}+\sqrt{5}) + (\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}{(9+2\sqrt{15})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2} = \frac{149-38\sqrt{3}-30\sqrt{5}+38\sqrt{15}}{133+34\sqrt{15}}$$

$$= \frac{(149-38\sqrt{3}-30\sqrt{5}+38\sqrt{15})(133-34\sqrt{15})}{133^2-34^2\times 15} = \frac{437+46\sqrt{3}-114\sqrt{5}-12\sqrt{15}}{349}$$

On a le sentiment que l'auteur dispose d'une *technique* dont nous percevons au moins un élément clé : l'emploi « judicieux » de l'égalité $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ pour « faire disparaître » les racines carrées du dénominateur. Mais rien ne semble tranparaître – hormis l'identité algébrique que je viens de mentionner – de ce qui pourrait être la *technologie*, pour Chrystal, de cette technique supposée – que contient-elle au juste, et appuyée sur quels préceptes théoriques éventuels ? En fait, les deux exemples de Chrystal viennent à la fin d'un développement serré *de quelque huit pages* (pp. 189-196) intitulé *Rationalising factors*.

Une enquête dans l'enquête

Avant d'aller plus loin à cet égard, je voudrais m'arrêter sur un détail de cette « enquête praxéologique ». Je me suis demandé comment on disait, ou on devait ou pouvait dire, *rationalising factor* en français. Or il me semblait n'avoir jamais entendu une telle expression dans notre langue – du moins dans le français de France. Je ne me souvenais pas non plus, je l'avoue, avoir rencontré le problème de « chasser les radicaux du dénominateur » dans des fractions comme $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ou, à plus forte raison, $\frac{9+2\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{9+2\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$! J'ai donc tenté de savoir jusqu'où l'enseignement français avait pu aller en la matière. Voici quelques résultats de ma petite enquête sur ce point.

➤ Dans l'édition de 1914 des *Leçons d'algèbre élémentaire* (dont la première édition avait paru quatorze ans plus tôt), Carlo Bourlet (1866-1913) livre un élément technologique bien connu, déjà rencontré plus haut :

Lorsque le dénominateur d'une expression irrationnelle est de la forme A ± $\sqrt{\text{B}}$ ou $\sqrt{\text{A}}$ ± $\sqrt{\text{B}}$, il suffit de multiplier les deux termes de la fraction par la quantité conjuguée du dénominateur pour rendre ce dénominateur rationnel. (p. 133)

Notons qu'on ne considère ici une expression irrationnelle qu'en tant qu'elle est le dénominateur d'une fraction – le passage cité de l'ouvrage de Bourlet se trouve dans la deuxième section du chapitre VII (*Fractions algébriques. Fractions indéterminées*) intitulée *Fractions irrationnelles* (la première section étant, elle, intitulée *Fractions rationnelles*). En France, donc, on ne rationalise pas une expression, on rationnalise le dénominateur d'une fraction – ce qui, en un sens, revient au même, mais entraîne quelques conséquences sur lesquelles je vais revenir.

➤ Dans le tome I, intitulé *Le calcul algébrique* et destiné aux classes de troisième, du *Cours d'algèbre* de R. Estève et H. Mitault (1933), on trouve ce éveloppement intitulé « Rendre rationnel le dénominateur irrationnel d'une fraction » :

On a par exemple $\dfrac{a}{b+\sqrt{c}} = \dfrac{a(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})} = \dfrac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$. De même : $\dfrac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \dfrac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \dfrac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$.

Les expressions $b-\sqrt{c}$ et $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ sont appelées *expressions conjuguées* de $b+\sqrt{c}$ et $\sqrt{b}-\sqrt{c}$.

Ainsi on a : $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$. (p. 66)

Ces indications sont complétées par de rares exercices, qui méritent cependant un coup d'œil :

Rendre rationnel le dénominteur de chacune des fractions suivantes :

135. $\dfrac{5}{2-\sqrt{3}}, \dfrac{1}{3+\sqrt{5}}, \dfrac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$.

136. $\dfrac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}, \dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^3}, \dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{2}}$.

137. Simplifier l'expression $\dfrac{3(5-\sqrt{7})}{2} + \dfrac{9}{5+\sqrt{7}} + 2\sqrt{7}$. (p. 113)

On voit apparaître ici des types d'expressions (et donc des types de tâches) non encore rencontrés en suivant les auteurs dans leur développement « théorique » précédent. Chaque fois, cependant, on voit que la technique de base s'adapte aisément (je laisse le lecteur s'en aviser), hormis peut-être dans le cas de l'expression $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ – que nous avons appris à « traiter » en suivant Chrystal :

$$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{7})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{7})} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{7})}{2\sqrt{10}} = \frac{3(5\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\sqrt{70})}{20}$$

$= \frac{3}{4}\sqrt{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5} - \frac{3}{20}\sqrt{70}.$

(On peut aujourd'hui, à coût quasi-nul, procéder à une vérification numérique du résultat obtenu. Ainsi, avec la calculatrice de Google, on a 3 / (sqrt(2) + sqrt(5) + sqrt(7) = 0.47649052522 et (0.75 * sqrt(2)) + (0.3 * sqrt(5)) – (0.15 * sqrt(70)) = 0.47649052522.)

On aura noté que, en fait, le choix de rassembler $\sqrt{5}$ et $\sqrt{2}$ (comme je l'ai fait ici) simplifie notablement le travail, puisque on aurait eu sinon quelque chose comme ceci :

$$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5}-(\sqrt{7}+\sqrt{2}))}{(\sqrt{5}+(\sqrt{7}+\sqrt{2}))(\sqrt{5}-(\sqrt{7}+\sqrt{2}))} = \frac{3(\sqrt{5}-(\sqrt{7}+\sqrt{2}))}{5-(9+2\sqrt{14})} = \ldots$$

L'exercice proposé – rationaliser le dénominateur de la fraction $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ – est ainsi en fait tout proche des exercices « standards », où le dénominateur est de la forme $b \pm \sqrt{c}$ ou $\sqrt{b} \pm \sqrt{c}$: la généralisation à plus de deux termes n'est donc pas véritablement accomplie.

Quelle praxéologie ? **(suite)**

J'étais parti du problème de la traduction en français de l'expression *rationalising factor* : je vais y revenir. Définissons d'abord cette expression (en nous inspirant de Chrystal, 1904, p. 190) : étant donné une expression Q contenant le terme $\sqrt{a}$, l'expression R est un *rationalising factor* de Q relativement à $\sqrt{a}$ si l'expression QR ne contient plus $\sqrt{a}$. Cela étant, ce que Chrystal démontre est le théorème clé suivant, que je reprends verbatim :

> If P is the sum of any number of square roots, say $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$, …, a rationalising factor Q is obtained for P by multiplying together all the different factors that can be obtained from P as follows: —Keep the sign of the first term unchanged, and take every possible arrangement of sign for the following terms, except that which occurs in P itself. (p. 195)

Il s'agit là du résultat technologique essentiel, que je crois personnellement n'avoir jamais rencontré dans le cadre français. D'après ce thorème, si la somme comporte n termes, le *rationalising factor* indiqué comporte donc $2^{n-1} - 1$ facteurs. Voici un exemple donné par Chrystal lui-même (p. 193), celui de l'expression $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}$. D'après ce qui précède, un *rationalising factor* de $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}$ comporte $2^{4-1} - 1 = 7$ facteurs et s'écrit ainsi :

$$(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{4})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{4})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{4})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}).$$

Mais l'auteur souligne alors ceci (p. 193) : « In actual practice it is often more convenient to work out the rationalisation by successive steps, instead of using at once the factor as given by the rule. » Considérons ainsi l'un des exercices proposés par l'auteur, l'exercice 42 page 200, où l'on doit rationaliser l'expression $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{4} - \sqrt{6}$. Je travaillerai ici « à la française » en rationalisant à pas comptés le dénominateur de la fraction $\frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{4} - \sqrt{6}}$. On a :

$$\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{6}} = \frac{4}{(2+\sqrt{5})-(\sqrt{6}-\sqrt{3})} = \frac{4[(2+\sqrt{5})+(\sqrt{6}-\sqrt{3})]}{[(2+\sqrt{5})-(\sqrt{6}-\sqrt{3})][(2+\sqrt{5})+(\sqrt{6}-\sqrt{3})]}$$

$$= \frac{4[(2+\sqrt{5})+(\sqrt{6}-\sqrt{3})]}{(2+\sqrt{5})^2-(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2} = \frac{4[(2+\sqrt{5})+(\sqrt{6}-\sqrt{3})]}{9+4\sqrt{5}-(9-6\sqrt{2})} = \frac{4[(2+\sqrt{5})+(\sqrt{6}-\sqrt{3})]}{4\sqrt{5}+6\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4[(2+\sqrt{5})+(\sqrt{6}-\sqrt{3})](4\sqrt{5}-6\sqrt{2})}{(4\sqrt{5}+6\sqrt{2})(4\sqrt{5}-6\sqrt{2})} = \frac{4[(2+\sqrt{5})+(\sqrt{6}-\sqrt{3})](4\sqrt{5}-6\sqrt{2})}{8}$$

$$= \frac{1}{2}(2-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6})(4\sqrt{5}-6\sqrt{2}) = 10-6\sqrt{2}-6\sqrt{3}+4\sqrt{5}+3\sqrt{6}-3\sqrt{10}-2\sqrt{15}+2\sqrt{30}.$$

Notons en passant que nombre de lecteurs de ces lignes n'ont sans doute jamais « vu » un objet tel que l'expression obtenue.

Voilà donc certains des éléments de base de la praxéologie exposée par Chrystal. (Bien entendu, les différents *moments didactiques* seraient pour nous à travailler encore, notamment le moment du *travail de la technique*.)

***Une enquête dans l'enquête* (suite)**

Ce qui prcède m'a conduit à la double hypothèse suivante : 1) la notion de *rationalising factor* et son emploi principal (qu'indique son nom) ont dû avoir une descendance dans les curriculums anglo-saxons actuels ; 2) cette descendance a dû peupler aussi les curriculums de cette Amérique du Nord en langue française qu'est le Canada francophone. D'où l'idée de rechercher dans ces curriculums une traduction en français de l'expression anglo-saxonne traditionnelle de *rationalising factor*.

➤ Remontons dans le temps. Voici la page 285 d'un ouvrage intitulé *College Algebra* publié à Boston en 1905 par Henry Burchard Fine (1858-1928)[79] :

RATIONALIZING FACTORS

> **Rationalizing factors.** When the product of two given radical expressions is rational, each of these expressions is called a *rationalizing factor* of the other.
>
> Thus, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b$. Hence $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ is a rationalizing factor of $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, and *vice versa*.
>
> It can be proved that every finite expression which involves *simple* radicals only has a rationalizing factor. The following section will serve to illustrate this general theorem.
>
> **Rationalizing factors of functions of square roots.** Every expression which is rational and integral with respect to $\sqrt{x}$ can be reduced to the form $A + B\sqrt{x}$, where A and B are rational and

[79] Voir à l'adresse https://bit.ly/3ajbFTe.

integral with respect to $\sqrt{x}$; and $A + B\sqrt{x}$ has, with respect to x, the rationalizing factor $A - B\sqrt{x}$ obtained by merely changing the sign of $\sqrt{x}$.

Thus, $2(\sqrt{x})^4 + 3x(\sqrt{x})^3$ may be written $2x^2 + 3x^2\sqrt{x}$. Hence this expression has the rationalizing factor $2x^2 - 3x^2\sqrt{x}$.

We may obtain a rationalizing factor of an expression which is rational and integral with respect to any finite number of square roots, as $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$, …, by repetitions of the process just explained. For we shall obtain a result which is completely rational if we multiply the given expression by its rationalizing factor with respect to $\sqrt{x}$, the product by its rationalizing factor with respect to $\sqrt{y}$, and so on.

➤ Henry Burchard propose alors l'exemple suivant :

Find the rationalizing factor of $1 + \sqrt{x} + \sqrt{y} + 2\sqrt{xy}$.

We have	$1 + \sqrt{y} + \sqrt{x}(1 + 2\sqrt{y})$.	(1)
Multiply (1) by	$1 + \sqrt{y} - \sqrt{x}(1 + 2\sqrt{y})$.	(2)
We obtain	$(1 + \sqrt{y})^2 - x(1 + 2\sqrt{y})^2$,	
or	$1 - x + y - 4xy + 2\sqrt{y}(1 - 2x)$.	(3)
Multiply (3) by	$1 - x + y - 4xy - 2\sqrt{y}(1 - 2x)$.	(4)
We obtain	$(1 - x + y - 4xy)^2 - 4y(1 - 2x)^2$.	(5)

Therefore, since (5) is completely rational, the product of (2) and (4) is the rationlizing factor of (1).

On aura noté l'orthographe américaine de l'adjectif *rationalizing*. On aura observé aussi que la démonstration du théorème d'existence, à laquelle Chrystal s'attachait si longuement, est ici simplement évoquée : le sujet a vieilli… On voit ainsi que, quelque vingt ans après la première édition du livre de Chrystal, le thème de la rationalisation et des *rationalising factors* semble bien intégré dans le texte de « l'algèbre supérieure » aux États-Unis.

➤ Qu'en est-il du Canada francophone ? À titre d'exemple, voici un document concernant le Baccalauréat en enseignement secondaire (BES) proposé aujourd'hui dans le cadre de l'Université du Québec à Chicoutimi, qui doit permettre « de former des personnes compétentes pour le secteur d'enseignement secondaire général et à la formation générale des adultes »[80]. Cette formation « offre cinq profils de sortie pour les futurs professionnels de l'enseignement : 1) français, 2) sciences et technologie, 3) mathématique, 4) univers social, 5) univers social et développement personnel ». Examinons alors, pour ce qui est du « profil mathématique », la description du cours 8ALG133 intitulé « Algèbre supérieure », proposé durant l'hiver 2020. Les objectifs de ce cours sont les suivants :

Faire acquérir un complément important de connaissances de nature algébrique permettant de compléter ce qui a été vu antérieurement au secondaire. Développer de l'assurance en ce qui

[80] Voir à l'adresse https://programmes.uqac.ca/7654/tire-a-part.

concerne des résultats d'algèbre qui se doivent d'être assimilés si l'on veut que l'enseignement dans ce domaine soit assis sur des bases solides.

Et voici les contenus du cours (les italiques sont de moi) :

> Nombres complexes. Équations de degré deux. Théorème fondamental de l'algèbre. Décomposition d'un polynôme sur les complexes, sur les réels. Division synthétique. Progressions géométrique, arithmétique, harmonique. Quelques inégalités importantes. Équations du troisième et du quatrième degré. Racines et leurs relations avec le coefficients d'un polynôme. La règle des signes de Descartes. Suites de Sturm. Rationalisation, *facteurs rationalisant*. Quantités irrationnelles. Fractions partielles. Polynômes premiers entre eux. Pgcd de deux polynômes. Algorithme d'Euclide pour deux polynômes. Théorème du binôme et théorème multinomial.

On a donc enfin, ici, la traduction cherchée : *facteur rationalisant*.

➤ Voici maintenant un extrait d'un cours écrit de l'École de technologie supérieure de l'Université du Québec, tiré du chapitre 2 de ce cours intitulé « Polynômes et fractions rationnelles »[81], et plus exactement de la section 2-4 de ce chapitre, intitulée « Rationalisation de fractions » :

> Considérons la situation suivante : après un certain calcul, vous obtenez le résultat $\frac{8}{3-\sqrt{7}}$ alors que votre copain, lui, obtient $12 + 4\sqrt{7}$. Même si cela n'est pas évident au premier coup d'œil, vous avez tous les deux le même résultat mais sous des formes équivalentes. (Prenez votre calculatrice et évaluez les 2 expressions !!)
>
> Pour comprendre pourquoi, il faut se rappeler ce qu'on a vu à la section 1-3. En effet, on évite en général de laisser au dénominateur un terme contenant des radicaux. Dans l'expression $\frac{8}{3-\sqrt{7}}$, par quel terme doit-on multiplier le numérateur et le dénominateur pour faire disparaître le radical ? En se rappelant que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, on aura
>
> $$\frac{8}{3-\sqrt{7}}\,\frac{3+\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} = \frac{24+8\sqrt{7}}{9-7} = 12 + 4\sqrt{7}.$$
>
> Le facteur $3 + \sqrt{7}$ est appelé le **facteur rationalisant**. On peut appliquer le même raisonnement à une expression algébrique fractionnaire où un radical apparaît au dénominateur. Comme plus haut, il suffitde multiplier le numérateur et le dénominateur par un même facteur rationalisant qui est obtenu en général par les produits remarquables (différence de carrés ou de cubes).

L'auteur, pourtant, ne développera pas le type de cas que nous avons en vue ici. On peut alors faire l'hypothèse que la rationalisation d'expressions à trois ou quatre termes (ou plus) se trouverait aujourd'hui un peu marginalisée.

[81] On trouvera ce chapitre 2 à l'adresse suivante : https://www.etsmtl.ca/docs/ETS/Gouvernance/Decanats-et-departements/service-enseignements-generaux/Documents/chapitre-2.

➤ Ce type d'expressions apparaît tout de même dans des demandes d'aides formulées sur Internet. On trouve ainsi cette demande[82], formulée en 2019 :

Secondary School · Math · 5 points

Find the rationalizing factor of √2 + √7 - √10

Ask for details · Follow · Report by TheMathematician 11.01.2019

Voici la réponse proposée :

Rationalising factor means, the term by which we convert irrational number to rational number . so, it means I have to choose a term by which we make (√2 + √7 - √10) is a rational number.
Let's try to solve .
(√2 + √7 - √10)(√2 + √7 + √10) = (√2 + √7)² - √10²
= 2 + 7 + 2√14 - 10
= 2√14 - 1
= √56 - 1

again, (√56 - 1)(√56 + 1) = 56 - 1 = 55
e.g., (√2 + √7 - 10)[(√2 + √7 + √10)(√56 - 1)] = 55
So, rationalising factor is (√2 + √7 + √10)(√56 + 1)
You can resolve it ,
(√2 + √7 + √10)(√56 + 1)
= √112 + √392 + √560 + √2 + √7 + √10
= 4√7 + 14√2 + 4√35 + √2 + √7 + √10
= 5√7 + 15√2 + 4√35 + √10 [ans]

On voit ici deux étapes techniques : la première fait passer de trois radicaux à un seul ; la seconde élimine le radical restant.

➤ Voici une seconde demande[83], avancée, elle, en 2018 :

What is the rationalizing factor of 1+√2+√3?

3 Answers

Goh Kim Tee
Answered May 5 2018 · Author has **6.7k** answers and **650.5k** answer views

The rationalizing factor for (1+√2+√3) is (2+√2–√6): product = 4

(i)trial factor : (1+√2+√3)(1+√2–√3)✓=3+2√2–3=2√2

(ii) revised factor : √2(1+√2–√3)✓

(iii) improved factor : (2+√2–√6)

(iii)testing it out :

(1+√2+√3)(2+√2-√6)

=2+√2–√6

+2+2√2–2√3

+2√3+√6–3√2

=4→it works !

---

[82] Voir à l'adresse https://brainly.in/question/7578786.
[83] Voir à l'adresse https://www.quora.com/What-is-the-rationalizing-factor-of-1+√2+√3.

On voit ainsi, dans les deux cas examinés, qu'il y a mise en œuvre d'une technique qui, chez les « aidants » du moins, semble bien installée. On notera en particulier la terminologie employée dans le second cas : *trial factor*, *revised factor*, *improved factor*.

➤ Je ne voudrais pas terminer sans mentionner deux questions, et donc deux enquêtes, auxquelles quelques éléments de réponse transparaissent dans ce qui précède. Tout d'abord, la question des *raisons d'être* : pourquoi vouloir rationaliser le dénominateur des fractions ? Ensuite, la question de l'*unicité* : l'écriture « rationalisée » d'une fraction est-elle unique ? Je laisse ici ces deux problèmes ouverts[84], en les proposant aux lecteurs de ces lignes.

***Une « question de recherche »* (toujours)**

Revenons alors à la question des outils et de leur usage. On voit la différence entre deux situations institutionnelles : dans une institution – le curriculum français –, il y a carence d'outils, même s'il est loisible à chacun de bricoler un semblant de technique ; dans d'autres – les curriculums anglo-américains –, des outils existent ou ont existé et l'individu peut ou non s'en emparer. On a ici une ébauche de réponse, dans le cas considéré, à la question Q_∂, que je rappelle encore :

> Un problème *P* étant donné, quels sont les *outils* qu'un instance *î* peut mobiliser pour le résoudre et quels *usages* l'instance *î* peut-elle faire de ces outils ? Quelles sont les *conditions et contraintes* sous lesquelles *î* est amenée à opérer qui, étant donné *P*, déterminent le choix des outils et de leurs usages ?

Le problème *P* est ici celui de la rationalisation de fractions dont le dénominateur comporte plus de deux termes irrationnels. Pour la position *î* d'élève en classe de mathématiques, les outils mobilisables et leurs usages dépendent essentiellement du fait que la position *î* participe de l'univers curriculaire « français » ou « anglo-américain ».

La question Q_∂ est là pour nous rappeler encore et encore que l'activité (mathématique ou autre) d'une instance *î* dépend – extrinsèquement – de la disponibilité d'outils pertinents et ne dépend qu'en second rang des propriétés intrinsèques de *î* – notamment la capacité de *î* à s'emparer des outils idoines quand ils existent et à les utiliser de façon pertinente le cas échéant, c'est-à-dire la capacité à gérer l'évolution adéquate de son équipement praxéologique, soit, *in fine*, la capacité à *apprendre* (qui dépend bien sûr des conditions et contraintes auxquelles *î* est soumis).

---

[84] Sur le problème de l'unicité, on pourra voir cependant l'étude qu'on trouvera à l'adresse suivante : http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2007/REUPapers/FINALAPP/Jaffe.pdf.

***Le problème des chaussettes* (à nouveau)**

Vous vous souvenez du problème des chaussettes, que je rappelle quand même :

> Votre tiroir à chaussettes contient 24 chaussettes, dont 12 bleues, 8 rouges et 4 vertes. Pressé par le temps, vous prenez une poignée de chaussettes sans les regarder et vous les mettez dans votre valise. Quel est le plus petit nombre de chaussettes qu'il vous faut prendre ainsi dans le tiroir pour que vous soyez sûr d'avoir avec vous deux fois deux chaussettes de même couleur (= deux paires de chaussettes) ?

Nous avons vu, lors de la séance 2, que la réponse à la question posée est $\nu = 6$. Comme j'ai eu l'occasion de l'écrire, j'ai reçu des propositions de solutions qui me paraissent éclairantes en ce qu'elles illustrent ce que je nommerai la *pénurie d'outils adéquats*.

➤ La première réponse reçue est à cet égard particulièrement suggestive. Son auteur use d'un outil inusuel en mathématiques : l'hypothèse que son héros (lui-même) « manque de bol » ou que, mû par un pessimisme foncier, il s'attend chaque fois au pire :

> Pour ce qui est du petit problème je pense avoir trouvé en adoptant la position du pessimiste dans notre société. En effet je me suis dit qu'en tirant seulement 3 chaussettes et le manque de bol qui me caractérise je n'aurais aucune paire (3 chaussettes de couleurs différentes). En tirant 4 chaussettes je suis sûr d'avoir une paire. Cinq chaussettes et le manque de bol ne me garantit pas une paire de plus car je peux tirer une chaussette de la couleur de la paire déjà obtenue. À la sixième chaussette même en etant très pessimiste je suis sûr d'obtenir la deuxième paire. Je dois donc tirer 6 chaussettes pour avoir la certitude d'avoir 2 paires.

➤ D'autres solutions procèdent, faute de mieux, par énumération de cas, comme il en va dans ce qui suit :

> Soit x le nombre de chaussettes BLEUES prélevées (parmi 12)
> Soit y le nombre de chaussettes ROUGES prélevées (parmi 8)
> Soit z le nombre de chaussettes VERTES prélevées (parmi 4)
> Soit $n = x + y + z$ le nombre total de chaussettes prélevées
> On veut deux paires *acceptables*
> Le nombre n minimal est 4
> <u>Soit $n = 4$</u>
> Dans ce cas des triplets (z, y, x) sont *acceptables* : (4, 0, 0) ; (0, 4, 0) ; (0, 0, 4) etc. mais le hasard peut aussi donner (1, 1, 2) . Donc $n = 4$ est à rejeter
> <u>Soit $n = 5$</u>
> Dans ce cas des triplets (z, y, x) sont évidemment *acceptables* (cf. plus haut)
> Le hasard peut aussi donner (1, 1, 3). Donc $n = 5$ est à rejeter
> <u>Soit $n = 6$</u>
> Y a-t-il des triplets *inacceptables* ?
> Formons tous les « *nombres zyx* » possibles avec $z + y + x = 6$
> 006 ; 015 ; 024 ; 033 ; 042 ; 051 ; 060 ;

105 ; 114 ; 123 ; 132 ; 141 ; 150 ;
204 ; 213 ; 222 ; 231 ; 240 ;
303 ; 312 ; 321 ; 330 ;
402 ; 411 ; 420 ;
Tous ces résultats sont *acceptables*
Le plus petit nombre cherché est donc $n = 6$

➤ Une troisième réponse, qui procède de même par énumération, contient en outre un commentaire que voici :

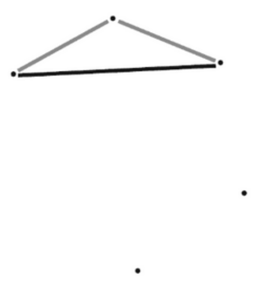
> Sauf erreur de ma part dans le dénombrement, il suffit donc de tirer un ensemble de 6 chaussettes sans que l'ordre intervienne (prise d'une poignée de chaussettes). Cela correspond à 3!, sans que je voie pour l'instant quelle modélisation mathématique autre qu'un dénombrement puisse donner plus rapidement la réponse, ni même une loi générale qui intégrerait le nombre des éléments de *B*, *R* et *V*.

Trois conclusions semblent ainsi se dessiner : 1) on parvient au résultat « juste » ; 2) on n'est pas toujours sûr de la route suivie pour parvenir jusqu'à lui ; 3) on a le sentiment que de véritables outils mathématiques font défaut.

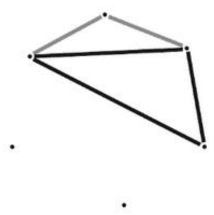
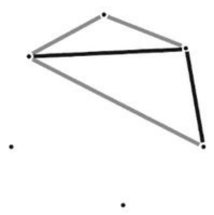
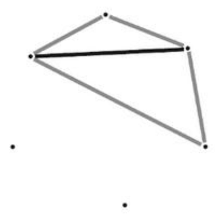
Un théorème de Ramsey

Dans le livre de Masha Gessen sur Grigori Perelman que j'ai cité lors de la séance 3 on trouve le passage suivant, qui a trait à une visite de l'auteure au « Centre d'entraînement pour les mathématiques » :

> I watched the younger kids struggle with the following problem: "There are six people in the classroom. Prove that among them there must be either three people who do not know one another or three people who all know one another." Teaching assistants encouraged them to start with the following diagram:



> Two of the half dozen children working on the problem managed to doodle their way to the fact that the diagram can develop in one of three possible ways:


,

, or


> The challenge, to which two children successfully rose, was to explain that this was a graphical — and therefore irrefutable — way to show that there must be at least three people who either all know or all do not know one another. Listening to the children struggle to put this into words, battling an entire short lifetime of inarticulateness, was painful. (pp. 24-25)

On a là une description de ce qui peut se passer quand on ne dispose pas d'outils adéquats « tout faits » et qu'il faut donc tenter d'*inventer* une manière de faire. Par contraste, Masha Gessen écrit :

> Mathematicians know this as the Party Problem; in its general form, it asks how many people must be invited to a party so that at least *m* will know one another or at least *n* will not know one another. The Party Problem refers back to Ramsey theory, a system of theorems devised by the British mathematician Frank Ramsey. Most Ramsey-type problems look at the number of elements required to ensure a particular condition will hold. How many children must a woman have to ensure that she has at least two of the same gender? Three. How many people must be present at a party to ensure that at least three of them all know or all do not know one another? Six. How many pigeons must there be to ensure that at least one pigeonhole houses two or more pigeons? One more than there are pigeonholes. (p. 25)

Gessen ajoute :

> The Mathematics Education Center children — some of them, at least — would learn about Ramsey theory in time. For the moment, they had to learn to express a way of looking at the world that would ultimately make them interested in Ramsey theory and in other methods of observing order in a chaotic environment. (p. 25)

Ce qui vient d'être dit – le fait, par exemple, que « most Ramsey-type problems look at the number of elements required to ensure a particular condition will hold » – laisse penser qu'un lien pourrait exister entre la théorie de Ramsey et notre « problème des chaussettes ».

Frank Plumpton Ramsey (22 février 1903 - 19 janvier 1930), qui mourut si précocement, est un personnage passionnant sur lequel on pourra commencer par lire la notice qui lui est consacrée, en anglais, dans *Wikipedia*[85]. Mais ce qui nous importe surtout ici est ce qu'on appelle aujourd'hui la théorie de Ramsey[86]. Dans leur livre *Ramsey theory* (1990), Ronald L. Graham, Bruce L. Rothschild et Joel H. Spencer introduisent cette théorie par les lignes suivantes, auxquelles nous nous en tiendrons pour aujourd'hui :

> *In any collection of six people either three of them mutually know each other or three of them mutually do not know each other.*
>
> This "puzzle problem" may be considered the first non trivial example of what we shall call Ramsey theory. We begin this volume with an expository proof of this result. (p. 1)

---

[85] Voir à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Frank_P._Ramsey.

[86] Voir par exemple à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey_theory.

On pourra aller découvrir cette démonstration dans l'ouvrage cité[87].

Mais je reviens ici sur le problème des chaussettes : en fait le résultat que nous connaissons se déduit aisément du résultat précédemment évoqué, ce dont j'invite chacun à s'assurer !

III. Le forum des questions

Jean-Pierre Bourgade m'écrit ceci :

> Ma question porte sur la notion de « question de recherche ». Il me serait précieux qu'à l'occasion tu parles un peu des conditions et contraintes de production de questions de recherche. Formulée naïvement, très naïvement, comme tu dis, ma question serait : « Comment sait-on qu'une question est une question de recherche ? », ce qui, cela va sans dire, signifie plutôt : « Comment sait-on qu'une question de recherche est une *bonne* question de recherche ? », ou encore, quelles instances évaluatrices $\hat{v}$ sont en position de juger que telle question est une *bonne* question de recherche, et selon quels critères ?
>
> La réponse « Le chercheur lui-même qui formule la question ! » n'est pas une bonne réponse, bien sûr : elle néglige toute la sociologie du fonctionnement du champ scientifique. Néanmoins, la réponse opposée « Les chercheurs dominants ! » n'est pas meilleure parce qu'elle néglige la part spécifique du domaine de recherche qui joue un rôle dans la formation de la « qualité » de la question. Une question n'est pas bonne *seulement* du fait du domaine de recherche, elle n'est pas bonne *seulement* du fait de qui la formule, ni de qui est en position dominante.
>
> Ma question pourrait se reprendre ainsi. Pour prendre l'exemple de la TAD, en « gelant » provisoirement les variables « sociologiques » (intérêt des relecteurs des revues de didactique, intérêts des collègues proches, état des luttes entre ces divers intérêts, etc.) : quelle technique la TAD est-elle en mesure de produire pour produire de « bonnes » questions ? Des questions qui soient « bonnes », disons, du point de vue de la position de « chercheur en TAD » – plus ou moins aguerri, etc., je dis bien de la « position » et non du point de vue de telle ou telle personne occupant la position en question. Il me semble qu'une réponse peut provenir de l'étude de la dynamique de la théorie : quelles sont les directions de développement rapide, ou au contraire les points de blocage, etc. Tiens, et au passage, cette question, « Comment sait-on qu'une question de recherche est une bonne question de recherche ? » est-elle une bonne question de recherche ? ☺

Je vous invite à vous pencher sur le problème soulevé par Jean-Pierre, qui nous concerne tous ! Bien sûr nous y reviendrons.

La prochaine séance de l'*Humble séminaire* devrait avoir lieu le **mardi 14 avril 2020** et la suivante le **mardi 19 mai**, toujours à partir de 16 h 30. N'hésitez pas à me faire connaître les questions qui vous importent. YC.

---

[87] Que l'on trouvera à l'adresse http://people.dm.unipi.it/dinasso/ULTRABIBLIO/Graham_Rothschild_Spencer - Ramsey Theory (2nd edition).pdf.

L’humble séminaire 2019-2020

Séance 5 du 14 avril 2020

I. Élémenter la TAD : modèles et modélisation

D’abord, la notion de système

Peut-être plus que d’autres concepts, le concept de *modèle* en TAD suppose de garder présent à l’esprit le *principe de Humpty Dumpty* évoqué au début de la séance 3 de cet *Humble séminaire* et que je rappelle encore : « When *I* use a word,” Humpty Dumpty said, in rather a scornful tone, “it means just what I choose it to mean—neither more nor less. »

➤ Pour préciser le concept de modèle en tant que concept de la TAD, on peut partir de la notion générique d’*objet*. Le nombre $\sqrt{2}$, par exemple, est un objet ; et il en est de même de l’écriture symbolique $\sqrt{}$. Il est alors loisible à une instance $\hat{w}$ de regarder l’*objet o* en question comme un *système* $\mathcal{S}$ ou comme un *état* $\mathscr{s}$ d’un système $\mathcal{S}$. Le *Dictionary of Word Origins* de John Ayto (1990) rappelle que « a system is etymologically something that is “brought together” », sans que l’on sache en général ce qui a provoqué la « formation » de ce système. La définition de « système » adoptée ici est ainsi d’abord minimaliste.

➤ Cela noté, le fait qu’un objet soit regardé comme un système signifie que cet objet est supposé avoir des propriétés, être soumis à des lois, n’être ni informe, ni inerte. En particulier, on suppose qu’il réagira d’une façon déterminée aux perturbations dont il pourra être l’objet[88]. Bien entendu, la manière dont on considère un objet comme un système (ou comme un état d’un système) varie selon $\hat{w}$. Si l’on considère l’objet $\sqrt{2}$, par exemple, on pourra considérer qu’il s’agit du résultat d’une opération arithmétique unaire – regardée parfois, jadis, comme la cinquième opération de l’arithmétique (après les quatre traditionnelles : addition, multiplication, soustraction et division). Dans ce cas, le système $\mathcal{S}$ dont $\mathscr{s} = \sqrt{2}$ est un état peut être l’ensemble des racines $\sqrt{k}$ (avec $k \in \mathbb{N}$) [89].

[88] Marshall McLuhan (1911-1980) a pu donner en passant cette définition suggestive, métaphoriquement hyperminimaliste, de la notion de système : « “System” means something to look at. » (*Media Research: Technology, Art and Communication*, Routledge, New York, 2013, p. 74).

[89] On pourrait aussi considérer le système $\mathcal{S}^*$ des *notations* de la racine carrée : voir sur ce point *A History of Mathematical Notations* (vol. I, 1928, pp. 360-379) de Florian Cajori (1859-1930). (On le trouvera à l’adresse https://monoskop.org/images/2/21/Cajori_Florian_A_History_of_Mathematical_Notations_2_Vols.pdf.)

Donc, la notion de modèle

D'une façon générale, *un modèle* $\mathcal{M}$ *d'un système* $\mathcal{S}$ *est un système à l'aide duquel une instance* $\hat{w}$ *envisage de produire des connaissances relatives à* $\mathcal{S}$.

➤ Avant de donner un premier exemple, je voudrais souligner d'abord une divergence avec l'opinion commune quant à la notion de modèle. Voici par exemple les lignes par lesquelles s'ouvre l'article « Modèle scientifique » de l'encyclopédie *Wikipédia*[90] ;

> Un *modèle scientifique* est une représentation simplifiée, et souvent idéale, de la réalité d'un phénomène permettant d'élaborer une théorie plus ou moins précise adhérant aux observations et de prévoir ce qu'il se passerait dans certaines conditions.

Ce que la TAD ne fait pas, c'est regarder $\mathcal{M}$ comme une « image » (même « simplifiée ») de $\mathcal{S}$. Contrairement à ce qu'on lit souvent, $\mathcal{M}$ n'a pas à « ressembler » à $\mathcal{S}$, même en un sens métaphorique. En quoi par exemple l'équation $ax + by + cz + d = 0$ ressemble-t-elle à un plan de l'espace physique (muni celui-ci d'un repère affine) ?

➤ L'article « Modèle » de *Wikipédia*, de son côté, commence ainsi[91] :

> Le terme *modèle* synthétise les deux sens symétriques et opposés de la notion de ressemblance, d'imitation, de représentation. En effet, il est utilisé pour désigner :
> – soit un objet réel dont on va chercher à donner une représentation, que l'on va chercher à imiter (exemple : le « modèle » du peintre, le « modèle » que constitue le maître pour le disciple).
> – soit un concept ou objet considéré comme *représentatif d'un autre* (exemple : le « modèle réduit » ou maquette, le « modèle » du scientifique), déjà existant ou que l'on va s'efforcer de construire ;
> Le premier sens est le *sens original*. Le second sens dérive de la pratique des architectes et ingénieurs (puis des scientifiques) consistant à construire d'abord un prototype, concret ou conceptuel, qui servira de « modèle » à une construction réelle : le modèle est ainsi devenu, en outre, l'assemblage de concepts représentant de manière simplifiée une chose *réelle déjà existante* (objet, phénomène, etc.), en vue de la comprendre, d'en prédire le comportement.

Le mot *représentation* employé ici est fortement ambigu. Le sens que la TAD donne à *modèle* est certes plus proche de ce que le passage précédent décrit dans les termes suivants : « … le modèle est ainsi devenu, en outre, l'assemblage de concepts représentant de manière simplifiée une chose *réelle déjà existante* (objet, phénomène, etc.), en vue de la comprendre, d'en prédire le comportement. » Mais nous verrons plus loin (à propos de la notion de mathématisation) que les choses sont un rien plus complexes.

[90] Voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Modèle_scientifique.

[91] Voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Modèle.

➤ Observons seulement ici, à cet égard, que la relation de modélisation est « *possiblement* symétrique », au sens suivant. Posons $\mathcal{S}' = \mathcal{M}$ et désignons par $\mathbb{M}_{\hat{w}}(\mathcal{M}, \mathcal{S})$, donc aussi bien par $\mathbb{M}_{\hat{w}}(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, la relation binaire[92] entre systèmes qui a lieu quand, du point de vue de $\hat{w}$, $\mathcal{S}'$ est un modèle de $\mathcal{S}$. Cela posé, *il se peut* que, symétriquement, $\hat{w}$ regarde $\mathcal{S}$ comme un modèle de $\mathcal{S}'$, implication « potentielle » que l'on notera ainsi : $\mathbb{M}_{\hat{w}}(\mathcal{S}', \mathcal{S}) \dashrightarrow \mathbb{M}_{\hat{w}}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. Ici, la flèche $\dashrightarrow$ se lit « implique possiblement »[93]. Nous reviendrons là-dessus. En attendant, on pourra se consoler de s'éloigner de la *doxa* en considérant que lorsque l'on a $\mathbb{M}_{\hat{w}}(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, alors $\mathcal{S}'$ est, pour $\hat{w}$, non *une représentation*, mais plutôt *un représentant* de $\mathcal{S}$ au sens de « représentant diplomatique » ou « politique », tel un ambassadeur ou un ministre représentant son pays auprès d'une autre instance : en ce sens, $\mathcal{S}'$ représente $\mathcal{S}$ auprès de $\hat{w}$. En outre, on se gardera d'oublier que, en règle générale, il existe *plusieurs* représentants possibles du système $\mathcal{S}$ auprès d'une instance $\hat{w}$ donnée, et donc aussi plusieurs manières de « représenter » $\mathcal{S}$ auprès de $\hat{w}$, c'est-à-dire de « parler de $\mathcal{S}$ » à $\hat{w}$.

II. Modèles et mathématiques

À propos de racines carrées

Considérons le système $\mathcal{S}$ constitué de l'ensemble des nombres $\sqrt{k}$ pour $k \in \mathbb{N}$. On peut modéliser $\mathcal{S}$ par le système $\mathcal{S}'$ formé des équations algébriques (quadratiques) $x^2 - k = 0$, jointes à l'inégalité $x \geq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. La relation de modélisation $\mathbb{M}_{\hat{m}}(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, où $\hat{m}$ est une instance « mathématique » adéquate, permet « classiquement » de produire la connaissance suivante : si le nombre k n'est pas un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un entier naturel), alors le nombre $\sqrt{k}$ est *irrationnel* : $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$.

➤ Dans l'article « Square root of 2 » de *Wikipedia* on lit ainsi[94] :

> A short proof of the irrationality of $\sqrt{2}$ can be obtained from the *rational root theorem*, that is, if $p(x)$ is a monic polynomial with integer coefficients, then any rational root of $p(x)$ is necessarily an integer. Applying this to the polynomial $p(x) = x^2 - 2$, it follows that $\sqrt{2}$ is either an integer or irrational. Because $\sqrt{2}$ is not an integer (2 is not a perfect square), $\sqrt{2}$ must therefore be irrational. This proof can be generalized to show that any square root of any natural number that is not the square of a natural number is irrational.

---

[92] Lorsque $\hat{w}$ est fixé, $\mathbb{M}_{\hat{w}}(\cdot\ ,\cdot\ )$ est une relation binaire. Mais $\mathbb{M}_{\cdot}(\cdot, \cdot)$ est, elle, une relation ternaire : l'énoncé $\mathbb{M}_{\hat{w}}(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ signifie « l'instance $\hat{w}$ regarde le système $\mathcal{S}'$ comme un modèle du système $\mathcal{S}$ ».

[93] La flèche avec un fût en pointillé ⤑ est désigné par Unicode comme « Rightwards Arrow with Dotted Stem » : voir à l'adresse https://www.compart.com/en/unicode/U+2911.

[94] Voir à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Square_root_of_2. Un « monic polynomial » est un polynôme unitaire (c'est-à-dire un polynôme dont le coefficient dominant est 1).

Ainsi qu'on le voit, le « travail » effectué ici sur l'*équation* $x^2 - 2 = 0$ aboutit à la conclusion annoncée : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

➤ Pour produire d'autres connaissances à propos de $\sqrt{k}$, on peut travailler ce premier modèle autrement. On a par exemple :

$$x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{x+1}.$$

Le travail effectué ici sur l'équation $x^2 - 2 = 0$ est typiquement un travail *algébrique*. En l'espèce, ce travail produit un *nouveau modèle* de $\sqrt{2}$, à savoir l'égalité $x = 1 + \frac{1}{x+1}$ jointe à l'inégalité $x \geq 0$.

➤ Le « travail » de ce nouveau modèle nous permet d'abord de conclure que, puisque

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \ldots,$$

$\sqrt{2}$ est strictement supérieur à 1 : $\sqrt{2} > 1$. Cela entraîne que $\sqrt{2} + 1 > 2$ et donc que

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} < \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

en sorte qu'on peut conclure que $1 < \sqrt{2} < 1{,}5$.

➤ Si l'on pose $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$, le nombre $\sqrt{2}$ vérifie l'équation $x = f(x)$: $\sqrt{2}$ est un *point fixe* de la fonction f. Cette fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $f(0) = 2$. Si l'on a

$$0 \leq a < x < b,$$

alors $f(b) < f(x) < f(a)$, soit, si $f(x) = x$, $f(b) < x < f(a)$. On a ainsi $f(1{,}5) < x < f(1)$, soit $1{,}4 < x < 1{,}5$. Il vient ensuite $1{,}4 < x < \frac{17}{12} = 1{,}41666\ldots$, puis $\frac{41}{29} < x < \frac{17}{12}$ soit $1{,}4137\ldots < x < 1{,}41666\ldots$, etc.

➤ Le modèle « fabriqué » pour $\sqrt{2}$ peut être généralisé pour $\sqrt{k}$ (lorsque l'entier k n'est pas un carré parfait). Notons tout de suite – nous reviendrons là-dessus à propos d'algèbre – que nous introduisons ainsi *ipso facto* un *paramètre*, à savoir k. Cela dit, soit l'entier $m \geq 1$ tel que l'on ait $m^2 < k < (m+1)^2$. (On a donc $m = \lfloor\sqrt{k}\rfloor$ et $m + 1 = \lceil\sqrt{k}\rceil$.) Il vient alors :

$$x^2 - k = 0 \Leftrightarrow x^2 - m^2 = k - m^2 \Leftrightarrow (x-m)(x+m) = k - m^2 \Leftrightarrow x - m = \frac{k-m^2}{x+m} \Leftrightarrow x = m + \frac{k-m^2}{x+m}.$$

Posons $f_k(x) = m + \frac{k - m^2}{x + m}$. De même que dans le cas $k = 2$, on a[95] $f_k(m + 1) < f_k(\sqrt{k}) < f_k(m)$, soit donc $\frac{m^2 + m + k}{2m + 1} < \sqrt{k} < \frac{m^2 + k}{2m}$. À titre d'exemple, prenons $k = 17$; on a $m = 4$, et il vient ainsi $\frac{37}{9} < \sqrt{k} < \frac{33}{8}$, et donc $4 + \frac{1}{9} < \sqrt{17} < 4 + \frac{1}{8}$, soit encore $4{,}11\bar{1} < \sqrt{17} < 4{,}125$. Si l'on itère une fois ce calcul, on arrive à $f_4\left(4 + \frac{1}{8}\right) < \sqrt{17} < f_4\left(4 + \frac{1}{9}\right)$. On a $f_4\left(4 + \frac{1}{8}\right) = 4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{8} + 4} = 4 + \frac{8}{65}$ et $f_4\left(4 + \frac{1}{9}\right) = 4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{9} + 4} = 4 + \frac{9}{73}$. On a alors $4 + \frac{8}{65} = 4{,}123076\ldots$ et $4 + \frac{9}{73} = 4{,}123287\ldots$

On a donc $\sqrt{17} = 4{,}123\ldots$ (Une calculatrice donne $\sqrt{17} = 4{,}12310\ldots$)

➤ Pour illustrer un peu plus le travail de modélisation précédent, je prends maintenant un second exemple, très proche de celui déjà traité. Pour cela, je me contenterai de reproduire un extrait de mon séminaire de didactique des mathématiques pour les élèves professeurs stagiaires de l'année 2004-2005. Le développement ci-après prend place dans le « Forum des questions » de la séance 18 (1er mars 2005) sous le titre *La modélisation mathématique et ses outils*[96]. On y considère d'abord le cas où le système modélisé est (déjà) mathématique. En un tel cas, « le *modèle* peut être inédit, ou le *travail* du modèle (en lui-même "ancien") peut être d'un genre nouveau ».

➤ Voici donc un exemple de modélisation semblable à ceux déjà vus[97] :

> Prenons ainsi pour système le *nombre* $x = 1 + \sqrt{5}$. On a $(x - 1)^2 = 5$ et donc : $x^2 - 2x - 4 = 0$. La seconde solution de cette équation est $x' = 1 - \sqrt{5} < 0$ en sorte que le système $\begin{cases} x^2 - 2x - 4 = 0 \\ x > 0 \end{cases}$ est un *modèle* de $x = 1 + \sqrt{5}$ qui caractérise x. On notera qu'il n'est pas habituel, dans la culture mathématique du secondaire, ni de regarder un nombre comme un « système », ni de regarder une équation comme un modèle de ses solutions !

---

[95] La dérivée de la fonction f_k est donnée par $f_k'(x) = -\frac{k - m^2}{(x + m)^2}$: f_k est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Notons en outre que, si $x \in [1, +\infty[$, on a : $|f_k'(x)| = \frac{k - m^2}{(x + m)^2} < \frac{(m + 1)^2 - m^2}{(1 + m)^2} = 1 - \left(\frac{m}{m + 1}\right)^2$: la fonction est donc contractante, i.e., lipschitzienne de rapport < 1 (voir à https://fr.wikipedia.org/wiki/Application_lipschitzienne et https://fr.wikipedia.org/wiki/Application_contractante).

[96] Les développements reproduits ci-après avaient pour objectif d'apporter des éléments de réponse aux deux questions suivantes proposées par écrit lors de la séance précédente par deux élèves professeurs : 1. Faut-il considérer la modélisation comme un thème d'études à développer dans la classe et à travailler comme un moyen d'étude afin de développer différents thèmes d'études (peut-être, alors, en « survolant » les problèmes propres à la modélisation) ? 2. Quelle différence existe-t-il entre mathématisation et modélisation ?

[97] Ici, le modèle considéré est le polynôme minimal de $1 + \sqrt{5}$ sur le corps $\mathbb{Q}$. (Sur la notion de polynôme minimal, voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Polyn%C3%B4me_minimal.)

➤ Comment « travailler » le modèle ainsi obtenu ? Comment le « faire parler » ? Cela dépend évidemment de la *question* qu'on entend lui poser. Supposons ainsi que l'on veuille obtenir un *encadrement décimal ou rationnel* de $x = 1 + \sqrt{5}$. On retrouve alors la technique déjà mise en œuvre :

On sait que $2 < \sqrt{5} < 3$, et donc que $3 < 1 + \sqrt{5} < 4$. Comment obtenir plus ? Le modèle à considérer est en fait, ici, le système $\begin{cases} x^2 - 2x - 4 = 0 \\ 3 < x < 4 \end{cases}$ (qui caractérise *a fortiori* le nombre x). L'égalité $x^2 - 2x - 4 = 0$ s'écrit encore $x = 2 + \frac{4}{x}$. Comme $3 < x < 4$, il vient $1 < \frac{4}{x} < \frac{4}{3}$, en sorte qu'on obtient $3 < x < 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$. Recommençons à partir de l'encadrement $3 < x < \frac{10}{3}$. On a $\frac{6}{5} < \frac{4}{x} < \frac{4}{3}$ et donc $2 + \frac{6}{5} < x < 2 + \frac{4}{3}$, soit $\frac{16}{5} < x < \frac{10}{3}$, ou encore $3{,}2 < x < 3 + \frac{1}{3} = 3{,}33\ldots$ Etc.

(Une calculatrice donne $1 + \sqrt{5} = 3.2360\ldots$)

➤ Supposons maintenant que l'on veuille rationaliser le dénominateur de la fraction

$$A = \frac{32}{(1 + \sqrt{5})^4}.$$

Voici une technique autre que celles rencontrées lors de la séance 4 de l'*Humble séminaire* (on suppose encore que $x = 1 + \sqrt{5}$) :

On a $A = \frac{32}{x^4}$. Puisque $x^2 - 2x - 4 = 0$, on a aussi $\frac{4}{x} = x - 2$, et donc : $\frac{16}{x^2} = x^2 - 4x + 4 = (2x + 4) - 4x + 4 = -2x + 8$, en sorte qu'on obtient $16 \times \frac{16}{x^4} = (-2x + 8)^2 = 4(-x + 4)^2$, soit $4 \times \frac{16}{x^4} = x^2 - 8x + 16 = (2x + 4) - 8x + 16 = -6x + 20$; finalement, $A = 2 \times \frac{16}{x^4} = -3x + 10 = -3(1 + \sqrt{5}) + 10 = 7 - 3\sqrt{5}$. On notera que le travail mathématique accompli exploite le *calcul algébrique*, joint à l'égalité $x^2 - 2x - 4 = 0$.

Sans doute peu de lecteurs de ces lignes avaient-ils connaissance de la technique que l'on vient de mettre en œuvre. C'est ici l'occasion d'une remarque fondamentale.

➤ Étant donné une discipline praxéologique $\mathcal{D}$ vivant au sein d'une institution de référence (en général « savante » ou tenue pour telle par certaines instances $\hat{w}$), l'immense majorité des institutions, et en particulier les institutions qui se déclarent didactiques à l'endroit de $\mathcal{D}$, tendent à réduire $\mathcal{D}$ à une sous-discipline $\check{D}$ aux frontières fermement tracées et qui apparaît alors souvent comme une mer intérieure par rapport à cet océan toujours recommencé – plus loin, ailleurs – qu'est la proliférante discipline $\mathcal{D}$. (C'est là l'*un* des aspects du phénomène de *transposition institutionnelle*, en particulier cette transposition est *à visée expressément didactique*.) La découverte que *$\mathcal{D}$ existe au-delà de $\check{D}$*, quoique parfois *juste à côté* de $\check{D}$, si l'on peut dire, est presque toujours ébaubissante pour qui est dogmatiquement assujetti à $\check{D}$.

Par contraste, la pratique de la TAD devrait être, à cet égard, *un exercice permanent de désassujettissement* – et de réassujettissement objectivement assumé.

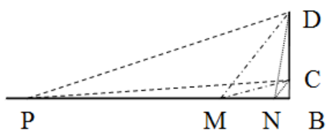
Outils mathématiques de modélisation

Voici un premier extrait de la séance 17 (1er février 2005) du même séminaire. On y fixe les principes du travail mathématique de modélisation et du « travail » des modèles :

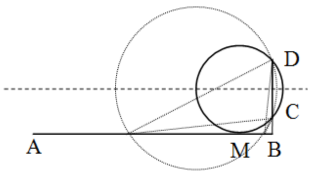
> D’une façon générale, le travail mathématique vise à rendre disponibles des outils de modélisation mathématique. Les systèmes de nombres et les calculs numériques, le calcul algébrique ainsi que le « calcul » sur les équations et inéquations, le calcul trigonométrique, le calcul vectoriel, le « calcul » des fonctions, le calcul des probabilités, etc., ont pour raison d’être essentielle le fait d’être des outils de modélisation mathématique – dont le rôle spécifique doit être chaque fois précisé –, c’est-à-dire des outils de *construction de modèles* et de *travail* de ces modèles – on les « travaille » pour les « faire parler ».

➤ L’un des tout premiers outils mathématiques de la modélisation est la *géométrie*. Voici de cela un exemple où l’on retrouvera des outils aujourd’hui quelque peu délaissés :

> ❶ Considérons […] le problème suivant : assis dans une salle de cinéma, on regarde l’écran ; à quelle distance doit-on se placer de l’écran pour avoir un angle de vue le plus grand possible ? Le schéma ci-après représente un modèle géométrique simple du système évoqué :



> ❷ Il doit être évident, alors, que l’angle sous lequel on voit l’écran [CD] depuis le point M (où se trouvent les yeux du spectateur) est entièrement déterminé par les paramètres h = BC, k = BD et la variable x = MB.
>
> ❸ Il est ensuite à peu près évident qu’il se passe ceci : quand M est très proche de l’écran (en N par exemple), l’angle de vue est presque nul ; cet angle croît lorsque M s’éloigne de l’écran, passe par un maximum et décroît (il redeviendrait nul à l’infini). C’est la distance x = MB pour laquelle l’angle maximal est réalisé que l’on recherche.
>
> ❹ On laissera le lecteur se persuader (à l’aide du théorème de l’angle inscrit, étudié en 3e) que le maximum de l’angle $\widehat{\mathrm{CMD}}$ est atteint au point M où le cercle passant par C et D et tangent à la demi-droite [BA) touche cette demi-droite (voir ci-[contre]). Désignons par O le centre de ce cercle ; l’égalité OC = OM s’écrit $x^2 + \left(\frac{k-h}{2}\right)^2 = \left(\frac{k+h}{2}\right)^2$, ce qui donne $x^2 = \left(\frac{k+h}{2}\right)^2 - \left(\frac{k-h}{2}\right)^2 = hk$, et donc $x = \sqrt{hk}$. Si l’on sait que, dans un triangle rectangle, « la hauteur est moyenne proportionnelle entre les segments qu’elle détermine sur l’hypoténuse », on obtient aisément une construction géométrique du point M cherché (sur la figure ci-après, E est le symétrique de C par rapport à B) :

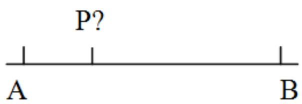


On s'aperçoit ainsi que, par rapport au critère examiné, beaucoup de gens ont tendance à se placer trop loin de l'écran (sauf lorsque l'absence de places libres les en empêche…).

Le problème ci-dessus faisait l'objet d'un commentaire que l'on reprend ici : « le système étudié se laisse mathématiser avec très peu de connaissances relatives au domaine de réalité – celui des faits physiques, ou biologiques, ou économiques, etc. – dont ce système relève ».

➤ Au-delà de la géométrie, c'est l'*algèbre* qui va fournir l'essentiel de l'outillage mathématique utile pour fabriquer et « faire parler » des modèles. En voici un exemple simple mais remarquable[98].

Notons que, en beaucoup de cas, lorsque le système initial $\mathcal{S}_0$ est extramathématique, le premier modèle mathématique $\mathcal{S}_1$ est *géométrique*. C'est *ensuite* que se déploient les outils numériques, algébriques, etc., afin de modéliser plus « efficacement » ce premier modèle. Un exemple historique de ce phénomène par ailleurs banal est fourni par un épisode qui prend place le 19 février 1795, lors de la quatrième leçon que [Pierre-Simon de] Laplace (1749-1827) donne dans le cadre de l'éphémère École normale de l'an III en examinant le problème de physique suivant : « Deux lumières dont l'une [B] est quatre fois plus intense que l'autre [A], étant séparées par un intervalle de trois pieds, déterminer sur la droite qui les joint le point [P] qu'elles éclairent également. »



Le premier modèle est ici un mixte de géométrie (voir le schéma ci-[contre]) et de physique (la « force » de la lumière émise par une source décroît en $\frac{1}{x^2}$).

Ce premier modèle laisse place à un second modèle en forme d'équation : la droite (AB) étant munie d'un repère tel que $\overline{\text{AB}} = 3$, posons $x = \overline{\text{AP}}$; on a alors au point P cherché : $\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(3-x)^2}$.

Le travail de ce modèle révèle l'existence non pas d'*une* mais de *deux* solutions ! L'équation est en effet équivalente à $4x^2 - (3-x)^2 = 0$ et on a : $4x^2 - (3-x)^2 = 3(x - 1)[x - (-3)]$. L'équation étudiée équivaut donc à $(x - 1)[x - (-3)] = 0$: elle a ainsi deux solutions, l'une positive ($x = 1$) et qui correspond à un point P situé *entre* les deux lumières – ce à quoi l'on s'attendait –, l'autre *négative* ($x = -3$), et qui correspond au point P' symétrique de B par rapport à A – un point dont on aurait pu tout aussi bien, sans le secours de l'algèbre, ignorer l'existence, comme le souligne Laplace dans un bref panégyrique de l'outillage algébrique : « Ces solutions inattendues nous prouvent la richesse de la langue algébrique, à la généralité de laquelle rien n'échappe quand on la sait bien lire. » Deux générations avant Laplace, pourtant, on tenait encore les solutions négatives pour absurdes !

[98] Voir *L'École normale de l'an III. Leçons de mathématiques*, sous la direction de Jean Dhombres, Dunod, 1992, pp. 68-69.

➤ Ici, donc, on algébrise un modèle géométrique. En nombre de cas, il est plus d'une manière de modéliser un système donné, comme l'illustre encore l'extrait suivant :

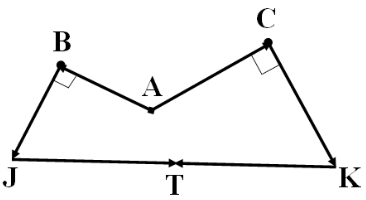
Lorsque le système à propos duquel on s'interroge est déjà mathématique, la modélisation ne passe pas nécessairement par la géométrie. À titre d'illustration parmi une myriade d'autres possibles, imaginons que l'on ait à comparer les valeurs des expressions $\sqrt{5}+\sqrt{a}$ et $\sqrt{5+a}$ où $a > 0$. On peut modéliser le nombre $\delta(a)$ différence de ces deux nombres par : $\delta(a) = \frac{2\sqrt{5a}}{\sqrt{5}+\sqrt{a}+\sqrt{5+a}}$. Ce modèle montre immédiatement que $\sqrt{5}+\sqrt{a} > \sqrt{5+a}$ (pour $a > 0$). À un niveau d'outillage mathématique plus élevé, on peut introduire la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{5}+\sqrt{x} - \sqrt{5+x}$ pour $x \geq 0$, et observer alors qu'on a

$$\delta(a) = f(a) - f(0) = \int_0^a f'(x)\mathrm{d}x \text{ avec } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{5+x}} > 0 \text{ pour } x > 0.$$

Notons qu'on peut aussi chercher à modéliser *géométriquement* un système mathématique *non* géométrique. Dans le cas que l'on vient d'examiner, soit un triangle rectangle ABC tel que $AB = \sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{x}$; on a : $BC = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{5+x}$. D'après l'inégalité triangulaire on a donc : $\sqrt{5+x} < \sqrt{5} + \sqrt{x}$.

➤ Voici maintenant un exemple plus rare, dans lequel le modèle est *géométrico-cinématique*. On part du problème suivant :

Dans une forêt il y a un acacia A, un bouleau B et un chêne C, formant un triangle dans lequel B est à gauche de C quand on les regarde depuis A. Un trésor est enterré en un point T, qu'on peut retrouver grâce aux instructions suivantes : se placer en A, marcher d'un pas égal jusqu'en B, effectuer un quart de tour à gauche, et faire alors le même nombre de pas que pour aller de A en B, enfin marquer le point J auquel on arrive ; recommencer l'opération avec le point C à la place du point B, mais en tournant cette fois à droite en C, le point d'arrivée étant alors le point K. Le point T est le milieu de [JK]. Un chasseur de trésors se rend dans la forêt et s'aperçoit que l'acacia A a disparu ! Il décide alors de partir d'un point A quelconque, détermine le point T correspondant, creuse et trouve le trésor. Pourquoi ?



Voici alors une solution « cinématique » :

Imaginons que A est un point mobile, de vitesse [le vecteur] v. La vitesse de J est alors égale à $R_{-\pi/2}(v)$ et celle de K à $R_{\pi/2}(v)$, où R_θ désigne la rotation vectorielle d'angle θ rad. La vitesse de T est donc $\frac{1}{2}(R_{-\pi/2}(v)+R_{\pi/2}(v)) = 0$. Le point T est donc fixe, et par suite indépendant de A !

On peut ainsi fixer arbitrairement la position de A : on aboutira à tout coup au point T cherché.

➤ La cinématique, qu'enseignait traditionnellement le professeur de mathématiques, a disparu des programmes français de mathématiques au cours des années 1980 : les outils cinématiques ne font donc pas partie aujourd'hui du milieu mathématique M spontanément disponible dans les classes de mathématiques françaises. Il n'en va pas de même, du moins en terminale scientifique, des *nombres complexes* en tant qu'outils de modélisation des transformations du plan. Avec des notations évidentes, on peut alors résoudre ainsi le « problème du trésor » :

On a d'une part $z_J = z_B + (z_J - z_B) = z_B + i(z_B - z_A)$, d'autre part $z_K = z_C + (z_K - z_C) = z_C - i(z_C - z_A)$. Il vient donc : $z_T = \frac{1}{2}(z_J + z_K) = \frac{1}{2}(z_B + i(z_B - z_A) + z_C - i(z_C - z_A)) = \frac{1}{2}(z_B + z_C + i(z_B - z_C))$: z_T est indépendant de z_A, cqfd.

III. Modélisation et mathématisation

Quelques repères

Quel lien peut-on faire entre *modélisation mathématique* et *mathématisation* ? La question paraît relativement subtile et je n'en dirai ici que quelques mots. Je partirai de ce que dit du mot « mathématisation » le CNTRL : le mot y est défini comme désignant l'« action de mathématiser » et le « résultat de cette action ». « Mathématiser », selon la même source, c'est « introduire des principes et des méthodes propres aux sciences mathématiques dans un domaine de connaissance qui n'en relevait pas », c'est en particulier « donner une formulation mathématique à… ». Le *Wiktionnaire*, lui, indique que la mathématisation consiste en l'« utilisation de méthodes mathématiques pour décrire et synthétiser le monde réel ou l'un de ses aspects » et propose pour exemple d'emploi l'expression « la mathématisation de la physique » avant de donner cette illustration : « L'École de Lausanne est la première à entreprendre la mathématisation des sciences économiques. » Le *Dictionnaire culturel en langue française* (2005, tome III, p. 434) indique de même que, mathématiser, c'est « donner une structure mathématique à (un domaine de connaissance) ; appliquer les procédés mathématiques à (un objet de savoir) ».

➤ Notons tout de suite un fait : d'un point de vue extérieur aux mathématiques et à la mathématisation, celui des dictionnaires généraux que je viens de citer, celle-ci consisterait notamment en un apport de « méthodes » ou de « procédés » (« mathématiques ») et aussi, sans doute, de « principes » et de « structure ». Mais nulle part on ne parle de *concepts* mathématiques. Il semble aussi que soit a priori négative la réponse à la question suivante : la mathématisation d'un objet donné peut-elle aboutir à un objet reconnu comme mathématique ?

➤ Pour avancer nous regarderons l'objet à mathématiser (ou l'objet mathématisé) comme un *système* $\mathcal{S}$. D'une manière générale, un système comporte, structurellement ou fonctionnellement, des éléments empruntés, par transposition institutionnelle, à divers univers de l'activité humaine, c'est-à-dire à divers *univers praxéologiques* réalisés en diverses institutions. Étant donné un tel univers $\mathcal{U}$, par exemple l'univers mathématique, nous parlerons de la *teneur* de $\mathcal{S}$ en objets provenant de $\mathcal{U}$, ou $\mathcal{U}$-teneur de $\mathcal{S}$, *du point de vue d'une instance* $\hat{w}$. Le fait de regarder un objet *o* comme « appartenant » à un univers $\mathcal{U}$ donné, le fait déjà d'identifier $\mathcal{U}$ comme un « univers » *sui generis* – l'univers de la poésie, l'univers de la glisse, l'univers de la TAD, etc. – ne vont pas de soi : leur réalisation dépend de $\hat{w}$, qui peut fort bien ignorer $\mathcal{U}$ ou, le « connaissant » (c'est-à-dire ayant à $\mathcal{U}$ un rapport non vide du point de vue d'une instance $\hat{w}'$), ne reconnaît pas l'objet *o* comme identifiable à un objet de $\mathcal{U}$.

➤ Il est un exemple connu que j'ai mentionné en diverses occasions ; je le reprends simplement ici :

> Avant la Seconde Guerre mondiale, les services britanniques chargés de « casser » les codes employés par l'armée allemande – qui utilisait la fameuse machine *Enigma* –, avaient cru bon de recourir à des épigraphistes spécialistes des langues anciennes, lesquels, par une identification culturelle trop rapide, furent regardés en un premier temps comme les mieux à même de déchiffrer les messages interceptés. Dès 1932, les services de renseignement de divers pays (France, Grande-Bretagne, Pologne) disposèrent des instructions d'utilisation de la machine, qui devaient permettre d'en inférer les câblages. Seuls les Polonais y parvinrent, pour une raison que le biographe d'Alan Turing rapporte en ces termes[99] : « The difference was that the Polish department employed three energetic mathematicians, who were able to use the papers to deduce the wirings. Highly ingenious observations, good guessing, and the use of elementary group theory, produced the rotor wirings. » De fait, dès la fin des années 1920, les services polonais avaient recruté trois étudiants en mathématiques, dont l'un fut envoyé se former à... l'université de Göttingen, haut lieu des mathématiques allemandes (dont Hilbert était alors le chef de file incontesté). Par contraste, ce n'est qu'en 1938, à la veille de la guerre, que les services britanniques feront appel à des mathématiciens de haut niveau, parmi lesquels Alan Turing lui-même.

On a là un phénomène de *fausse reconnaissance praxéologique* : les outils de l'épigraphie (grecque, romaine, etc.) sont d'abort identifiés comme pertinents (sinon comme adéquats) pour accomplir les tâches du type visé, alors qu'il eût été judicieux, pour les responsables concernés, de faire leur la fameuse apostrophe *It's mathematics, stupid!*[100].

➤ Bien entendu, si l'on parle de teneur *mathématique* d'un système $\mathcal{S}$, il convient d'avoir une définition – même approximative, partielle – de ce qu'est un objet *o* ressortissant à l'univers mathématique $\mathcal{U}_\mu$. Or le mathématique est une réalité ouverte, qui, même du point de vue d'une instance $\hat{w}$ « non spécialisée », a une histoire compliquée et une évolution *qui semble devoir se poursuivre indéfiniment*. Le *Dictionnaire culturel en langue française* déjà citée

---

[99] Andrew Hodges, *Alan Turing, The Enigma of Intelligence*, Unwin Paperbacks, Londres, 1985, p. 170.

[100] Voir à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/It's_the_economy,_stupid.

propose au lecteur plusieurs citations d'auteurs illustres qui, chacune, peuvent donner à penser. Je retiendrai celle-ci, due à Émile Borel (1871-1956), qui offre un double repère utile pour mon propos :

> Les mathématiques apparaissent comme la science qui étudie les relations entre certains êtres abstraits définis d'une manière arbitraire, sous la seule condition que ces définitions n'entraînent pas de contradictions. Il faudrait toutefois ajouter […] que ces définitions ont été tout d'abord suggérées par des analogies avec les objets réels.

On voit l'asymétrie (chez Borel), et on entrevoit la dialectique (virtuelle) entre ce qu'on peut appeler génériquement *le mathématique* et *l'extramathématique*, ou, plus exactement, *le mathématisé* et l'*à-mathématiser* – car le mathématique est du mathématisé et l'à-mathématiser peut être déjà partiellement mathématisé. Cette dialectique est au cœur de l'étude de la mathématisation.

➤ À nouveau, je reproduis un développement qui se trouve dans le séminaire de didactique des mathématiques pour les élèves professeurs stagiaires, cette fois de l'année 2000-2001, à l'occasion de la séance 18 (6 février 2001) :

> On ne doit pas se lasser de répéter – et *de se répéter* – qu'avant d'*arriver* à l'univers mathématique tel qu'on le voit fonctionner ici, il faut *partir* de matériaux pris *dans le réel extramathématique*, comme le rappelle par exemple le vocabulaire géométrique, tel que nous l'avons hérité des Grecs : *centre* vient de *kentron*, « aiguillon », *cylindre*, de *kylindros*, « rouleau », *sphère*, de *sphaira*, « balle à jouer », *prisme*, de *prisma*, « morceau de bois découpé à la scie » (de *priein*, « scier »), etc. Mais il y a plus. L'univers mathématique construit *n'abolit pas les mondes non mathématiques* qui ont motivé sa création.

Le passage précédent se conclut sur une remarque importante, qui prolonge l'idée qu'un modèle est – et *n'est que* – un système permettant de produire *certaines* connaissances relatives au système modélisé. Pour illustrer cette affirmation, un exemple, qui devrait être évident mais dont l'évidence a été depuis longtemps effacée, est alors proposé :

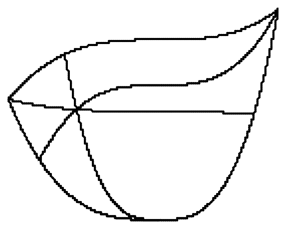
> C'est ainsi que les notions de rectilinéarité et d'alignement *sensibles* [= physiques] ne peuvent pas être « captées » de manière univoque par la mathématisation, contrairement à ce que croient trop de manuels, qui confondent le système à mathématiser et le modèle mathématique !

Voici le détail de cet exemple :

> • Supposons par exemple que l'on prétende identifier les « droites » dont nous parle telle axiomatique de la géométrie du plan avec l'ensemble Δ des parties du plan d'équation $ax + by + c = 0$ (a, b non tous deux nuls) dans un repère affine donné. L'ensemble Δ de parties du plan satisfait sans doute tous les axiomes imposés (ceux de Hilbert par exemple). Mais est-il le seul à satisfaire ces conditions ? La réponse, sans appel, est *négative* : si φ est une bijection *quelconque* du plan, l'ensemble $\varphi(\Delta)$ de parties du plan satisfait *aussi* l'axiomatique de Hilbert

(par transport de structure), et celle-ci *ne caractérise donc pas* les « variétés affines de dimension 1 » du plan.

• Considérons par exemple la bijection définie par $\varphi(x, y) = (x^{1/3}, y)$. Si la droite $d \in \Delta$ admet l'équation $ax + by+c = 0$, on a : $(x, y) \in \varphi(d) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(x, y) \in d \Leftrightarrow (x^3, y) \in d \Leftrightarrow ax^3+by+c = 0$. Si $a = 0$, $\varphi(d) = d$. Si $b = 0$, $\varphi(d)$ est la variété affine (parallèle à d) d'équation $x = -(c/a)^{1/3}$. En revanche, si $ab \neq 0$, $\varphi(d)$ a pour équation $y = \alpha x^3+\beta$ où $\alpha = \frac{-a}{b}$ et $\beta = \frac{-c}{b}$. On obtient ainsi une *cubique* du plan. Ainsi $\varphi(\Delta)$ est-il l'ensemble des parties du plan formé des variétés affines d'équation $x = \alpha$ ou $y = \beta$ et des courbes d'équation $y = \alpha x^3+\beta$: cet ensemble de parties satisfait tous les axiomes, et donc tous les théorèmes, que satisfont les variétés affines de dimension 1 – par exemple le théorème de concours des hauteurs d'un triangle, ce qu'illustre la figure ci-après.



• D'une manière générale, si φ n'est pas une transformation affine, les « droites » $\varphi(d)$ ne sont pas rectilignes. Inversement, si l'on prend pour droites les éléments de $\varphi(\Delta)$, les variétés affines ne sont plus « rectilignes » par rapport à la structure euclidienne ainsi définie.

• Le fait que la rectilinéarité, notion *physique*, ne puisse pas être caractérisée en termes *purement mathématiques* ne devrait pas étonner. Cela entraîne en particulier que, avec des élèves de 6^e notamment, on ne peut faire « l'économie » (!) d'une (re)construction préalable de la notion *sensible* de droite, *qu'aucune théorie mathématique ne saurait à elle seule engendrer*. Comme en d'autres domaines, les mathématiques supposent ici le non-mathématique, qu'il s'agit précisément de mathématiser.

➤ À ces considérations, je voudrais ajouter enfin un propos que je rencontre, au hasard de mes lectures, dans un livre récemment paru, intitulé *Notre culture scientifique* et sous-titré *Le monde antique en héritage*, dû au mathématicien, physicien et historien des sciences italien Lucio Russo[101] :

> Pour revenir à la relation entre phénomènes et théories, les scientifiques européens modernes, du moins jusqu'au début du XX^e siècle, avaient appris dès leur plus jeune âge, par l'étude (directe ou indirecte) des *Éléments* d'Euclide, la relation étroite et, en même temps, la profonde différence entre concepts théoriques et objets concrets. Quiconque a étudié la géométrie euclidienne a assimilé, en général par inadvertance, un élément essentiel de la méthode scientifique, en apprenant à distinguer les entités géométriques, comme les segments ou les triangles, des objets concrets dont elles constituent le modèle.

---

[101] Ce livre a été publié aux Belles Lettres (Paris) en 2020 dans une traduction d'Antoine Houlou-Garcia. Sur Lucio Russo, voir par exemple à l'adresse https://it.wikipedia.org/wiki/Lucio_Russo.

> Cette distinction n'a rien d'évident : elle est née dans la civilisation grecque et est restée étrangère à toutes les cultures qui ne dépendent pas de celle-ci. Dans la physique moderne, l'absence d'une tradition ancienne analogue à celle de la géométrie encore vivante ne permet souvent pas de distinguer les objets réels de leurs modèles théoriques avec la même clarté. L'expression « onde électromagnétique », par exemple, est utilisée à la fois pour l'objet physique capturé par nos téléphones cellulaires et pour son modèle théorique, ce qui rend difficile la distinction entre les deux plans. (p. 154)

Mais il est temps d'avancer encore.

Quelles teneurs en mathématiques ?

Nous adopterons ici le point de vue selon lequel tout système est soit un système praxéologique soit un système qui entre dans la composition d'un système praxéologique. Ainsi, prendre sa voiture et se rendre de son domicile à une adresse indiquée en utilisant son système GPS met en jeu un tel système praxéologique dont le GPS est un composant parmi d'autres[102]. Cela noté, je me référerai désormais à des systèmes praxéologiques qui offrent un habitat à des systèmes qui n'y figurent qu'à titre de composants (même si l'existence de ces composants suppose elle-même l'existence et le fonctionnement de vastes complexes praxéologiques).

➤ Le conducteur qui utilise un système GPS n'a peut-être pas conscience que celui-ci, à l'instar de la voiture qu'il conduit, contient ce que j'ai appelé autrefois des mathématiques *critallisées* (et aussi, bien sûr, beaucoup de *physique cristallisée*, etc.). Je m'arrêterai au contraire, dans ce qui suit sur des systèmes praxéologiques qui contiennent, ou qui pourrait contenir, des « morceaux » de mathématiques *vivantes*. Voici un exemple ancien, que je reprends à nouveau. Je l'emprunte aux pages 130 et 131 du tome 1 de l'*Histoire universelle* de l'historien suédois Carl Grimberg (1875-1941) paru chez Marabout université (Paris) en 1963. Dans l'Égypte ancienne, écrit Grimberg, un contremaître ayant à distribuer leur ration de pains à ses ouvriers ne pouvait guère opérer qu'ainsi :

> Il [faisait] ranger les ouvriers sur un rang et [donnait] à chacun un pain, puis un autre, jusqu'à épuisement de la provision. Si à la dernière distribution, quelques hommes ne [recevaient] rien, le contremaître [n'avait] plus qu'une chose à faire : reprendre la dernière distribution et diviser les pains jusqu'à ce que chacun ait reçu une part égale.

[102] Sur le GPS, voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System. Notons que le GPS américain (*Global Positioning System*) est un assistant de navigation particulier (à l'instar du système Galileo européen) : voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/GPS_(assistant_de_navigation).

Dans cette technique, pour l'observateur moderne $\hat{w}$, la présence de mathématiques, sans être nulle, est minimale[103]. Par contraste, le *scribe*, faisant usage de connaissances arithmétiques avancées, pouvait *calculer a priori* la ration de pain à attribuer à chaque ouvrier[104]. Si, par exemple, il s'agissait de répartir 19 pains entre 8 ouvriers, il était capable d'indiquer au contremaître que chaque homme devait recevoir 2 pains, plus un quart de pain, plus un huitième de pain, information qu'il tirait d'un modèle de la situation que nous écririons aujourd'hui ainsi :

$$\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

Grimberg commente ce fait dans les termes suivants : « Les illettrés étaient fort impressionnés par ce scribe qui pouvait calculer la ration quotidienne de chaque travailleur, sans devoir prendre lui-même les pains en main, sans même devoir quitter sa chambre. »

➤ Nous avons ici l'illustration d'un type de situations qui demeure vivant jusqu'à aujourd'hui. Tout d'abord, bien sûr, il y a ce qu'on peut appeler « le miracle des mathématiques », qui permet au scribe, sans voir les ouvriers, sans voir ni toucher les pains, de déterminer la ration que chacun devra se voir attribuer, parce que cet homme « savant » n'a besoin que d'un modèle très simple du système concerné, qui prend la forme d'un couple d'entiers : le nombre de pains (19) et le nombre d'ouvriers (8). Ensuite, et aussitôt, se produit la confiscation de la thaumaturgie mathématique par un « spécialiste », ici le scribe : il y a bien, dans la vie du chantier, des « morceaux de mathématiques, mais seul le calculateur officiel les manipule ! Enfin, les non-spécialistes (« les ouvriers illettrés ») sont admiratifs du tour de force réalisé. Bien entendu, nous connaissons aussi l'envers de cet avers : certains sans doute « n'y croient pas » ou « ne font pas confiance » aux prétendus spécialistes. On a là les principaux acteurs du drame qui est au cœur de la didactique des mathématiques, ou plus exactement de la TAD, comme science.

➤ À cet égard, je voudrais d'abord rapporter un épisode que j'ai eu l'occasion d'observer il y a relativement peu de temps. J'avais l'habitude à cette époque encore proche d'aller acheter mon journal dans un kiosque à journeaux situé sur une place où, trois fois par semaine, se tenait un marché très populaire. (Depuis le kiosque et le marché ont diasparu.) Ce jour-là, j'attends mon tour pour payer quand arrive un escogriffe qui, ignorant la queue qui s'est formée, demande au « patron » : « Huit fois trente-six ? » Le kiosquier n'a pas l'air étonné : il prend sa calculette et donne la réponse à son « client ». Je suis surpris. Je me demande ce que

---

[103] Il conviendrait de l'analyser finement, ce que je ne ferai pas ici.

[104] Sur le scribe égyptien, voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Scribe_dans_l'Égypte_antique.

cet homme peut bien acheter dans ce kiosque, en 8 exemplaires, et qui coûte 36 euros pièce ? Ou, moins croyable encore, en 36 exemplaires, qui coûte 8 euros pièce ? Le « client » parti, je demande discrètement au kiosquier ce qu'il en est. Il me dit que cet homme vend je ne sais quoi sur le marché et veut connaître le prix qu'il doit faire payer à son propre client… Le kiosquier est habitué à rendre ce genre de service. Je m'étonne que l'homme n'utilise pas la calculatrice qui est sur son téléphone portable. Réponse : il ne sait pas le faire.

➤ On voit qu'il n'est pas nécessaire, ici, que l'homme « empêché » maîtrise les « subtilités » du « calcul mental » mais simplement qu'il soit capable d'effectuer une multiplication « élémentaire » avec une calculette toute simple[105]. Qu'y a-t-il derrière l'incapacité observée chez cette personne *x* ? Plusieurs facteurs pourraient avoir joué. Il se peut, quoique cela semble bien improbable, que *x* n'ait jamais appris à utiliser une calculette pour effectuer des opérations arithmétiques simples. Plus généralement, nous savons que, longtemps, et aujourd'hui encore sans doute, la classe de mathématiques s'est montrée fort rétive à l'usage de la calculatrice, quel que soit cet usage, alors même que l'on peut solliciter la calculatrice de bien des façons pour « faire des mathématiques ». J'en profite pour rappeler au passage une technique évoquée lors de la séance 4 de ce séminaire.

➤ Si l'on veut calculer les nombres *a* et *b* tels que l'on ait $A = \frac{32}{(1+\sqrt{5})^4} = a + b\sqrt{5}$ (ce qu'on a fait plus haut : on a vu que $A = 7 - 3\sqrt{5}$), il suffit de demander à une calculatrice la valeur des expressions

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{32}{(1+\sqrt{5})^4} + \frac{32}{(1-\sqrt{5})^4}\right) \text{ et } b = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{32}{(1+\sqrt{5})^4} - \frac{32}{(1-\sqrt{5})^4}\right)$$

On retrouve ainsi les valeurs déjà obtenues :

((32 / ((1 + sqrt(5))^4)) + (32 / ((1 - sqrt(5))^4))) / 2 =
7

((32 / ((1 + sqrt(5))^4)) - (32 / ((1 - sqrt(5))^4))) / (2 * sqrt(5)) =
-3

Bien entendu, on peut en outre vérifier que le résultat obtenu est exact. On a ainsi :

32 / ((1 + sqrt(5))^4) =
0.2917960675

7 - (3 * sqrt(5)) =
0.2917960675

Notre enseignement secondaire est aujourd'hui, je crois, encore loin de tout cela !

---

[105] En vérité, si je suis sûr du 36, je ne le suis pas quant au facteur 8. En supposant qu'il en était bien ainsi, en usant par exemple d'une technique familière aux scribes de l'Égypte antique (voir par exemple à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Technique_de_la_multiplication_dans_l'Égypte_antique), on aurait : 8 × 36 = 4 × (2 × 36) = 4 × 72 = 2 × (2 × 72) = 2 × 144 = 288.

« Spécialistes » et gens « non spécialisés »

L'opportunisme formatif d'une personne *x* – ici, le fait que *x* semble étranger à une utilisation *minimaliste* d'une calculette – est toujours l'expression de l'assujettissement de *x* à une ou plusieurs positions institutionnelles « hostiles » à la diffusion des praxéologies en question. De tels assujettissements peuvent être de natures fort diverses. Un type important de tels assujettissemetns est lié à l'*opportunisme praxéologique* de la société où l'on vit ou de telle ou telle institution en son sein. Cet opportunisme praxéologique prend ici la forme suivante : on regarde tel système praxéologique comme participant proprement de l'équipement d'une certaine *sorte* – ou de certaines sortes – de *« spécialistes »*, tout autre individu en étant *ipso facto* exempté. Cette opposition entre « connaissances pour spécialistes » et « connaissances pour chacun » est souvent lourdement structurante d'une société ou, plus généralement, d'une institution. Elle constitue un objet d'observation et d'analyse important – qu'il nous faut situer au niveaux des *civilisations* dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique.

➤ Aujourd'hui, sur cet immense problème, je ne fournirai qu'une brève illustration que j'emprunte à un billet de Christopher J. Falvey intitulé *It's the math, stupid!*, sous-titré « Is a simple understanding of economics and math really that much to ask for? »[106]. Je n'en retiens ici que ce passage :

> How often do you hear a commercial or news report attempt to explain, in the following manner, that which you'd think is an extremely extraordinary or rare disease, occurrence or event, is actually so tremendously common that you too should be very afraid of it:
> "Every ____ minutes someone dies from _____."
> Wow. In the time it took you to read this far in this article another poor person died! Wait a few more minutes, and there goes another one. And another one. Such a frequent and endless stream of death, no wonder people are so afraid.
> Unfortunately, rarely does anyone—reporters, commercial copywriters or viewers—put numbers in perspective. You see, there are only 525,600 minutes in a year. There are about 250 million people living in the US. Something that happens "every ten minutes" affects a whopping two one-hundredths of a percent of the population. More Americans catch the flu and die than this!

Une année comporte en effet 60 × 24 × 365 minutes, soit 525 600 minutes, et se décompose donc en 52 560 périodes de 10 minutes. Cela correspond à autant de décès, ce qui représente une proportion égale à $\frac{52560}{250000000}$ = 0,00021024 = 0,021024 % ≈ 0,02 % = 0,2 ‰. Que peut-on souhaiter en termes d'équipement « mathématique » *du citoyen* – ou, pour reprendre une

[106] Voir à https://web.archive.org/web/20081123040634/http://www.vnvo.com/stories/its_math_stupid_p1.asp.

expression de l'historien Lucien Febvre (1878-1956), de « l'homme non spécialisé »[107] ? Que chacun soit capable de faire *motu proprio* ? Où que chacun puisse suivre le calcul précédent sans pousser des cris d'orfraie ? Ce cas, qui peut paraître simplet, est en vérité un témoignage d'un grand problème : celui du difficile rapport au « fait mathématique » dans nos sociétés. Mais je n'en dirai pas plus aujourd'hui sur cette grande question.

IV. Modèles en didactique « relativiste »

La notion de noyau cognitif

Je reviens ici sur une notion fondamentale déjà explicitée lors de la séance 1 : la notion de *noyau cognitif*. Mais je commencerai en proposant une définition « sous-déterminante » de la notion de *science* : pour au moins certaines instances $\hat{w}$, est une science ce qui leur apparaît comme *un système évolutif générateur de modèles d'un certain type évolutif de systèmes*. Plus brièvement, une science $\mathcal{S}$ (« S barré ») est un générateur – qui change avec le temps t – de modèles d'un certain *type* de systèmes qui est lui-même l'*objet*, également changeant dans le temps historique t, de cette science. D'une manière générale, une science $\mathcal{S}$ est censée se donner pour mission de décrire et d'expliquer les *phénomènes* qui se produisent dans les systèmes qu'elle étudie.

➤ Voici d'abord un exemple concernant la science *mathématique* $\mathcal{S}_\mu$. Considérons l'ensemble des entiers qui s'écrivent comme la somme de deux carrés d'entiers, tels par exemple $5 = 1^2 + 2^2$, $8 = 2^2 + 2^2$, $10 = 1^2 + 3^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, etc.[108] Un phénomène remarquable est alors le suivant : le *produit* de tels nombres est encore un nombre de ce type, c'est-à-dire s'écrit comme la somme de deux carrés. On a ainsi $5 \times 8 = 40 = 36 + 4 = 6^2 + 2^2$, $10 \times 13 = 130 = 121 + 9 = 11^2 + 3^2$, $8 \times 13 = 104 = 100 + 4 = 10^2 + 2^2$, etc. Comment modéliser (et donc expliquer) ce phénomène numérique ? Réponse : cela peut se faire à l'aide de l'identité de Lagrange[109] ou, sous une forme plus élémentaire, l'identité dite de Brahmagupta[110] :

---

[107] Voir, dans *Combats pour l'histoire* (1re édition 1952, 2e édition 1992, Armand Colin), « Contre l'esprit de spécialité. Une lettre de 1933 » à l'adresse http://www.anthropomada.com/bibliotheque/FEBVRE-Lucien.pdf..

[108] On démontre qu'un entier *n* s'écrit comme la somme de deux carrés si et seulement si, dans sa décomposition en facteurs premiers, ne figure aucun nombre premier *congru à* 3 *modulo* 4 qui soit élevé à un exposant *impair*. Voir par exemple à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Sum_of_two_squares_theorem.

[109] Voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Identité_de_Lagrange.

[110] Voir à https://fr.wikipedia.org/wiki/Identité_de_Brahmagupta ou https://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta–Fibonacci_identity. Brahmagupta (v. 598-v. 668) était un mathématicien et astyronome indien : voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta. Sur Leonardo Fibonacci (v. 1175-v. 1250), voir par exemple à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci.

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

Ici, la langue algébrique – « à la généralité de laquelle rien n'échappe quand on la sait bien lire », comme l'écrivait Laplace – nous montre l'existence en général de *deux* décompositions en somme de deux carrés ; on a ainsi par exemple $10 \times 13 = 130 = 11^2 + 3^2 = 9^2 + 7^2$. Mais ces décompositions sont parfois identiques ; on a ainsi par exemple, pour $5 \times 8 = (1^2 + 2^2)(2^2 + 2^2)$, $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (2 - 4)^2 + (2 + 4)^2 = 2^2 + 6^2$ et $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (2 + 4)^2 + (2 - 4)^2 = 6^2 + 2^2$.

➤ J'en viens – lentement ! – à la question des modèles *en didactique*. Quel est l'objet ∂ de la *science didactique* au temps t, science que je noterai donc $\mathcal{S}_\partial(t)$? La réponse lapidaire que la TAD donne à cette question est[111] : « l'objet de la didactique est *le* didactique. » Mais qu'est-ce alors que *le* didactique ? Réponse : c'est l'ensemble des *faits* didactiques ; il y a *fait* quand une personne ou une institution – je dirai aujourd'hui : une *instance* (personnelle ou institutionnelle) – accomplit un *geste* (ou un acte) *didactique*. Bien. Mais qu'est-ce alors qu'un geste *didactique* ? Je rappelle d'abord que, comme toujours en TAD, le mot de « geste » s'applique ici à tout « faire », quel qu'en soit la « taille » perçue par telle ou telle instance[112] : l'acte consistant, pour le ministre de l'éducation du pays, à promulguer un nouvel ensemble de programmes scolaires est un geste, de la même façon que l'est la remarque du professeur à ses élèves, à la fin d'une séance de classe, les invitant à surtout bien faire les deux exercices qu'il leur a donné à faire. Cela noté, que signifie donc l'adjectif *didactique* ?

➤ J'ai longtemps utilisé une définition du type suivant : « Un geste δ réalisé par une instance $\hat{u}$ est didactique si $\hat{u}$ accomplit δ dans l'*intention* d'aider certains à connaître (ou à connaître "mieux") certaines choses. » Mais le mot *intention* m'est plus tard apparu comme faisant difficulté. Comment sait-on que $\hat{u}$ avait cette intention ? On peut admettre qu'il en est ainsi si l'instance $\hat{u}$ *déclare* avoir eu une telle intention. Mais alors, parmi les gestes ainsi « déclarés didactiques », on peut ranger encore tous ces gestes qu'une « instance $\hat{w}$ quelconque […] présente comme didactiques », c'est-à-dire les gestes qui sont *déclarés didactiques* par quelque instance $\hat{w}$ plus ou moins « reconnue ». Notons qu'une instance $\hat{u}$ peut réaliser un geste δ que cette instance $\hat{u}$ elle-même regarde comme *non didactique* mais qu'une *autre* instance, $\hat{w}$, tiendra, elle, pour didactique (ou pour antididactique, ou pour isodidactique).

---

111 Cette définition sera retouchée un peu plus loin.

112 Un geste δ est en vérité une tâche t d'un certain type T. Mais le type T en question peut ne pas être clairement identifié par l'instance $\hat{w}$ qui, à l'origine, « voit » le geste ; en outre, il peut être identifié différemment par deux instances $\hat{w}$ et $\hat{w}'$, qui l'une et l'autre sont limitées par leur équipement cognitif au moment où elles observent δ.

➤ Cela m'a conduit à retoucher la définition initiale de la manière suivante : « Un geste δ réalisé par une instance $\hat{u}$ est didactique *aux yeux d'une instance* $\hat{w}$ (ou : est $\hat{w}$-didactique) si $\hat{w}$ regarde δ comme aidant certains à connaître (ou à connaître "mieux") certaines choses. » Bien entendu, si l'on prend $\hat{w} = \hat{u}$, on retrouve la première définition, à condition d'identifier, chez $\hat{u}$, l'*intention* d'aider et la *croyance* que le geste δ est de nature à réaliser cette intention. Cette problématique « relativiste » (c'est-à-dire relativement à une instance $\hat{w}$) conduit à considérer une éventuelle diversité de jugements : $\hat{w}$ peut tenir δ pour didactique, $\hat{w}'$ pour antididactique, $\hat{w}''$ pour isodidactique, $\hat{w}'''$ pour non didactique... Nous pouvons ainsi exprimer le fait qu'il n'y a pas, en règle générale, d'accord spontané, personnel ou institutionnel, à propos d'un geste déterminé.

➤ Du point de vue de la description des phénomènes, le changement « relativiste » en didactique, dont j'ai parlé dans la séance 1 sous le nom *d'excentration instantielle*, permet de commencer à penser – à modéliser – un phénomène cardinal[113] : celui de *la diversité instantielle*, et en particulier personnelle, des jugements, des croyances, des opinions, des projets. Pourquoi, pourra se demander le didacticien ξ, a-t-on $\hat{w}' \vdash \{\delta \text{ non didactique}\}$, $\hat{w}'' \vdash \{\delta \text{ didactique}\}$, $\hat{w}''' \vdash \{\delta \text{ antididactique}\}$, $\hat{w}'''' \vdash \{\delta \text{ isodidactique}\}$? Alors que, dans la didactique « classique », on se demanderait si δ *est* didactique (ou antididactique, ou isodidactique) *en soi*, en laissant d'ailleurs de côté les gestes tenus pour non didactiques, en didactique « relativiste » on se pose la même question (en incluant les gestes que d'aucuns regardent comme non didactiques), mais cela à propos de telle ou telle instance $\hat{w}$. On peut ainsi reconnaître, au passage, l'existence de situations où $\hat{u}$ accomplit un geste δ sous la contrainte d'une instance institutionnelle (p, I) pour qui δ « est » didactique, alors que $\hat{u}$ regarde δ au mieux comme isodidactique, avant peut-être de ne plus le voir que comme un geste non didactique « habituel ».

➤ C'est ici l'occasion de souligner un fait essentiel : les modèles élaborés par la TAD ne sont nullement *normatifs*. Ils ne disent pas ce qui *devrait* être, mais ce qui *pourrait* être : il se pourrait ainsi qu'existent – ou pas – des instances $\hat{w}$, $\hat{w}'$,$\hat{w}''$, $\hat{w}'''$, $\hat{w}''''$, etc., telles que... De ce point de vue, on peut dire que ce sont des modèles *écologiques*, qui permettent d'étudier ce qui *se passerait si* l'ensemble des conditions prévalentes $\mathcal{C}$ étaient changées en l'ensemble $\mathcal{C}' = \mathcal{C}^{/\delta}$. Bien entendu, ces modèles sont censés permettre – dans une certaine mesure, comme toujours en science – de prévoir ce qui *serait* si… En cela, les modèles engendrés par la TAD sont aussi des aides *à l'analyse et à la décision didactiques* – que sera l'ensemble $\mathcal{C}' = \mathcal{C}^{/\delta}$ et

[113] Selon le CNRTL, est cardinal ce « qui constitue la charnière sur laquelle tourne, s'appuie une chose ou un ensemble de choses » (voir à https://cnrtl.fr/definition/cardinal).

quels effets ce *dérangement* des conditions prévalentes aura-t-il sur les rapports de telle ou telle instance à tels ou tels objets, etc. ?

➤ En vérité, nous le savons depuis la séance 1, le modèle du didactique évoqué ci-dessus est encore incomplètement élaboré : toute une partie de l'énoncé (« … si $\hat{w}$ regarde δ comme aidant *certains* à *connaître "mieux" certaines* choses ») reste non formalisée et (donc) imprécise. J'ai rappelé lors de la séance 1 comment j'ai proposé de procéder. Tout d'abord on s'appuie sur le *modèle de la cognition* qu'offre la TAD en considérant un couple $\bar{n} = (\hat{\imath}, o)$, où $\hat{\imath}$ est une personne ($\hat{\imath} = x$) ou une position institutionnelle. En ce cas, les « certains » individus évoqués dans la définition que l'on vient de rappeler sont soit la personne x soit la position $\hat{\imath}$ – et, en conséquence, les personnes assujetties à la position $\hat{\imath}$ (par exemple les élèves d'une classe donnée)[114]. Quant aux « certaines choses » à connaître ou à connaître « mieux », c'est ici l'objet o. Nous avons appelé *base cognitive* le couple $\bar{n} = (\hat{\imath}, o)$: on part donc d'une instance $\hat{\imath}$ et d'un objet o, avec l'idée de voir comment est jugé le changement du rapport $R(\hat{\imath}, o)$ que le geste δ – c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{C}' = \mathcal{C}^{/\delta}$ des conditions $\mathcal{C}$ dérangées par δ – pourrait provoquer.

➤ Il restait à préciser ce que c'est, pour l'instance $\hat{\imath}$, que connaître ou connaître « mieux » l'objet o. Pour ce qui est de connaître, on a dit que cela équivaut à dire que « l'on a » $R(\hat{\imath}, o) \neq \emptyset$. Le point de vue relativiste conduit à préciser que cela n'a un sens que pour des instances $\hat{w}$ déterminées : $\hat{w}$ pourra déclarer que $R(\hat{\imath}, o) \neq \emptyset$, ce qu'on écrira $\hat{w} \vdash R(\hat{\imath}, o) \neq \emptyset$, tandis que l'on aura $\hat{w}' \vdash R(\hat{\imath}, o) = \emptyset$. On introduit donc dans le modèle une instance dite *évaluatrice*, $\hat{v}$, à laquelle l'instance $\hat{w}$ se réfère quand elle déclare le geste δ didactique (par exemple) par rapport à la base cognitive $\bar{n} = (\hat{\imath}, o)$: dire que $\hat{w}$ regarde δ comme didactique, c'est dire que $\hat{w}$ anticipe que, *après* l'accomplissement de δ (par $\hat{u}$), l'instance évaluatrice $\hat{v}$ estimera que $\hat{\imath}$ « connaît mieux » l'objet o qu'elle ne le connaissait *avant* l'exécution de δ. J'ai noté déjà que cette instance évaluatrice $\hat{v}$ est souvent seulement *supposée* par $\hat{w}$ (contrairement à ce qui se passe si $\hat{w}$ se réfère à tel jury d'examen ou, plus encore, à tel examinateur). On trouvera alors parfois avantage, pour user de façon plus pertinente du modèle proposé ici, de noter $^{*}\hat{v}$ cette instance évaluatrice hypothétique.

➤ Mais un point doit encore être précisé : par rapport à quelle « connaissance » de l'objet o l'instance $\hat{v}$ jugera-t-elle la connaissance qu'en a l'instance $\hat{\imath}$ *avant* δ, soit le rapport que je

---

[114] Ici, par souci de simplification, j'identifie (inexactement) une position $\hat{\imath}$ et les personnes x qui viennent à l'occuper. En pratique, cela n'est justifié que si toutes ces personnes sont supposées être, à chaque instant t, de « bons sujets » de $\hat{\imath}$.

noterai[115] $R_{a\delta}(\hat{\imath}, o)$, et *après* δ, soit le rapport noté $R_{p\delta}(\hat{\imath}, o)$? Pour cela, $\hat{w}$ suppose que $\hat{v}$ se réfère à une certaine position institutionnelle $\hat{s} = (I, p)$, qu'on nommera l'*instance standard*, dont le rapport $R_I(p, o) = R(\hat{s}, o)$ est regardé – « localement », au plan institutionnel – comme *la* référence en matière de connaissance de o. Le couple $\underline{n} = (\hat{s}, \hat{v})$ est appelé *cadre de référence cognitif*. Le quadruplet $\tilde{n} = \bar{n}{}^\frown\underline{n} = (\hat{\imath}, o, \hat{s}, \hat{v})$ est alors appelé *noyau cognitif*. Souventes fois, du point de vue de $\hat{w}$, ce noyau cognitif $\tilde{n}$ mériterait d'être noté $(\hat{\imath}, o, *\hat{s}, *\hat{v})$: pour $\hat{w}$, tant $*\hat{s}$ que $*\hat{v}$ sont alors de pures et simples hypothèses.

➤ Un noyau cognitif $\tilde{n} = (\hat{\imath}, o, \hat{s}, \hat{v})$ n'a en soi rien de « didactique ». Mais la notion de noyau cognitif permet d'explorer le cognitif dans les institutions d'une société, ce que les didacticiens comme tels ont peu fait jusqu'à présent. C'est là un phénomène que je suis tenté d'expliquer (en partie) par deux grands facteurs non indépendants. Tout d'abord, il y a *l'insuffisante rupture « épistémologique »* (c'est-à-dire *praxéologique*) entre la *position* de chercheur en didactique et celle de professeur, ce qui fait que la position de didacticien conserve beaucoup de ce qui « fait », aujourd'hui encore, la position de professeur. Ensuite, il y a l'assujettissement (qu'il faut situer, dans l'échelle de codétermination didactique, au niveau des civilisations) aux phénomènes conjugués d'*unicisation du monde* et de *pellicularité du temps* – un phénomène auquel les professeurs en particulier semblent si sensibles. Ce que je nomme ici unicisation est le phénomène de croyance en l'*unicité* des objets : il y aurait par exemple *la* notion de logarithme et, semblablement, il n'existerait qu'*une* manière de connaître cette notion unique – en d'autres termes tous les $\hat{s}$ nous montreraient *la même chose* et tous les $\hat{v}$ nous diraient *la même chose*[116]. La pellicularisation du temps est le phénomène par lequel le temps vécu devient comme pelliculaire[117] : les instances personnelles et institutionnelles semblent alors ignorer le passé comme l'avenir, ne se pensant que dans la pellicule de l'instant. La pellicularisation du temps concourt à l'évidence à l'unicisation du monde.

La notion de possiblement didactique

Avec la notion de noyau cognitif $\tilde{n} = (\hat{\imath}, o, \hat{s}, \hat{v})$ nous sommes cependant tout proche de la notion du *possiblement didactique* : il suffit d'ajouter à cela le couple $(\hat{u}, \delta)$ et l'ensemble $\mathcal{C}$ des conditions prévalentes *avant* l'intervention du geste δ pour parvenir à ce que j'ai appelé

---

[115] La notation $a\delta$ se lit « *ante* delta ». De même la notation $p\delta$ se lit « *post* delta ».

[116] Cette attitude semble reprendre un schéma théologique qui est au cœur des trois grands monothéismes (voir à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Unicité), à moins qu'elle ne lui ait donné naissance.

[117] Voir ce mot à l'adresse https://www.cnrtl.fr/definition/pelliculaire. Le latin *pellicula* signifie « petite peau ; pelure d'un fruit » (c'est un diminutif de *pellis* « peau »).

une *situation possiblement didactique*, que je note $\varsigma = (\tilde{n}, \hat{u}, \delta, \mathcal{C})$[118]. Le jugement anticipé de $\hat{w}$ (par exemple $\hat{w} \vdash \{\varsigma \text{ didactique}\}$) met en jeu ses rapports à o, à $\hat{\imath}$, à $R_{a\delta}(\hat{\imath}, o)$, à $\mathcal{C}$, à δ et donc à $\mathcal{C}' = \mathcal{C}^{/\delta}$ et à $R_{p\delta}(\hat{\imath}, o)$, mais aussi à $\hat{s}$, à $\hat{v}$ et aux rapports $R(\hat{v}, \hat{s})$, $R(\hat{v}, R_{a\delta}(\hat{\imath}, o))$ et $R(\hat{v}, R_{p\delta}(\hat{\imath}, o))$. Cela conduit à exclairer de nombreux phénomènes qu'il conviendrait d'analyser soigneusement. Ici, je m'en tiendrai à *ébaucher* de telles analyses.

➤ Je rappelle que le générateur de modèles envisagé ici comporte sept paramètres, à savoir $\hat{\imath}$, o, $\hat{s}$, $\hat{v}$, $\hat{u}$, δ, $\mathcal{C}$, en sorte qu'on peut envisager en principe une grande variété de types de systèmes modélisables. Cela est d'autant plus vrai que, par exemple, le paramètre o peut renvoyer tant à un « détail » – une praxéologie ponctuelle, par exemple le développement de $(a + b)^2$ – qu'à une praxéologie « régionale », par exemple l'algèbre élémentaire. J'ai déjà mentionné le cas, tout semblable, du paramètre δ – qui, par exemple, peut consister en la création d'une école municipale de musique ou, celle-ci existant déjà, en la création en son sein d'une classe de jazz, ou en la nomination d'un nouveau professeur dans cette classe, ou en un changement des horaires alloués, etc.

➤ Considérons tout d'abord le cas, « usuel » dans nos systèmes éducatifs, où un professeur y est seul avec un groupe X d'élèves face à un enjeu didactique o, et où

– y prend seul la décision de réaliser un certain geste δ, en sorte qu'on a $\hat{u} = y$;

– si (on prend) $\hat{w} = y$, on a, sous les conditions prévalentes $\mathcal{C}$, $\hat{\imath}$ étant la position p_e d'élève de la classe $[X, y]$), et sauf exception sans doute rarissime, $\hat{w} \vdash \{\delta \text{ didactique}\}$;

– y sera seul juge du changement cognitif intervenant entre l'avant- et l'après-δ, en sorte que $\hat{v} = y$ et que y sait seul ce qu'est l'*instance standard* $\hat{s} = (p, I)$ qu'il utilise.

Dans un tel cas, on peut imaginer que y tende (de manière non nécessairement consciente) à modifier ses rapports $R(y, \hat{s})$ (et plus encore $R(y, {*\hat{s}})$), $R(y, R_{a\delta}(\hat{\imath}, o))$ et $R(y, R_{p\delta}(\hat{\imath}, o))$ de façon à confirmer son jugement anticipé. Le professeur y peut sans doute s'efforcer de rendre publique la connaissance de $\hat{s} = (p, I)$ et de $R(\hat{s}, o)$, ce qui est pourtant, d'ordinaire, faiblement le cas (les réunions de parents semblent ne jouer que très partiellement ce rôle). Bien entendu, dans le cas général envisagé ici, il peut exister, et il existe en général, des instances $\hat{w}$ qui tiennent $\varsigma = (\tilde{n}, \hat{u}, \delta, \mathcal{C})$ pour antididactique : $\hat{w}$ peut être la position de responsable d'une association locale de parents d'élèves (alors que telle autre association soutiendra la didacticité de ς), ou encore tel inspecteur visitant le professeur y à ce moment-là.

---

[118] Je rappelle que le symbole ς n'est rien d'autre qu'une variante de la lettre σ utilisée en grec ancien lorsque celle-ci doit apparaître en position *finale* dans un mot : ainsi écri(vai)t-on Ὀδυ**σσ**εύ**ς** (*Odusseús*, Ulysse) : voir par exemple à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Sigma. Ici, cela va de soi, nous nous affranchissons de ces usages : le symbole ς figure ainsi en position initiale dans l'écriture $\varsigma = (\tilde{n}, \hat{u}, \delta, \mathcal{C})$.

➤ Quand on examine les formules $\varsigma = (\tilde{n}, \hat{u}, \delta, \mathcal{C})$ et $\tilde{n} = (\hat{\imath}, o, \hat{s}, \hat{v})$, on voit que, s'il est vrai que des divergences entre deux instances $\hat{w}$ et $\hat{w}'$ peuvent être liées à des rapports instantiels différents à $\hat{u}$, δ, ou $\mathcal{C}$ (par exemple à cause d'une mauvaise identification de la part de $\hat{w}'$ du geste δ envisagé par $\hat{u} = y$), il semble que l'essentiel des sources de divergence se trouvent dans le noyau cognitif $\tilde{n}$, c'est-à-dire aient trait aux paramères $\hat{\imath}$, o, $\hat{s}$ et $\hat{v}$. En particulier, certaines instances $\hat{w}$ peuvent avoir un rapport aux objets clés de la situation ς qui leur permet d'émettre, à l'égal de y, un jugement anticipé (éventuellement différent de celui de y), tandis que d'autres seront dans l'incapacité de se former un tel jugement : on oppose régulièrement, à cet égard, les parents qui sont eux-mêmes des enseignants (dans le même ordre d'enseignement que y) à ceux qui sont très éloignés, humainement et institutionnellement, des situations considérées.

➤ Une autre configuration mérite encore d'être examinée ici. Dans le cas général, l'instance $\hat{w}$ émet sur δ, relativement à $\tilde{n}$ et $\mathcal{C}$, c'est-à-dire émet sur la situation possiblement didactique ς, un jugement *a priori* (ou *ex ante*), fruit d'une analyse *a priori*, alors que $\hat{v}$ émettra un jugement *a posteriori* (ou *ex post*), lequel va, *de facto*, valider ou invalider le jugement de $\hat{w}$. Considérons alors le cas d'un « scénario didactique », qu'on peut modéliser comme un geste δ ou comme une suite $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ de gestes δ_i conçue par un didacticien ξ ou par une équipe[119] de didacticiens Ξ. L'équipe Ξ passe un accord avec un professeur y pour que celui-ci réalise dans l'une de ses classes le scénario didactique mis au point par Ξ, c'est-à-dire accomplisse la suite des gestes δ_k ($1 \leq k \leq n$). On doit supposer que, pour $\hat{w} = \xi$, on a $\hat{w} \vdash \{\Delta$ didactique$\}$. En principe, Ξ doit s'assurer que l'on a aussi $y \vdash \{\Delta \neg$ antididactique$\}$ et donc *au moins* $y \vdash \{\Delta$ isodidactique$\}$. Il est possible cependant que l'on ait seulement $\xi \vdash \{\Delta \neg$ antididactique$\}$ et donc au moins $\xi \vdash \{\Delta$ isodidactique$\}$. Dans le cas considéré ici, on a généralement (au moins) *deux* instances évaluatrices, à savoir $\hat{v} = y$ et $\hat{v}' = \xi$, avec, en règle générale, $\hat{s} \stackrel{?}{=} \hat{s}'$, mais souvent aussi $\hat{s} \neq \hat{s}'$, où $\hat{s}$ (respectivement, $\hat{s}'$) est l'instance standard considérée par $\hat{v}$ (resp., par $\hat{v}'$).

➤ Si les gestes δ_k ($1 \leq k \leq n$) se succèdent dans le temps, il est possible, au vu d'une analyse post-δ_{k-1} et ante-δ_k, que j'ai appelée analyse *in vivo*[120], que, par un accord entre eux, ξ et y substituent à δ_k un geste alternatif δ_k', en sorte que le scénario didactique à réaliser peut

[119] À nouveau, j'identifie abusivement l'équipe Ξ et donc chacun de ses membres, à une position institutionnelle, p_Ξ, celle de membre de l'équipe Ξ, en ignorant volontairement (dans un but de simplification) les différences, voire les divergences entre membres de l'équipe qui seraient pertinentes dans le cadre du projet d'observation ou d'expérimentation didactiques considéré.

[120] Quand $k = 1$, le geste $\delta_{k-1} = \delta_0$ est, par convention, le geste *vide* (qui consiste à ne rien faire).

évoluer tout du long et de lé. On voit ici le rôle cardinal de l'analyse des rapports $R_{a\delta}(\hat{\imath}, o)$ et $R_{p\delta}(\hat{\imath}, o)$, où $\hat{\imath}$ est la position de l'élève. (Pour le formateur de professeurs ζ, il n'est évidemment pas inintéressant d'examiner ces mêmes rapports quand $\hat{\imath}$ est la position de professeur occupée ici par *y*.) Mais on voit en même temps que, ordinairement, tant les analyses *ex ante* que les analyses *ex post* sont peu approfondies, notamment parce qu'elles manqueraient d'outils. Il en résulte une mise en avant de δ, qui temps à être valorisé ou dévalorisé en soi et pour soi, indépendamment des six autres paramètres que sont $\hat{\imath}$, o, $\hat{s}$, $\hat{v}$, $\hat{u}$ et $\mathcal{C}$. On sait que cette axiologie des gestes est soumise à des modes aux fondements souvent peu sûrs et, de toute façon, évolue dans le temps. C'est ainsi que l'acte autrefois le plus valorisé – le « cours magistral » – a depuis longtemps perdu de son lustre, dans le même temps où « l'activité » devenait le geste essentiel.

➤ Ces premières remarques sont loin de circonscrire l'arsenal modélisateur offert par la TAD. Je mentionnerai ici, avant de terminer, le *modèle curriculaire* (examiné lors de la séance 2 de cet *Humble séminaire*), le *modèle praxéologique* et le *modèle des moments de l'étude*, le *modèle de l'enquête* avec le *schéma herbartien*. Mais je voudrais revenir, ici, sur une question laissée pendante plus haut. L'objet de la science didactique, ai-je écrit, c'est « le didactique », soit l'ensemble des gestes didactiques. On voit qu'il convient de retoucher d'une manière décisive cette formulation : l'objet de la science didactique, c'est *le possiblement didactique*, c'est-à-dire l'ensemble des gestes δ qui pourraient être regardés par au moins une instance $\hat{w}$ comme modifiant les conditions $\mathcal{C}$ prévalant dans l'environnement d'une instance $\hat{\imath}$ en sorte que le nouvel ensemble $\mathcal{C}' = \mathcal{C}^{/\delta}$ fasse évoluer le rapport $R(\hat{\imath}, o)$ d'une manière jugée positive par un certain cadre de référence cognitif $\underline{n} = (\hat{s}, \hat{v})$. Nous avons dit qu'un geste didactique (en ce sens) pourra aussi bien être regardé comme antididactique par certaines instances $\hat{w}'$, comme isodidactique par d'autres instances $\hat{w}''$, comme non didactique enfin par encore d'autres instances $\hat{w}'''$. L'étude par ξ du possiblement didactique conduit ainsi à étudier du même mouvement le possiblement antididactique, le possiblement isodidactique et le non-didactique ainsi que les assujettissements des instances qui font exister ces réalités « sociales ».

ϟ

La prochaine séance de l'*Humble séminaire* devrait avoir lieu le **mardi 19 mai 2020**, à partir de 16 h 30. N'hésitez pas à me faire connaître les erreurs et impropriétés que vous auriez aperçues dans ces notes, les doutes que celles-ci vous inspirent et les questions qu'elles vous suggèrent.

YC.