Université d'Aix-Marseille

2011-2012

Master de didactique des mathématiques – 2e année

UE 35

Fondements et méthodes de la recherche en didactique

Yves Chevallard & Michèle Artaud

Travaux dirigés

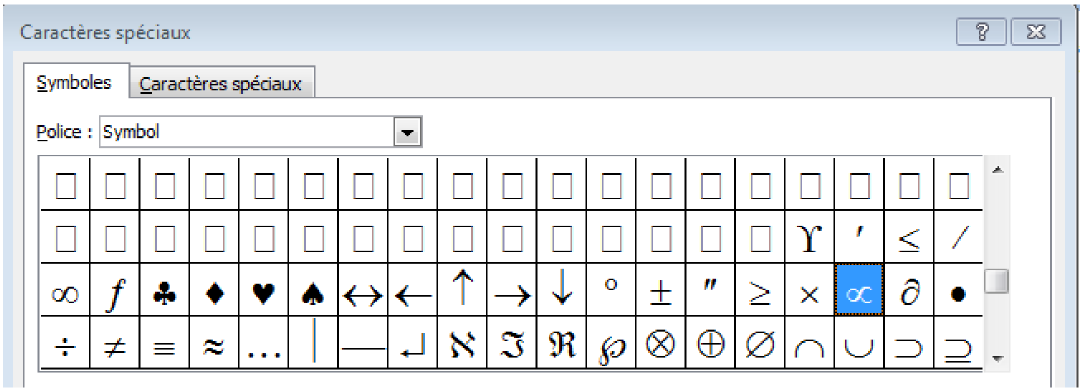
Yves Chevallard

Sommaire

TD 1. Relation et symbole de proportionnalité

L'étude des conditions et des contraintes de la diffusion d'une œuvre appelle l'*analyse praxéologique* de cette œuvre. Celle-ci doit dégager les *contraintes imposées par l'œuvre* ainsi que les *conditions* dont elle permet d'envisager l'exploitation, la modification ou la création didactiques.

On dispose ci-après d'une série de huit exposés portant sur une œuvre mathématique dont l'un des « ingrédients » clés est le symbole $\propto$, qui apparaît notamment dans la police Symbol :



Il s'agit de faire de cette œuvre mathématique supposée une analyse praxéologique qui en dégage, conjecturalement s'il y a lieu, la structure, le fonctionnement et les raisons d'être.

Exposé 1

☛ Edward Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Sciences* (1976, Berlin, Springer-Verlag), p. 71 :

> Formula (3.5.1) means that *y* is proportional to *x*. For this relationship the symbol $\propto$ is sometimes used. Thus if the type of function is more important than the specific value of *a*, we write
>
> $$y \propto x \qquad (3.5.2)$$
>
> and read "*y* is proportional to *x*"[4]. The constant proportion $y/x = a$ is called a *growth rate*, especially if the independent variable is time.

---

4. The proportionality sign $\propto$ is very practical, but not widely used. Mathematicians apply it rarely. However, the symbol is quite popular in biophysics.

Éléments d'analyse 1

1. La rencontre avec le symbole $\propto$ se fait ici dans le cadre d'un ouvrage en anglais de mathématiques pour les sciences de la vie. La note de bas de page mise par l'auteur est à cet égard révélatrice : selon lui, ce symbole serait très pratique mais ne serait pas d'un usage très répandu, tout particulièrement par « les mathématiciens », bien qu'il soit très apprécié en biophysique. Bien entendu, à ce stade de l'enquête, nous ne savons pas encore dans quels types de tâches le symbole $\propto$ se révèlerait ainsi « très pratique ».

2. Nous ne connaissons pas la formule 3.5.1 évoquée par l'auteur. Cependant, d'après ce qui en est dit dans le passage examiné, on peut conjecturer que ce pourrait être quelque chose comme « $y = kx$, $k \neq 0$ ». [En fait, la consultation de l'ouvrage indiqué, p. 70, montre que l'auteur a écrit : « One of the easiest functions is given by formula $y = ax$ (3.5.1) where a is a constant number. »]

3. L'emploi du symbole $\propto$ est introduit comme une manière de noter formellement la relation « … est proportionnel à… ». Cette relation « oublie » (volontairement) la valeur particulière du coefficient de proportionnalité k. Écrire que $y \propto x$ signifie qu'il existe un nombre k tel que $y = kx$, sans que l'on se préoccupe de la valeur précise de ce nombre k. Mais quand un tel « oubli » de k est-il pertinent ? L'auteur répond en substance : quand le *type* de fonctions est « plus important » que la fonction particulière de ce type que l'on considère. Mais quand, concrètement, en est-il ainsi ? Nous ne le savons pas à ce stade.

4. Ce que nous ignorons encore, et peut-être surtout en cette étape de l'enquête, c'est ce que *sont* x et y. Dans le passage examiné, l'auteur les désigne seulement par les symboles x et y, *à une exception près toutefois*. De manière implicite, en effet, il désigne x comme la « variable indépendante » (en invoquant les situations où cette variable est le temps). On peut donc adopter provisoirement le point de vue selon lequel x et y sont des *variables*, sans trop savoir ce que cela signifie « mathématiquement ». En conséquence, le mot sera employé provisoirement au sens où on l'emploie − sans façon, si l'on peut dire − dans les sciences de la nature : la température d'un corps est une variable, la pression d'un gaz est un variable, etc. *Nous laissons provisoirement en suspens le problème de la mathématisation de cette notion naïve de variable.*

5. En ce point, deux manques sont donc sensibles : d'abord les *raisons d'être* du symbole $\propto$, son *utilité* ; ensuite, un élément *technologique* clé, qui rende mathématiquement intelligible les notions de variable et donc de relation (binaire) entre variables. Bien entendu, il manque également des éléments *techniques* (comme use-t-on du symbole $\propto$) et, à l'autre extrême, des éléments *théoriques*. Observons encore que, si nous savons oraliser l'écriture $y \propto x$ (« y est proportionnel à x »), nous ne savons pas *nommer* le symbole $\propto$ lui-même.

Exposé 2

☛ *Wikipédia*, article “Proportionnalité” :

Proportionnalité

Ne doit pas être confondu avec proportionnelle.

On dit que deux mesures sont **proportionnelles** quand on peut passer de l'une à l'autre en multipliant ou en divisant par une même constante non nulle. Dans le cas où l'on multiplie, cette constante est appelée **coefficient de proportionnalité**.

Exemple : si, dans un magasin, le prix des pommes est de 2 euros le kg, il y a **proportionnalité** entre la somme S à payer et le poids P de pommes achetées, ce que l'on note parfois[1] :

$$S \propto P.$$

Le coefficient de proportionnalité est 2.

- Pour 1 kg, on doit payer 2 euros.
- Pour 3 kg, on doit payer 6 euros.
- Pour 1,5 kg, on doit payer 3 euros.

On remarque que le quotient des deux quantités est constant et est égal au coefficient de proportionnalité.

$$\frac{2}{1} = \frac{6}{3} = \frac{3}{1,5} = 2$$

Les Anciens comme Euclide auraient écrit que 2 est à 1 comme 6 est à 3 ou comme 3 est à 1,5.

Éléments d'analyse 2

1. On tient là un document apparemment rare, voire rarissime, en cela qu'il s'agit d'un document *en français* où apparaît le symbole $\propto$, symbole que personne dans le groupe de TD n'avait rencontré jusque-là.

2. La relation « y est proportionnel à x » cède la place ici à la relation « les mesures [x et y] sont proportionnelles » : celle-ci est réalisée s'il existe $k \neq 0$ tel que $y = kx$ ou $y = x/k$.

3. Une chose est nouvelle : l'utilisation des lettres x et y est remplacée par l'usage du mot *mesure*. Les lettres x et y désigneraient donc des « mesures ». L'exemple donné concerne ces deux « mesures » que sont le *prix* S d'une quantité de denrée vendue au poids et le *poids* P de cette quantité : on a $S \propto P$ et aussi, par définition, $P \propto S$ (écriture qui, elle, n'apparaît pas explicitement).

4. Ce qu'on peut retenir surtout, c'est que les auteurs de ce passage ont rencontré le problème de nommer ce que l'auteur précédent désignait par x et y et ont tenté de le résoudre en employant le mot de *mesure* – ce mot étant pris, à l'évidence, en un sens informel (la température d'un corps est une mesure, son volume également, son poids itou).

Exposé 3

☛ *Wikipedia*, article « Proportionality (mathematics) » :

Direct proportionality [edit]

Given two variables *x* and *y*, *y* is ***(directly) proportional*** *to x* (*x and y* ***vary directly***, or *x and y are in* ***direct variation***) if there is a non-zero constant *k* such that

$$y = kx.$$

The relation is often denoted

$$y \propto x$$

and the constant ratio

$$k = y/x$$

is called the **proportionality constant** or **constant of proportionality**.

Éléments d'analyse 3

1. On revient ici à l'anglais et à la dénomination de *variable* : x et y sont des variables. Le mot semble s'imposer.

2. On peut traduire ainsi une partie du contenu « mathématique » de ce passage : « étant donné deux variables x et y, on dit que y est (directement) proportionnel à x, et on écrit $y \propto x$, s'il existe un nombre $k \neq 0$ tel que l'on a $y = kx$. »

3. On notera que la notion de variable n'est pas plus claire pour le moment. Ce qui semble aller de soi, cependant, c'est que les variables sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exposé 4

☛ Établissement de la loi des gaz parfaits [en ligne]
http://rmarkmatthews.squarespace.com/storage/chemtutor/gas_law1.htm

The Ideal Gas Law

So what have we learned so far, gang? Well, we now have three spiffy little proportionalities:

$$V \propto 1/P$$

$$V \propto T$$

$$V \propto n$$

If we combine these into one equation, this gives us $V \propto (nT)/P$, which we can rearrange into something that starts to look ***vaguely*** familiar: $PV \propto nT$.

Now remember how we set all those equations above to equalities by including a proportionality constant? Well, we do the same thing here: $PV = nCT$

But you know, the letter C has been used to death in science, I mean you've got concentration, speed of light (which doesn't even start with c!), centi-. About we use a different letter for our constant. How about, oh, I don't know… the letter R: $PV = nRT$

VIOLA!!!!!!

Here, it's useful to actually KNOW what our constant is (which is usually referred to as the molar gas constant), which has been calculated as 0.08206 L-atm/mol-K.

Éléments d'analyse 4

1. L'auteur de ce texte part de ce qu'il appelle « trois élégantes petites proportionnalités », qui semblent être d'origine expérimentale : $V \propto 1/P$; $V \propto T$; $V \propto n$. La variable V (le volume d'un gaz) est proportionnelle à l'inverse de la pression ($1/P$), à la température absolue (T) et au nombre de moles (n). (Ces précisions quant à la nature des « variables » V, P, T et n ne sont pas données dans le texte ; mais elles semblent y être considérées comme « bien connues » des lecteurs visés.)

2. L'objectif du texte semble être d'établir la loi de Boyle-Mariotte *à partir de ces trois relations de proportionnalité*. Le premier pas a consisté – semble-t-il – à « oublier » les coefficients de proportionnalité pour ne retenir que les relations $V \propto 1/P$; $V \propto T$; $V \propto n$. *C'est alors que, pour la première fois depuis le début de l'enquête, nous observons un emploi non trivial du symbole* $\propto$.

3. Partant des relations $V \propto 1/P$; $V \propto T$; $V \propto n$, l'auteur semble en effet en *déduire* la relation $V \propto (nT)/P$, dont la deuxième variable apparaît comme le *produit* des trois variables auxquelles la variable V est connue pour être proportionnelle, à savoir $1/P$, T et n.

4. Parvenu en ce point, l'auteur multiplie par P les deux membres de la « proportionnalité », arrivant ainsi à $PV \propto nT$, proportionnalité qui, dit l'auteur, paraît *vaguement* familière.

5. C'est alors que l'auteur revient à la *relation d'égalité* en introduisant un coefficient de proportionnalité qu'il désigne d'abord par la lettre C (parce qu'il s'agit d'une constante) puis par la lettre R (qui est en fait la lettre traditionnellement utilisée par les physiciens). La relation de proportionnalité $PV \propto nT$ prend alors la forme de la relation d'égalité $PV = nRT$. (L'ordre d'écriture des lettres n, R et T adopté par l'auteur est lui aussi traditionnel.)

6. Bien entendu, le problème qui surgit immédiatement est celui des *techniques* de manipulation du symbole $\propto$ mises en œuvre par l'auteur – que sont-elles, au juste ? – et de leur *justification* « mathématique ». L'enquête a donc révélé un usage non trivial du symbole $\propto$; mais nous ne connaissons, à ce stade, ni la composante *technique*, ni la composante *technologique* de ses emplois.

Exposé 5

☛ Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations*, vol. 1, 1928/1993, p. 297 :

A special symbol for variation sometimes encountered in English and American texts is $\propto$, introduced by Emerson.[4] "To the Common Algebraic Characters already receiv'd I add this $\propto$, which signifies a general Proportion; thus, $A \propto \frac{BC}{D}$, signifies that A is in a constant ratio to $\frac{BC}{D}$." The sign was adopted by Chrystal,[5] Castle,[6] and others.

[4] W. Emerson, *Doctrine of Fluxions* (3d ed.; London, 1768), p. 4.
[5] G. Chrystal, *Algebra*, Part I, p. 275.
[6] Frank Castle, *Practical Mathematics for Beginners* (London, 1905), p. 317.

Éléments d'analyse 5

1. Notons d'abord que l'ouvrage de Cajori est aujourd'hui accessible sur Internet, à l'adresse http://ia700506.us.archive.org/9/items/historyofmathema031756mbp/historyofmathema031756mbp.pdf.

2. Les documents examinés jusqu'ici pouvaient donner l'impression que le symbole $\propto$ était d'apparition relativement récente, la première mention connue de nous en ce point remontant à 1975. Ce nouveau document montre qu'il n'en est rien. L'ouvrage de Florian Cajori paraît en 1928 et l'auteur donne pour introducteur du symbole W. Emerson, auteur d'un traité dont la 3ᵉ édition est de 1768. Notons en outre que Cajori ne signale la présence de ce symbole que dans des textes anglais et américains.

3. Si Emerson – cité par Cajori – dit vrai, c'est bien à lui que nous devrions ce signe : « To the common algebraic characters already received, *I add* this $\propto$ », écrit-il, ce qui semble vouloir dire que $\propto$ est un symbole de son invention, comme l'avance Cajori lui-même (puisqu'il précise que le symbole a été « introduced by Emerson ». On peut donc conclure que le symbole apparaît au XVIIIᵉ siècle.

4. Le fait que le symbole soit chose nouvelle entraîne d'ailleurs l'obligation d'en expliciter sommairement la signification, ainsi que le fait Emerson : en simplifiant l'exemple formel qu'il utilise, on peut dire que $A \propto B$ signifie que A est « dans un rapport constant à » B, c'est-à-dire que A/B est constant, soit encore qu'il existe une constante k telle que $A = kB$.

Exposé 6

☛ W. Emerson, Doctrine of fluxions, 1757 (2ᵉ éd.) :

> 4. To the common Algebraic Characters already receiv'd I add this $\propto$, which ſignifies a general Proportion; thus, $A \propto \frac{BC}{D}$, ſignifies that A is in a conſtant Ratio to $\frac{BC}{D}$; that is (if a, b, c, d be other Values of theſe Quantities) $A : \frac{BC}{D} :: a : \frac{bc}{d}$; and thus every general Proportion is to be underſtood.

Éléments d'analyse 6

1. Ce document est extrait de l'ouvrage même d'Emerson, et plus exactement de la *deuxième* édition de cet ouvrage, parue en 1757, que l'on trouvera sur Internet, à l'adresse ci-après : http://books.google.com/books?id=xg8OAAAAQAAJ&printsec=frontcover&hl=fr&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false.

2. On y vérifie la citation donnée par Cajori. Mais on voit que le passage cité comporte un additif touchant la définition du symbole $\propto$. À nouveau, on peut reformuler cet additif en usant de notations déjà utilisées : si $y \propto x$ et si a est une valeur de la variable x et b la valeur correspondante de la variable y, on a la « proportion » $y : x :: b : a$. Celle-ci se lit « y est à x comme b est à a » et est gouvernée par la règle selon laquelle le « produit des (termes) moyens », à savoir, ici, $x \times b$, est égal au « produit des (termes) extrêmes », soit ici $y \times a$: on a donc $bx = ay$.

3. Nous sommes là, apparemment, aux origines du symbole $\propto$. On peut penser – sans en être sûr – que ce symbole apparaît dès la *première* édition de la *Doctrine of fluxions*. Une enquête rapide sur Internet semble montrer qu'elle est de 1748 – Emerson est né en 1801, mort en 1882 et la *Doctrine of fluxions* serait l'un de ses premiers ouvrages publiés, selon l'article « William Emerson (mathematician) » de *Wikipedia*.

4. En ce point, nous savons en outre quand on peut écrire que $y \propto x$; et nous savons aussi comment tirer profit de la chose, connaissant un couple de valeurs correspondantes (x_0, y_0), pour calculer la valeur de y (respectivement, de x) correspondant à une valeur de x (resp., de y). On a aperçu aussi (dans l'exposé 4) une partie au moins de l'utilité de l'emploi du symbole $\propto$. Mais nous ignorons toujours, partiellement ou totalement, les techniques et surtout la *technologie* de cet emploi.

Exposé 7

☛ G. Chrystal, *Algebra*, I, 1904, pp. 275-280

L'exposé retenu est scindé ci-après en un certain nombre de fragments.

Exposé 7.1 (p. 275)

When y depends on x in the manner just explained it is said *to vary directly as x*, or, more shortly, *to vary as x*.

A better * phrase, which is also in use, is "*y is proportional to x*."

This particular connection between y and x is sometimes expressed by writing

$$y \propto x.$$

§ 19.] In place of x, we might write in equation (2) x^2, $1/x$, $1/x^2$, $x+b$, and so on; we should then have

$$y = ax^2 \qquad (\alpha),$$
$$y = a/x \qquad (\beta),$$
$$y = a/x^2 \qquad (\gamma),$$
$$y = a(x+b) \qquad (\delta).$$

* The use of the word "Variation" in the present connection is unfortunate, because the qualifying particle "as" is all that indicates that we are here concerned not with variation in general, as explained in § 17, but merely with the simplest of all the possible kinds of it. There is a tendency in uneducated minds to suppose that this simplest of all kinds of functionality is the only one; and this tendency is encouraged by the retention of the above piece of antiquated nomenclature.

Éléments d'analyse 7.1

1. Notons que, à nouveau, l'ouvrage dont est extrait l'exposé 7 est disponible en ligne, à l'adresse http://djm.cc/library/Algebra_Elementary_Text-Book_Part_I_Chrystal_edited.pdf.

2. On retrouve dans le fragment examiné des éléments connus. On notera toutefois la retenue de l'auteur quand il note : « Ce lien particulier entre *y* et *x* est *quelquefois* exprimé en écrivant $y \propto x$ » Cela ne permet guère de prévoir ce qu'on découvrira un peu plus loin, à savoir un traitement quasi exhaustif – et attendu ! – des règles de « l'algèbre » du symbole $\propto$.

3. Le plus important pour l'auteur est la formulation « *y* est proportionnel à *x* ». La note de bas de page le confirme : le mot de variation employé à propos de ce qui est en fait un cas *particulier* – le cas le plus simple – de variation, à savoir celui où *y* varie de façon *proportionnelle* à *x*, lui paraît bien malheureux (*unfortunate*). D'une façon plus générale, l'auteur est sensible à la qualité des formulations employées. Dire « *y* varie comme *x* » ou « *y* varie directement comme *x* », expressions traditionnelles, lui paraît inférieur au fait de dire « *y* est proportionnel à *x* », qui est, à ses yeux, *a better phrase*, une expression (bien) meilleure.

Exposé 7.2 (p. 276)

§ 20.] The whole matter we are now discussing is to a large extent an affair of nomenclature and notation, and a little attention to these points is all that the student will require to prove the following propositions. We give the demonstrations in one or two specimen cases.

(1.) *If* $z \propto y$ *and* $y \propto x$, *then* $z \propto x$.

Proof.—By data $z = ay$, $y = bx$, where a and b are constants; therefore $z = abx$. Hence $z \propto x$, since ab is constant.

(2.) *If* $y_1 \propto x_1$ *and* $y_2 \propto x_2$, *then* $y_1 y_2 \propto x_1 x_2$.

Proof.—By data $y_1 = a_1 x_1$, $y_2 = a_2 x_2$, where a_1 and a_2 are constants. Hence $y_1 y_2 = a_1 a_2 x_1 x_2$, which proves the proposition, since $a_1 a_2$ is constant.

In general if $y_1 \propto x_1$, $y_2 \propto x_2$, . . ., $y_n \propto x_n$, *then* $y_1 y_2 \dots y_n \propto x_1 x_2 \dots x_n$. *And, in particular, if* $y \propto x$, *then* $y^n \propto x^n$.

(3.) *If* $y \propto x$, *then* $zy \propto zx$, *whether* z *be variable or constant.*

(4.) *If* $z \propto xy$, *then* $x \propto z/y$, *and* $y \propto z/x$.

(5.) *If* z *depend on* x *and* y, *and on these alone, and if* $z \propto x$ *when* y *is constant, and* $z \propto y$ *when* x *is constant, then* $z \propto xy$ *when both* x *and* y *vary.*

Proof.—Consider the following system of corresponding values of the variables involved.

Dependent Variable.	Independent Variables.
z	$x, y.$
z_1	$x', y.$
z'	$x', y'.$

Then, since y has the same value for both z and z_1, we have, by data,

$$\frac{z}{z_1} = \frac{x}{x'}.$$

Again, since x' is the same for both z_1 and z', we have, by data,

$$\frac{z_1}{z'} = \frac{y}{y'}.$$

From these two equations we have

$$\frac{z}{z_1} \times \frac{z_1}{z'} = \frac{x}{x'} \times \frac{y}{y'},$$

that is,

$$\frac{z}{z'} = \frac{xy}{x'y'},$$

which proves that $z \propto xy$.

Éléments d'analyse 7.2

1. Ce fragment propose enfin les développements que nous attendions : l'auteur y énonce et y démontre les règles de manipulation du symbole $\propto$. L'exorde souligne que tout ce qui suit est fort simple : le lecteur suivra l'auteur au prix d'un peu d'attention (*a little attention*).

2. Des cinq « règles » (ou théorèmes) que contient ce fragment, seule la cinquième appelle un peu d'invention mathématique. Les autres ne demandent qu'une traduction adéquate – des mots vers les écritures symboliques, et inversement. La démonstration des règles (1) et (2) est explicitée et permet au lecteur de se familiariser avec la technique de démonstration à mettre en œuvre. L'auteur laisse travailler son lecteur en autonomie pour les deux règles suivantes. La règle (3) dit que, si $y \propto x$ et si z est une constante ou une variable, alors on a $zy \propto zx$. Il existe en effet a tel que $y = ax$ et on a donc $zy = z(ax) = a(zx)$, si bien que l'on a $zy \propto zx$. Notons que c'est cette règle qu'utilise (implicitement) l'auteur de l'exposé 4 pour passer de la « proportionnalité » $V \propto (nT)P$ à $PV \propto nT$. La règle (4), ensuite, dit que, si $z \propto xy$, alors on a $x \propto z/y$ et $y \propto z/x$. Dans le premier cas, il existe une constante a telle que $z = axy$ et, en supposant que y ne s'annule pas, on a donc $z/y = ax$, ou encore $x = a^{-1}z/y$ et donc $x \propto z/y$ (ce qui suppose bien sûr a non nul). Le second cas se traite pareillement.

3. La règle (5) est le clou de l'exposé. Pour plus de lisibilité, le lecteur moderne peut considérer une fonction f telle que $z = f(x, y)$: on suppose que z ne dépend *que* de x et de y. On suppose alors que, pour toute valeur y_0 de la variable y, il existe un nombre $a(y_0)$ tel que $f(x, y_0) = a(y_0)x$, c'est-à-dire que, pour toute valeur fixée de y, on a $z \propto x$ (le coefficient de proportionnalité changeant avec la valeur de y) ; et de même que, pour toute valeur fixée de x, on a $z \propto y$. Alors, dit la règle (5), on a aussi $z \propto xy$ (c'est-à-dire qu'il existe a tel que $z = axy$).

4. Comment démontrer la règle (5) ? La présentation de Chrystal gagne en clarté à être remise à l'endroit, au prix d'un peu de polysémie notationnelle. Pour démontrer que $z \propto xy$, il faut montrer que, quels que soient les couples de valeurs (x, y) et (x', y'), si l'on désigne par z et z' les valeurs correspondantes de la variables z, on a l'égalité : $\frac{z}{z'} = \frac{xy}{x'y'}$. Considérons pour cela la valeur $z_1 = f(x', y)$. Il faut évidemment pour cela que f soit définie au point (x', y) de $\mathbb{R}^2$, ce que nous supposons. Comme $z \propto x$, on a alors $\frac{z}{z_1} = \frac{x}{x'}$. De la même façon, du fait que $z \propto y$, on a $\frac{z_1}{z'} = \frac{y}{y'}$. Il vient finalement : $\frac{z}{z'} = \frac{z}{z_1} \times \frac{z_1}{z'} = \frac{x}{x'} \times \frac{y}{y'} = \frac{xy}{x'y'}$, CQFD.

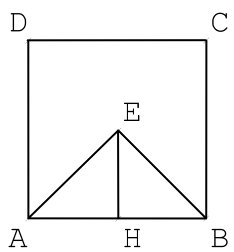
5. On note qu'il s'agit là, en substance, du théorème employé (implicitement) par l'auteur de l'exposé 4 pour passer des « three spiffy little proportionalities » que sont $V \propto 1/P$, $V \propto T$ et $V \propto n$ à la proportionnalité $V \propto (nT)/P$.

Exposé 7.3 (pp. 277-278)

> A good example of this case is the dependence of the area of a triangle upon its base and altitude. We have
>
> Area $\propto$ base (altitude constant) ;
>
> Area $\propto$ altitude (base constant).
>
> Hence area $\propto$ base $\times$ altitude, when both vary.

Éléments d'analyse 7.3

1. Il s'agit là du premier exemple d'application proposé. L'auteur y suppose connu – « d'après le cours de géométrie », comme on le disait autrefois – le fait que l'aire d'un triangle de hauteur fixée est proportionnelle à la base et est proportionnelle à la hauteur lorsque la base est fixée. On en déduit que l'aire est proportionnelle au produit base × hauteur.



2. Déterminons le coefficient de proportionnalité correspondant. Considérons un carré de côté ℓ (ci-contre). Le triangle AEB a pour aire le quart de l'aire du carré, soit $\frac{1}{4}\ell^2$; par ailleurs le produit base × hauteur = AB × EH = $\ell \times \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}\ell^2$, en sorte que l'on a (ici, *et dans le cas général*) : aire = $\frac{1}{2}$ (base × hauteur).

3. Bien entendu, on pourrait appliquer cela au cas de l'aire du *rectangle* par exemple. Si l'on sait que l'aire A est proportionnelle à chacun des deux côtés x et y, on en conclut que $A \propto xy$. La considération du cas du carré permet alors de conclure que le coefficient de proportionnalité vaut 1.

Exposé 7.4 (p. 278)

(6.) In a similar manner we may prove that *if z depend on $x_1, x_2, \ldots, x_n$, and on these alone, and vary as any one of these when the rest remain constant, then $z \propto x_1x_2 \ldots x_n$ when all vary.*

(7.) *If $z \propto x$ (y constant) and $z \propto 1/y$ (x constant), then $z \propto x/y$ when both vary.*

For example, if V, P, T denote the volume, pressure, and absolute temperature of a given mass of a perfect gas, then

$$V \propto 1/P \text{ (T constant)}, \quad V \propto T \text{ (P constant)}.$$

Hence in general $V \propto T/P$.

Éléments d'analyse 7.4

1. La règle 6 généralise la règle 5. La démonstration précise en est laissée au lecteur.

2. La règle 7 est la dernière qu'énoncera Chrystal. On suppose que $z \propto x$ et $z \propto 1/y$ (c'est-à-dire que z est « inversement proportionnel » à y). D'après la règle 5, on a $z \propto x(1/y)$. Comme $x(1/y) = x/y$, la conclusion suit.

3. Comme on l'aura observé déjà, ce sont les règles (6) et (7) qu'utilisent en fait l'auteur de l'exposé 4. On retrouve dans le texte de Chrystal l'exemple apparemment classique de la loi des gaz parfaits : de ce que $V \propto 1/P$ et $V \propto T$, on déduit que $V \propto T/P$.

4. À l'issue de cette étape, nous disposons d'une certaine connaissance de la technique d'emploi de $\propto$ et de la notion de "proportionnalité" et de la technologie idoine. Il nous manque encore, cependant, une technologie adéquate prenant en charge la notion même de « variable ».

Exposé 8

☛ *Nouvelle encyclopédie autodidactique Quillet. L'enseignement moderne et pratique*, tome 1, 1958, pp. 216-217 :

202. GRANDEURS PROPORTIONNELLES À PLUSIEURS AUTRES

Il peut arriver qu'une grandeur A dépend proportionnellement de plusieurs autres.

Ainsi le poids d'un cylindre métallique varie avec la densité du métal, le rayon de sa base, la longueur de son axe ; son volume varie avec son rayon et la longueur de l'axe.

1° Une grandeur A est directement proportionnelle à plusieurs autres B, C, D, E si ces dernières grandeurs sauf une E, restant fixes, les valeurs de A et de E varient dans le même rapport.

2° Une grandeur A est directement proportionnelle à la grandeur B et inversement proportionnelle à la grandeur C lorsque :

a) C étant constante, les valeurs de A et B sont directement proportionnelles ;

b) B étant constante, les valeurs de A et C sont inversement proportionnelles.

203. Soient : V le volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon r.

V_1 le volume d'un autre cylindre de hauteur h et de rayon r'.

V' le volume d'un troisième cylindre de hauteur h' et de rayon r'.

La longueur de l'axe ne variant pas, les volumes sont directement proportionnels aux carrés des rayons :

$$\frac{V}{V_1} = \frac{r^2}{r'^2}$$

Les rayons ne variant pas, les volumes sont directement proportionnels aux longueurs des axes :

$$\frac{V_1}{V'} = \frac{h}{h'}$$

Multiplions membre à membre ces deux égalités : $\frac{V}{V_1} \times \frac{V_1}{V'} = \frac{r^2}{r'^2} \times \frac{h}{h'}$, ou : $\frac{V}{V'} = \frac{r^2}{r'^2} \times \frac{h}{h'} = \frac{r^2 \times h}{r'^2 \times h'}$;

d'où le théorème :

Théorème. − Si une grandeur A est directement proportionnelle à plusieurs autres, les valeurs de A sont directement proportionnelles aux produits des valeurs correspondantes des autres grandeurs.

Éléments d'analyse 8

1. Cet exposé, extrait d'un ouvrage français, ne contient aucune mention du symbole $\propto$. Mais on voit vite qu'il a trait à la situation où l'on sait qu'une variable z est proportionnelle à deux variables x et y (ou plus). Dans le cas du volume V d'un cylindre de hauteur h et de rayon r, on a $V \propto h$ et $V \propto r^2$; on peut donc conclure que $V \propto hr^2$.

2. La démonstration donnée est toute semblable à celle de la règle (5) de l'exposé 7. On observera que, ici, la démonstration se fait dans un cas apparemment particulier, qui est en fait un cas paradigmatique (il suffit d'y remplacer V par z, h par x et r^2 par y pour obtenir le cas général).

3. On observera la bizarrerie de l'énoncé du théorème : *Si une grandeur A est directement proportionnelle à plusieurs autres, les valeurs de A sont directement proportionnelles aux produits des valeurs correspondantes des autres grandeurs.* L'énoncé passe des grandeurs (le mot *variable* n'est pas utilisé) aux *valeurs* des grandeurs et cela parce que les auteurs ne se permettent pas de parler de produit *de grandeurs* (ou, pour nous, *de variables*). S'ils se le permettaient, on aurait : *Si une grandeur A est directement proportionnelle à plusieurs autres, alors A est directement proportionnelle au produit de ces autres grandeurs*. Ou encore, en un langage qui est allé s'affermissant tout au long de l'enquête : *Si une variable A est proportionnelle à plusieurs autres, alors A est proportionnelle au produit de ces autres variables*.

4. L'enquête s'arrête provisoirement ici. Un point important demeure non élucidé : la notion de variable elle-même. Celle-ci fera l'objet de l'enquête suivante.

TD 2. Mathématisations manquantes ou incomplètes

Question 1. Comment démontrer qu'un cercle a un centre unique ?

1. Cette question illustre un fait essentiel à l'activité mathématique : dès que l'on dispose de quelques propriétés de base, on peut en *déduire* d'autres, par le moyen d'un *raisonnement*. Considérons donc un cercle de centre O passant par un point donné M ≠ O. Peut-il exister un autre centre de ce cercle ? Voici une manière de procéder (qui suppose antérieurement connues certaines propriétés). Soit trois points distincts A, B et C du cercle. Si O est le centre donné du cercle, alors OA = OB = OC, en sorte que O appartient à la médiatrice d de [AB] (puisque OA = OB) et à la médiatrice d' de [BC] (puisque OB = OC). Si l'on avait $d = d'$, A et B seraient symétriques par rapport à cette médiatrice, de même que B et C, en sorte que l'on aurait C = A, contrairement à l'hypothèse que A, B et C sont distincts. Par suite, les médiatrices d et d' sont sécantes en O. Comme tout centre O' du cercle appartient de même à d et à d', il est par suite identique à O, CQFD.

2. En supposant une mathématisation plus avancée, on peut établir l'unicité du centre d'un cercle C de multiples façons. Plaçons-nous ainsi dans un repère orthonormé d'origine O et prenons pour point de coordonnées (1, 0) le point M précédent. Le cercle C a alors pour équation $x^2 + y^2 = 1$. Un cercle C' de centre (a, b) a pour équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, soit encore

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - (a^2 + b^2).$$

L'intersection des cercles C et C' admet le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ ax + by = \frac{1}{2}[(a^2 + b^2) - r^2 + 1] \end{cases}.$$

Pour que cette intersection soit le cercle C, il faut (et il suffit) que l'équation

$$ax + by = \frac{1}{2}[(a^2 + b^2) - r^2 + 1]$$

soit vérifiée par tout point du cercle C. Pour le point M de coordonnées (1, 0), on doit donc avoir $a = \frac{1}{2}[(a^2 + b^2) - r^2 + 1]$. Pour le point opposé, de coordonnées $(-1, 0)$, on doit avoir de même $-a = \frac{1}{2}[(a^2 + b^2) - r^2 + 1$, ce qui entraîne donc $a = 0$ et $b^2 - r^2 + 1 = 0$. En considérant les points de coordonnées (0, 1) et (0, -1), on obtient de même $b = 0$, et donc finalement $r^2 = 1$, soit $r = 1$. Pour que le cercle de centre le point de coordonnées (a, b) et de rayon r coïncide avec le cercle C, il faut donc que son centre soit le point O (et que son rayon vaille 1), CQFD.

Question 2. Comment mathématiser la notion de variable rencontrée lors du TD 1 ?

Exposé 2.1

☛ Frédéric Pham, *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés* (1992, Paris, InterEditions, pp. 23-24) :

> Le problème de la notation différentielle n'est qu'un aspect d'un problème beaucoup plus vaste de notations en mathématiques. Très schématiquement, on peut opposer le système de notations « classique », qui « déclare » les *variables* en leur attribuant des noms x, y, ... (et n'éprouve pas toujours le besoin d'attribuer des noms aux relations entre ces variables), et le système de notations « moderne » qui ne déclare que les *relations* (par exemple les applications), prenant soin de noter différemment même des applications trivialement déduites l'une de l'autre (par exemple une application et sa restriction), et de donner des noms même à des applications « triviales » comme l'inclusion d'un ensemble dans un autre.
>
> Ce deuxième système de notations est devenu le « système officiel » dans la remise en ordre des mathématiques qui caractérise le milieu de ce siècle. Il a certainement beaucoup aidé à dissiper certaines confusions du discours mathématique classique. Mais conçu avant tout pour les grandes synthèses abstraites, il est souvent lourd à utiliser dans la pratique (et complètement inadapté, dans la plupart des cas, à la façon de penser des physiciens, pour ne citer qu'eux). Dans leur pratique quotidienne les mathématiciens utilisent donc tour à tour l'un ou l'autre système de notations, ou un mélange des deux. Mais au lieu de chercher à enseigner aux étudiants les mathématiques telles qu'elles se pratiquent, on continue trop souvent à propager le mythe d'une notation mathématique « parfaite » et unique, indépendante du contexte, permettant d'éviter « automatiquement » de faire des erreurs de raisonnement – mythe dont le succès est d'autant mieux assuré qu'on s'arrange pour ne présenter aux étudiants que des abstractions isolées de tout contexte, où effectivement le mythe fonctionne bien. Moyennant quoi les étudiants confondent l'apprentissage, de toutes façons difficile, de la rigueur, avec la soumission aveugle à une « langue de bois » qui paralyse toute pensée.

Éléments d'analyse 2.1

1. On peut s'étonner qu'une enquête sur la notion de variable démarre avec un extrait d'un ouvrage relevant d'un domaine mathématique « avancé ». On doit voir en cela, d'abord, le fait que la question étudiée ici *est rarement posée* dans la littérature « mathématique ».

2. Par contraste, l'exposé examiné explicite nettement la différence entre ce que son auteur appelle deux « systèmes de notations », le système « classique » (celui des *variables*) et le système « moderne » devenu système « officiel » (fondé sur la notion de *fonction*). Il note que la quasi-disparition « officielle » du système « classique » est un tournant aux conséquences fâcheuses, même si la promotion – devenue rapidement exclusivité – du système « moderne » a permis historiquement de clarifier bien des situations obscures.

3. On ne s'arrêtera pas, ici, sur l'intérêt de penser en termes de variables (nous y reviendrons). Mais notons l'existence, en relation avec la notion de *différentielle*, de la technique suivante, qui facilite la vie en bien des cas. Si, par exemple, on a $y = \sqrt{x}$, il vient $y^2 = x$ et donc $2y\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$, ce qui donne

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

De même, si l'on veut calculer la pente de la tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ au point de coordonnées $x_0 = 0{,}8$ et $y_0 = 0{,}6$, on différentie l'équation, ce qui donne $2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0$ et donc $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$. La pente de la tangente au point (x_0, y_0) est ainsi $-\frac{0{,}8}{0{,}6} = -\frac{4}{3}$. Cette technique nous épargne le lourd calcul consistant à expliciter y en fonction de x − ce qui donnerait (ici) $y = \sqrt{1 - x^2}$, puis à calculer la dérivée de la fonction ainsi obtenue, soit $y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}$.

4. L'exposé 1.1 est extrait du chapitre 1 du livre de F. Pham. Ce chapitre, qui s'intitule « Le calcul différentiel tel qu'on le pratique vraiment », s'ouvre par un « petit exemple naïf », celui de la détermination de la tangente au point de coordonnées (2, 1) au cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2x + y = 10$. La technique déjà utilisée conduit ici à trouver que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2$. L'auteur ajoute à cela le développement que voici (p. 20) :

Quelques réactions à cet exemple

Un groupe d'étudiants de SPI : « La méthode est drôlement simple, pourquoi est-ce qu'on nous ne l'a pas apprise en terminale ? »

Des collègues mathématiciens de l'université : « Cette méthode n'est pas du niveau premier cycle, car elle cache un théorème profond qui est le théorème des fonctions implicites. »

Les « étudiants de SPI » mentionnés sont des étudiants de première année de l'option « Sciences pour l'ingénieur » de l'université de Nice, à la fin des années 1980. Le contraste mis en évidence par ces commentaires divergents est celui de la facilité de la *technique* et de la difficulté (ou de la profondeur) de la *technologie* mathématique, *telle que l'envisagent les mathématiciens cités* par l'auteur. C'est là un type de situations de « mathématisation incomplète » – et insatisfaisante aux yeux de certains mathématiciens – sur lequel nous reviendrons.

Exposé 2.2

☛ Variable aléatoire. (2011, 21 octobre). *Wikipédia, l'encyclopédie libre*. http://fr.wikipedia.org/wiki/Variable_aléatoire

Variable aléatoire

Une **variable aléatoire** est une fonction définie sur l'ensemble des éventualités, c'est-à-dire l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Une **variable aléatoire** est souvent à valeurs réelles (gain d'un joueur dans un jeu de hasard, durée de vie) et on parle alors de variable aléatoire réelle : $X : \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$. La **variable aléatoire** peut aussi associer à chaque éventualité un vecteur de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, et on parle alors de vecteur aléatoire : $X : \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}^n$ ou $X : \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{C}^n$. La **variable aléatoire** peut encore associer à chaque éventualité une valeur qualitative (couleurs, Pile ou Face), ou même une fonction (p.e. une fonction de $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, et on parlera alors de processus stochastique.

Ce furent les jeux de hasard qui amenèrent à concevoir les **variables aléatoires**, en associant à une éventualité (résultat du lancer d'un dé, d'un tirage à pile ou face, d'une roulette, ...) un gain. Cette association éventualité-gain a donné lieu par la suite à la conception d'une fonction de portée plus générale. Le développement des variables aléatoires est associé à la théorie de la mesure.

Définition — Soient (Ω, $\mathcal{F}$, **P**) un espace probabilisé et (E, $\mathcal{E}$) un espace mesurable. On appelle variable aléatoire de Ω vers E, toute fonction mesurable X de Ω vers E.

Éléments d'analyse 2.2

1. Si la notion de *variable*, tout court, n'est guère commentée dans la littérature mathématique « moderne », chacun sait, par ses études mathématiques, que le mot de variable est employé dans un grand domaine des mathématiques au moins : celui de la *théorie des probabilités*, où l'on parle de variables *aléatoires*. D'où l'idée d'aller enquêter de ce côté-là.

2. À cet égard, l'exposé 1.2 est sans doute aujourd'hui le document d'accès le plus immédiat. Or, d'emblée, il nous dit qu'une variable (aléatoire) est une *fonction*, une fonction définie sur un ensemble – appelé ici *ensemble des éventualités* – que l'on note par la lettre grecque Ω.

3. Cela peut nous amener à ébaucher la définition suivante : une variable serait une fonction définie sur un certain ensemble Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (s'il s'agit d'une variable « réelle »). Ce qui, en ce point de notre enquête, reste pourtant quelque peu mystérieux, c'est la nature de l'ensemble Ω.

Exposé 2.3

☛ Random variable. (2012, 20 mars). *Wikipedia, the free encyclopedia*.
http://en.wikipedia.org/wiki/Random_variable

Random variable

In probability and statistics, a **random variable** or **stochastic variable** is, roughly speaking, a variable whose value results from a measurement on a system that is subject to variations due to chance. Intuitively, a random variable is a numerical description of the outcome of an experiment (e.g., the possible results of rolling two dice: (1, 1), (1, 2), etc.). Alternatively, a random variable can be thought of as a quantity whose value can *not* exist, as a constant (e.g., unchanging, regardless of changes in context); or as an always fixed point in a continuum (when a particular context presents itself more than once). But it is a variable which can *only* take on a calculable *range* of different values; and it is the probability distribution that is used to describe the probabilities that different values will arise in any particular context. And even if a particular context presents itself multiple times, up to and including an infinite number of times, the consequence would still be a calculable range or probability distribution that only a range different values would arise. Realizations of a random variable are called random variates.

Éléments d'analyse 2.3

1. Ayant consulté l'article de *Wikipédia* en français, il est naturel d'aller voir ce que cette encyclopédie indique dans sa version en langue anglaise. Ici, *la traduction en termes de fonctions est absente* et le texte utilise donc la notion de variable *comme si elle allait de soi* – en se situant par là dans l'univers « classique » évoqué par Frédéric Pham. Une variable aléatoire (*random variable*), en effet, est… une variable – une variable d'un genre particulier. Plus précisément, c'est une variable, dit l'exposé, « dont la valeur découle d'une mesure effectuée sur un système sujet à des variations dues au hasard » (*whose value results from a measurement on a system that is subject to variations due to chance*).

2. Le rapprochement de cet exposé et du précédent nous permet de saisir que la « variable » dont parle l'exposé 1.2 (en l'exprimant en termes de fonction) est la reprise « moderne » de la notion « classique » de variable. La citation rappelée dans ce qui précède conduit à compléter un peu – conjecturalement – notre ébauche de définition : l'ensemble Ω où serait définie une variable x (ou X, selon l'usage en probabilités) est associé à un certain « système », $\mathcal{S}$, sujet à des « variations » (dues au hasard dans le cas considéré en théorie des probabilités). Mais à quoi peut-on identifier le système $\mathcal{S}$ dans le cas « classique » où l'on évoque sans autre forme de procès des « variables x, y, etc. » ? Et comment, alors, définir Ω à partir de $\mathcal{S}$?

3. La réponse générale à cette dernière question peut être la suivante : Ω est *l'ensemble des états* ω du système $\mathcal{S}$. L'ensemble des états Ω peut être fini ou infini et muni d'une structure plus ou moins riche (comme dans le cas d'un « espace probabilisable »). D'une manière générale, on appelle alors *variable x* relative à S une application $x : \Omega \to \mathbb{R}$ définie sur l'ensemble des états du système $\mathcal{S}$ et vérifiant éventuellement certaines conditions (liées à la structure de Ω). Cette formalisation suppose – de façon quelque peu étonnante quand on y réfléchit – que l'on se représente, non pas une famille $(\mathcal{S}_i)_{i\in I}$ de systèmes « de même type », mais *un* système « unique » et qui change d'*état*. C'est ainsi que, dans l'exposé 8 du TD1, les auteurs parlent, non d'une collection potentiellement infinie de « cylindres métalliques », mais d'*un* cylindre métallique, écrivant à ce propos de façon typique : « Ainsi le poids d'un cylindre métallique varie avec la densité du métal, le rayon de sa base, la longueur de son axe ; son volume varie avec son rayon et la longueur de l'axe. » De la même façon, s'agissant de la loi de Boyle-Mariotte, on parlera d'*un* gaz – dont la pression, la température, etc., *varient*. C'est ainsi que, dans l'article « Loi de Boyle-Mariotte » de *Wikipédia*, on lit : « La *loi de Boyle-Mariotte* […] relie la pression et le volume d'un gaz réel à température constante. » Et il en va de même avec l'article an anglais correspondant, « Boyle's law », où on lit semblablement : « Boyle's law describes the inversely proportional relationship between the absolute pressure and volume of a gas, if the temperature is kept constant within a closed system. »

4. Revenons alors au théorème permettant de « combiner » des relations de proportionnalités (si $z \propto x$ et $z \propto y$, alors $z \propto xy$), théorème dont une concrétisation est le fait que, puisque $V \propto h$ et $V \propto r^2$, alors $V \propto hr^2$, où V, h et r sont respectivement le volume, la hauteur et le rayon « d'*un* cylindre métallique ». Supposons que la variable z, définie sur l'ensemble des états Ω d'un certain système $\mathcal{S}$, soit une *fonction* de variables x et y relatives à ce système : $z = f(x, y)$. On écrit $z \propto x$ si, quelle que soit la valeur y_0 prise par la variable y, il existe un réel $k_0 \neq 0$, dépendant de y_0, tel que $z = k_0x$, c'est-à-dire tel que, pour tout $\omega \in \Omega$, $z(\omega) = k_0x(\omega)$. On suppose donc que $z \propto x$ et on suppose aussi que, de même, $z \propto y$, c'est-à-dire que, quelle que soit la valeur x_0 prise par la variable x, il existe un réel $\ell_0 \neq 0$, dépendant de x_0, tel que $z = \ell_0 y$, c'est-à-dire tel que, pour tout $\omega \in \Omega$, $z(\omega) = \ell_0 y(\omega)$. Démontrons alors que $z \propto xy$. Soit ω_1 et $\omega_2 \in \Omega$; on *suppose* (on va revenir sur cette hypothèse) qu'il existe $\omega^* \in \Omega$ tel que $x(\omega^*) = x(\omega_1)$ et $y(\omega^*) = y(\omega_2)$, soit, avec des notations simplifiées, $x^* = x_1$ et $y^* = y_2$. Avec les mêmes notations on a alors $\frac{z_1}{z^*} = \frac{\ell_0 y_1}{\ell_0 y^*} = \frac{y_1}{y^*} = \frac{y_1}{y_2}$ et $\frac{z^*}{z_2} = \frac{k_0 x^*}{k_0 x_2} = \frac{x^*}{x_2} = \frac{x_1}{x_2}$. On arrive ainsi à : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z^*} \times \frac{z^*}{z_2} = \frac{y_1}{y_2} \times \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1 y_1}{x_2 y_2}$. On a donc $z_1 = \frac{z_2}{x_2 y_2}(x_1 y_1)$, CQFD.

5. La démonstration précédente fait apparaître un aspect non clairement perçu jusqu'ici à propos de l'ensemble des *états* ω de $\mathcal{S}$ et des valeurs numériques possibles des *variables* relatives à un système $\mathcal{S}$. C'est ici que l'on doit introduire les notions de « variables indépendantes » et de « variables dépendantes ». Dans le cas où l'on a $z = f(x, y)$, z est une variable dépendante, dont les valeurs sont déterminées par les valeurs des variables x et y. Mais tout ce qui précède suppose que les variables x et y sont (regardées comme) des variables *indépendantes*. Qu'est-ce que cela signifie ? Dans un livre rencontré à l'occasion du TD1, le volume I de l'*Algebra* de G. Chrystal (1904), on lit à la page 273 :

There are an infinite number of ways in which we may conceive one quantity y to depend upon, be calculable from, or, in technical mathematical language, be a function of, another quantity x. Thus we may have, for example,

$$y = 3x,$$
$$y = 17x^2,$$
$$y = ax + b,$$
$$y = ax^2 + bx + c,$$
$$y = 2\sqrt{x},$$

and so on.

For convenience x is called the *independent variable*, and y the *dependent variable*; because we imagine that any value we please is given to x, and the corresponding value of y derived from it by means of the functional relation.

L'affirmation clé est celle-ci : « we imagine that any value we please is given to x ». En d'autres termes, les variables *indépendantes* peuvent prendre *n'importe quelle valeur que l'on se plaise à imaginer*. Telle est la propriété clé, qui intervient dans la démonstration ci-dessus. Formalisons les choses ainsi : soit $\mathcal{S}$ un système, Ω son ensemble d'états et soit x une variable relative à $\mathcal{S}$; pour préciser la notion de *variable(s) indépendante(s)* on suppose 1° que l'ensemble des valeurs que peut prendre une telle variable x est un certain intervalle I_x de $\mathbb{R}$; 2° que, étant donné n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ relatives à $\mathcal{S}$, ayant respectivement pour ensemble des valeurs possibles les intervalles réels $I_1, \ldots, I_n$, et étant donné un n-uplet $(a_1, \ldots, a_n) \in I_1 \times \ldots \times I_n$, il existe $\omega \in \Omega$ tel que $(x_1(\omega), \ldots, x_n(\omega)) = (a_1, \ldots, a_n)$. Il en résulte par exemple que, dans le cas des variables indépendantes x et y considérées dans la démonstration déjà évoquée, il existe bien $\omega^* \in \Omega$ tel que $x(\omega^*) = x(\omega_1)$ et $y(\omega^*) = y(\omega_2)$.

Question 3. Un sac à provisions contient 3 bananes, 5 mandarines et 2 pommes. Comment mathématiser cette notion de sac ?

Exposé 3.1

☛ Multiset. (2011, 15 novembre). *Wikipedia, the free encyclopedia*. http://en.wikipedia.org/wiki/Multiset

Multiset

In mathematics, the notion of **multiset** (or **bag**) is a generalization of the notion of set in which members are allowed to appear more than once. For example, there is a unique set that contains the elements a and b and no others, but there are many multisets with this property, such as the multiset that contains two copies of a and one of b or the multiset that contains three copies of both a and b. The term "multiset" was coined by Nicolaas Govert de Bruijn in the 1970s. The use of multisets in mathematics predates the name "multiset" by nearly 90 years: Richard Dedekind used multisets in a paper published in 1888.

The number of times an element belongs to the multiset is the multiplicity of that member. The total number of elements in a multiset, including repeated memberships, is the cardinality of the multiset. For example, in the multiset $\{a, a, b, b, b, c\}$ the multiplicities of the members a, b, and c are respectively 2, 3, and 1, and the cardinality of the multiset is 6. To distinguish between sets and multisets, a notation that incorporates brackets is sometimes used: the multiset {2,2,3} can be represented as [2,2,3]. In multisets, as in sets and in contrast to tuples, the order of elements is irrelevant: The multisets $\{a, b\}$ and $\{b, a\}$ are equal.

Formal definition

Within set theory, a **multiset** may be formally defined as a 2-tuple (A, m) where A is some set and $m : A \longrightarrow \mathbf{N}_{\geq 1}$ is a function from A to the set $\mathbf{N}_{\geq 1} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ of positive natural numbers. The set A is called the *underlying set of elements*. For each a in A the *multiplicity* (that is, number of occurrences) of a is the number $m(a)$. If a universe U in which the elements of A must live is specified, the definition can be simplified to just a multiplicity function $m_U : U \longrightarrow \mathbf{N}$ from U to the set $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ of natural numbers, obtained by extending m to U with values 0 outside A. This extended multiplicity function is the multiplicity function called 1_A below. Like any function, the function m may be defined as its graph: the set of ordered pairs $\{ (a, m(a)) : a \text{ in } A \}$. With these definitions the multiset written as $\{ a, a, b \}$ is defined as $(\{ a, b \},\{ (a, 2), (b, 1) \})$, and the multiset $\{ a, b \}$ is defined as $(\{ a, b \},\{ (a, 1), (b, 1) \})$.

The concept of a multiset is a generalization of the concept of a set. A multiset corresponds to an ordinary set if the multiplicity of every element is one (as opposed to some larger natural number). However to replace set theory by "multiset theory" so as to have multisets directly into the foundations is not easy: a privileged role would still have to be given to (ordinary) sets when defining maps, as there is no clear notion of maps (functions) between multisets. It can be done, with the result that classical theorems such as the Cantor–Bernstein–Schroeder theorem or Cantor's theorem, when generalized to multisets, are false; they remain true only in the case of finite multisets. In addition, the notion of a set as a "class of items satisfying a certain property" – i.e. the extension of a predicate – is used throughout mathematics, and this notion lacks a sensible generalization to multisets with multiple memberships.

An indexed family, (a_i), where i is in some index-set, may define a multiset, sometimes written { a_i }, in which the multiplicity of any element x is the number of indices i such that $a_i = x$. The condition for this to be possible is that no element occurs infinitely many times in the family: even in an infinite multiset, the multiplicities must be finite numbers.

Éléments d'analyse 3.1

Laissé au lecteur.

Exposé 3.2

☛ Multiensemble. (2011, 20 juillet). *Wikipédia, l'encyclopédie libre*. http://fr.wikipedia.org/wiki/Multiensemble

Multiensemble

Un **multiensemble** (parfois appelé **sac**) est un couple (A, m) où A est un ensemble appelé *support* et m une fonction de A dans l'ensemble des entiers naturels, appelée *multiplicité*.

Un multiensemble est dit *fini* si la somme des multiplicités des éléments de son support est finie.

Intuitivement, un tel objet peut être vu comme un ensemble d'éléments de A où un élément peut apparaître plusieurs fois, en l'occurrence dans le multiensemble (A, m), l'élément x apparaît $m(x)$ fois. Un multiensemble fini se note en utilisant des accolades doubles {{…}} qui encadrent les éléments, ayant une multiplicité strictement positive, répétés autant de fois que celle-ci. Ainsi $\{\{a, b, a, b, b, d\}\}$ représente le multiensemble ($\{a, b, c, d\}$ où m est la fonction telle que $m(a) = 2$, $m(b) = 3$, $m(c) = 0$ et $m(d) = 1$.

On peut également le voir comme une liste commutative, c'est-à-dire dont on peut permuter les éléments, autrement dit comme un élément du monoïde commutatif libre sur A.

Une expression $\{\{a\}\}$ peut donc représenter des multiensembles distincts, comme ($\{a\}$, m) et ($\{a, b\}$, m') (avec $m(a) = m'(a) = 1$; $m'(b) = 0$). On peut contourner cette difficulté en introduisant une relation d'égalité ad hoc, ou mieux en exigeant que la multiplicité d'un élément du support soit non nulle. Pour éviter cette ambiguïté, on prend comme référence un ensemble de base M sur lequel on considère les multiensembles, ainsi si M est donné, les multiensembles sont les applications $M \to \mathbb{N}$, nulles partout sauf sur un sous-ensemble fini de M, ainsi $\{\{a\}\}$ est défini sans ambiguïté, comme la fonction de M vers $\mathbb{N}$ qui vaut 0 partout sauf en a où elle vaut 1.

Éléments d'analyse 3.2

Laissé au lecteur.

Exposé 3.3

☛ Combinaison avec répétition (2011, 2 septembre). *Wikipédia, l'encyclopédie libre*. http://fr.wikipedia.org/wiki/Combinaison_avec_répétition

Combinaison avec répétition

Dans le domaine des dénombrements (mathématiques), une **combinaison avec répétition** est une combinaison où donc l'ordre des éléments n'importe pas et où, contrairement à une combinaison classique, chaque élément de la combinaison peut apparaître plusieurs fois. Par exemple, si dix dés à six faces (numérotées de 1 à 6) sont jetés, le résultat fourni par ces dix dés, si l'ordre dans lequel sont jetés les dés n'est pas compté, (par exemple un 2, trois 4, deux 5 et quatre 6, sans retenir à quel dé précisément correspond chaque face) est une combinaison des différentes faces apparaissant sur chaque dé, et où chaque face peut apparaître plusieurs fois.

Première approche

En mathématiques, lorsque nous choisissons k objets parmi n objets discernables, chaque objet pouvant être répété (au plus k fois), nous obtenons un groupement non ordonné de k objets éventuellement répétés. Mais ce n'est pas acceptable en mathématiques de définir une k-combinaison avec répétition de cette façon, puisqu'un tel groupement n'est pas un ensemble (en effet la définition en extension d'un ensemble empêche la répétition des éléments et par exemple {1, 1, 2, 2, 2, 3}={1, 2, 3}).

Définition :

Une k-combinaison avec répétition d'un ensemble fini E de cardinal n, est une application f de E dans $\{0, 1, ..., k\}$, telle que

$$\sum_{x \in E} f(x) = k$$

Plus précisément, si $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ alors f vérifie

$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) = k.$

f s'appelle aussi une combinaison de n éléments pris k à k.

Remarque :

Cette application indique pour chaque élément de E le nombre de fois qu'il est choisi ; et si l'application associe la valeur 0 à un élément de E, alors l'élément n'est pas choisi. De plus la somme des nombres de répétitions doit bien être égale à k, si nous voulons exactement k objets éventuellement répétés.

Éléments d'analyse 3.3

Laissé au lecteur.

Question 4. Peut-on et comment justifier la définition géométrique traditionnelle de la tangente à une courbe en un point M_0 comme étant « la position limite de la corde (M_0M) lorsque M tend vers M_0 en restant sur la courbe ».

Exposé 4.1

L'exposé ci-après est l'énoncé d'un « petit problème » proposé par l'auteur à des étudiants préparant le CAPES de mathématiques le jeudi 6 janvier 2000 :

L'étude ci-après a pour objet de mathématiser l'idée intuitive selon laquelle « une tangente à une courbe en un point M_0 *est la limite de la corde* (M_0M) *lorsque* M *tend vers* M_0 *en restant sur la courbe ».*

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et soit $\tau \in$ I.

1. On note L l'ensemble des applications $u : t \mapsto u(t)$ de $I\backslash\{\tau\}$ dans $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ telles que $\ell(u) = \lim_{t\to\tau, t\neq\tau} u(t)$ existe et soit non nul. Soit alors $u_1, u_2 \in L$ telles que, pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$, on a $\mathbb{R}u_1 = \mathbb{R}u_2$. Montrer qu'il existe une application φ de $I\backslash\{\tau\}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$, on a $u_1(t) = \varphi(t)u_2(t)$, et que φ a une limite quand t tend vers τ, $t \neq \tau$. En déduire que $\mathbb{R}\ell(u_1) = \mathbb{R}\ell(u_2)$.

2. Soit $\delta : t \mapsto \delta(t)$ une application de $I\backslash\{\tau\}$ dans l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$. On dit que δ a pour limite la droite vectorielle Δ quand t tend vers τ, $t \neq \tau$ s'il existe $u \in L$ telle que, pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$, $\mathbb{R}u(t) = \delta(t)$, avec $\mathbb{R}\ell(u) = \Delta$ Justifier cette définition.

3. Soit $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ une application injective de I dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$, on pose $\delta(t) = \mathbb{R}\overrightarrow{\gamma(\tau)\gamma(t)}$. Si Δ existe, on dit que $\gamma(I)$ a pour tangente en $\gamma(\tau)$ la droite affine $\gamma(\tau)+\Delta$.

a) Montrer que si γ est dérivable en τ et si $\gamma'(\tau) \neq 0$, alors $\gamma(I)$ a pour tangente en $\gamma(\tau)$ la droite affine $\gamma(\tau)+\mathbb{R}\gamma'(\tau)$.

b) On suppose que $\gamma(t) = (t, f(t))$, où f est une application de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\gamma(I)$ a une tangente en $\gamma(\tau)$ si et seulement si f admet en τ une dérivée finie ou infinie.

Éléments d'analyse 4.1

1. On laissera le lecteur développer des éléments d'analyse à partir du corrigé suivant du « petit problème » ci-dessus :

1. Pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$, les conditions $u_2(t) \neq 0$ et $\mathbb{R}u_1(t) = \mathbb{R}u_2(t)$ entraînent l'existence d'un réel $\varphi(t)$ tel que $u_1(t) = (x_1(t),y_1(t)) = \varphi(t)u_2(t) = \varphi(t)(x_2(t),y_2(t))$. Le vecteur $\ell(u_2) = (X_2,Y_2)$ étant non nul, on a X_2 ou $Y_2 \neq 0$. Supposons $Y_2 \neq 0$; pour tout $t \neq \tau$ assez voisin de τ, on a donc $y_2(t) \neq 0$ et l'égalité $y_1(t) = \varphi(t)y_2(t)$ s'écrit $\varphi(t)= y_1(t)/y_2(t)$: $\varphi(t)$ tend vers Y_1/Y_2 quand t tend vers τ, $t \neq \tau$. Par suite on a $\ell(u_1) = (Y_1/Y_2)\ell(u_2)$, et donc $\mathbb{R}\ell(u_1) = \mathbb{R}\ell(u_2)$. Le cas $Y_2 = 0$, $X_2 \neq 0$ se traite de même.

2. Si $v \in L$ vérifie $\mathbb{R}v(t) = \mathbb{R}u(t)$ pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$, on a, d'après ce qui précède, $\mathbb{R}\ell(v) = \mathbb{R}\ell(u)$. L'existence et la valeur de $\Delta = \ell(\delta)$ sont donc indépendantes du choix de $u \in L$ telle que $\mathbb{R}u = \delta$ sur $I\backslash\{\tau\}$.

3. a) On a d'abord : $\delta(t) = \mathbb{R}\overrightarrow{\gamma(\tau)\gamma(t)} = \mathbb{R}(\gamma(t)-\gamma(\tau)) = \mathbb{R}\frac{\gamma(t)-\gamma(\tau)}{t-\tau}$. L'application γ étant dérivable en τ, on a $\lim_{t\to\tau,t\neq\tau} \frac{\gamma(t)-\gamma(\tau)}{t-\tau} = \gamma'(\tau)$; il en résulte que $\Delta = \ell(\delta)$ existe et est égale à $\mathbb{R}\gamma'(\tau)$: la tangente à $\gamma(I)$ en $\gamma(\tau)$ est la droite affine $\gamma(\tau)+\mathbb{R}\gamma'(\tau)$.

b) Pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$ posons $\delta(t) = \mathbb{R}\overrightarrow{\gamma(\tau)\gamma(t)} = \mathbb{R}(\gamma(t)-\gamma(\tau)) = \mathbb{R}(t-\tau,f(t)-f(\tau))$. Supposons d'abord que $f'(\tau)$ existe. Si $f'(\tau)$ est finie, on a $\delta(t) = \mathbb{R}(t-\tau,f(t)-f(\tau)) = \mathbb{R}(1,\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau})$: il vient donc $\Delta = \ell(\delta) = \mathbb{R}(1,f'(\tau))$. Si $f'(\tau)$ est infinie, on a : $\delta(t) = \mathbb{R}(t-\tau,f(t)-f(\tau)) = \mathbb{R}(\frac{t-\tau}{f(t)-f(\tau)},1)$: il vient donc $\Delta = \ell(\delta) = \mathbb{R}(0,1)$. Inversement, supposons que $\Delta = \ell(\delta)$ existe, et soit $u = (x,y) \in L$ telle que, pour $t \in I\backslash\{\tau\}$, $\delta(t) = \mathbb{R}(t-\tau,f(t)-f(\tau)) = \mathbb{R}u(t)$: on a $\ell(\delta) = \mathbb{R}\ell(u) = (X,Y)$. Si $X \neq 0$, on a $x(t) \neq 0$ pour tout $t \neq \tau$ assez proche de τ, et donc $\mathbb{R}(1,\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau}) = \mathbb{R}(x(t),x(t)\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau})$: il en découle que $x(t)\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau} = y(t)$, soit $\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau} = \frac{y(t)}{x(t)}$, et donc que $f'(\tau) = \frac{Y}{X}$. Si $X = 0$, alors $Y \neq 0$: on montre de même que $\frac{t-\tau}{f(t)-f(\tau)}$ tend vers 0 quand t tend vers τ, $t \neq \tau$, et donc que $f'(\tau) = \pm\infty$.

2. La mathématisation réalisée par l'ensemble constitué de l'énoncé du problème et de son corrigé est inspirée de l'étude proposée Bernard Gostiaux dans le volume 5 (intitulé « Géométrie : arcs et nappes ») de son *Cours de mathématiques spéciales* (1995, pp. 13-16). À son propos, Gostiaux s'adresse à son lecteur dans les termes suivants :

Je vous dois un aveu. Depuis que j'enseigne, jamais je n'avais rédigé ce passage (et je ne l'ai jamais vu rédigé, mais je ne suis pas très curieux) et je me contentais, pour parler de tangentes, plan osculateurs... de faire comme tout le monde, de parler de « position limite » d'une droite ou d'un plan, sans m'étendre davantage.

Il est bon, de temps en temps, de faire un effort de rigueur, et ce d'autant plus que l'emploi de calculettes et d'ordinateurs, certes performants, affaiblit encore le souci de rigueur dans le domaine de l'étude des arcs paramétrés. Je vous ennuie peut-être avec cette étude, mais je me suis fait plaisir ! D'autant qu'en ce mois de février, dans le Morvan, il pleut, alors autant rédiger au coin du feu ! (p. 14)

Nous avons là un bel exemple de ces mathématisations laissées incomplètes – sauf exception !

Question 5. Comment peut-on compléter les praxéologies mathématiques dont la composante pratico-technique est explicitée dans l'exposé suivant ?

Exposé 5.1

☛ *Le collège en poche. Tout le programme de 6^{e} en fiches* (Maxi-Livres, 2002), p. 58

Comparer des nombres décimaux

■ De deux nombres décimaux, le plus grand est celui qui a la **plus grande partie entière.**

■ Si les parties entières sont égales, on compare les parties décimales, **décimale par décimale.**

On compare les chiffres des dixièmes puis, s'ils sont égaux, les chiffres des centièmes, etc.

Comparaison de 8,1**6**9 et 8,1**4**0 23 :

6 > 4 donc 8,169 > 8,140 23.

■ On peut aussi comparer les **parties décimales globalement.**

On commence alors par réécrire les nombres avec le même nombre de décimales

Comparaison de 2,01 et 2,013 : 2,01 = 2,010

Comparer 2,**010** et 2,**013** revient à comparer 10 et 13.

10 < 13 donc 2,01 < 2,013.

Éléments d’analyse 5.1

1. Cet exposé a trait au *type de tâches T* suivant : comparer deux nombres décimaux (différents), c’est-à-dire déterminer quel est le plus grand et quel est le plus petit. La première assertion de l’exposé est un *principe technologique* qui guide et justifie un certain *geste technique* (à portée limitée) : si l’on doit comparer a = 3,… et b = 5,…, et plus généralement si les *parties entières* des deux décimaux à comparer sont *différentes*, alors le plus grand des deux nombres a et b est celui qui a la plus grande partie entière. Ici, c’est le décimal b = 5,… : on peut donc conclure que l’on a $b > a$ ou encore que $a < b$. Un problème surgit quand les parties entières sont *identiques* : il faut alors passer à *l’examen des parties décimales*.

2. L’exposé fournit pour cela *deux techniques*, τ_1 et τ_2. La *technologie* θ_1 de la première technique, τ_1, suppose seulement les notions de *partie entière* et de *décimales successives* d’un nombre décimal. Si l’on a par exemple a = 3,7… et b = 3,4…, c’est-à-dire si les *premières* décimales sont *différentes*, l’examen s’arrête à elles : ici, en l’espèce, on pourra conclure que $a > b$. S’il n’en est pas ainsi, par exemple si l’on a a = 3,4… et b = 3,4…, on passe alors à la *deuxième* décimale : si par exemple a = 3,46… et b = 3,41…, on aura $a > b$; et ainsi de suite. On notera que l’exposé examinée ne propose pas véritablement de *technologie* θ_1 de la technique τ_1 (même si l’on y fait appel à certaines des *notions* que devrait contenir une telle technologie).

3. Que pourrait être cette technologie θ_1 ? Elle pourrait par exemple comporter les énoncés des types suivants :

1) les écritures décimales a = 3,46… et b = 3,41… (par exemple) désignent respectivement les nombres sommes

$$a = 3 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} + \dots \text{ et } b = 3 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \dots ;$$

2) le nombre somme $a^* = 3 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100}$ est (à l’évidence) strictement supérieur au nombre somme $b^* = 3 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100}$;

3) les sommes « restes » (notées ci-dessus + … dans l’écriture de a et de b) sont toujours strictement inférieures à $\frac{1}{100}$ et ne peuvent donc pas modifier le résultat obtenu par la comparaison de a^* et b^* : a et b sont rangés dans le même ordre que a^* et b^*.

Ce qui est proposé ici est un fragment bien particulier de la technologie θ_1 cherchée : il en est en effet la *conclusion*, qui n'apparaît pas comme telle puisque ce dont elle serait la conclusion est, précisément, *omis*. La fonction de ce fragment de discours technologique est de préciser et de justifier (partiellement) la technique à mettre en œuvre : il permet de conclure, face aux nombres 7,2348 et 7,235 par exemple, qu'on devra pousser l'examen jusqu'à la *troisième* décimale – *en ignorant les décimales suivantes* –, ce qui permettra de conclure que l'on a : 7,2348 < 7,235.

4. La technique τ_1 a notamment pour objet de parer à un type d'erreurs qui, au cours des dernières décennies, a été mis en avant sans doute à l'excès : si, pour comparer 7,2348 et 7,235, ayant observé l'identité des parties entières, on examine les *parties décimales* en les regardant comme des *entiers* qu'il suffirait alors de comparer (ici, 2348 et 235), on aboutit à un résultat *erroné* (du fait que 2348 > 235, on conclura *erronément* que 7,2348 > 7,235). On voit alors comment la technique τ_1 *organise l'évitement* de ce type d'erreurs. Il convient de noter que l'importance donnée à cet évitement manifeste l'incapacité des responsables de supporter un certain type d'erreurs en vérité peu fréquent – on n'a pas tous les jours à comparer 7,2348 et 7,235 par exemple.

5. Pour atteindre le même but, la technique τ_2, elle, procède autrement : c'est ici l'adverbe *globalement* qui porte haut la charge du bon fonctionnement de la technique ! Celle-ci consiste à réécrire les nombres proposés pour leur donner des parties décimales *de même longueur* : ayant à comparer 7,2348 et 7,235, on écrira le second décimal sous la forme 7,2350. On peut alors regarder les parties décimales comme l'écriture de nombres entiers *que l'on comparera de façon classique* : comme 2348 < 2350, on conclura que 7,2348 < 7,2350, soit encore que 7,2348 < 7,235.

6. Cette dernière technique, on le voit, est quasiment dépourvue de technologie qui la justifierait : on se rapproche ici fortement d'une pure *recette*, transmise de façon *dogmatique*. Une technologie mathématique possible pourrait comporter les énoncés des types suivants :

1) les écritures décimales a = 3,407 et b = 3,41 (par exemple) désignent respectivement les fractions successives suivantes :

$$a = \frac{3407}{1000} = \frac{34070}{10000} = \frac{340700}{100000} = \dots \text{ et } b = \frac{341}{100} = \frac{3410}{1000} = \frac{34100}{10000} = \dots ;$$

2) de deux fractions ayant le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur ; il en résulte que, en l'espèce, on a

$$a = 3{,}407 = \frac{3407}{1000} < \frac{3410}{1000} = 3{,}41 = b.$$

Sous couleur de provoquer un évitement mécanique du type d'erreurs indiqué ci-dessus, les deux techniques proposées tentent en vérité de réduire les effets d'une difficulté d'origine *théorique*, que nous découvrirons maintenant à l'aide d'un nouvel exposé.

Exposé 5.2

☛ Carlo Bourlet, *Cours abrégé d'arithmétique*, 1922

Règle pour lire un nombre décimal écrit. – *Pour lire un nombre décimal, on énonce d'abord la partie entière qu'on fait suivre du mot* **entiers** *ou* **unités**, *puis la partie décimale, comme s'il s'agissait d'un nombre entier, en la faisant suivre du nom des unités que représente le dernier chiffre décimal.*

Par exemple :

4,075 se lit : *quatre unités soixante-quinze millièmes ;*

25,00317 se lit : *vingt-cinq unités trois cent dix-sept cent-millièmes.*

REMARQUE. – Dans la pratique, on emploie quelquefois un langage *très incorrect,* mais plus expéditif, en énonçant d'abord la partie entière suivie du mot *virgule,* puis les zéros et la partie décimale.

Ainsi : 2,15 se lira : 2, *virgule,* 15 ; 4,075 se lira : 4, *virgule, zéro,* 75 ; 25,00317 se lira : 25, *virgule, zéro, zéro,* 317.

Éléments d'analyse 5.2

1. La difficulté que les techniques précédentes ont du mal à circonvenir est liée à la façon dont on en est venu à *lire* les nombres décimaux écrits : lire l'écriture 3,407 en disant « 3 virgule 407 » ou l'écriture 3,41 en disant « 3 virgule 41 », comme nous le faisons aujourd'hui couramment, porte en soi un *vice technologique,* au reste depuis longtemps connu, comme l'atteste l'exposé précédent.

2. Lire l'écriture 3,407 « trois *unités* quatre cent sept *millièmes* », lire l'écriture 3,41 « trois *unités* quarante et un *centièmes* », cela permet de rappeler que l'on ne peut comparer sans plus de façon un nombre de *millièmes* et un nombre de *centièmes* ; et cela conduit alors à traduire (ici) tout en millièmes, en sorte qu'on devra comparer « trois *unités* quatre cent sept *millièmes* » et « trois *unités* quatre cent dix *millièmes* », pour conclure correctement que l'on a 3,407 < 3,41. En « oubliant » d'énoncer les unités et les dixièmes, centièmes, millièmes, etc., on a fait sauter le verrou protecteur auquel les techniques présentées dans l'exposé tentent de se substituer.

3. Tout cela noté, peut-on esquisser ici ce que serait la *théorie* Θ fondant – implicitement – les deux praxéologies $[T / \tau_1 / \theta_1 / \Theta]$ et $[T / \tau_2 / \theta_2 / \Theta]$ portées par l'exposé examiné plus haut ? Il est utile pour cela de procéder *par comparaison* : la comparaison de cette théorie hypothétique Θ peut se faire en l'espèce avec la théorie $\Theta^\dagger$ (lire *thêta dague*) qui paraît encore sous-jacente à l'exposé de Carlo Bourlet. Pour le dire en peu de mots, dans ce dernier cas, on aperçoit, à l'arrière-plan, une théorie « réaliste » des nombres : on n'y parle pas du nombre *un*, mais de l'*unité* ; et, dans cette perspective, on parle de *dixième*, de *centième*, etc., *de l'unité*. Il semble qu'on n'ait rien de tel dans le cas de l'exposé « moderne » examiné : les nombres semblent *ne renvoyer qu'à leur écriture formelle* ; ils auront une partie « avant la virgule », appelée encore « partie entière », là où on parlerait d'un certain nombre d'unités, et une partie « après la virgule », dite *décimale*, avec une « première décimale », une « deuxième décimale », etc. On peine, avec cette théorie formelle, à voir dans l'écriture 0,375 une désignation du nombre égal à « 375 millièmes de l'unité ». On pourrait montrer – mais nous n'entrerons pas dans un tel développement – que $\Theta^\dagger$ considère, de façon *toute classique*, un nombre comme une *mesure* de *grandeurs*, par exemple de longueurs (ou de masses, etc.) : si l'unité de longueur est ainsi le mètre, au *nombre unité* correspond cette unité de longueur ($1 \mapsto 1$ m), et au nombre 0,375 correspond alors la longueur égale à 375 millièmes de la longueur unité, c'est-à-dire, ici, à 375 *millimètres* : $0{,}375 \mapsto 375 \text{ mm} = 375 \dfrac{\text{m}}{1000} = \dfrac{375}{1000} \text{ m} = 0{,}375 \text{ m}$. (Le calcul précédent, où s'enchaînent des égalités, est un calcul non sur des *nombres*, mais sur des *grandeurs*, et en l'espèce sur des *longueurs* : on admettra ici qu'il est *pleinement justifiable*.) On retiendra de tout cela que le geste technique « concret » que l'on effectue ne peut, en règle générale, s'expliquer si l'on ne remonte pas *jusqu'à la théorie* qui, souvent silencieusement, « tire les ficelles ».

TD 3. Analyse critique d'un article

Question 1. À partir des données ci-après, ébaucher une analyse critique de la recherche que donne à connaître le document E, et cela en vue de répondre à la question générique suivante : *En quoi et dans quelle mesure les travaux dont un compte rendu est donné dans l'article examiné relèvent-ils de la recherche en didactique des mathématiques ?*

Données 1.1

☛ Fiche signalétique du document E

- Auteur : Caroline Bulf
- Titre : Les effets de l'enseignement de la symétrie axiale sur celui de la symétrie centrale : une étude de cas en France
- Revue : *Recherches en didactique des mathématiques*
- Volume : 31/1
- Pages : 51-77
- Référence APA : Bulf, C. (2011). Les effets de l'enseignement de la symétrie axiale sur celui de la symétrie centrale : une étude de cas en France. *Recherches en didactique des mathématiques, 31*(1), 51-77.

Éléments d'analyse 1.1

1. L'auteure, Caroline Bulf, est maître de conférences à l'IUFM d'Aquitaine (Université de Bordeaux). En tant que chercheure, elle appartient à l'équipe DAESL du LACES, entités dont la présentation suivante est actuellement visible sur Internet à l'adresse suivante : http://www.edss.u-bordeaux2.fr/spip.php?article14

EA 4140 Laboratoire Cultures, éducation, sociétés (LACES)

▸ Equipe interne ASPDA (Anglais de spécialité, Politique et didactique de l'anglais)
[Etudes anglaises, option langue de spécialité, didactique de la langue]
http://www.langues-vivantes.u-borde...

▸ Equipe interne DAESL (Didactiques et anthropologie des enseignements scientifiques et langagiers)

[Sciences de l'éducation]

▸ Equipe interne ERCEF (Recherches comparatives en éducation et formation)

[Sciences de l'éducation]

▸ Equipe interne VST2I (Vie sportive : trajectoires, innovation, intervention)

[STAPS]

http://www.staps.u-bordeaux2.fr/ufr...

2. La revue *Recherches en didactique des mathématiques* est la première revue française dans le domaine. L'article à examiner paraît dans le volume correspondant à la 31e année de sa publication : il s'agit du 91e numéro de cette revue.

3. L'article, qui occupe moins de trente pages, est issu de la thèse de l'auteure, qui elle compte quelque 360 pages et a été soutenue en 2008 sous la direction d'Alain Kuzniak, le jury étant composé en outre de Jacques Colomb, Michèle Artigue, Colette Laborde et Paolo Boero. Cette thèse, intitulée *Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège*, est disponible en ligne à l'adresse suivante : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00369503/en/.

Données 1.2

☛ Résumé et mots clés en français de l'article (p. 52)

RÉSUMÉ

Cet article rend compte d'une étude de cas réalisée en France dans une classe de 5e (grade 7 - élèves de 12-13 ans) sur l'enseignement et l'apprentissage de la symétrie centrale et ses liens avec la symétrie axiale aussi bien au niveau des conceptions des élèves qu'au niveau de la pratique du professeur observée. Le but de cet article est de montrer comment certains aspects de la symétrie axiale (qui en France fait l'objet d'un enseignement depuis l'école primaire) peuvent se constituer en obstacle pour l'apprentissage de la symétrie centrale à ce niveau scolaire. Nous commençons par montrer que les propriétés mathématiques les plus convoquées par les élèves sont celles qui sont communes aux deux symétries, mais sont aussi les plus susceptibles de créer des confusions chez les élèves (cf. questionnaire). Puis, nous mettons en évidence que ce comportement des élèves peut s'expliquer par le fait que ce sont ces propriétés-là qui sont les plus exploitées en classe, alors que les propriétés distinctives entre les deux transformations restent le plus souvent implicites (cf. observation de classe). Ceci peut conduire

à des malentendus aussi bien au niveau du contrat, qu'au niveau des propriétés mathématiques visées et renforcer les difficultés des élèves (répertoriées dans la première partie de l'article).

Mots-Clefs : enseignement, symétrie axiale, symétrie centrale, traitement de la figure, contrat didactique.

Éléments d'analyse 1.2

1. Le résumé précise le système didactique qui est au cœur de l'étude : une classe de 5^{e}. On peut donc le formaliser par la notation $S(X\ ;\ y\ ;\ \heartsuit)$, où X est l'ensemble des élèves de la classe étudiée et où y est le professeur de mathématiques de cette classe, ♥ étant l'enjeu didactique, à savoir, ici, l'œuvre O désignée par l'expression « la symétrie centrale ».

2. L'étude, selon le résumé, porte sur les effets didactiques de certaines *conditions* mises en place « depuis l'école primaire » : les conditions créées par le commerce ancien des élèves avec la notion de symétrie *axiale*. On notera que, à suivre le résumé, ces effets porteraient sur les « conceptions des élèves » et sur « la pratique du professeur » : ils seraient donc sensibles sur la partie *logos* de l'équipement praxéologique des élèves et sur la partie *praxis* de celui du professeur. Il n'est pas inutile de souligner que (1) le résumé n'évoque *pas* le *logos* du professeur, ses « conceptions » pour employer le langage de l'auteure, ce qui semble être un interdit traditionnel dans une majorité de travaux courants de didactique ; et (2) le résumé n'évoque *que* le *logos* des élèves, ou du moins une partie de ce *logos*, comme si celui-ci commandait fidèlement leur *praxis*. Le traitement différentiel − qui, en TAD, ne se justifie pas − des élèves et du professeur est ici particulièrement clair.

3. Les effets annoncés dans ce résumé sont présentés comme des effets « négatifs » : certaines des conditions créées par l'enseignement préalable de la symétrie centrale « peuvent se constituer en obstacle pour l'apprentissage de la symétrie centrale à ce niveau scolaire ». Notons qu'il est relativement rare de rencontrer des articles visant au contraire à mettre en évidence des effets *bénéfiques* de tel arrangement de conditions créé par l'enseignement prodigué *en amont* de l'enseignement étudié.

4. De ce point de vue, l'article comporte deux volets, associés, du point de vue de l'étude empirique des conditions du didactique, le premier à un *questionnaire*, le second à une *observation de classe*. Dans un premier temps, d'après le résumé, l'auteure met en évidence le fait que les propriétés de la symétrie centrale les plus utilisées – ou, plus exactement, les plus souvent « convoquées » par les élèves – sont partagées par la symétrie axiale. Dans un second temps, elle met en évidence le fait que ce type de comportement personnel découlerait du fait « objectif » que les situations de classe appellent majoritairement l'emploi de propriétés communes aux deux « symétries », au détriment des propriétés « distinctives », lesquelles demeurent « implicites ».

5. La conclusion du résumé énonce trois conséquences possibles des arrangements de conditions observés. Le premier type de conséquences tient dans la création de « malentendus », et cela « au niveau du contrat » : sans doute les élèves croient-ils s'être acquittés de leur devoir d'étudier la symétrie centrale dès lors qu'ils savent, dans une certaine mesure, en utiliser les propriétés qu'elle a en commun avec la symétrie axiale. Le deuxième type de conséquences, très lié au précédent (et qui, au reste, relève aussi du contrat didactique) consiste en une identification faussée, par les élèves, des propriétés « visées » (par l'enseignement), c'est-à-dire du *contenu* même de l'enjeu didactique. Le troisième type de conséquences n'est plus, lui, « au niveau du contrat » mais résulte d'une *rupture* de contrat : le dérèglement de l'enseignement donné se manifeste à travers les difficultés – ou du moins à travers certaines difficultés – éprouvées par les élèves dans leur travail.

6. La liste des mots clés mentionne une expression qui n'apparaît pas explicitement dans le résumé *stricto sensu* : « traitement de la figure ». Le rôle de cette notion reste à examiner.

Données 1.3

☛ Conclusion de l'article (pp. 74-75)

> CONCLUSION : MISE EN REGARD ENTRE LES CONCEPTIONS DES ELEVES ET LES EFFETS DE L'ENSEIGNEMENT
>
> Nous avons mis en évidence l'existence d'amalgames entre la symétrie centrale et la symétrie axiale. Amalgames que l'on peut expliquer en partie par la proximité des termes et des propriétés entre les deux types de symétries. Finalement, peu de propriétés caractéristiques sont explicitement convoquées par les élèves pour reconnaître la symétrie axiale ou la symétrie centrale (droites perpendiculaires ou alignement de points, superposition directe de la figure avec la figure-image avec ou sans retournement, ensemble des points invariants).

D’autre part, la symétrie axiale peut agir comme un obstacle didactique au sens de Brousseau (1983) à l’apprentissage de la symétrie centrale étant donné les choix opérés par le professeur observé. En effet, la symétrie centrale a été introduite comme la composée de symétries axiales, ce qui peut renforcer la confusion entre les deux types de symétries chez l’élève et donc l’apparition de propriétés-en-acte erronées (comme celles des droites ou axes concourants). De plus, des incidents didactiques témoignent de malentendus entre le professeur et les élèves. Ces malentendus sont renforcés par le fait que certaines propriétés qui distinguent les deux transformations (dont celles susmentionnées) sont absentes ou trop implicites dans le discours du professeur, ce qui peut expliquer en partie pourquoi les élèves ne les convoquent pas par la suite.

Il est intéressant de remarquer que ces malentendus ne tendent pas à se réduire à la fin du collège, comme nous l’avons montré dans notre travail de thèse (Bulf 2008). En effet, dans le cas de l’enseignement de la rotation en 3e, des malentendus de même nature que ceux observés ici conduisent l’élève à se polariser sur l’aspect dynamique et instrumenté de la rotation et non sur les propriétés géométriques sous-jacentes.

Aussi, cette étude de cas met en évidence des phénomènes didactiques liés à la place privilégiée accordée à la symétrie axiale dans les programmes français. Étant donné que les programmes actuels accentuent ce rôle premier de la symétrie axiale (car la rotation et la translation ont disparu et il faut attendre le lycée, en classe de 1ère, pour que celles-ci deviennent à nouveau un objet d’enseignement), on ne peut que s’interroger sur le renforcement de ces phénomènes didactiques. De plus, le point d’appui des symétries axiales et centrales comme entrée dans la géométrie déductive (comme cela est évoqué dans les programmes actuels), semble à repenser notamment du fait que les propriétés théoriques de ces symétries ne sont pas nécessairement celles qui sous-tendent les actions des élèves dans les tâches de reconnaissance ou de construction. En effet, la symétrie peut être un concept mathématique qui peut vivre de manière pragmatique sans que la question des justifications théoriques soit posée, du moins en des termes de géométrie déductive, ce qui est le cas si l’on observe par exemple la nature de l’activité géométrique de tailleurs de pierre ou des ébénistes, comme nous l’avons vu dans (Bulf, 2010).

Éléments d’analyse 1.3

1. Le titre de la conclusion ramène le lecteur aux « conceptions » des élèves et aux « effets de l’enseignement ». Mais les premières lignes énoncent un phénomène « objectif » non rencontré comme tel jusqu’ici : l’existence d’« amalgames » entre symétrie centrale et symétrie axiale. Le « siège » de ce phénomène n'est pas précisé : on ignore à ce stade de notre analyse si l'amalgamation en question est le fait « des élèves », ou de l'enseignement, ou d'une autre instance encore.

2. Un autre « résultat » de la recherche serait le suivant : le phénomène de formation d'« amalgames » peut s'expliquer « en partie par la proximité des termes et des propriétés entre les deux types de symétries ». Nous avions vu dans le résumé quelque chose qui ressemble à la « proximité des propriétés » – le fait que les deux types de « symétries » partagent certaines propriétés. Un fait nouveau, déclaré partiellement explicatif de la tendance à l'amalgamation, apparaît ici : la « proximité des termes ». On peut penser que l'auteure fait en cela référence à l'emploi du mot *symétrie* dans la désignation classique de la « symétrie centrale » et de la « symétrie axiale ».

3. Sous les conditions créées par le type d'enseignement observé, un fait est patent, selon l'auteure : l'identification d'une symétrie comme centrale ou axiale par une propriété « caractéristique » (ou par un ensemble caractéristique de propriétés) est rarement observé. La première des trois propriétés évoquées comme distinguant les deux types de symétries – « droites perpendiculaires ou alignement de points » – paraît sibylline : toute isométrie, en effet, conserve l'alignement (et transforme donc une droite en une droite) et conserve l'orthogonalité des droites. Mais sans doute cette interprétation n'est-elle pas conforme à ce que l'auteure a cherché à exprimer ici. Les deux autres propriétés n'appellent pas semblable remarque : alors que la symétrie centrale ne change pas l'orientation des figures et n'a qu'un point invariant, la symétrie axiale change l'orientation et possède une droite de points invariants.

4. L'un des résultats de la recherche dont l'article examiné rend compte serait que les choix opérés par le professeur contribuent à faire de la symétrie axiale un « obstacle didactique », ce qui se manifesterait par des confusions de la part des élèves entre l'un et l'autre type de symétries, avec « apparition de propriétés en acte erronées ». Ces confusions seraient suscitées notamment par le fait que la symétrie centrale serait définie comme « la composée de symétries axiales » – ce qui semble être un choix propre au professeur observé. La référence à des propriétés erronées – « celles des droites ou axes concourants » – est allusive et il resterait à expliciter ces « propriétés ». À ce mauvais démarrage s'ajoute ensuite la quasi-absence, dans le discours du professeur, des propriétés qui distingueraient les deux types de symétrie, ce qui expliquerait que les élèves ne « convoquent » pas ce genre de propriétés.

5. L'étude du cas de la rotation en 3^e, dont il est rendu compte dans la thèse de l'auteure, montrerait l'existence des mêmes « malentendus » et, donc, le rôle d'obstacle joué par la symétrie axiale bien au-delà de l'étude – en 5^e – de la symétrie centrale. La conclusion en dit ici un peu plus sur la nature des « malentendus » auxquels l'auteure a fait allusion jusqu'ici : ils consisteraient, de la part des élèves, à « se polariser sur l'aspect dynamique et instrumenté de la rotation et non sur les propriétés géométriques sous-jacentes ». On aperçoit là le fait que des conditions *de plus haut niveau,* tenant à la notion même de transformation du plan comme outil du travail mathématique, joueraient un rôle non négligeable dans la production des phénomènes observés.

6. La fin de la conclusion souligne que les effets censés découler de la place prédominante donnée à la symétrie axiale dans le cursus mathématique du collège (et, déjà, à l'école primaire) n'ont guère de raison de s'atténuer, et cela pour deux ordres de raisons. D'une part, aux termes des programmes de mathématiques du collège publiés dans *Bulletin officiel* spécial n^o 6 du 28 août 2008, la translation et la rotation, dont l'étude figurait traditionnellement au programme de la classe de 4^e pour la première, de la classe de 3^e pour la seconde, ont disparu du *cursus studiorum* du collège, ce qui devrait y affaiblir l'idée générale de transformation, rabattue désormais sur les seules « symétries ». D'autre part, la volonté institutionnelle d'un double investissement sur ces mêmes objets, celui de l'usage de transformations en géométrie, et celui de la pratique déductive en géométrie, semble constituer une condition défavorable à la distinction des deux types de symétries, parce qu'elle gommerait les usages « pragmatiques » des symétries au profit de leur gestion déductive. L'exemple, étudié par ailleurs par l'auteure, des tailleurs de pierre et des ébénistes fournirait un contre-exemple montrant que « la symétrie » peut très bien vivre « pragmatiquement », indépendamment de tout souci déductiviste.

7. À l'issue de l'examen des deux extraits de l'article étudié, bien des points restent en suspens. Ainsi en va-t-il en matière de « preuves » des assertions de l'auteure ou à propos de la hiérarchie des « explications » avancées à propos de tel ou tel phénomène observé : dans les « anomalies » constatées, quelle est par exemple la part des conditions créées par le professeur observé et quelle est la part des conditions qui préexistaient à son enseignement ?

Question 2. Quel modèle praxéologique (mathématique) de référence *pour le chercheur* relatif à la symétrie centrale peut-on ébaucher à partir du corpus d'exposés ci-après ?

Exposé 1.1

☛ « Symétrie axiale », *Wikipédia l'encyclopédie libre*
http://fr.wikipedia.org/wiki/Symétrie_axiale

Symétrie axiale

La **symétrie axiale** ou **réflexion** est une transformation géométrique du plan qui modélise un "pliage" ou un "effet miroir".

La symétrie axiale, d'axe la droite *d*, laisse tous les points de *d* invariants et transforme tout point M, non situé sur *d*, en un point image M' tel que :

- La droite (*MM'*) soit perpendiculaire à l'axe de symétrie *d*.
- Le milieu du segment [*MM'*] appartient à l'axe de symétrie *d*.

Le point M' est alors appelé le symétrique de M par rapport à l'axe de symétrie *d*.

Dans le cas d'une figure plane globalement invariante par une symétrie d'axe *d*, la droite *d* est dite axe de symétrie de la figure.

La symétrie axiale est un cas particulier de symétrie. Elle est une involution, c'est-à-dire qu'on retrouve le point ou la figure de départ si on l'applique deux fois.

Éléments d'analyse 1.1

1. Le modèle mathématique de référence pour le chercheur (MMR$_\xi$) peut contenir ici, outre la définition classique d'une symétrie *axiale* (la droite (MM') est perpendiculaire à l'axe *d* de la symétrie, le milieu de [MM'] appartient à *d*), le nom de *réflexion* – tout court –, le fait qu'une symétrie axiale est une *transformation du plan*, qu'elle est un cas particulier de *symétrie* et qu'elle est une *involution*.

2. On verra plus loin (dans l'exposé 1.3) la nature de ce qui est appelé (ici) une symétrie, notion dont la symétrie centrale serait un cas particulier.

3. On ignore à ce stade si la symétrie axiale est caractérisée, parmi les symétries, par la propriété d'involution (le fait que le symétrique du symétrique d'un point est le point lui-même).

Exposé 1.2

☛ « Axial symmetry », *Wikipedia the free encyclopedia*
http://en.wikipedia.org/wiki/Axial_symmetry

Axial symmetry

From Wikipedia, the free encyclopedia

Axial symmetry is symmetry around an axis; an object is axially symmetric if its appearance is unchanged if rotated around an axis [1]. For example, a baseball bat or a tea saucer looks the same if it is rotated by any angle about the line passing lengthwise through its center, so it is axially symmetric.

See also [edit]

- Rotational symmetry has a more general discussion
- Chiral symmetry describes the use in quantum mechanics

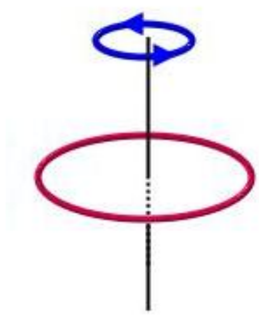
References [edit]

1. ^ "Axial symmetry" American Meteorological Society glossary of meteorology. Retrieved 2010-04-08.

Éléments d'analyse 1.2

1. Il apparaît ici que, en anglais, l'expression « axial symmetry » ne désigne nullement une *transformation* (du plan, de l'espace), mais une *propriété* des corps, celle d'être « axialement symétrique », c'est-à-dire de « posséder un axe de symétrie ». Par contraste, dans l'article correspondant en français, qui est l'article « Symétrie axiale » de l'exposé 1.1, il est question, non de la *propriété* de symétrie, mais bien de la *transformation* par symétrie axiale.

2. Le lien entre *transformation* et *propriété* est explicité ainsi : un objet est « axially symmetric » si une rotation autour de l'axe supposé laisse son « apparence » inchangée, comme il en va avec une soucoupe (*tea saucer*, voir ci-contre) ou une batte de baseball (*baseball bat*). Le lien possible entre propriété de symétrie et réflexion *plane* n'est donc pas mis en évidence.



Exposé 1.3

☛ « Symétrie (transformation géométrique) », *Wikipédia l'encyclopédie libre*
http://fr.wikipedia.org/wiki/Symétrie_(transformation_géométrique)

Symétrie (transformation géométrique)

Une **symétrie géométrique** est une transformation géométrique qui est involutive : lorsqu'on l'applique deux fois à un point ou à une figure on retrouve la figure de départ. Parmi les symétries courantes, on peut citer la réflexion, la symétrie centrale, etc.

Une symétrie géométrique est un cas particulier de symétrie. Il existe plusieurs sortes de **symétries** dans le plan ou dans l'espace.

Remarque : Le terme de symétrie possède aussi un autre sens en mathématiques. Dans l'expression groupe de symétrie, une symétrie désigne une isométrie quelconque. Ce terme désigne soit une translation, soit un automorphisme orthogonal, soit la composée des deux.

Éléments d'analyse 1.3

1. Cet article de *Wikipédia* est celui auquel renvoie le lien porté par le mot « symétrie » dans l'exposé 1.1 ci-dessus. Il convient de souligner en outre que, dans *Wikipedia*, cet article *n'a pas de correspondant en anglais ni en aucune autre langue*.

2. Le texte *semble* définir la notion de symétrie géométrique comme une transformation involutive, sans caractériser autrement ces transformations géométriques. En particulier, le « etc. » qui suit la mention de la *réflexion* et de la *symétrie centrale* n'est pas précisé dans le passage proposé. De quoi est-il fait ? L'examen du reste de l'article fait apparaître notamment l'existence (1) des symétries de l'espace par rapport à un plan et (2) des symétries *obliques* (du plan ou de l'espace).

3. Ce début d'article souligne la polysémie du terme *symétrie* en mathématiques : dans certains contextes, il serait ainsi l'équivalent d'*isométrie*.

Exposé 1.4

☛ « Symétrie centrale », *Wikipédia l'encyclopédie libre*
http://fr.wikipedia.org/wiki/Symétrie_centrale

Symétrie centrale

La **symétrie centrale** est une transformation géométrique.

Elle se réalise à partir d'un point fixe noté Ω appelé **centre de symétrie**. Elle transforme tout point M en un point image M' tel que le point Ω soit le milieu du segment [MM'].

En termes de vecteurs, cela se traduit par :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{M\Omega}$$

La symétrie centrale est un cas particulier de rotation : la symétrie de centre Ω est le demi-tour de centre Ω. Elle est une involution, c'est-à-dire qu'on retrouve le point ou la figure de départ si on l'applique deux fois.

Éléments d'analyse 1.4

1. Ce texte explicite une définition de la symétrie *centrale* (le transformé M' de M est le point tel que le centre Ω soit le milieu de [MM']) ainsi qu'une formulation vectorielle de cette définition : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{M\Omega}$.

2. On y présente la symétrie centrale comme un *demi-tour*, et donc un cas particulier de rotation.

3. On retrouve le fait que, comme la symétrie axiale, la symétrie centrale est une *involution*.

Exposé 1.5

☛ « Point reflection », *Wikipedia the free encyclopedia*
http://en.wikipedia.org/wiki/Point_reflection

Point reflection

From Wikipedia, the free encyclopedia

This article **needs additional citations for verification**. Please help improve
adding citations to reliable sources. Unsourced material may be challenged an
2010)

In geometry, a **point reflection** or **inversion in a point** (or **inversion through a point**, or **central inversion**) is a type of isometry of Euclidean space. An object that is invariant under a point reflection is said to possess **point symmetry**; if it is invariant under point reflection through its center, it is said to possess **central symmetry** or to be **centrally symmetric.**

Point reflection can be classified as an affine transformation. Namely, it is an isometric involutive affine transformation, which has exactly one fixed point, which is the point of inversion. It is equivalent to a homothetic transformation with scale factor equal to -1. The point of inversion is also called homothetic center.

Éléments d'analyse 1.5

1. Cet article en anglais correspond à l'article « Symétrie centrale », *Wikipédia*. Il est consacré à la symétrie centrale appelée ici *point reflection*, *inversion in a point*, *inversion through a point*, *central inversion*.

2. Avant même de donner une définition de la symétrie centrale, cet article introduit la *propriété* de *point symmetry* ou de *central symmetry* : un objet est dit *centrally symmetric* s'il est invariant par symétrie centrale. Notons l'ambiguïté de l'expression « its center » : s'agit-il du centre de la symétrie centrale considérée ou du centre de l'objet, centre qui serait défini par ailleurs ? Ici, on peut penser que la première interprétation est la bonne : un objet est symétrique par rapport à un point Ω s'il est invariant par la symétrie centrale de centre Ω.

3. La symétrie centrale semble définie ici comme étant une transformation affine isométrique et involutive ayant un unique point invariant. Cette formulation est complétée par une assertion qui ne peut avoir que le statut de théorème (dont une démonstration manque en ce point) : une symétrie centrale ainsi définie se révèle être une homothétie de rapport -1 ; de là que son centre soit encore appelé « centre d'homothétie ».

4. Voici une démonstration du théorème évoqué au point précédent.

❶ Soit une isométrie σ du plan et soit A, B et C des points alignés avec B entre A et C. On a AB + BC = AC ; en notant de façon générale M' l'image d'un point M par cette isométrie, on a A'B' = AB, B'C' = BC, A'C' = AC. Il en résulte que l'on a A'B' + B'C' = AB + BC = AC = A'C' : les points A', B', C' sont donc alignés, avec B' entre A' et C'. Toute isométrie conserve ainsi l'alignement et la relation « entre ».

❷ Considérons une isométrie σ ayant trois points invariants non alignés A, B, C. Notons d'abord que les points de (AB), (BC), (CA) sont invariants : si M est aligné avec A et B et que, par exemple MA + AB = MB, puisque M'A = MA et M'B = MB, on a aussi M'A + AB = M'B, en sorte que M', A, et B sont alignés avec A entre M' et B ; comme M'A = MA, l'égalité M' = M en résulte. Soit alors M ∉ (AB) et distinct de C ; son image M' vérifie M'A = MA et M'B = MB : M' est donc soit identique à M, soit symétrique de M par rapport à (AB). Dans ce dernier cas, (AB) est la médiatrice de [MM'] ; comme C ∉ (AB), on a CM ≠ CM', contrairement à l'hypothèse que σ est une isométrie admettant C pour point invariant. Par suite, M' = M. Toute isométrie qui a trois points invariants non alignés est donc l'identité.

❸ Soit alors une isométrie involutive que l'on suppose différente de la transformation identique du plan. Il existe donc M tel que M' ≠ M. Soit I le milieu de [MM']. On a MI = IM', avec I entre M et M' ; il vient donc : M'I' = I'M, avec I' entre M et M'. Il en résulte que I' = I. Le milieu de tout segment [MM'] est donc invariant par l'isométrie involutive considéré.

❹ Si cette isométrie involutive a un seul point invariant Ω, alors, pour tout M, I = Ω, en sorte que, pour tout M, M' est le point tel que [MM'] a pour milieu Ω : l'isométrie est donc la symétrie centrale de centre Ω. Si l'isométrie involutive étudiée a au moins deux points invariants A et B, tous les points de la droite *d* = (AB) sont invariants. Soit un point M ∉ *d*. Le transformé M' de M doit vérifier AM' = AM et BM' = BM. Comme M' ≠ M (sinon l'isométrie laisserait invariants les points non alignés A, B et M et serait donc l'identité), M' est le symétrique de M par rapport à *d*. L'isométrie étudiée n'est donc rien d'autre que la symétrie par rapport à *d*.

Exposé 1.6

☛ Half turn, Reflection in Point
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/HalfTurn.shtml

> **Half Turn, Reflection in Point**
>
> Given a point O and a point P. *Reflection P' of P in O* is the point collinear with P, O and such that OP' = OP. O is the only point for which O' = O. O is called the center of reflection. The transform itself is a particular case of rotation, viz., rotation through 180°. For this reason, it is often referred to as a *half turn*.

Éléments d'analyse 1.6

1. Ce texte défini « la réflexion » d'un point P en O, soit l'image de P par la symétrie centrale de centre O. Faute d'utiliser des vecteurs, la définition comporte une faille : P' pourrait être identique à P. Pour corriger la chose, il suffit cependant d'écrire que « P' est le point *autre que* P qui est aligné avec O et P et tel que OP' = OP ».

2. Notons que le mot anglais « transformation » cède la place, ici, au mot « transform ».

3. La symétrie centrale est une rotation d'angle 180°. L'appellation *half turn* (demi-tour) se présente ici pour la première fois, le titre la faisant apparaître comme synonyme de « reflection in point ».

Exposé 1.7

☛ George E. Martin, *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry* (Springer, New York, 1982), pp. 17-20

§3.2 **Halfturns**

A *half turn* turns out to be an involutory rotation, that is, a rotation of 180º. So a half turn is just a special case of a rotation. Although we have not formally introduced rotations yet, we look at this special case now because half turns are nicely related to translations and have such easy equations in the analytic geometry. We want to give a coordinate geometry definition for half turns that is like the definition above for translations. Informally, we observe that if point A is rotated 180º about point P to point A', then P is the midpoint of A and A'. See Figure 3.3 below.

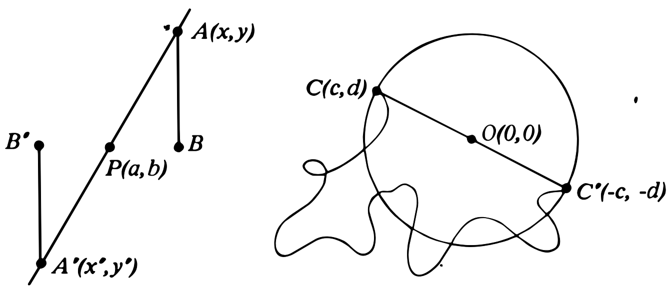


Figure 3.3

Hence, we need only the midpoint formulas to obtain the desired equations. From equations $(x + x')/2 = a$ and $(y + y')/2 = b$ we can formulate our definition as follows. If $P = (a, b)$, then the *half turn* σ_P *about point P* is the mapping with equations $x' = -x + 2a$, $y' = -y + 2b$. The use of the Greek letter sigma to denote half turns will be explained later.

In particular, we note that for the half turn about the origin we have $\sigma_O((x, y)) = (-x, -y)$. Under transformation σ_O does (x, y) go to $(-x, -y)$ by going directly through O, by rotating counterclockwise about O, by rotating clockwise about O, or by taking the other fanciful path illustrated in Figure 3.3 ? Either the answer is "None of the above" or perhaps it would be better to ask whether the question makes sense. Recall that transformations are just one-to-one correspondences among the points. There is actually no physical motion being described. (That is done in the study called *differential geometry*.) We might say we are describing the end position of physical motion. For example, the end position in rotating counterclockwise 180° and rotating clockwise 180º is the same even though these are physically different motions. Since our thinking is often aided by language indicating physical motion, we continue such usage as the customary "P goes to Q" in place of the more formal "P corresponds to Q."

What properties of a half turn follow immediately from the definition of σ_P? First, for any point A, the midpoint of A and $\sigma_P(A)$ is P. This, of course, is how the definition was formulated in the first place. However, from this simple fact alone, it follows that σ_P is an involutory transformation. Also from this simple fact, it follows that σ_P fixes exactly the one point P. It even follows that σ_P fixes line l iff P is on l. We shall also see this last result again in showing

σ_P is a collineation. Suppose line l has equation $aX + bY + c = 0$. Let $P = (h, k)$. Then σ_P has equations $x' = -x + 2h$ and $y' = -y + 2k$. Then $ax + by + c = 0$ iff $ax' + by' + c - 2(ah + bk + c) = 0$. So $\sigma_P(l)$ is the line m with equation $aX + bY + c - 2(ah + bk + c) = 0$. Therefore, not only is σ_P a collineation but a dilatation as $l \| m$. Finally, l and m are the same line iff $ah + bk + c = 0$, which holds iff (h, k) is on l. We have proved the following.

Theorem 3.5. *A half turn is an involutory dilatation. The midpoint of points A and $\sigma_P(A)$ is P. Half turn σ_P fixes point A iff A = P. Halfturn σ_P fixes line l iff P is on l.*

Since a halfturn is an involution, then $\sigma_P\sigma_P = I$. What can be said about the product of two halfturns in general? Let $P = (a, b)$ and $Q = (c, d)$. Then

$$\begin{aligned} \sigma_Q\sigma_P((x, y)) &= \sigma_Q(-x + 2a, -y + 2b)) \\ &= (-[-x + 2a] + 2c, -[-y + 2b] + 2d) \\ &= (x + 2[c - a], y + 2[d - b]). \end{aligned}$$

Since $\sigma_Q\sigma_P$ has equations $x' = x + 2(c - a)$ and $y' = y + 2(d - b)$, then $\sigma_Q\sigma_P$ is a translation. This proves the important result that the product of two halfturns is a translation. Suppose R is the point such that Q is the mid-point of P and R. Then

$$\sigma_Q\sigma_P(P) = \sigma_Q(P) = R \text{ and } \sigma_R\sigma_Q(P) = \sigma_R(R) = R.$$

Since there is a unique translation taking P to R, then each of $\sigma_Q\sigma_P$ and $\sigma_Q\sigma_P(P)$ must be $\tau_{P,R}$. We have proved the following.

Theorem 3.6. *If Q is the midpoint of points P and R, then*

$$\sigma_Q\sigma_P = \tau_{P,R} = \sigma_R\sigma_Q.$$

Observe that the theorem above states that a product of two halfturns is a translation and, conversely, a translation is a product of two halfturns. Also note that $\sigma_Q\sigma_P$ moves each point *twice* the directed distance from P to Q.

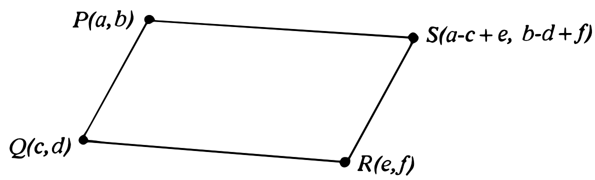


Figure 3.4

We now consider a product of three half turns. By thinking about the equations, it should almost be obvious that $\sigma_R\sigma_Q\sigma_P$ is itself a halfturn. We shall prove that and a little more. Suppose $P = (a, b)$, $Q = (c, d)$, and $R = (e, f)$. Let $S = (a - c + e, b - d + f)$. In case, P, Q, R are not collinear, then □*PQRS* is a parallelogram. This is easy to check as opposite sides of the quadrilateral are congruent and parallel. See Figure 3.4. We calculated $\sigma_Q\sigma_P((x, y))$ above. Whether P, Q, R are collinear or not, with one more step we obtain

$$\sigma_R\sigma_Q\sigma_P((x, y)) = (-x + 2[a - c + e], -y + 2[b - d + f]) = \sigma_S((x, y)).$$

Our theorem now follows.

Theorem 3.7. *A product of three halfturns is a half turn. In particular, if points P, Q, R are not collinear, then $\sigma_R\sigma_Q\sigma_P = \sigma_S$ where $\square PQRS$* is *a parallelogram.*

We can solve the equation $\tau_{A,\,B} = \sigma_D\sigma_C$ for anyone of A, B, C, D in terms of the other three. Knowing C, D, and one of A or B, we let the other be defined by the equation $\sigma_D\sigma_C(A) = B$ or the equivalent equation $\sigma_C\sigma_D(B) = A$. In either case, product $\sigma_D\sigma_C$ is the unique translation taking A to B, and so $\sigma_D\sigma_C = \tau_{A,\,B}$. When we know both A and B, we let M be the midpoint of A and B. So $\tau_{A,\,B} = \sigma_M\sigma_A$. Knowing A, B, D, we have C is the unique solution for Y in the equation $\sigma_D\sigma_M\sigma_A = \sigma_Y$ as then $\tau_{A,\,B} = \sigma_M\sigma_A = \sigma_D\sigma_Y$. Knowing A, B, C, we have D is the unique solution for Z in the equation $\sigma_M\sigma_A\sigma_C = \sigma_Z$ as then $\tau_{A,\,B} = \sigma_M\sigma_A = \sigma_Z\sigma_C$. *We* have proved the following theorem.

Theorem 3.8. *Given any three of the not necessarily distinct points A, B,* C, *D, then the fourth is uniquely determined by the equation $\tau_{A,\,B} = \sigma_D\sigma_C$.*

If $\sigma_Q\sigma_P = \tau_{P,\,R}$, then $\tau_{P,\,R}{}^{-1} = \sigma_P\sigma_Q$. So $\sigma_Q\sigma_P = \sigma_P\sigma_Q$ iff $P = Q$. However, a product of three halfturns can be written backwards since for any points P, Q, R there is a point S such that

$$\sigma_R\sigma_Q\sigma_P = \sigma_S = \sigma_S{}^{-1} = (\sigma_R\sigma_Q\sigma_P)^{-1} = \sigma_P{}^{-1}\sigma_Q{}^{-1}\sigma_R{}^{-1} = \sigma_P\sigma_Q\sigma_R.$$

Hence, although halfturns do not commute in general, we have proved the following theorem.

Theorem 3.9. $\sigma_R\sigma_Q\sigma_P = \sigma_P\sigma_Q\sigma_R$ *for any points P, Q, R.*

The halfturns do not form a group by themselves. A product of two halfturns is a translation. Since a translation is a product of two halfturns, then the product in either order of a translation and a half turn is a halfturn by Theorem 3.7. In general, a product of an even number of halfturns is a product of translations and, hence, is a translation. Then, a product of an odd number of halfturns is a half turn followed by a translation and, hence, is a half turn. Thus the group generated by the halfturns contains just the halfturns and the translations.

Theorem 3.10. *The union of the translations and the halfturns forms a group $\mathscr{H}$.*

We reserve "$\mathscr{H}$" for the group in the theorem. This group seems to have no name other than *the group generated by the halfturns.*

Éléments d'analyse 1.7

1. La symétrie centrale est nommée ici *halfturn*, en un mot, ce qui tend à gommer superficiellement le syntagme *half turn* (en deux mots) pour fabriquer une entité « d'une pièce », « inanalysée ».

2. L'étude précoce de ce cas particulier de rotation se justifie, inique l'auteur, par deux motifs : (1) les symétries centrales entretiendraient une relation « plaisante » avec les *translations* ; (2) leur expression analytique serait facile.

3. En observant que si A devient A' par une rotation de 180° autour du point P, P est le milieu de [AA']. On a donc $\frac{x+x'}{2} = a$ et $\frac{y+y'}{2} = b$ où a et b sont les coordonnées de P, ce qui donne $x' = -x + 2a$ et $y' = -y + 2b$.

4. Pour la première fois, on voit ici la symétrie centrale être désignée par une notation : la symétrie de centre P est notée σ_P, l'auteur promettant d'indiquer plus tard la raison du choix de la lettre grecque σ pour ce faire.

5. L'auteur aborde ensuite une question encore inédite (et, semble-t-il, rarement explicitée) : quand on dit que le point A se transforme en le point A', que veut-on dire ? Notons ici que l'auteur avait écrit plus haut : « if point *A* is rotated 180° about point *P* to point *A'*, then… » Cela suggèrerait que A « se déplace dans le plan » jusqu'à arriver au point A'. Mais par quel chemin ? En allant « directement » de A en A' (c'est-à-dire en suivant le segment [AA']) ? En tournant autour du centre P dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ? Ou dans le sens direct ? Cette représentation quasi cinématique n'a en fait pas lieu d'être : une transformation *fait correspondre* le point A' au point A, *mais rien ne se déplace*. On pourrait dire que, d'un mouvement physique dans le plan, on ne retient que la position initiale et la position finale (*end position*) ; le mouvement par lequel on passe de la position initiale à la position finale n'est pas pris en compte – il faudra, pour qu'il le soit, faire de la « géométrie différentielle ». On conservera cependant la métaphore du mouvement en disant que « le point A *va en* A' » (« P goes to P' »), ou que « A est envoyé en A' », etc., sans pour autant se préoccuper du mouvement physique par lequel cela pourrait se réaliser.

6. L'auteur établit ensuite un certain nombre de propriétés de la symétrie centrale. Le point de départ se trouve dans le fait suivant : A' = σ_P(A) est tel que P est le milieu de [AA']. De ce « simple fait » (*this simple fact*), on peut tirer une série de propriétés :

❶ Une symétrie centrale est une involution.

❷ Une symétrie centrale a son centre pour point invariant unique.

❸ La symétrie centrale σ_P laisse invariante une droite donnée *d* si et seulement si cette droite passe par le centre P de la symétrie. (Partie directe immédiate ; partie réciproque : on suppose que P $\notin d$; soit H le projeté orthogonal de P sur d : pour tout point M de d, M $\neq$ H, PM > PH ; comme PH' = PH, H' $\notin d$, et donc $d' \neq d$.)

❹ La symétrie centrale est une *collinéation*, c'est-à-dire transforme une droite en une droite, et, plus précisément, est une *dilatation*, c'est-à-dire transforme une droite en une droite *parallèle*. (Soit $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de d. Le point N(X, Y) appartient à $\sigma_P(d)$ si et seulement si σ_P(N) appartient à d, soit si et seulement si le point de coordonnées $(-X + 2h, -Y + 2k)$ vérifie $a(-X + 2h) + b(-Y + 2k) + c = 0$, ce qui équivaut à $aX + bY - (2ah + 2bk + c) = 0$, égalité qui s'écrit encore $aX + bY + c - 2(ah + bk + c) = 0$. Telle est l'équation de l'ensemble $\sigma_P(d)$: c'est l'équation d'une droite parallèle à d, qui est identique à d si et seulement si $ah + bk + c = 0$, c'est-à-dire si et seulement si le point P(h, k) est sur d.

❺ Le produit de deux symétries centrales σ_P et σ_Q est une translation de vecteur $2\overrightarrow{PQ}$: avec des notations évidentes, on a $\sigma_Q\sigma_P = \tau_{P,\ R}$, où R vérifie $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PQ}$. Inversement, toute translation s'écrit comme le produit de deux symétries centrales : si cette translation transforme P en R, et si Q est le milieu de [PR], alors $\tau_{P,\,R} = \sigma_Q\sigma_P$.

❻ L'auteur considère alors le produit de *trois* demi-tours et montre que le produit $\sigma_R\sigma_Q\sigma_P$ est en fait le demi-tour σ_S où S est le quatrième sommet du parallélogramme PQRS (voir la figure ci-après).

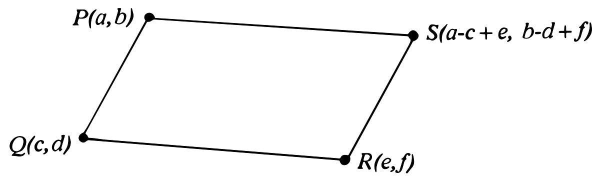


Figure 3.4

Le point S est donné par $\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR}$ et a donc pour coordonnées $a + e - c$ et $b + f - d$. Avec des notations évidentes, les équations de σ_P s'écrivent : $x_1 = -x + 2a$, $y_1 = -y + 2b$; celles de $\sigma_Q\sigma_P$ sont donc : $x_2 = -x_1 + 2c = x + 2(c - a)$, $y_2 = -y_1 + 2d = y + 2(d - b)$. On obtient à partir de là les équations du produit $\sigma_R\sigma_Q\sigma_P$: $x' = -x_2 + 2e = -x + 2(a + e - c)$, $y' = -y_2 + 2f = -y + (b + f - d)$. Ce sont bien là les équations de la symétrie centrale σ_S. Le centre du produit de trois symétries centrales est ainsi déterminé aisément comme le quatrième sommet du parallélogramme dont les trois premiers sommets sont les centres des trois symétries dont on fait le produit, *dans l'ordre où on l'effectue*.

❼ On peut résoudre l'équation $\tau_{A,\,B} = \sigma_D\sigma_C$ par rapport à l'une quelconque des variables A, B, C, D en fonction des trois autres :

① Supposons A, C et D donnés ; alors on a B = $\sigma_D\sigma_C$(A). De même, si B, C, D sont donnés, alors A = $\sigma_C\sigma_D$(B).

② Supposons donnés A et B. Soit M le milieu de [AB] ; on a alors $\sigma_M\sigma_A(A) = \sigma_M(A) = B$, en sorte que $\sigma_M\sigma_A = \tau_{A,\,B}$. Si l'on suppose donnés A, B et D et que l'on cherche C tel que l'on ait $\tau_{A,\,B} = \sigma_D\sigma_C$, il vient $\sigma_D\sigma_C = \sigma_M\sigma_A$ et donc $\sigma_C = \sigma_D\sigma_M\sigma_A$: le point C cherché est le quatrième sommet du parallélogramme AMDC. Si l'on suppose connus A, B, C, on doit de même avoir $\sigma_D\sigma_C = \sigma_M\sigma_A$ et donc $\sigma_D = \sigma_M\sigma_A\sigma_C$.

❽ Si l'on a $\sigma_Q\sigma_P = \tau_{P,\,R}$, alors $\tau_{P,\,R}{}^{-1} = \sigma_P\sigma_Q$; on a donc $\sigma_Q\sigma_P = \sigma_P\sigma_Q$ si et seulement si P = Q : deux symétries centrales commutent seulement s'il s'agit de la même symétrie centrale. Pourtant, étant donné des points P, Q, R, alors on a $\sigma_R\sigma_Q\sigma_P = \sigma_P\sigma_Q\sigma_R$ puisque le produit des deux symétries centrales $\sigma_R\sigma_Q\sigma_P$ et $\sigma_P\sigma_Q\sigma_R$ ert l'identité.

❾ Les demi-tours ne forment pas un groupe puisque le produit de deux demi-tours est une translation. Mais l'ensemble des demi-tours et des translations forme un groupe $\mathscr{H}$ (non commutatif) qui semble n'avoir pas de nom particulier.

Exposé 1.8

☛ P. S. Modenov & A. S. Parkhomenko, *Geometric transformations.* Vol. I. : *Euclidean and affine transformations* (Academic Press, New York, 1965), pp. 37-38.

8.3. REFLECTION IN A POINT

Suppose we are given a point O of the plane. Let us make correspond to each point M of the plane the point M' symmetrically opposite it with respect to O. That is, M' is that point of the plane for which O is the midpoint of MM'. We make O correspond to itself. The transformation we have defined is called the *reflection in O*. We show that reflection in O is an orthogonal transformation of the first kind. Let A', B' be the images under the reflection of two given points A, B, respectively. Then, if A, B, O are not collinear, the triangles AOB and $A'OB'$ are congruent (two sides and included angle), so that $A'B' = AB$. We leave the case where A, B, O are collinear to the reader. This shows that reflection is an orthogonal transformation. To see that it is of the first kind, choose A and B not collinear with O and consider the sequence

$$AOB,\ A'OB,\ A'OB'.$$

The triangles AOB and $A'OB$ have opposite orientation, since A and A' are on opposite sides of OB; and $A'OB$ and $A'OB'$ have opposite orientation, since B and B' are on opposite sides of OA'. So AOB and $A'OB'$ have the same orientation, and the transformation is of the first kind.

Under a reflection in a point, each segment is transformed into an equal segment having the opposite direction: strictly speaking, $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$, for every pair of points A, B. If A and B are collinear with O, then $A'B'$ is collinear with AB, and otherwise it is parallel (but pointing the other way).

Conversely, it is true that any transformation of the plane in which vectors are taken into their negatives is a reflection in a point.

For it is first clear that the transformation is orthogonal. It is not the identity, so choose a point A whose image A' is distinct from it. Let O be the midpoint of AA' and M any point not on the line AA'. We show that the image M' of M is its reflection in O. We know that $AM = -A'M' = M'A'$, so that $AMA'M'$ form the vertices of a parallelogram. Its diagonals bisect each other in O, so that O is the midpoint of MM'. The proof that the image of a point on AA' is its reflection in O is left to the reader.

Éléments d'analyse 1.8

1. On peut mentionner ici que, en anglais, le mot *reflection* signifie d'abord *reflet*, comme le montre cet extrait d'un dictionnaire en ligne de l'anglais (le Macmillan Dictionary : voir http://www.macmillandictionary.com/dictionary/american/reflection) :

- an image that you see when you look in a mirror or other shiny surface
- careful thought about something
- your reflections on something are your ideas or opinions about it that you have thought about carefully
- something that clearly shows something
- the process of reflecting light, sound, or images

Parler « reflection in a point » c'est ainsi parler de « reflet en un point »…

2. Les auteurs établissent d'abord qu'une symétrie centrale conserve les distances : la chose découle immédiatement du fait que les triangles AOB et A'OB' vérifient $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ (puisque ces angles sont opposés par le sommet) et OA' = OA, OB' = OB (par définition de A' et B') : on en déduit en effet que A'B' = AB.

3. Le fait que la symétrie centrale conserve l'orientation (c'est une transformation « de première espèce », *of the first kind*) se démontre en utilisant le fait que des triangles MON et M'ON (où M' est le symétrique de M par rapport à O) : les triangles AOB et A'OB sont d'orientation opposées, de même que les triangles A'OB et A'OB', en sorte que AOB et

A'OB' ont même orientation. On notera que les auteurs n'étendent pas leur démonstration à tout triangle possible ; cela s'explique par le théorème suivant, qui apparaît à la page 31 de leur ouvrage :

> Theorem 1. *If a triangle ABC and its image A'B'C' under an orthogonal transformation of the plane have the same orientation, then so also do any triangle and its image. Conversely, if ABC and A'B'C' have opposite orientations, so also do any triangle and its image.*

En d'autres termes, pour déterminer le fait qu'une isométrie est directe ou inverse, il suffit de tester la chose sur *un* triangle (« bien choisi ») et son image.

4. Les auteurs caractérisent ensuite les symétries centrales par le fait que, pour tous A, B, on a $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$. La partie directe est immédiate, puisqu'on a : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = -\overrightarrow{AB}$. Supposons, inversement, une transformation vérifiant $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$ pour tous A, B. Une telle transformation n'est pas l'identité car si A ≠ B, l'égalité $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$ entraîne A' ≠ A ou B' ≠ B. Soit donc A tel que A' ≠ A et soit O le milieu de [AA']. Pour tout point M non aligné avec A et B, on a alors : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'M'} = -\overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{AM}) = -\overrightarrow{OM}$, CQFD. Les auteurs procèdent autrement : du fait que AM = –A'M', le quadrilatère AMA'M' est un parallélogramme, dont les diagonales se coupent en leur milieu. Il en résulte que le milieu de [MM'] est le milieu O de [AA'], CQFD. Les auteurs laissent au lecteur le cas où M serait aligné avec A, B. On notera que la démonstration par le calcul vectoriel donnée ci-dessus règle d'un même coup les deux cas (non-alignement et alignement).

Exposé 1.9

☛ Roland Maillard & Albert Millet, *Géométrie. Classes de mathématiques. Programmes du 27 juin 1945*. (Hachette, Paris, 1951)

EXERCICES

137. – Quel est le produit d'une translation et d'une symétrie par rapport à un point ?

138. – On considère la figure (F_1) symétrique de (F) par rapport à un point O_1, puis la figure (F_2) symétrique de (F_1) par rapport à un point O_2 et enfin la symétrique (F_3) de (F_2) par rapport à un point O_3.

1° Démontrer que(F) et (F_3) sont symétriques par rapport à un point O que l'on construira.

Étudier l'influence de l'ordre des symétries.

2° Plus généralement, on considère la suite de figures (F), (F_1), (F_2) etc... (F_n) chacune d'elles étant la symétrique de la précédente par rapport à un point. Étudier la transformation permettant de passer de (F) à (F_n).

139. – Construire un polygone connaissant les milieux de ses côtés. On distinguera deux cas suivant que le nombre des côtés est pair ou impair. Faire la construction effective pour un pentagone.

140. – On donne quatre droites indéfinies formant un quadrilatère dans un plan, et un point O de ce plan. Construire des parallélogrammes qui ont le point O pour centre et dont les sommets sont placés respectivement sur chacune des quatre droites données. Nombre de solutions.

Éléments d'analyse 1.9

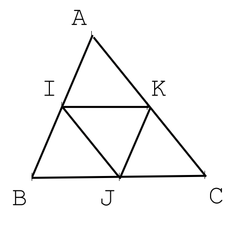
1. Notons que la classe de mathématiques mentionnée dans la référence était alors la classe terminale scientifique, dotée d'un fort enseignement de mathématiques.

2. L'exercice 137 n'apporte rien de neuf. L'exercice 138 montre une situation non encore rencontrée : dans un enseignement où l'on n'utilise pas la notion d'application du plan dans le plan, on ne peut composer les transformations et parler par exemple de la transformation $\sigma_R\sigma_Q\sigma_P$. Cet exercice nous montre comment on a longtemps fait : une transformation opère, non sur le plan, mais sur des *figures*.

❶ La première question demande de montrer, mais en d'autres termes, que l'on a $\sigma_R\sigma_Q\sigma_P = \sigma_S$, où S est le point tel que le quadrilatère PQRS soit un parallélogramme. Selon l'ordre dans lequel on compose les symétries données, ce 4^e^ point n'est pas le même et la symétrie obtenue est différente.

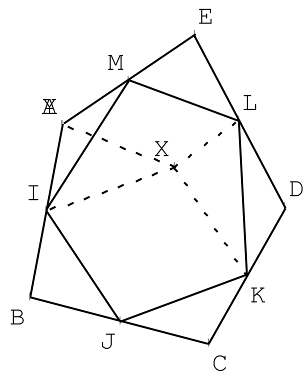
❷ La seconde question généralise le résultat de la question précédente : si on compose des symétries centrales σ_1, σ_1, …, σ_n, la composée est une symétrie centrale si n est *impair*, une translation si n est pair.

3. L'exercice 139 est en fait une application du résultat de l'exercice 138. Considérons le cas de polygones ayant un nombre impair de côtés, et tout d'abord celui du triangle : on voit que le point A se transforme en le point B par la symétrie de centre I, que celui-ci a pour image C par la symétrie de centre J, qui devient A par la symétrie de centre K. Le point A est donc invariant par la symétrie centrale $\sigma_K\sigma_J\sigma_I$ dont il est en conséquence le centre. D'après ce que

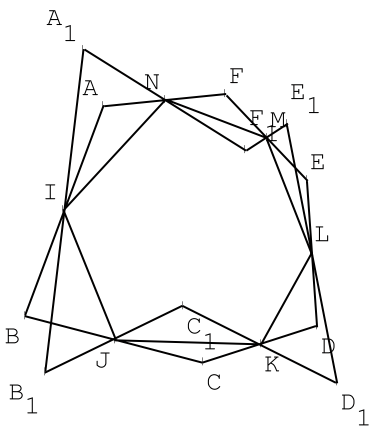


l'on a vu, il s'obtient comme le quatrième sommet du parallélogramme dont les trois premiers sommets sont (dans l'ordre) I, J, K. On obtient de même B et C en complétant les triplets (J, K, I) et (K, I, J). On touche du doigt ici l'heureuse non-commutativité de la composition des symétries centrales.

4. Considérons maintenant le cas d'un pentagone ABCDE. Le point A est le centre de la symétrie centrale $\sigma_M\sigma_L\sigma_K\sigma_J\sigma_I$. Construisons d'abord le point X centre de la symétrie centrale $\sigma_K\sigma_J\sigma_I$, soit le point tel que IJKX soit un parallélogramme. On a alors $\sigma_M\sigma_L\sigma_K\sigma_J\sigma_I = \sigma_M\sigma_L\sigma_X$, symétrie centrale dont le centre est le point Y tel que XLMY forme un parallélogramme : le point Y est le point A cherché. Les points B, C, D, E s'obtiennent ensuite, à partir de A, par des symétries successives par rapport à I, J, K et L respectivement.



5. Dans le cas où *n* est *pair* le produit des symétries σ_I, σ_J, σ_K, …, est une translation. Comme cette translation transforme par exemple le sommet A du polygone en lui-même, il s'agit de l'identité. Dans ce cas, les points milieux I, J, K, …, découlant d'un polygone donné, n'importe quel point A_1 convient ; en posant $B_1 = \sigma_I(A_1)$, $C_1 = \sigma_J(B_1)$, $D_1 = \sigma_K(C_1)$, …, on obtient un polygone possible (voir la figure ci-dessous).

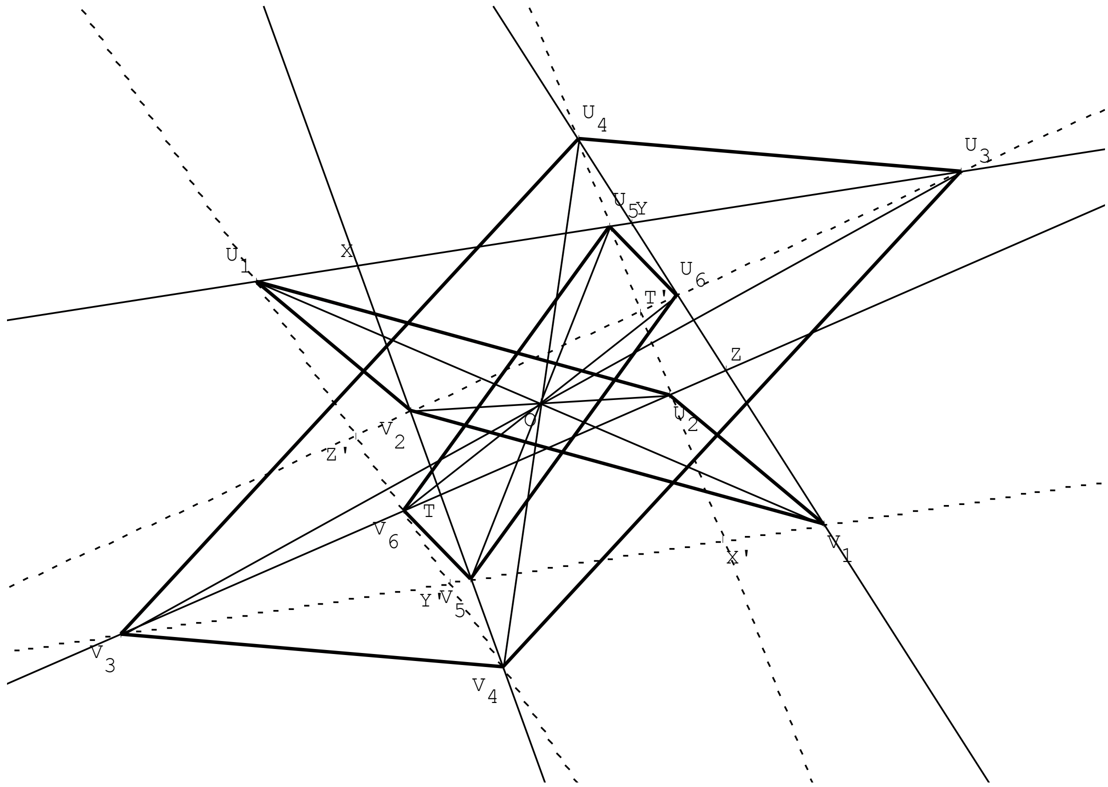


6. Passons à l'exercice 140. On suppose les quatre droites données sécantes deux à deux. Si deux sommets opposés U et V du parallélogramme cherché sont sur deux droites parmi les quatre données, chacun de ces sommets est l'intersection d'une de ces deux droites avec la symétrique par rapport à O de l'autre droite. Sur la figure ci-après, on a tracé quatre droites deux à deux sécantes, (XY), (YZ), (ZT), (TX) ainsi que leur symétrique par rapport à O, (X'Y'), (Y'Z'), (Z'T'), (T'X'). Chacune de ces quatre droites peut porter des sommets opposés U et V avec chacune des trois autres, ce qui fait trois possibilités :

– (XY) et (YZ) [sommets opposés U_1 et V_1] et (ZT) et (YZ) [sommets opposés U_2 et V_2] : parallélogramme $U_1U_2V_1V_2$;

– (XY) et (ZT) [sommets opposés U_3 et V_3] et (YZ) et (TX) [sommets opposés U_4 et V_4] : parallélogramme $U_3U_4V_3V_4$;

– (XY) et (TX) [sommets opposés U_5 et V_5] et (YZ) et (ZT) [sommets opposés U_6 et V_6] : parallélogramme $U_5U_6V_5V_6$;



On laissera le lecteur examiner ce qui se passe quand deux droites parmi les quatre sont parallèles.

Exposé 1.10

☛ H. S. M. Coxeter & S. L. Greitzer, *Geometry revisited* (The Mathematical Association of America, 1967), pp. 85-86 & 170

4.3 Half-turn

One kind of rotation shares with translations the property of transforming every line into a parallel line. This is the *half-turn* or rotation through 180º, which transforms each ray into an oppositely directed ray. Clearly, a half-turn is completely determined by its center. Since a translation transforms each ray into a parallel ray, the effect of two half-turns applied successively is the same as the effect of a translation: in brief, the "sum" of two half-turns is a translation (which reduces to the identity if the two half-turns have the same center). More precisely, if points A, B, C are evenly spaced along a line, so that B is the mid-point of AC, the half-turn about A leaves A invariant, and the half-turn about B takes A into C; thus the sum of these two half-turns is the translation $\overrightarrow{AC}$, and is the same as the sum of the half-turns about B and C.

Figure 4.3A illustrates the sum of half-turns about O_1 and O_2. The line segment AB is transformed first into $A'B'$ (oppositely directed) and then into $A''B''$; thus the sum is the translation $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''}$.

Many old and familiar theorems can be proved simply when half-turns are used. In Figure 4.3B, O is the common midpoint of two segments AC and BD. The half-turn about O, taking AB into CD, shows that $ABCD$ is a parallelogram. Again, in Figure 4.3C, M and N being the midpoints of AB and AC, we see that the sum of half-turns about these two points is the translation $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{BC}$, whence MN is parallel to BC and half as long.

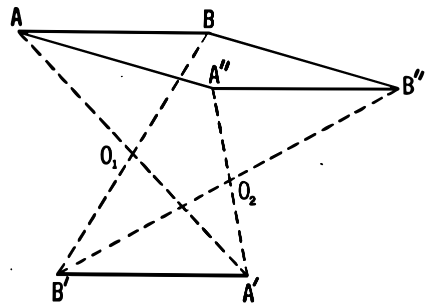


Figure 4.3A

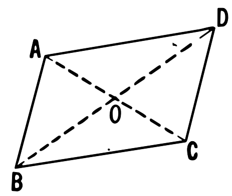


Figure 4.3B

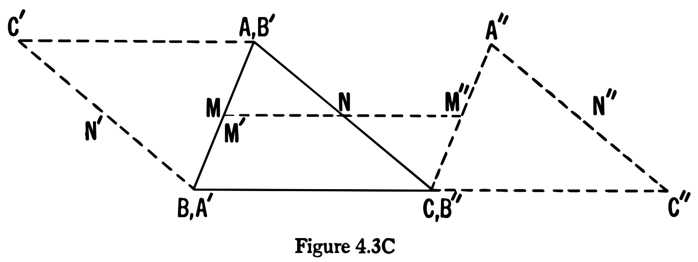


Figure 4.3C

EXERCISES

1. Let A be one of the common points of two intersecting circles. Through A, construct a line on which the two circles cut out equal chords.

2. Through a point A outside a given circle, construct a line cutting the circle at P and Q so that $AP = PQ$.

3. If the opposite sides of a hexagon are equal and parallel, the diagonals (joining opposite vertices) are concurrent.

…………………………………………..…………………………………………………………

HINTS AND ANSWERS

Section 4.3

1. Join A to the remaining intersection of either circle with the image of the other by the half-turn about A.

2. Let O and r be the center and radius of the given circle. With centers A and O, radii r and $2r$, draw two circles meeting at O_1 and O_2. The desired line joins A to the midpoint P of OO_1 or OO_2.

3. Consider the half-turn about the midpoint of one diagonal.

Éléments d'analyse 1.10

1. La symétrie centrale est définie, ici, comme un demi-tour, c'est-à-dire une rotation de 180°. La plupart des informations apportées dans la première partie de l'exposé nous sont connues. Il en est de même des démonstrations des théorèmes « old and familiar » que les auteurs proposent, à l'exception peut-être de la démonstration du « théorème des milieux » : si l'on considère la translation $\sigma_N\sigma_M$, on voit que, d'une part, $\sigma_N\sigma_M(B) = \sigma_N(A) = C$ et, d'autre part, $\sigma_N\sigma_M(M) = \sigma_N(M) = M''$, en sorte (MN) = (MM") // (BC) et $MN = \frac{1}{2} MM'' = \frac{1}{2} BC$.

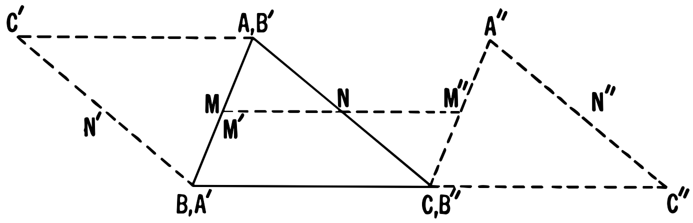
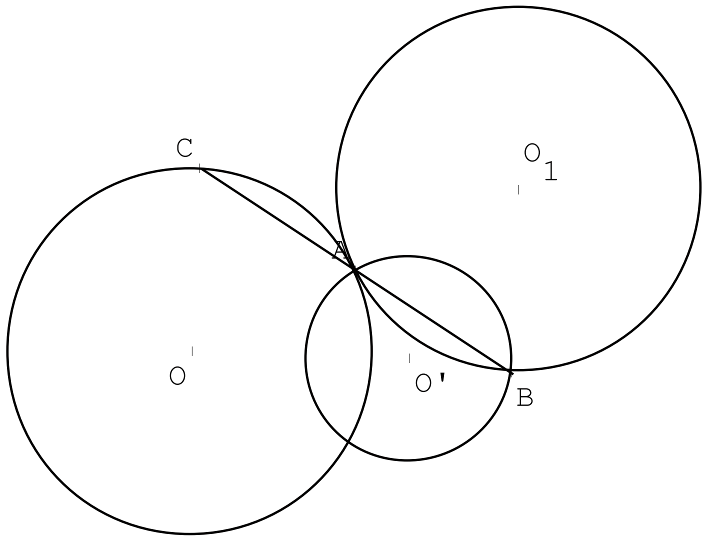
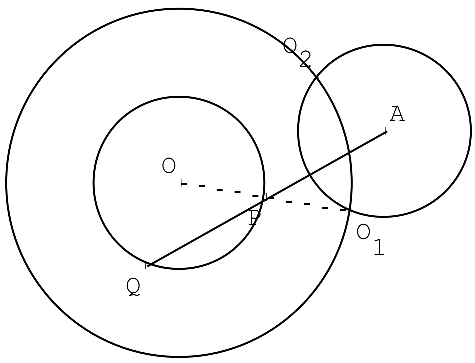


Figure 4.3C

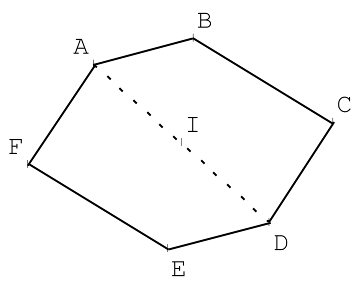
2. Les exercices proposés, au nombre de trois, sont accompagnés de suggestions, voire de réponses (*Hints and answers*). Le premier exercice propose un problème de construction qui peut se résoudre de la façon suivante (voir la figure ci-après) : comme on doit avoir AB = AC, la symétrie de centre A échange C et B, en sorte que B est à l'intersection autre que A du cercle de centre O' et du symétrique par rapport à A du cercle de centre O. On obtient ainsi B puis C, avec AB = AC.



3. Passons au deuxième exercice. On suit ici la suggestion proposée (voir la figure ci-dessous). La symétrie de centre P transforme O_1 en O. Le transformé de A est un point X tel que OX = O_1A = r et donc X est sur le cercle donné. Comme il est aussi sur la droite (AP), il est à l'intersection du cercle donné et de (AP) : on a donc X = Q. Par suite, AP = PQ.



4. Le troisième exercice peut être résolu sans le recours au demi-tour indiqué. Le quadrilatère ABDE étant un parallélogramme, les diagonales [AD] et [BE] se coupent en leur milieu I. De même, [BE] et [CF] puis [CF] et [AD] se coupent en I.



Essai de synthèse

Une synthèse des matériaux dégagés ci-dessus sera proposée après l'examen du 26 mai 2012.

Question 3. Confronter le modèle mathématique de référence pour le chercheur relatif à la symétrie centrale élaboré dans la question précédente avec le type de tâches explicité dans l'extrait suivant de la *Leçon 4*.

Dans les quatre figures ci-dessous, on a marqué les images D, E et F des points A, B et C par une symétrie centrale ou axiale. Dans chaque cas, dire si la symétrie est axiale ou centrale et justifier votre choix.

Fig. 1

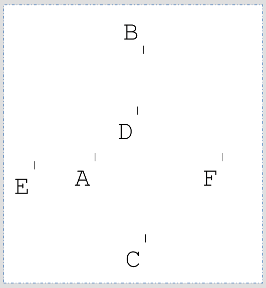


Fig. 2

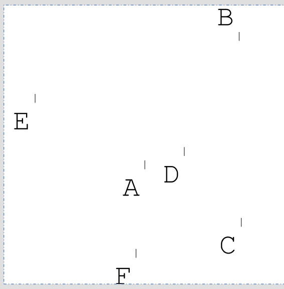


Fig. 3

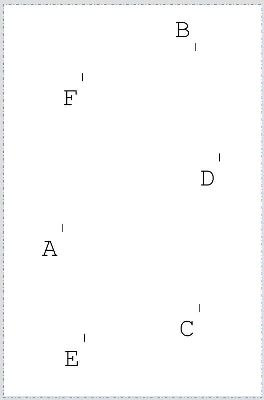
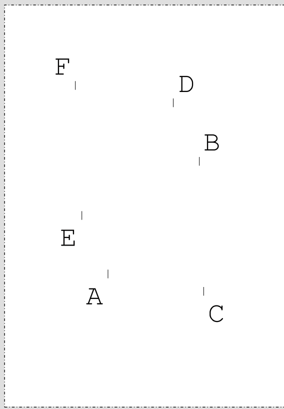


Fig. 4



Éléments d'analyse

1. Il s'agit d'élaborer une technique pour le type de tâches suivant : étant donné deux triplets de points (A, B, C) et (D, E, F) obtenu l'un à partir de l'autre par une symétrie soit axiale, soit centrale, déterminer de quel type de symétrie il s'agit.

2. Plusieurs éléments technologiques peuvent permettre de fabriquer une technique adéquate. On peut ainsi examiner l'orientation des triplets (A, B, C) et (D, E, F). Dans les deux premières figures ces triplets ont des orientations contraires : ils sont obtenus l'un à partir de l'autre par une symétrie *axiale*. Dans les deux cas suivants, les triplets sont de de même sens : ils sont donc l'image l'un de l'autre par une symétrie centrale.

3. On peut aussi utiliser les propriétés suivantes :

– dans une symétrie centrale, des droites homologues ne sont pas sécantes : cela permet de conclure que, dans les deux premiers cas, , puisque les droites (AB) et (DE) sont sécantes, on a affaire à une symétrie axiale ;

– dans une symétrie centrale, les droites joignant un point et son image sont sécantes, ce qui n'est pas le cas dans une symétrie axiale : il en résulte que, puisque (AD) et (BE) s'y coupent, les deux dernières figures ont été obtenues à l'aide d'une symétrie centrale.

4. On laissera le lecteur rechercher d'autres techniques mettant en œuvre les propriétés connues des deux types de symétrie.

Question 4. Examiner les questions H_0 à H_6 formulées dans la *Leçon 4* à propos du document E.

À travers notamment l'interrogation « Quelles conditions C cela offre-t-il à cette recherche et quelles contraintes K cela lui impose-t-il ? », par laquelle elles s'achèvent, les questions H_0 à H_6 ont pour objet d'engendrer un *questionnement indéfiniment ouvert* de la recherche examinée, connue par l'entremise d'un ou plusieurs exposés qui en constituent autant de comptes rendus (ici, nous disposons d'un unique exposé sur la recherche considérée, le document E). Il résulte de là que, dans ce qui suit, on ne saurait donner à chaque question, de façon évidemment non exhaustive, que *quelques* éléments de réponse.

H_0. Sur quelle question Q porte la recherche considérée ? Quelle est, aux niveaux pratique et/ou théorique, l'origine (la provenance, la source) de cette question ? Quelles conditions C_0 cela offre-t-il à cette recherche et quelles contraintes K_0 cela lui impose-t-il ?

Éléments de réponse

1. Le titre même du document E fournit une première formulation de la question censée étudiée dans la recherche examinée : « Quels sont les effets de l'enseignement de la symétrie axiale sur celui de la symétrie centrale dans le cas français ? »

2. Le document E est issu de la thèse de son auteure (2008). Celle-ci est intitulée *Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège*. On retrouve là la mention *des effets* de l'étude préalable (en 6^{e} et déjà au primaire) de la symétrie axiale sur l'étude des autres isométries abordées au collège, soit à l'époque (avant 2008) la symétrie centrale en 5^{e}, la translation en 4^{e} et la rotation en 3e (depuis translation et rotation ont disparu). De la thèse au document E on passe donc des effets sur l'étude des autres isométries traditionnellement étudiées au collège aux seuls effets sur l'étude de la symétrie centrale.

3. Le résumé en tête de document précise un peu la question formulée jusqu'ici puisqu'on y lit que le but de l'étude présentée par l'auteure est de « montrer comment certains aspects de la symétrie axiale […] peuvent se constituer en obstacle pour l'apprentissage de la symétrie centrale à ce niveau scolaire ». On découvre ici que les effets dont il est question ne sont pas « positifs » mais, si l'on peut dire, « toxiques », « vénéneux » : l'étude de la symétrie axiale empoisonne clandestinement les élèves… Cela noté, la question *Q* étudiée pourrait finalement être formulée ainsi :

> ***Q.*** Dans le cas français, l'enseignement de la symétrie axiale au primaire et en 6^{e} crée-t-il, et comment, des conditions, et lesquelles, ayant ensuite, en 5^{e}, des effets en forme d'obstacles à l'apprentissage de la symétrie centrale ?

4. Il est en principe important d'examiner l'*origine* d'une telle question. Là-dessus, le document E paraît, sauf erreur, faiblement informatif. On n'y trouve guère que la déclaration suivante, qui fait référence au « contexte français de l'enseignement des symétries axiale et centrale » précédemment explicité dans le document :

> Sur la base du contexte que nous venons d'évoquer et des travaux antérieurs, dont nous présentons une brève synthèse dans la première partie, nous sommes partie de l'hypothèse que la proximité des propriétés entre la symétrie axiale et la symétrie centrale pouvait être source d'erreurs et de difficultés pour les élèves de 5^{e} dans leurs apprentissages relatifs à la symétrie centrale. (p. 54)

La référence à des difficultés *exprimées par des professeurs*, par exemple, n'apparaît pas. L'origine concrète de la question étudiée serait donc à situer dans les acquis et conjectures propres à la recherche en didactique des mathématiques plutôt que chez les praticiens de l'enseignement. La chose est confirmée par la référence à l'article de Sophie Cassan (1997), « qui son étude des liens avec les autres transformations du plan, suggère que la très forte institutionnalisation de la symétrie axiale peut être un obstacle à l'apprentissage visé par l'enseignement de la symétrie centrale » (p. 56).

5. Parmi les conditions C_0 créées par le choix d'étudier la question *Q* se trouve le fait de chercher à identifier certains obstacles à l'apprentissage d'une œuvre mathématique, la symétrie centrale étudiée en 5^{e}, dans les conditions créées par un apprentissage antérieur relatif à une autre œuvre mathématique, la symétrie axiale (étudiée notamment en 6^{e}). Cela se fait ici *contre* un certain habitus, celui de chercher à expliquer les difficultés de l'étude d'une œuvre mathématique donnée *uniquement* par certaines propriétés de cette œuvre, et non, comme ici, par leur interaction institutionnelle avec les propriétés d'une *autre* œuvre. L'écologie de la recherche s'en trouve davantage « ouverte ».

6. L'est-elle suffisamment et surtout adéquatement ? Tout d'abord on notera que les effets éventuellement *positifs* (et non pas toxiques) de l'enseignement préalable de la symétrie axiale quand vient le temps, en 5^{e}, d'étudier la symétrie centrale *ne sont pas explorés*. Si l'on suppose que la consécution temporelle mise en œuvre dans l'enseignement français pourrait avoir *et* des effets bénéfiques *et* des effets toxiques, on devrait s'attendre à une certaine difficulté dans la mise en évidence *des uns comme des autres*, ce qui est un problème de recherche délicat et que semble évacuer d'emblée – du fait de la question étudiée – le document E. On peut *imaginer* par exemple un enseignement des symétries axiale et centrale
❶ qui mette en avant, dès la première transformation étudiée, les principaux aspects *communs* aux *isométries* du plan (notamment, et du fait de l'inégalité triangulaire, le fait que, si une transformation conserve les distances, alors elle conserve l'alignement, la relation « entre », les rapports de distance et donc, par exemple, les milieux, etc.) ;
❷ qui mette en avant, *du même mouvement*, les aspects *distinctifs* de chaque type de transformation proposé à l'étude (par exemple le fait que, pour les points A non invariants, les droites (AA') sont parallèles dans un cas, concourantes, et en particulier sécantes, dans l'autre, etc.).

7. Une autre contrainte créée par le choix de la question Q est la limitation de l'univers des conditions explorées pour « expliquer » les comportements praxiques et gnosiques (c'est-à-dire relevant respectivement de la *praxis* et du *logos*) des élèves à propos de la symétrie centrale. Certains élèves, précise par exemple le document E (p. 63), « justifient la reconnaissance supposée d'une symétrie centrale, alors qu'il s'agit d'une symétrie axiale » par l'argument que, « dans la symétrie centrale, l'image d'une figure est une figure de même longueur et c'est le cas ici ». Or la survenue de cette situation ne tient pas seulement à « un effet de contrat » ; elle suppose conjointement l'assomption par l'élève d'une logique défaillante, qui, implicitement, fait erronément de la proposition $[((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow q]$ une tautologie. Le problème éducatif serait plutôt ici qu'un futur citoyen *raisonne faux* à ce point, voire accepte de raisonner faux pour des motifs d'intérêt scolaire !

H_1. Quelle équipe de recherche [Ξ, Z] conduit la recherche sur Q ? Quelles conditions C_1 cela offre-t-il à cette recherche et quelles contraintes K_1 cela lui impose-t-il ?

Éléments de réponse

1. La recherche a été conduite dans le cadre d'une thèse de doctorat par l'auteur du document E, ξ (Caroline Bulf), sous la direction de ζ (Alain Kuzniak) ; ce qu'on peut appeler l'équipe de recherche s'écrirait donc ici [ξ, ζ]. Notons en passant – sans pouvoir donner à ce fait de signification particulière – que la liste des références du document E ne fait pas apparaître le nom du directeur de thèse ζ.

2. Faute d'informations, et à défaut d'une enquête qui ne saurait trouver place dans le cadre de cet enseignement, on en est réduit ici à formuler un petit nombre de conjectures non déraisonnables. Dans le cadre d'un travail de thèse, ainsi, on peut mentionner – c'est un premier ensemble de conditions – le fait que ξ ait dû travailler dans une certaine *solitude* mais aussi dans une certaine *liberté* de recherche, les deux – solitude et liberté – étant en règle générale institutionnellement reconnues et assumées. Cette solitude est en principe rompue et cette liberté est en principe limitée par la présence du directeur de thèse – c'est un second ensemble de conditions –, présence dont les aspects concrets ne pourraient être supputés qu'à partir de la connaissance des travaux et des intérêts de ζ. (Bien entendu, *solitude* ne veut pas dire déréliction ni *liberté* anarchie.) Plus précisément, il faudrait ici énumérer les conditions et contraintes typiques d'un travail de thèse – par exemple quant à la complétude du travail à réaliser au double niveau théorique et empirique (voire expérimental), ce que nous n'envisagerons pas dans le cadre d'une deuxième année de master (chaque chose en son temps).

***H_2*. À quel établissement de quelle r-école la r-équipe [Ξ, Z] appartient-elle ? Quelles conditions *C_2* cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes *K_2* cela lui impose-t-il ?**

Éléments de réponse

1. Là encore, une enquête serait indispensable – que nous ne ferons pas. L'appartenance actuelle de ξ à l'équipe DAESL (Didactiques et anthropologie des enseignements scientifiques et langagiers) du LACES (Laboratoire Cultures, éducation, sociétés) de l'université Bordeaux 2 semble avoir peu joué dans le travail – apparemment antérieur à l'intégration de ξ à Bordeaux – de la r-équipe [ξ, ζ].

2. Certains ensembles de conditions peuvent cependant être mis en avant, toujours de façon conjecturale, à partir des informations apportées par le document E. On peut noter par exemple que, parmi les conditions créées par le choix d'étudier la question *Q*, se trouvait la *non-obligation* de mener à bien, fût-ce de façon limitée, un travail d'*ingénierie didactique* (qui aurait par exemple permis d'explorer les effets d'autres conditions que celles créées par l'enseignement effectivement observé par ξ). Or, à suivre du moins le document E, on doit noter que cette possibilité *n'a pas été écartée* par les environnements dans lesquels la recherche de ξ a pris place, au contraire d'autres environnements de recherche en didactique qui auraient pu imposer à ξ (et à ζ), comme un *must* auquel il serait incorrect de ne pas sacrifier, un tel travail de design didactique.

3. En revanche, les environnements dans lesquels ξ a baigné lui ont permis – ou l'ont peut-être contraint, ce qui semble toutefois fort peu probable ici – à se référer préférentiellement à certains travaux de Raymond Duval et, corrélativement, à minorer d'autres travaux, cités de façon minimaliste, voire à ignorer entièrement d'autres apports possibles…

H_3. Quels systèmes adidactiques sont-ils créés ou découpés dans la réalité empirique étudiée et quelles prises d'information sont-elles réalisées sur ces systèmes par la r-équipe [Ξ, Z] dans le cadre de la recherche considérée ? Quelles conditions C_3 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_3 cela lui impose-t-il ?

Éléments de réponse

1. L'auteure du document E, ξ, interroge des systèmes afin de construire une réponse à la question *Q*. Le premier système interrogé est le système $\mathbb{S}_0$ des textes « officiels » régissant l'enseignement des symétries (et, plus largement, de la géométrie) au collège. L'auteure en tire notamment cette conclusion : « … aujourd'hui, cet enseignement des symétries axiale et centrale se trouve au cœur d'attentes institutionnelles visant le passage d'une géométrie basée sur la perception et la manipulation à une géométrie déductive dans laquelle le rôle accordé aux propriétés liées aux symétries devient central… »

2. Un deuxième système interrogé est le système $\mathbb{S}_1$ formé d'un petit nombre de travaux de didactique portant de façon plus ou moins extensive sur l'enseignement des deux types de symétries. De l'interrogation qu'elle a faite de $\mathbb{S}_1$, ξ dit qu'elle a « déduit un certain nombre de difficultés liées aux propriétés intrinsèques du concept de symétrie axiale que l'on peut s'attendre à retrouver également avec la symétrie centrale… » (p. 56). De ces difficultés supposées, ξ donne alors une « liste succincte » (pp. 56-57) qu'on ne reproduira pas ici.

3. Deux autres systèmes, $\mathbb{S}_2$ et $\mathbb{S}_3$, ont été sollicités. À leur propos, ξ écrit ceci :

> Pour mettre cette hypothèse à l'épreuve, et préciser la nature des difficultés et erreurs éventuelles, nous avons mis au point un cadre d'analyse qui nous a permis d'élaborer un questionnaire centré sur des tâches faisant intervenir les deux symétries (première partie). Nous avons fait passer ce questionnaire à des élèves et nous l'avons dépouillé (fin de la première partie) puis nous avons analysé l'enseignement de la symétrie centrale reçu par ces mêmes élèves pour tenter d'affiner, dans un deuxième temps, l'étude des causes potentielles des difficultés recueillies (deuxième partie). Nous revenons sur notre hypothèse, en partie confirmée, en conclusion. (p. 54)

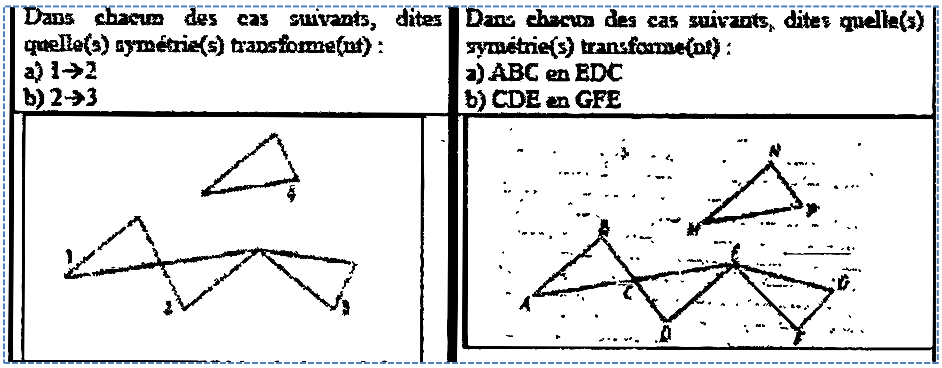
L'hypothèse mentionnée ici est que « la proximité des propriétés entre la symétrie axiale et la symétrie centrale pouvait être source d'erreurs et de difficultés pour les élèves de 5^e dans leurs apprentissages relatifs à la symétrie centrale ». Désignons par $[X, y]$ la classe de 5^e étudiée. Le système $\mathbb{S}_2$ est constitué des élèves X seuls, que ξ « interroge » à l'aide de deux questionnaires successivement proposés. Le système $\mathbb{S}_3$ est la classe $[X, y]$ elle-même, que ξ interroge par observation naturaliste à propos du destin qui y est celui de la symétrie centrale.

4. Le complexe des systèmes exploités par ξ pour approcher empiriquement les problèmes de l'enseignement et de l'apprentissage de la symétrie centrale en 5^e est a priori relativement pauvre. C'est ainsi qu'une seule classe de 5^e est étudiée, ce qui explique d'ailleurs, à l'évidence, la mention « une étude de cas en France » dans le titre de l'étude. Tout semble se passer comme si les conclusions de l'étude de ce cas – ladite classe de 5^e – étaient pour l'essentiel généralisables. L'auteure évoque à cet égard un choix qui pourrait apparaître comme une idiosyncrasie du professeur y : l'introduction de la symétrie centrale comme le produit de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires (p. 70 & 77) ; mais elle s'empresse d'ajouter qu'il n'y a rien là de singulier, puisque une telle situation de démarrage apparaît dans certains manuels. (On notera ici qu'on peut rajouter à la liste établie jusqu'ici un autre système sollicité, $\mathbb{S}_4$, le système constitué par les manuels en usage – dont ξ, au demeurant, fait très peu mention.)

5. Dans quelle mesure ces systèmes sont-ils « adidactiques » vis-à-vis des questions que leur pose ξ dans le cadre de sa recherche ? Les systèmes $\mathbb{S}_0$, $\mathbb{S}_1$ et $\mathbb{S}_4$ sont traditionnellement regardés comme tels : en principe, ils ne s'adressent pas aux chercheurs en didactique des mathématiques. La chose est sans doute moins vraie avec le passage du temps, comme on peut s'en douter en lisant tel passage du programme de 2008 que ξ reproduit, ce qui n'est sans doute pas entièrement un hasard, consacré à ce qu'on appellerait volontiers, en TAD, la dialectique de la géométrie expérimentale et de la géométrie théorique :

> … un travail expérimental (pliage, papier calque) permet d'obtenir un inventaire abondant de figures simples à partir desquelles sont dégagées les propriétés de conservation […]. Une mise en jeu [de la symétrie] le plus fréquemment possible pour justifier les propriétés [des quadrilatères usuels]. […] passer de l'identification perceptive (la reconnaissance par la vue) de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés (passage du dessin à la figure). (p. 54)

6. Peut-on dire de même des systèmes $\mathbb{S}_2$ et $\mathbb{S}_3$? L'interrogation de *X* par deux questionnaires se produit une fois l'enseignement sur la symétrie centrale donné. Les types de tâches $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}^{\#}$ auxquels les élèves se trouvent confrontés sont apparemment inédits pour eux : on suppose que deux triangles dessinés sont l'image l'un de l'autre par une symétrie (axiale ou centrale) ; en se fondant sur des éléments graphiques appropriés, la tâche à effectuer consiste à dire s'il s'agit d'une symétrie axiale ou d'une symétrie centrale (voir ci-après).



Bien que la consigne écrite – « Dans chacun de ces cas, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt)… » – soit un rien ambiguë (on pourrait croire que des symétries de types différents peuvent convenir), le type de tâches peut être raisonnablement compris comme signifiant que la tâche consiste à « dire », sachant qu'il existe une symétrie transformant un triangle en un autre, si cette symétrie est axiale ou centrale. (Notons que, visuellement, les triangles tracés apparaissent – dans le document E au moins – comme proches de triangles isocèles, ce qui peut perturber quelque peu l'accomplissement des tâches proposées.) Ce sur quoi ξ interroge *X*, donc, c'est la construction de praxéologies adéquates au type de tâches $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}^{\#}$; ce qui est observé, ce sont donc les matériaux (techniques et technologiques) de construction et leur emploi dans cette construction. Il est vraisemblable que le travail de construction praxéologique requis des élèves est peu influencé par l'intention de ξ de connaître ce à quoi ce travail doit tout ou presque : l'équipement praxéologique de *X* à la suite de l'enseignement donné par *y* ainsi que ses dynamiques possibles, tels que les révèle l'effort de résolution par *X* des problèmes auxquels ces élèves sont confrontés.

7. L'interrogation du système $\mathbb{S}_3$ et plus classique et appellerait des remarques analogues quant à l'adidacticité. En revanche, on pourrait interroger la capacité des manières d'interroger les systèmes $\mathbb{S}_2$ et $\mathbb{S}_3$ adoptées par ξ à mettre en évidence une information permettant de construire une réponse $R^{\heartsuit}$ appropriée ; mais cela renvoie à la question H_6 ci-après. Que se passerait-il par exemple si, en lieu et place des situations problématiques proposées dans les questionnaires, on proposait le type de tâches étudié dans la question 3 du TD 3, ci-dessus ? Si on traçait les segments joignant les points A, B, C d'une part, D, E, F, d'autre part ? Ou si, à l'inverse, on ne nommait les points en demandant comme il est possible de passer de trois de ces points (à déterminer) aux trois autres ? Une conjecture qui n'est peut-être pas déraisonnable serait ici la suivante : pour obtenir une information permettant de réduire l'incertitude sur la réponse $R^{\heartsuit}$ formulée par l'auteure, il conviendrait d'étendre et d'approfondir l'interrogation des types de systèmes sollicités (et aussi d'interroger adidactiquement d'autres types de systèmes).

H_4. Quel modèle de recherche en didactique est-il mis en œuvre dans la recherche considérée ? Quelles conditions C_4 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_4 cela lui impose-t-il ?

Éléments de réponse

Cette question essentielle ne sera pas proposée à l'examen du 26 mai. C'est donc ultérieurement qu'elle recevra des éléments de réponse.

H_5. Quels modèles praxéologiques de référence des œuvres enjeux didactiques apparaissant dans la recherche considérée sont-ils mis en œuvre ? Quelles conditions C_5 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_5 cela lui impose-t-il ?

Éléments de réponse

Cette question ne sera pas proposée à l'examen du 26 mai. C'est donc ultérieurement qu'elle recevra des éléments de réponse. Voir cependant les éléments de réponse à la question 2 du TD 3, ci-dessus.

H_6. Quelle réponse $R^\heartsuit$ la recherche permet-elle d'apporter à la question Q ? Quelles conditions C_6 cela offre-t-il aux recherches futures dans le domaine auquel appartient la question Q et quelles contraintes K_6 cela impose-t-il à de telles recherches ?

Éléments de réponse

Cette question ne sera pas proposée à l'examen du 26 mai. C'est donc ultérieurement qu'elle recevra des éléments de réponse.