

Université d'Aix-Marseille

2011-2012

Master de didactique des mathématiques – 2^e année

UE 35

Fondements et méthodes de la recherche en didactique

Yves Chevallard & Michèle Artaud

Leçons

Yves Chevallard

Sommaire

Leçon 1. Premiers jalons (pp. 2-31)

1. Sur cette UE (p. 2) // 2. « Il y a du savoir » (p. 5) // 3. Le souci de l'étude (p. 9) // 4. La gestion sociale de l'étude (p. 12) // 5. Le pédagogue et l'enseignant (p. 17) // 6. Le didactique et son refoulement (p. 22) // 7. Le cas des mathématiques (p. 27)

Leçon 2. Recherche et chercheurs (pp. 32-61)

1. Conditions de possibilité (p. 32) // 2. Les mots : recherche, chercher, chercheur (p. 33) // 3. Un très long combat (p. 42) // 4. Une matière sans noblesse : l'éducation (p. 51)

Leçon 3. Praxéologies de recherche I (pp. 62-88)

1. Prolégomènes (p. 62) // 2. Problématiques : « le(s) mathématique(s) » (p. 70) // 3. Mathématique, mathématisation, mathématisé (p. 83)

Leçon 4. Praxéologies de recherche II (pp. 90-132)

1. Problématiques fondamentales et questions de recherche (p. 90) // 2. Conditions & contraintes (p. 93) // 3. Une recherche en questions (1) (p. 109) // 4. Une recherche en questions (2) (p. 115)

Références (pp. 123-126)

Leçon 1. Premiers jalons

1. Sur cette UE

1.1. Le titre de l'UE 35 est, selon les documents consultés, « Fondements et méthodes de la recherche en didactique » ou « Fondements et méthodes de la recherche en didactique *des mathématiques* ». Dans tous les cas, il est question de *fondements de...* Nous nous arrêterons d'abord sur ce point. Qu'entendre en effet par « fondements » ? Le *Trésor de la langue française informatisé* (TLFi : <http://atilf.atilf.fr/tlf.htm>) précise que le mot *fondement*, pris au figuré, désigne (a) « ce qui sert de base, d'appui à quelque chose » et (b) en particulier un « principe ou ensemble de principes que suppose un édifice conceptuel, parce qu'il repose sur lui », citant dans ce dernier cas l'expression « le fondement des mathématiques ». Toujours au figuré, *fondement* désigne encore, selon le TLFi, « ce qui légitime ou justifie quelque chose ».

1.2. L'encyclopédie *Wikipédia* contient un article intitulé « Fondements des mathématiques », qui commence par ces mots : « La fondation, ou les fondements, des mathématiques sont les principes sur lesquels est établie cette science. » Le mot *fondation* utilisé ici est proche de celui de *fondement*. En précisant que ce mot est alors généralement employé au pluriel (« les fondations »), le TLFi indique ainsi que *fondation* désigne le « travail que l'on fait pour asseoir les fondements (d'une construction) », et qu'il s'applique encore à la « tranchée que l'on fait pour y placer les fondements ». Dans *Wikipedia*, l'article en anglais correspondant à l'article « Fondements des mathématiques » est intitulé *Foundations of mathematics*. (En anglais, le mot *fundament* existe aussi en ce sens, mais semble moins usité.) Les deux mots renvoient à l'idée de « fonder », qui vient du latin *fundare* « fonder, bâtir » et « établir », précise le *Dictionnaire historique de la langue française* (1993). Ce dictionnaire précise que *fondement* est un emprunt – qu'il date de 1119 – « au latin classique *fundamentum* “fondation, base” au propre et au figuré », avant d'ajouter ceci :

L'emploi en architecture (1120) est aujourd'hui archaïque, le mot étant remplacé par *fondation(s)*. Par extension, plutôt au singulier (v. 1175), *fondement* désigne ce sur quoi repose un ensemble de connaissances (cf. la locution *sans fondement*). Il s'utilise par métaphore (v. 1265) le plus souvent au pluriel (*les fondements de l'État*).

Nous retiendrons dans ce qui suit que, si les fondements sont ce sur quoi repose une construction (par exemple une science), établir ces fondements, c'est effectuer un travail de fondation, un travail fondateur. À cet égard, donc, et n'était la complication de cet intitulé, l'UE aurait pu s'appeler *Fondation et fondements de...*

1.3. On soulignera ici une contrainte dont nous devons apprendre à nous défaire. Elle consiste à regarder une réalité – par exemple « les mathématiques » – comme *établie une fois pour toutes*. Cela conduit *notamment* à considérer que l'on pourrait *fonder* une science *une fois pour toutes*. Or les fondations d'une science – des mathématiques ou de la didactique des mathématiques par exemple – sont en fait un chantier *indéfiniment ouvert* et « bougent » à mesure que la science en question se développe.

1.4. Le fait *de ne pas* succomber à l'illusion d'un monde définitivement établi se révélera essentiel en didactique des mathématiques et nous insisterons donc d'emblée sur ce point. Nous devons pour cela nous référer à l'un des échelons les plus élevés de l'échelle des niveaux de codétermination didactique : celui de la *civilisation*. Dans la civilisation qu'on peut dire occidentale, la cosmogonie *chrétienne* a joué et continue de jouer un rôle décisif. Par contraste, ayant à présenter à son lecteur la cosmogonie qui est celle de Lucrèce (au 1^{er} siècle av. J.-C.) dans son *De rerum natura* (« De la nature »), la philosophe Élisabeth de Fontenay (2009) le met en garde en ces termes :

On n'en aurait pas encore fini avec le malaise chrétien devant cette rédhibitoire immanence, devant cette pensée d'une immensité analysable et non totalisable, si l'on omettait d'évoquer l'obstacle épistémologique que constitue l'usage du verbe *creare*. Nous rencontrons une véritable difficulté avec ce mot latin dont le christianisme romain s'est emparé. Il ne peut être question en effet de ne pas rendre par *créer* ce *creare*, qui dérive de *crescere*, *pousser*, *croître*, puis *naître*, et qui fut d'abord un terme de la langue rustique. Mais la Genèse avait inventé la *création ex nihilo*, monde produit par Dieu à partir du néant, et cette acception a fini par s'imposer avec une force inouïe dans la pensée occidentale. Or, il faut bien reconnaître que chez Lucrèce, *creare* ne désigne rien d'autre qu'un processus immanent de formation de la matière, rien ne naissant de rien, mais toutes choses de combinaisons passagères d'atomes : *natura creatrix*. (pp. XVII-XVIII)

La contrainte issue de la cosmogonie chrétienne est particulièrement lourde quand on en vient à la notion de *nature*. C'est ce que souligne encore É. de Fontenay dans le même texte :

Quant au substantif *natura*, des siècles d'hégémonie chrétienne en ont fait une nature naturée, immuable, puisque créée une fois pour toutes par un *fiat*. Or, *natura* vient du verbe *nascor*, « naître », et le latin n'est pas moins riche sur ce point que le grec qui fait dériver *phusis* de *phuein*, « croître », « pousser ». (p. XVIII)

La suite vaut d'être citée un peu plus longuement :

Il faut le redire, la *natura* de Lucrèce est naturante, elle est un processus incessant de production et de destruction. Ce qu'enseigne cette philosophie désillusionnée, c'est une physique minimale, une minutieuse abstinence d'interprétation, alors même que des siècles de mantique et d'ontologie grecques avaient enrichi et affiné l'explication de l'ordre des choses par des réponses aux questions *pourquoi* et *pour quoi*, réponses que les quatre causes aristotéliennes et la téléologie stoïcienne organisaient de manière grandiose. Mais encore faut-il saisir la double leçon de l'atomisme et comprendre qu'il n'y aurait pas de savoir possible si le hasard produisait indéfiniment n'importe quoi. L'ordre d'une nécessité s'articule avec les surprises de la contingence, il y a une loi dans les choses, il y a une nature, objet d'un savoir, et l'on n'a pas du tout affaire, malgré le caractère aléatoire des chocs et des agrégats entre les atomes, au tohu-bohu biblique ou à la désintégration empédocléenne produite par la Haine, productrice de créatures inachevées.

Les sciences nous décrivent une connaissance inachevée et promise à de profonds remaniements d'une « nature » elle-même inachevée. On verra ainsi que la notion statique de mathématiques doit faire une place au concept dynamique de *mathématisation*, processus qui à la fois suppose des mathématiques et crée des mathématiques. À l'instar de tout scientifique, chaque fois qu'il regardera telle ou telle réalité comme un fragment de nature, l'apprenti didacticien devra se souvenir qu'il a devant lui une « nature naturante » et non une « nature naturée », figée, bref l'être, « tel qu'en lui-même enfin l'éternité le change », pour emprunter ici les mots du poète – en l'espèce Stéphane Mallarmé, dans *Le tombeau d'Edgar Poe* (1898).

2. « Il y a du savoir »

2.1. Quand on s'interroge sur ce qui justifie le projet de créer une *science didactique*, on rencontre d'abord un fait massif, ubiquitaire dans nos sociétés : on y considère qu'il y a en

elles *du savoir*. Ce postulat découle d'une supposition générique : certaines activités humaines sont jugées possibles parce que leurs agents, leurs acteurs possèderaient *un certain savoir*, une certaine connaissance, certaines connaissances. En nombre de cas, pense-t-on ainsi, pour faire certaines choses, il y a quelque chose, il y a des choses *à savoir*.

2.2. Ajoutons immédiatement que *l'objet propre* de la didactique *n'est pas le savoir* (supposé), auquel pourtant elle doit de s'intéresser pour traiter de ce qui est son véritable objet, lequel s'imposera à nous peu à peu. Même si la condition qu'il y aurait du savoir est nécessaire pour qu'existe une science didactique – la didactique n'existe que parce que d'aucuns jugent qu'il y a du savoir, qu'il y a des choses à savoir, par exemple des choses « mathématiques » à savoir –, cette condition n'est pas *suffisante* pour donner à la didactique un objet et un contenu, nous allons le voir. Avant cela, nous nous arrêterons un instant sur le postulat (civilisationnel) qu'il y a du savoir. Ce postulat, notons-le ici avant d'y revenir plus loin, va de pair avec cet autre postulat qu'il y a aussi du non-savoir, qu'il existe des activités dont l'accomplissement ne nécessite pas de savoir quoi que ce soit, ou si peu que rien.

2.3. Le postulat du savoir se révèle à travers ce qu'en disent sous des formes variées les langues indo-européennes (auxquelles nous nous limitons ici). Le *Dictionnaire culturel en langue française* (2005) propose ainsi ce petit tableau dans quelques langues européennes autres que le français :

	(acte, processus)
anglais	<i>cognition, knowledge</i>
allemand	<i>Erkenntnis, Kenntnis</i>
espagnol	<i>conocimiento</i>
italien	<i>cognizione, conoscimento, conoscenza</i>
	(verbe)
anglais	<i>to know</i>
allemand	<i>kennen</i>
espagnol	<i>conocer</i>
italien	<i>conoscere</i>

Pour le français, nous aurions bien sûr d'abord *connaissance, savoir* (« acte, processus »), ensuite *connaître, savoir* (« verbe »).

2.4. Pour nous faire une idée plus précise mais suffisamment distanciée de la prégnance civilisationnelle des notions de *savoir* ou de *connaissance*, nous utiliserons un dictionnaire étymologique de la langue anglaise (Ayto, 1990), le *Dictionary of word origins*. Voici d'abord la notice relative à l'entrée *Know* :

Know [11] The words for 'know' in the various Indo-European languages mostly belong to one large many-branched family which goes back ultimately to the base **gn-*, which also produced English *can* and *ken*. Its Latin offspring was *noscere*, from which English gets *cognition*, *incognito*, *note*, *quaint*, etc. From its Greek branch come English *agnostic* and *diagnosis*. And in other Indo-European languages it is represented by, among others, Sanskrit *jānāti* 'know,' Old Irish *gnáth* 'known,' and Russian *znat'*. In the other Germanic languages it is the immediate relatives of English *can* (German and Dutch *kennen*, Swedish *känna*, Danish *kende*) that are used for 'know'; *know* itself, which was originally a reduplicated form, survives only in English.

The *-ledge* of *knowledge* [13] was probably originally the suffix *-lock* 'action, process,' which otherwise survives only in *wedlock*. *Acknowledge* [15] is derived from *knowledge*.

► agnostic, can, cognition, diagnosis, incognito, ken, knowledge, note, quaint, recognize

Ce premier apport d'informations (où le sens et l'origine du mot *ken*, en particulier, est laissé à la sagacité du lecteur) montre l'enracinement civilisationnel du postulat du savoir. Il peut être complété – par exemple – par les notices consacrées aux mots *notice*, *note* et *notoire*, toujours en anglais :

note [13] Latin *nota* had a remarkably wide range of meanings. Its original sense was 'sign, mark,' but already in classical times it had broadened out semantically to include 'alphabetical character,' 'shorthand sign,' 'brief letter,' 'musical note,' and 'characteristic quality.' Many of these followed it via Old French *note* into English, where they were supplemented by 'distinction, reputation,' perhaps inspired by the derived adjective *notable* [14]. From the same source came *notary* [14], etymologically a 'shorthand-writer.'

notice [15] One of the main Latin verbs for 'know' was *noscere* (earlier *gnoscerere*), a distant relative of English *know* and, via the derived *cognoscere*, source of a wide range of English words, from *cognizance* to *reconnaissance*. From its past participle *notus* was formed the noun *notitia*, which denoted 'knowledge, acquaintance.' English took this over via Old French *notice*, and at first used it only for 'advance knowledge, warning' (as in 'give someone notice of something'). The main modern sense, 'heed, attention' (as in 'take notice of'), did not emerge

until the end of the 16th century (and the use of the verb *notice* for ‘observe, perceive’ is later still, dating from the mid-18th century). Also from the Latin past participial stem *nōt-* come *notify* [14], *notion* [16], and *notorious*. ► *cognition, know, noble, notion, notorious, reconnaissance*

notorious [16] *Notorious* originally meant simply ‘well known.’ It was borrowed from medieval Latin *notorius*, which was a derivative of *notus* ‘known,’ the past participle of Latin *noscere* ‘know’ (source also of English *notice, notion*, etc). The English word very soon came to be used in association with derogatory nouns (as in ‘a notorious liar’), and by the early 17th century the adjective itself had taken on negative connotations. (*Noble*, which comes from the same ultimate source and likewise etymologically means ‘known,’ has gone up in the world as far as *notorious* has gone down.)

2.5. Ce rapide panorama montre la pénétration linguistique de l’idée de connaissance dans les sociétés européennes. Nous le compléterons par une information complémentaire sur le mot (français) *savoir*, qui a, lui, une histoire un peu particulière. Le *Dictionary of word origins* possède une entrée qui se relie au français *savoir* et que nous reproduisons d’abord ci-après :

sapient [15] Like English *taste*, Latin *sapere* combined the notions of ‘appreciating flavour’ and ‘fine discrimination,’ and hence meant both ‘taste’ and ‘be wise.’ In the former sense it has given English *savour* and *savoury*, while the latter has fed through into English in its present participial form as *sapient*. It is also the source of Spanish *saber* ‘know,’ which via a West African pidgin has given English the slang term *savvy* ‘understand’ [18], and French *savoir* ‘know,’ as in English *savoir-faire* [19].

► *savour, savoury*

Le *Dictionnaire culturel en langue française* ne dit guère autre chose à propos de *savoir* : ce mot s’introduit en français à la fin du X^e siècle sous les formes *saber*, puis *savoir* (1080) et *saveir* (v. 1165), en provenance du latin *sapere*, « avoir du goût », « avoir du jugement », « être sage » (ce qui conduira à *savant*). Ce dictionnaire ajoute une remarque qui nous sera utile : « Le lat. *scire* “savoir” n’est représenté en français que par des dérivés et composés du participe présent *sciens* (→ science, conscience), mais on y a rattaché *savoir* par confusion au XV^e s., d’où les graphies *scavoir, sçavoir* employées jusqu’au XVII^e s. » Le mot *savoir* au sens où nous l’employons couramment, s’enracine dans les idées corrélées du goût (taste) et donc de la capacité à faire des distinctions subtiles, à juger finement (*fine discrimination*), qui est

ressentie comme à la base de la sagesse. Nous laisserons le lecteur examiner plus largement le vocabulaire de la langue française qui manifeste dans cette langue le souci du savoir.

3. Le souci de l'étude

3.1. Nous partons donc du tableau suivant : dans une société donnée, on considère qu'il y a du savoir et (corrélativement) des activités supposant un certain savoir et qu'il y a aussi des activités dont l'accomplissement ne suppose aucun savoir – ou presque. Car, bien entendu, la distinction n'est pas absolument franche. Ainsi admettra-t-on que, pour faire telle ou telle chose, il y a bien « deux ou trois choses à savoir », mais qui ne sont pas pour autant à tout coup *du savoir*... La dichotomie du savoir (« il s'y connaît ! ») et du non-savoir (« il n'y a rien à savoir ») jouera un rôle crucial, nous le verrons.

3.2. Si l'on en restait là, on n'aurait pas besoin de didactique – seulement d'épistémologie. (En grec, le savoir ou, mieux, la science, se dit *épistêmê*.) Pour avancer, consultons à nouveau le *Dictionary of word origins*, et cela à propos du mot *science* ; voici ce qu'il en dit :

science [14] Etymologically, *science* simply means 'knowledge,' for it comes via Old French *science* from Latin *scientia*, a noun formed from the present participle of the verb *scire* 'know.' It early on passed via 'knowledge gained by study' to a 'particular branch of study,' but its modern connotations of technical, mathematical, or broadly 'non-arts' studies did not begin to emerge until the 18th century. The derivative *scientist* was coined in 1840 by William Whewell: 'We need very much a name to describe a cultivator of science in general. I should incline to call him a Scientist,' *Philosophy of the Inductive Sciences* 1840.

Avant d'en tirer ce qui nous fera avancer, ajoutons une information que donne, à propos du même mot, le *Dictionnaire culturel en langue française* :

SCIENCE [...] (1080 « habileté » ; empr. au lat. *scientia* « connaissance », spécialt « savoir théorique » (traduisant le grec *epistêmê*). *Scientia* est dérivé de *sciens*, *scientis*, p. prés. de *scire* « savoir » qui n'a pas de correspondant dans les langues indo-européennes.

On a là en quelque sorte un « point isolé » : d'abord *scire*, puis, par l'intermédiaire du participe présent *sciens*, le substantif *scientia*, enfin *science* (et les mots correspondants dans les diverses langues européennes). Mais revenons à la première de ces deux citations et

arrêtons-nous sur cette notation : « It early on passed via ‘knowledge gained by study’ to a ‘particular branch of study...’ » Le mot clé est ici *study*, étude. Pourquoi cela ?

3.3. L’un des mystères liés à l’existence du savoir (et du non-savoir) est le suivant : comment tel savoir est-il venu à l’existence ? Mais cette question n’a guère de sens ainsi formulée (même si on enjoint souvent à l’épistémologie historique de chercher à y répondre). Nous introduirons ici deux notions que l’on prendra pour le moment de façon naïve : celle d’*institution*, celle de *personne*. Le postulat qu’il y a du savoir se formule en effet à propos de l’activité d’une personne x ou, plus généralement, d’une institution I . Or la question à poser à propos de l’activité d’une telle *instance* U (institutionnelle ou personnelle) est celle-ci : d’où vient que U semble disposer de tel savoir qui lui permet d’agir comme elle le fait ?

3.4. Il y a, dans les sociétés où nous vivons, une réponse fréquemment mobilisée face à cette interrogation : « Je le sais (ou nous le savons), c’est tout. » La disponibilité du savoir dont supposément dispose U n’aurait pas besoin d’explication : on sait, ou on ne sait pas, cela participe d’un état du monde, d’un monde regardé comme une « nature naturée ». Le fait qu’une instance qui ne disposait pas d’un savoir \check{S} en vienne à en disposer est en quelque sorte nié. Or c’est cela qui est au cœur de la science didactique. Alors que la carte du savoir et du non-savoir paraît *statique* (ou que, jusqu’à un certain point, on la voudrait telle), on doit accepter pourtant qu’elle est une réalité *dynamique*. De cette dynamique, la didactique va faire son objet.

3.5. On peut bien sûr imaginer que les changements dans la cartographie des savoirs au sein d’une société donnée soit des changements spontanés, non délibérés, comme il en va par exemple, et sauf exception, en matière de diffusion des maladies. La dynamique des savoirs serait alors l’objet d’une épidémiologie, science qui mettrait en évidence des facteurs d’abord ignorés des hommes, clandestins en quelque sorte, sur lesquels nous n’aurions pas de prise. D’emblée pourtant, nos sociétés semblent conscientes d’un fait : afin de se rendre disponible un certain savoir \check{S} , autrement dit pour « apprendre \check{S} », x fait délibérément quelque chose : il *étudie*, l’enjeu de son étude, que nous noterons désormais ♥, dépendant de \check{S} . (Très souvent, pour simplifier, quand on veut indiquer que x étudie pour se rendre disponible le savoir \check{S} , on dira que « x étudie \check{S} ».) Cela noté, voici ce que précise le *Dictionary of word origins* :

study [13] *Study* comes via Old French *estudie* from Latin *studium* ‘eagerness, intense application,’ hence ‘application to learning’ (English *studio* [19] comes from the same ultimate

source, only via Italian). *Studium* in turn was derived from the verb *studere* ‘be eager, study’ (source of English *student* [15]). This probably went back ultimately to the Indo-European base **steud-*, **teud-* ‘hit,’ which also produced Latin *tundere* ‘hit’ (source of English *contusion* and *obtuse*) and German *stossen* ‘shove, hit’ – the underlying notion of *study* thus being the ‘application of extreme effort.’

► contusion, obtuse, student, studio

On voit que, pour se procurer un certain savoir, une culture immémoriale nous dit qu’il faut s’y appliquer en fournissant un effort notable, extrême. L’étude est, si l’on peut dire, une action « contondante ». Le *Dictionnaire historique de la langue française* confirme ce tableau :

ÉTUDE [...] apparaît sous la forme *estudie* (v. 1120), puis *estude* (v. 1150) par métathèse, et *estude* (fin XII^e s.). Le mot est emprunté au pluriel latin classique *studia*, interprété comme nom féminin singulier, de *studium* « attachement, zèle, soin » et « goût pour l’étude », dérivé de *studere* « avoir de l’attachement pour », « s’appliquer à » (→ *studieux*). Ce verbe se rattache comme les mots latins *stupere*, *stupor* (→ *stupeur*) et *stuprum* (→ *stupre*), à des termes indoeuropéens exprimant un mouvement, un choc.

Pour se rendre disponible un certain savoir, certaines connaissances, il faut donc aller vers lui, s’y appliquer, s’y attacher, avec zèle, avec soin, en y mettant de l’énergie : entre *x* et *Š*, un *choc* se produit. On rencontre ici une brassée d’idées dont certaines peuvent étonner. Le lien avec *stupre*, ou plutôt avec le latin *stuprum*, mérite ainsi d’être souligné. À cet égard, le *Dictionnaire historique de la langue française* précise encore ceci :

STUPRE [...] est un emprunt savant (1378, puis 1507) au latin *stuprum* « déshonneur », « honte », puis spécialement « déshonneur résultant de la débauche ou du viol », « adultère » et « viol » ; ce mot se rattache probablement à une racine indoeuropéenne *°(s)teu-* « frapper », comme le latin *stupere* « demeurer stupide » (→ *stupeur*), *studere* (→ *étude*), *tundere* (→ *contusion*).

3.6. En quoi consiste alors l’étude ? Telle est, bien sûr, la grande question. Mais avant d’y venir, nous devons nous arrêter sur la gestion sociale de l’étude, qui constitue un fait massif et décisif de nos sociétés.

4. La gestion sociale de l'étude

4.1. En quelque société que ce soit, l'essentiel en toutes les activités humaines, même celles qui pourraient paraître les plus intimes, les plus « personnelles », se trouve contrôlé par des institutions auxquelles est reconnue – non sans conflits, certes – une autorité en la matière, un pouvoir d'investiture et de légitimation. Il serait ainsi naïf de croire que n'importe quel individu x est automatiquement autorisé à étudier n'importe quel savoir S , et cela quel que soient les « gestes de l'étude » qu'il envisage de faire pour cela. Classiquement, depuis la civilisation grecque antique, une institution, qui doit elle-même être instituée par des institutions « politiques » de niveau supérieur, a été l'un des outils clés de la gestion sociale de l'étude : l'école ; ou plutôt, comme nous dirons aussi, la *skholè*, employant ainsi le mot grec qui a inscrit cette institution dans les langues européennes.

4.2. Vers 300 av. J.-C., en effet, un modèle émerge, avec Athènes pour centre, où l'on se met à désigner l'école par le mot de *skholè*, qui va diffuser dans les langues de l'Europe : il donne *schola* en latin, *school* en anglais et en néerlandais, *Schule* en allemand, *skole* en norvégien et en danois, *escuela* en espagnol, *scuola* en italien, *escola* en portugais, etc. Le *Dictionary of word origins* brosse à cet égard le tableau suivant (où le *Latvian* est le letton, *Latvia* étant la Lettonie) :

school [...] was borrowed into prehistoric Germanic from medieval Latin *scōla*, and has since evolved into German *schule*, Dutch *school*, Swedish *skola*, and Danish *skole*, as well as English *school*. The medieval Latin word itself goes back via classical Latin *schola* to Greek *skholé*. This originally denoted 'leisure,' and only gradually developed through 'leisure used for intellectual argument or education' and 'lecture' to 'school' (in the sense 'educational assembly') and finally 'school' the building. The Latin word has spread throughout Europe, not just in the Romance languages (French *école*, Italian *scuola*, Spanish *escuela*), but also into Welsh *ysgol*, Irish *scoil*, Latvian *skuola*, Russian *shkola*, Polish *szkola*, etc. Derivatives of the Latin word in English include *scholar* [14] and *scholastic* [16].

Le mot *skholè* désigne ainsi, à l'origine, *le temps libre*, que l'on consacre au *loisir*, à ce que les Latins appelleront l'*otium* (auquel s'opposera à sa négation, le *negotium*, mot qui donnera « négoce » en français). *Skholè* a encore ce sens à l'époque de Platon et d'Aristote. Mais il va prendre ensuite un sens crucial pour nous : la *skholè*, l'école, c'est ce lieu où, délaissant un temps les soucis et les affaires de la vie quotidienne, on s'adonne à l'étude. C'est ce que

rappelle, par exemple, Henri Pena-Ruiz dans cet extrait de son livre *Qu'est-ce que l'école* (Gallimard, Paris, 2005).

Le mot « école » vient d'un terme grec, *scholè*, qui veut dire loisir, entendu au sens de libre activité. Le latin *schola* reprend cette acception, d'abord donnée au terme *ludus*, qui veut dire aussi « jeu ». Évoquant l'école (*schola*) comme lieu d'enseignement, Festus précise que les enfants doivent s'y adonner aux études libérales, toutes choses étant par ailleurs suspendues (*ceteris rebus omissis, vacare liberalibus studiis pueri debent*). L'idée essentielle tient déjà dans cette maxime : l'école est inventée pour que le petit homme puisse cultiver ses facultés par des études délivrées des contraintes du moment. C'est que de telles études ont pour seule fin l'épanouissement des potentialités de chacun en authentiques facultés. Reposant sur ces facultés, le sort des activités qui conditionnent la vie et la survie n'en sera pas pour autant négligé : il sera au contraire mieux assuré. Le succès d'une telle entreprise requiert que le lieu et le temps de ces études soient préservés des urgences de la vie, qui sinon les marqueraient de leurs limites. Ainsi naît l'idée d'un espace et d'un temps de loisir consacré à l'étude. On tient ici l'idée fondatrice de l'école. (pp. 23-24)

Notons que le choix du mot ne fut nullement immédiat, comme le rappelle l'historien Carlo Natali dans ce passage où apparaît notamment le mot *diatribè*, qui a désigné un passe-temps avant de désigner l'étude, le travail « sérieux » :

... les quatre principales écoles philosophiques hellénistiques furent créées à Athènes, deux par des citoyens athéniens, les deux autres par des étrangers. Les écoles prirent alors une forme achevée. Un vocabulaire particulier s'institua dans la communauté philosophique : outre le terme *diatribè*, d'usage ancien, on employa celui de *scholè* pour désigner le cursus des « études, leçons, et séminaires », signification inconnue du temps de Platon et d'Aristote, où il indiquait le « temps libre ». Selon Philodème, l'école était nommée *hairesis*, « choix », d'après le choix d'une doctrine philosophique, ou l'analogue *agogè*. On employait aussi *kepos* (jardin), *peripatos* (promenade), *exedra* (amphithéâtre). On pouvait donc désigner une école en faisant allusion à son activité doctrinale, ou encore à sa structure physique. (p. 236)

Le même auteur laisse voir la tension entre contrôle social de l'étude et liberté d'étudier :

Dicéarque s'éleva contre la tendance de la philosophie de son époque à s'institutionnaliser ; il soutint que l'on pouvait faire de la philosophie n'importe où, sur la place publique, dans les

champs, ou pendant la bataille : nul besoin de la chaire, de commentaires livresques, d'horaire fixe ou de *peripatos* avec ses disciples ! Ménédème d'Érétrie, lui aussi, dit-on, était indifférent aux conditions de son enseignement : ni ordre, ni sièges disposés en cercle, mais des disciples attentifs assis ou se promenant, à l'image du maître. (pp. 236-237)

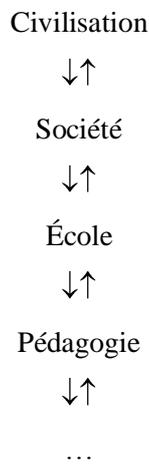
Dicéarque était un disciple d'Aristote. Il apparaît ici rétif à l'existence d'établissements permanents et à l'appareil scolaire qui se met en place de son temps. À toute époque, on observe ainsi des débats autour de ce que doit être une école et de ce que doivent être les situations scolaires.

4.3. Quel qu'en soit le type, quelles qu'en soient les singularités, une école crée des conditions pour l'étude et en même temps impose des contraintes à l'étude. Ainsi une école reçoit-elle certains publics d'élèves x , et non pas d'autres, qui pourront y étudier certains savoirs \check{S} , et non pas d'autres. Contrairement au vœu de Dicéarque, en aucune société l'étude n'est libre. À l'école, au reste, l'élève x voit apparaître un y qui n'est pas là *que* pour l'aider à étudier : car y est en même temps un garant, devant la société, et d'abord devant l'école qui l'emploie, de l'étude de x , de sa conformité aux règlements et de son adéquation aux mœurs en usage, et cela quant à l'objet de l'étude mais aussi quant aux manières d'étudier. Que x et y se retrouvent ensemble en un même lieu pour étudier ne procède donc pas de la volonté seule de x et de y – cela peut même aller contre la volonté intime des uns comme des autres ! L'un et l'autre sont *mandatés* – c'est-à-dire à la fois autorisés et obligés – par une *institution mandante* qui, en dernier lieu, est l'école elle-même – sans oublier que l'école doit à son tour avoir été autorisée, en dernier ressort par la société elle-même. Les élèves x et les « maîtres » y sont ainsi les *mandataires* de l'institution mandante : si on les trouve là à telle heure, c'est qu'ils ont été mandatés pour cela – ce qui explique et justifie leur présence. Notons que, dans le cas général, les x ne choisissent pas les y , et les y ne choisissent pas les x .

4.4. Le *Dictionnaire historique de la langue française* nous éclaire sur le mot « élève », qui, indique-t-il, « s'explique par le besoin à l'époque classique (1653) de fournir un équivalent français de l'italien *allievo*, mot de la Renaissance (fin XV^e s.) désignant celui qui est “élevé” par un maître ». La même notice précise encore que ce mot désignera un peu plus tard (1690) « un enfant qui reçoit l'enseignement d'un établissement scolaire ». (Dans cet emploi, lit-on encore, *élève* est en concurrence avec *écolier* ainsi qu'avec *étudiant*.) Mais il importe surtout de s'arrêter un instant sur la pluralité des noms par lesquels on désigne un aide à l'étude y . Celui-ci est souvent nommé le *maître* (le *magister*). Mais ce mot a de multiples synonymes,

dont les plus péjoratifs sont aussi les mieux informatifs. Le maître est appelé parfois le *régent*, car il est le maître du groupe X de ses élèves x , qu'il *régite*. On l'appelle aussi, péjorativement, le *pédant*, parce qu'il est celui qui sait : il est le maître du savoir. On le nomme encore quelquefois, sans tendresse, le *fouette-cul*, parce qu'il punit (ou fait punir) ceux qui ont enfreint les règles du jeu scolaire. Le mot qui fera florès jusqu'à aujourd'hui, *enseignant*, apparaît au XIX^e siècle : il appellera un examen un peu plus détaillé plus loin. Mais il faut en ce point introduire, après le niveau de l'*école*, le niveau de la *pédagogie*, qui est le siège de conditions et de contraintes essentielles au destin de l'étude scolaire.

4.5. L'échelle (partielle) des niveaux de codétermination didactique se présente alors ainsi :



D'où vient le mot *pédagogie* ? C'est en vérité le mot *pédagogue* qu'il faut interroger. L'extrait suivant de l'article « Éducation dans l'Antiquité » de l'encyclopédie *Wikipédia* apporte sur ce point un premier éclairage.

Les enfants de familles romaines riches ont deux moyens d'être instruits, moyens choisis par leur père. Ils peuvent être élevés à la maison, par un précepteur (*præceptor*). Mais en principe ils iront à l'école (*ludus*) et seront instruits par le maître (*magister*). Le pédagogue (*pædagogus*) est un esclave chargé d'accompagner l'enfant à l'école, qui se situe sous un des portiques du forum.

On voit ici deux écoles : l'école « familiale » (le *præceptor* y fait fonction de y et est mandaté par le chef de famille), et l'école « extérieure », à laquelle on envoie les enfants pour qu'ils y soient instruits. Le pédagogue est, au début, simplement chargé d'y accompagner l'élève et de

l'en ramener sain et sauf. Voici ce que précise le *Dictionnaire historique de la langue française* à cet égard :

PÉDAGOGUE n. m. est emprunté (1370-1372, Oresme) au latin *paedagogus*, lui-même du grec *paidagôgos* « esclave chargé de conduire les enfants à l'école » et « précepteur » ; au sens propre de « qui conduit les enfants », le mot est composé de *pais*, *paidos* « enfant » (→ pédiatre) et de *agôgos* « qui conduit », de *agein* « conduire, mener » qui correspond au latin *agere* (→ agir).

On notera ici le passage du sens original du mot (le pédagogue est l'esclave qui conduit les enfants à l'école) à celui de précepteur (qui les instruit à la maison). À cet égard, un historien, Henri-Irénée Marrou (1948), écrit :

Notons, cependant, la persistance d'un élément privé : au nombre des maîtres qui contribuent à la formation de l'enfance figure le « pédagogue », le serviteur chargé d'accompagner l'enfant dans ses trajets quotidiens entre la maison et les écoles [...]. Son rôle est en principe modeste : c'est un simple esclave, chargé de porter le petit bagage de son jeune maître ou la lanterne qui doit servir à l'éclairer en chemin, voire l'enfant lui-même s'il est fatigué (je renvoie le lecteur aux charmantes terres cuites qui nous le montrent en action).

Mais ce rôle avait aussi un aspect moral : si on faisait accompagner l'enfant, c'est qu'il était nécessaire de le protéger contre les périls de la rue, et on sait quels ils étaient ; le pédagogue exerce sur son pupille une surveillance continuelle, souvent ressentie, à la longue, à l'âge de l'adolescence, comme une insupportable tyrannie. Tout naturellement, malgré son caractère servile et le peu de prestige dont, trop souvent, il jouissait, il étend son rôle au-delà de cette protection négative : il dresse l'enfant aux bonnes manières, forme son caractère et sa moralité. Si bien qu'à côté de l'instruction d'ordre technique qu'assurent les divers maîtres (et à laquelle il contribue aussi souvent en qualité de répétiteur, chargé de faire apprendre les leçons, etc.), c'est toute l'éducation morale qui est confiée au « pédagogue » dont le rôle perpétue ainsi dans la bourgeoisie hellénistique celui du « gouverneur » des héros homériques. La langue reflète cette importance de fait : en grec hellénistique, « pédagogue » perd assez fréquemment son sens étymologique d'esclave « accompagnateur » pour prendre l'acception moderne de pédagogue, d'éducateur au sens plein (cependant il restera toujours distinct du « maître » dispensateur de science). (vol. 1, pp. 217-218)

On voit ici apparaître différents *types* d'aides à l'étude, assumant auprès de x différentes fonctions concourant à l'étude : après le *précepteur*, après le *maître*, voici le « *gouverneur* » des temps homériques, et aussi l'humble *répétiteur*, qui fait repasser ses leçons à l'enfant ; l'*éducateur* également ; et puis bien sûr le pédagogue au sens primitif du terme, que désigne l'étymologie du mot. On aura noté au passage, dans ce qui précède, l'emploi du mot *pupille* pour désigner l'enfant que l'esclave conduit à l'école. Ce mot, qui vient du latin *pupa* (lequel a donné aussi *poupée* en français), est le féminin de *pupus* « petit garçon ». C'est de *pupille* que découle, en anglais, *pupil*, mot qui désigne « a person, especially a child at school, who is being taught » mais aussi « someone who is being taught a skill, especially such as painting or music, by an expert » (d'après le *Cambridge Advanced Learner's Dictionary* en ligne), ce qui correspond dans les deux cas au français *élève*.

5. Le pédagogue et l'enseignant

5.1. L'étude, qui doit rendre disponible ce que nous avons appelé jusqu'ici des savoirs, a pour objet des *œuvres*, c'est-à-dire des créations humaines servant quelque finalité. Bien entendu, un savoir (au sens commun du terme, tel qu'on l'a employé jusqu'ici) est une œuvre ; mais une *question* est aussi une œuvre et l'étude *d'une question* est une étude première, « atomique », que modélise le schéma herbartien. (L'étude d'une œuvre ♥ qui n'est pas une question est une étude « moléculaire » qui se décline en l'étude – « atomiques » – de multiples questions Q_i à propos de ♥.) Cela étant, en quoi peut consister pour x le fait d'étudier l'œuvre ♥ et pour tel ou tel y le fait d'aider x à étudier ♥ ?

5.2. Dans le contexte d'une société où le contrôle de l'étude est plus ou moins fort, où, en particulier, on accède à l'étude de certaines œuvres par le canal d'une école, le rôle général d'un y peut être dit par métaphore « pédagogique » : y est en effet un pédagogue en ce sens que sa fonction est de conduire l'élève x jusqu'à l'œuvre à étudier et, si l'on peut dire, de l'amener au contact de cette œuvre. De là découle l'emploi du terme *enseignant*. L'enseignant y *montre* l'œuvre à l'élève x . On sait peut-être que, en espagnol d'aujourd'hui, *enseñar* signifie encore tout à la fois montrer (on vous montre un article dans une boutique), enseigner (dans une classe) et laisser (aperce)voir. *Enseigner*, précise le TLFi, vient du latin vulgaire *insignare*, qui dérive lui-même du latin classique *insignire* « signaler, désigner ». Il apparaît en français vers 1050 avec le sens de « faire connaître par un signe, une indication ». Mais longtemps, « montrer » signifie *enseigner* (au sens scolaire du terme). Enseigner l'orthographe, par exemple, c'était « montrer à mettre l'orthographe ». Dans son *Dictionnaire*

de la langue française, Émile Littré consacre à ce verbe une notice en douze points dont voici le huitième, formé surtout de citations mais très clair quant à l'usage ainsi illustré :

Enseigner. Montrer les langues, la grammaire, les mathématiques. Montrer à écrire.

*Et ce qui vous était plus important, on vous a montré avec soin l'histoire de ce grand royaume que vous êtes obligé de rendre heureux, BOSSUET, **Hist. Dessein général.***

*Il vaut mieux me laisser montrer à lire à Mlle de la Tour, MAINTENON, **Lett. à Mlle de Caylus, 6 juillet 1717.***

Par extension.

*Je vous ai montré l'art d'affaiblir son empire, CORN. **Sert. III, 2.***

*Il montre aux plus hardis à braver le danger, RAC. **Théb. I, 1.***

Absolument, dans le même sens, et alors on dit montrer à quelqu'un.

*Outre le maître d'armes qui me montre, j'ai arrêté encore un maître de philosophie, MOL. **Bourg. gent. I, 2.***

*Votre maître de musique est allé aux champs, et voilà une personne qu'il envoie à sa place pour vous montrer, MOL. **Mal. imag. II, 4.***

*Ils sont charmés de cet homme [un précepteur] ; c'est lui qui montre à cette belle marquise, SÉV. **26 juin 1680.***

*L'occupation de montrer en ville n'est guère moins opposée à l'étude que la dissipation des plaisirs, FONTEN. **Carré.***

PROVERBE

Souvent les bêtes montrent à vivre aux hommes, c'est-à-dire elles n'ont pas de si grands dérèglements.

Par menace, je lui montrerai bien à vivre, je le châtierai, je me vengerai de lui.

On peut faire un semblable constat avec l'anglais : d'après *The Online Etymology Dictionary*, le verbe *to teach* dérive du vieil anglais *tæcan* qui signifiait "to show, point out" et aussi... "to give instruction". (Le mot, dont le sens le plus usuel était "show, declare, warn, persuade", a la même origine que l'allemand *zeigen* « montrer ».) Le même dictionnaire encore indique à propos de *teacher* : "It was used earlier in a sense of 'index finger' (late 13c.)." En anglais, donc, vers la fin du XIII^e siècle, le *teacher* était l'index, le doigt qui montre, le doigt de la *deixis* (du grec *deiknunai*, montrer). Le *Dictionary of word origins* confirme ce propos :

teach [OE] To *teach* someone is etymologically to 'show' them something. The word goes back ultimately to the prehistoric Indo-European base **deik-* 'show,' which also produced Greek

deiknúnai ‘show’ (source of English *paradigm* [15]) and Latin *dīcere* ‘say’ (source of English *diction*, *dictionary*, etc). Its Germanic descendant was **taik-*, which produced English *token* and German *zeigen* ‘show.’ From it was derived the verb **taikjan*, ancestor of English *teach*.

► diction, dictionary, paradigm, token

Mais le français n’est pas en reste ; la notice consacrée par le *Dictionnaire historique de la langue française* à *enseigner*, reproduite ci-après, constituera une utile révision de plusieurs des faits linguistiques déjà rencontrés :

ENSEIGNER v. tr. est issu (1050) du latin populaire °*insignare*, altération du latin *insignire* ‘indiquer, désigner’, dérivé de l’adjectif *insignis*, de *signum* (→ enseigne, signe)

◆ *Enseigner* a d’abord, comme le latin *insignire*, correspondu à « faire connaître par un signe » (1050), valeur qui ne survit que régionalement, remplacée par *renseigner*. <> Par extension, le verbe s’est employé (1165-1170) pour « instruire (qqn) », encore au XIX^e s. ; il prend ensuite les valeurs d’« apprendre à qqn » (v. 1200) d’où, au XVII^e s, *enseigner que* (1690) et de « transmettre des connaissances à (un élève) » (XVII^e s.). En emploi absolu *enseigner* signifie (fin XVIII^e s.) « être enseignant ».

► Le dérivé usuel **ENSEIGNEMENT** n. m. a d’abord signifié « précepte, leçon » (1170) et s’est dit ensuite (1413) pour « leçon d’un maître ». Lié à *enseigner* « indiquer », *enseignement* a eu d’autres acceptions, par exemple : « avis, conseil » (XII^e s.) jusqu’au XVI^e s., « pièce authentique » (1336), « ordre reçu » (1413), « renseignement » (XVI^e s.). Le mot désigne à partir du XVIII^e s. (1771, *enseignement public*) l’action, l’art de transmettre des connaissances, et cette transmission elle-même. Les syntagmes *enseignement primaire*, *enseignement secondaire*, *enseignement technique* (1833), etc. relèvent de cet emploi. <> Employé seul (1864, *l’enseignement*), le mot désigne l’ensemble des enseignants, leur carrière. **ENSEIGNANT**, **ANTE** adj. et n., « qui enseigne » (1762), vient du participe présent du verbe et s’emploie spécialement dans *l’Église enseignante* (1771) « le pape et les évêques », puis dans *le corps enseignant* (1806) « ensemble des professeurs et des instituteurs ». <> D’où la substantivation : *un, une enseignant(e)* (v. 1865) qui s’est substituée à **ENSEIGNEUR**, **EUSE** n. (XIII^e s.), devenu rare. Correspondant au premier sens du verbe, *enseigneur* équivalait aussi à *index* « le doigt qui désigne » (1580). À *enseignant* s’oppose aujourd’hui **ENSEIGNÉ**, **ÉE** n. (1967) qui a une valeur plus générale que *élève*, *écolier* ou *étudiant* (cf. *apprenant*). *Enseigné*, adjectif, est attesté dès le XII^e s. pour qualifier un enfant que l’on a éduqué (1555, *malenseigné*, n. m. « malappris »), mais la reprise du mot au XX^e s. est indépendante de cet usage ancien. Un autre

dérivé, ENSEIGNABLE adj. a signifié (v. 1265) « docile à l'enseignement ». L'adjectif est rare pour qualifier une chose susceptible d'être enseignée (1838).

On notera en particulier la proximité et les divergences de destin du français *enseigneur* et de l'anglais *teacher*.

5.3. On aura remarqué dans la notice précédente le mot *apprenant*. Sur ce mot, le *Dictionnaire historique de la langue française* indique ceci :

Aprenant n. m. « apprenti » (XIII^e-XIV^e s.), puis *étudiant* (v. 1550) est sorti d'usage au XVII^e siècle. Le mot moderne APPRENANT est une recreation (mil. XX^e s.) suscitée pour traduire l'anglais *learner* (de *to learn* « apprendre »), là où *étudiant*, *élève* ne conviennent qu'imparfaitement.

L'examen du verbe anglais *to learn*, mentionné dans ce qui précède, complètera notre petite enquête historico-linguistique ; le *Dictionary of word origins* propose ceci :

learn [OE] *Learn* comes from a prehistoric West Germanic **līznōjan*, which also produced German *lernen*. This goes back ultimately to an Indo-European **leis-* 'track,' and so seems to carry the underlying notion of 'gaining experience by following a track.' Very closely related are terms in various Germanic languages for 'teach' (German *lehren*, for instance, and Dutch *leeren*, Swedish *lära*, and Danish *lære* – the last three also mean 'learn'). English used to have such a verb for 'teach' too: *lere*. It had largely died out by the 19th century, but the related *lore* 'knowledge' [OE] survives.

► last, lore

Ainsi, *to learn*, c'est suivre une piste. On peut imaginer que *x* suit la piste que lui montre l'enseignant-pédagogue *y*, qui peut-être même *ouvre* la piste : la métaphore « pédagogique » peut ainsi se poursuivre. Ajoutons à cela la notice qu'offre à propos de *learn* l'*Online etymology dictionary* :

learn (v.)

O.E. *leornian* "to get knowledge, be cultivated," from P.Gmc. **līznojan* (cf. O.Fris. *lernia*, O.H.G. *lernen*, Ger. *lernen* "to learn," Goth. *lais* "I know), with a base sense of "to follow or find the track," from PIE **leis-* "track." Related to Ger. *Gleis* "track," and to O.E. *læst* "sole of

the foot” (see *last* (n.)). The transitive sense (He learned me how to read), now vulgar, was acceptable from c.1200 until early 19c., from O.E. *læran* “to teach” (cf. M.E. *lere*, Ger. *lehren* “to teach;” see *lore*), and is preserved in *learned* “having knowledge gained by study.”

Nous laisserons le lecteur intéressé dépiauter cette notice, notamment pour y préciser (en consultant le dictionnaire indiqué) les abréviations qui y apparaissent.

5.4. Le pédagogue conduit l’élève jusqu’à l’œuvre à étudier ; l’enseignant la lui montre ; l’élève l’étudie. Comment cela est-il possible ? À cette question fondamentale, l’une des plus vieilles réponses, sur laquelle nous nous arrêterons provisoirement dans cette première leçon, consiste à procurer à *x* un *exposé* – oral et/ou écrit – relatif à l’œuvre à étudier, c’est-à-dire en quelque sorte un *récit de* (ou *sur*) *l’œuvre*. En fait, l’existence d’exposés sur l’œuvre à étudier est une condition de possibilité essentielle de l’école : avant toute chose, à l’école, on étudie l’œuvre en étudiant de tels exposés, à tel point que l’éloignement par rapport à *l’œuvre même* constituera ensuite un problème à poser et à résoudre, sur lequel nous reviendrons évidemment. Mais il faut voir d’abord la solution qu’apporte l’existence d’exposés : ceux-ci permettent précisément d’étudier l’œuvre *en son absence même* (ou, comme l’on dit en latin : *in absentia*). « Ce qu’on ne doit point voir, qu’un récit nous l’expose », écrivait Boileau, cité par Littré. Ajoutons : ce qu’on ne peut approcher autrement – en allant « sur le terrain » –, qu’un exposé nous le rende proche. Ainsi en vient-on à l’idée qu’exprime (en français) le mot de *manuel*, à propos duquel le *Dictionnaire historique de la langue française* précise ceci :

MANUEL n. m. est un emprunt (v. 1270) au bas latin *manuale*, neutre substantivé de l’adjectif *manualis* [...] « étui de livre » et (VI^e s.) « livre portatif contenant un résumé de traités plus longs », peut-être par traduction du grec *enkheiridion* « livre portatif, manuel », titre d’un ouvrage d’Épictète, dérivé de *kheir* « main » [...] et qui a donné le terme didactique *enchiridion*.
◆ Le mot a éliminé le syntagme *livre manuel*, d’ailleurs rare, et désigne un ouvrage didactique présentant l’essentiel d’une doctrine, d’une méthode, et de format maniable. Spécialement, il s’applique aux ouvrages pour les classes (*manuel scolaire*). <> Par extension, il se réfère à un guide pratique (1761).

Longtemps, l’usage par *x* guidé par *y* d’un exposé sur l’œuvre paraît des plus simples : *x* doit apprendre le texte de l’exposé *par cœur*, *y* vérifiant que la chose a été correctement accomplie et, au cas où il n’en serait rien, retrouvant son rôle de *fouette-cul* que la tradition lui reconnaît.

Mais nous examinerons maintenant la difficulté principale que doit affronter toute science didactique.

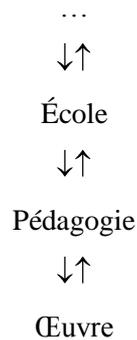
6. Le didactique et son refoulement

6.1. Nous désignerons par le syntagme *le didactique* – sur le modèle de *l'économique*, du *politique*, du *religieux*, etc. – cette dimension du réel social que nous définirons d'une façon a priori la plus large possible : nous dirons en effet que, dans une situation sociale donnée, il y a du didactique lorsque *quelqu'un* ou, plus généralement, *quelque instance* (personne ou institution) envisage de faire (ou fait) *quelque chose* afin de faire que *quelqu'un* ou *quelque instance* apprenne *quelque chose*. Il y a ainsi du didactique lorsque, par exemple, un professeur « fait son cours ». Mais il y en a aussi lorsqu'un élève consulte un dictionnaire à propos de tel ou tel mot, ou fait une figure pour résoudre un problème de géométrie. Dans un tel cas, notons-le, les deux « quelqu'un » de la définition sont *une seule et même personne*, qui s'aide elle-même à étudier afin d'apprendre. À l'autre extrémité du spectre, il y a du didactique encore lorsque, par exemple, des parents décident d'inscrire leur enfant à un cours de musique ou de karaté ou lorsque le ministre de l'Éducation nationale signe un nouveau programme de français pour les classes de 3^e. Bien entendu, ces quelques exemples n'épuisent en rien le « potentiel » de la définition énoncée !

6.2. Le didactique que l'on a défini dans ce qui précède est ce que nous nommerons le didactique *lato sensu*, « au sens large ». Avant d'aller plus loin, exprimons plus formellement cette définition : elle suppose une instance U qui fait quelque chose pour qu'une instance V « apprenne » quelque chose, ce quelque chose étant l'enjeu de l'étude, ♥. Restreignons un peu le cadre ainsi adopté en supposant que U est une personne x – l'élève ou l'étudiant – et V une personne y , un aide à l'étude, quelle que soit sa dénomination institutionnelle : x , y et ♥ forment alors ensemble un *système* que l'on nomme *système didactique* et que l'on notera $S(x ; y ; ♥)$. On peut généraliser cette notation : au lieu d'une personne x , on considère un collectif de personnes X et, au lieu d'une personne y , une équipe de personnes Y , en sorte que le système didactique qu'ils forment avec ♥ s'écrit maintenant $S(X ; Y ; ♥)$. Bien entendu, ce petit symbolisme permet de décrire une variété de types de systèmes didactiques : lorsque, par exemple, x étudie seul (momentanément), on aura un système autodidactique $S(x ; \emptyset ; ♥)$; lorsque deux élèves, x_1 et x_2 , étudient ensemble, mais sans aides à l'étude, on aura un système $S(\{x_1, x_2\} ; \emptyset ; ♥)$, qu'on pourra noter aussi $S(x_1, x_2 ; \emptyset ; ♥)$; etc.

6.3. Dans le cas d'un système didactique, le didactique qui peut advenir naît à l'articulation des deux « quelque chose » figurant dans la définition donnée plus haut : le « quelque chose » à apprendre, l'enjeu de l'étude ou *enjeu didactique*, ♥, et le « quelque chose » que peut faire y pour aider x à apprendre ♥ ainsi que le « quelque chose » que peut faire x pour s'aider à apprendre ♥. On a dit que le savoir n'est pas l'objet de la didactique, non plus que ces œuvres que l'on nomme usuellement des savoirs. Au point de départ, on peut considérer que la science didactique se donne pour objet précisément *le didactique* et en particulier ce didactique-là. Bien entendu, le didactique n'existe que parce qu'il y a du savoir, parce qu'il y a des œuvres et parce que l'on peut connaître les œuvres. Mais l'objet propre de la science didactique est le didactique. C'est là que la didactique se heurte à la difficulté essentielle évoquée plus haut : le *refoulement* culturel et social du didactique.

6.4. Complétons ainsi l'échelle de codétermination ébauchée plus haut :



Ce qu'on a nommé le didactique (*lato sensu*) s'étage sur cette échelle qui va du plus générique (en haut) au plus spécifique (en bas) : une instance U idoine peut faire un geste didactique « civilisationnel », ou un geste didactique « scolaire », ou un geste didactique « pédagogique », ou, enfin, un geste didactique spécifique de l'œuvre étudiée, geste qui relève *par définition* du didactique *stricto sensu*. Créer une école est un geste didactique « civilisationnel » (qui engage la notion de *skholè*) ; mais proposer l'*exposé* suivant (extrait de Griffiths & Hilton, 1970, p. 458) est un geste didactique *stricto sensu* relatif à cette œuvre mathématique ♥ qu'est la notion de *limite* :

We are going to say what we mean by the sentence

27.1.1 $f(x)$ converges to the limit ℓ on I as x converges to c .

Informally, we mean that the number $f(x)$ will become (and remain) arbitrarily close to ℓ , provided we take x (in I) sufficiently close to c , but not at c .

The technical reasons for ignoring the value of f at c will appear later; but we emphasize: c need not lie in I . A formal definition, which eliminates the vague words like ‘become’, is as follows:

27.1.2 Definition. $f(x)$ converges to ℓ on I as x converges to c provided, given $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$, such that for all $x \in I$,

$$(0 < |x - c| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

À cet égard, on peut se demander si ce geste de « mise en texte » est pertinent, adéquat, utile, etc. ; et, plus largement, quelle aide exactement il est susceptible d’apporter à un x qui étudierait l’œuvre indiquée – la notion de limite. Mais les réponses à ces questions, on le conçoit aisément, dépendront *d’autres gestes didactiques*, et notamment des gestes d’étude qu’accomplira *motu proprio* l’élève ou l’étudiant x pour tenter de tirer profit de cet exposé ; et aussi des gestes *d’aide à l’étude* que pourra accomplir un y éventuel à l’adresse de x à ce propos. Or, d’une façon générale, de tels gestes didactique *stricto sensu* ne sont guère visibles, même quand on tente de les observer au plus près des systèmes didactiques où ils sont accomplis : *ils sont une part cachée, socialement et culturellement, du fonctionnement social*, et cela d’autant plus que les gestes didactiques de niveaux supérieurs – c’est-à-dire de plus haut niveau de généralité, soit de moindre spécificité –, par exemple les gestes « pédagogiques », tendent à fonctionner comme des leurres, des trompe-l’œil, qui dissimulent le didactique *stricto sensu*.

6.5. L’exemple de l’exposé relatif à la notion de limite est à cet égard paradigmatique : ce qui est visible, traditionnellement, ce sont les exposés relatifs à l’œuvre à étudier ; au-delà, dans les profondeurs où s’enferme la plus grande spécificité didactique, les lumières de la culture ne vont pas. Or c’est précisément là que la science didactique doit aller. Notons en particulier que c’est en explorant ces profondeurs didactiques que l’on peut espérer saisir ce qu’il y a de didactique dans les niveaux supérieurs – dans la création d’une école, d’un cours, d’un manuel, d’une fiche, d’un devoir assigné aux élèves d’une classe, etc. Le premier pas à cet égard est de prendre conscience que les conditions de niveaux supérieurs et les gestes didactiques qui les créent ou les modifient ne participent que *partiellement* du didactique, et encore, bien souvent, sur le mode du leurre. Nous tenterons d’éclairer cette distinction, ténue mais essentielle, en l’illustrant au moyen d’une enluminure médiévale reproduite sur la couverture d’un ouvrage classique de l’historien Jacques Le Goff (1985) et que nous reproduisons ci-après.



Suivons alors le commentaire qu'en donne un spécialiste de philosophie médiévale, Alain de Libera (1991, p. 54) :

Le document, tiré d'un manuscrit du XIII^e siècle, est intitulé par l'éditeur « Innocent IV (cours magistral, professeur enseignant) », et, de fait, on y voit un maître en train de lire, c'est-à-dire de commenter un texte que trois étudiants ont eux-mêmes sous les yeux. Ici, tout parle – depuis les marges blanches, laissées autour du texte autoritaire pour y recevoir la trace de l'explication orale, jusqu'aux costumes typifiés des trois sortes d'auditeurs. Une seule chose demeure complètement invisible : elle est pourtant exhibée, comme ironiquement offerte aux regards dans son indisponibilité même : le contenu de la page lue. Quelques bâtons grossièrement alignés figurent l'inscription de la pensée, le décompte en est d'ailleurs inégal, comme si les livres n'étaient pas ouverts au même endroit – signe résolu d'un primat de la parole ou habile dévoilement de l'infigurabilité de la pensée ? On peut bien s'interroger sur l'intention de l'artiste, l'essentiel du phénomène n'est pas là : ce qui compte dans une stylisation du texte, évidemment commandée par l'insuffisance matérielle de l'espace disponible, c'est qu'elle peut servir d'emblème à la situation de la philosophie dans la reconstitution historique. C'est elle qui

rassemble les protagonistes et les objets, c'est elle qui rend visible l'espace de l'intellectualité, c'est elle qui en présente la structure phénoménale, mais elle est elle-même absente du dispositif de représentation, tache aveugle où se fixe le regard de l'historien. Tableau vivant ou point d'histoire grossi, le colloque des intellectuels ici proposé pose la philosophie dans une sorte d'invisibilité sociale qui n'a que peu de chose à voir avec l'irreprésentabilité de l'acte de pensée.

L'auteur semble présenter cette « invisibilité sociale » comme propre à la philosophie – laquelle se réduit, sur la page vue, à des traces illisibles. Nous y verrons plutôt un fait *générique*, non attaché à tel savoir particulier, et qui nourrit d'autres formes, plus subtiles, de refoulement didactique.

6.6. La *réduction pédagogique* du didactique se fonde sur le postulat que l'œuvre étudiée *n'est pas problématique*, que le problème tiendrait tout entier dans le rapport de x à cette œuvre, lequel serait subordonné au rapport de x à y . L'œuvre étudiée ne serait ainsi qu'un révélateur de l'imperfection native et de l'inachèvement des élèves – que tout autre œuvre, que tout autre savoir révélerait aussi bien. Dès lors, peu importe le détail des choses : il suffit *qu'il y ait une œuvre, qu'il y ait du savoir*, et même qu'il y ait *présomption* d'œuvre et de savoir – car on n'ira pas y voir de trop près, comme nous le rappelle l'innocente enluminure. La pédagogie, conséquemment, prétend répondre à l'imperfection *d'ensemble* des élèves, dont elle dépasse les manifestations contingentes et partielles – en mathématiques, en physique, en philosophie, etc. – pour en ressaisir l'unité essentielle.

6.7. Notons en passant que, parce qu'elle fait l'économie de la problématicité des œuvres et des savoirs, la pédagogie est la source de belles économies. C'est ainsi le dogme pédagogique qui légitime l'organisation de la « fabrication » des professeurs en deux temps, l'un fort long, l'autre fort court. Dans un premier temps, on « fabrique » des personnes pour qui le savoir à enseigner est supposé *être devenu non problématique*. La chose est évidemment vitale, puisqu'elle doit soutenir la fiction de la non-problématicité du savoir (fiction qui, avec des maîtres à demi instruits, fut autrefois assumée *par le manuel*, doté pour cela d'une véritable autorité). La manœuvre réussit assez bien : avoir étudié si longtemps permet à coup sûr, pensent les non-didacticiens, de *maîtriser* la matière à enseigner ! Dès lors, la voie est ouverte pour le deuxième temps, que d'aucuns voudraient réduire à rien parce qu'ils croient avoir percé à jour l'inanité de toute pédagogie : le temps voué à l'étude, embarrassé ou jubilatoire, du seul et unique « problème » – le problème des élèves et de leur rapport problématique au savoir et aux œuvres.

6.8. Bien entendu, la réduction pédagogique permet tout de même que du didactique vienne à l'existence, ce qui n'est pas si mal – même si une large part du didactique échappe au regard « pédagogique » et avec lui les problèmes de didactique qui ne manquent pas de s'y poser. Il est vrai au reste que la répression du didactique peut aller beaucoup plus loin. Dans une société donnée, on peut ainsi – nous l'avons évoqué plus haut – nier que, pour accomplir tel type d'activité, il y ait « quelque chose à savoir », en sorte que toute étude serait inutile : il n'y aurait qu'à faire. Si d'aventure on reconnaît qu'il y a quelque chose à savoir, on peut encore nier qu'il y ait vraiment *quelque chose à faire pour le savoir*. Le fantôme, alors, est que le savoir vous vient spontanément, immédiatement lorsqu'on en a besoin : c'est l'idée d'une « diffusion » extemporanée des connaissances – l'adjectif *extemporané* étant présenté ainsi par le *Dictionnaire historique de la langue française* :

EXTEMPORANÉ, ÉE adj. est un emprunt du XVI^e s. (1527) au bas latin des gloses *extemporaneus* « improvisé, qui n'est pas médité, qui se fait sans préparation », synonyme du classique *extemporalis*. Ce mot est formé de *ex-* (→ *ex-*) et du bas latin *temporaneus* « qui se fait à temps », lui-même dérivé de *tempus* (→ temps).

◆ D'abord employé au sens étymologique de « spontané » (1527, *cause extemporanée et non préméditée*), le mot a disparu, sauf en pharmacie (1764), à propos d'un médicament non préparé d'avance (par opposition à *officinal*) et en médecine où l'on parle (mil. XX^e s.) d'*analyse extemporanée*, « faite au cours d'une opération ».

► De l'adjectif dérivent **EXTEMPORANÉMENT** adv. (1846) et **EXTEMPORANÉITÉ** n. f. (1857 ; Michelet), peu usités.

Les apprentissages seraient donc, comme le café, *instantanés*. Telle est la fiction « utile » (parce qu'elle fait l'économie du didactique *stricto sensu*) qu'on nomme en anglais *instant learning*. C'est avec tout cela que la didactique doit se débattre pour se construire.

7. Le cas des mathématiques

7.1. La science didactique étudie la diffusion sociale des savoirs et, plus largement, des œuvres. Son objet premier est, on l'a dit, *le didactique*. Bien entendu, pour qu'il y ait du didactique, il faut que, en dépit de la dénégation et du refoulement du didactique, il y ait des œuvres et qu'il y ait des gestes d'étude et d'aide à l'étude de ces œuvres. Ajoutons que ces gestes didactiques supposés – qui créent des conditions et contraintes qu'on peut dire par

suite *didactiques* – ne sont pas les seules conditions et contraintes que la science didactique doit prendre en compte pour étudier la diffusion sociale des œuvres : telle conséquence non voulue d'une condition créée par un geste didactique intentionnel peut avoir des effets didactiques. La didactique doit donc d'une manière très générale étudier *toutes* les conditions et contraintes, quelles qu'elles soient, pour y pointer ce qui en fait « l'efficacité didactique ». De là une deuxième définition, qui fait de la didactique *la science des conditions et contraintes gouvernant la diffusion sociale des œuvres*.

7.2. Cela précisé, on peut en principe imaginer de construire une science didactique dont l'objet soit les conditions et contraintes, et donc le didactique, concernant la diffusion *de n'importe quel complexe donné d'œuvres*. Ainsi pourra-t-on envisager une didactique de l'anglais, une didactique du jazz, une didactique de la menuiserie, une didactique des claquettes, une didactique de la médecine générale, etc. Mais une difficulté, on l'imagine aussi, est alors constituée par le *statut* de ces œuvres dans la société où l'on travaille : si, par exemple, le commerce avec les œuvres visées est regardé comme ne nécessitant aucun savoir et n'appelant que des savoir-faire extemporanés, le projet d'une telle science didactique sera largement hypothéqué. De là au reste que, de façon fort prudente, d'aucuns ne veulent pas s'aventurer au-delà du cercle enchanté des « disciplines scolaires ». Cela facilite certes l'entreprise à plusieurs égards mais a aussi de forts désavantages – notamment celui d'une rupture épistémologique insuffisante avec l'univers étudié, point sur lequel nous reviendrons longuement – et ne doit donc pas faire illusion : une science didactique de tel complexe d'œuvres *ne saurait recevoir toute faite* de la société qui en héberge le développement la définition de ces œuvres, qu'elle doit au contraire regarder comme un de ses problèmes les plus fondamentaux – la définition de l'objet d'une science évoluant avec cette science elle-même.

7.3. Qu'en est-il alors d'une didactique *des mathématiques* ? Nous sommes là, à première vue, devant une situation historiquement assez particulière, que va nous révéler une nouvelle petite enquête historico-linguistique. Voici d'abord ce que dit le *Dictionary of word origins* à l'entrée *Mathematics* :

mathematics [16] Etymologically, *mathematics* means 'something learned.' Its ultimate source was the Greek verb *manthánein* 'learn,' which came from the same Indo-European base (**men-*, **mon-*, **mn-* 'think') as produced English *memory* and *mind*. Its stem form *math-* served as a basis of a noun *máthēma* 'science,' whose derived adjective *mathēmatikós* passed via Latin

mathēmaticus and Old French *mathématique* into English as *mathematic*, now superseded by the contemporary *mathematical* [16]. *Mathematics* probably comes from French *les mathématiques*, a rendering of the Latin plural noun *mathēmatica*. From earliest times the notion of ‘science’ was bound up with that of ‘numerical reasoning,’ and when *mathematics* reached English it was still being used for various scientific disciplines that involved geometrical calculation, such as astronomy and physics, but gradually over the centuries it has been narrowed down to a cover term for the abstract numerical sciences such as arithmetic, algebra, and geometry.

The abbreviated form *maths* dates from the early 20th century, the preferred American form *math* from the late 19th century.

The original meaning of the word’s Greek ancestor is preserved in English *polymath* ‘person of wide learning’ [17].

► memory, mind, polymath

Notons que le français a les mots *polymathie*, *polymathique* – et aussi *chrestomathie*, sur lequel le lecteur pourra enquêter. Notons aussi que l’auteur de la notice précédente fait allusion sans l’expliciter au large éventail des sciences mathématiques (incluant la musique et l’optique par exemple), au sein duquel, à partir de 1600, on distinguera les mathématiques *pures* (arithmétique, géométrie, etc.) et les mathématiques *mixtes* (adjectif qui laissera place à partir de 1800 au qualificatif *appliqué*). Cela dit, sur lequel nous reviendrons, nous compléterons l’information précédente par les indications données par un *Dictionnaire étymologique du français* jusqu’ici non encore sollicité (Picoche, 1979) :

Mathématique Famille du gr. *mathein* « avoir appris », infin. passé de *manthanein* « étudier », d’où *mathēma*, *-atos* « étude, science », en particulier chez Platon et Aristote « sciences mathématiques » par opposition aux sciences physiques ; *mathēmatikos*, « qui concerne les mathématiques »

Ainsi qu’on le voit, donc, « les mathématiques » sont originellement liées à l’étude, au fait d’étudier, et à ce qui en découle – le fait d’avoir appris. Curieusement, le didactique est ainsi inscrit dans la genèse même du terme par lequel on désigne aujourd’hui la matière « mathématique ». L’*Online etymological dictionary* confirme ce que nous avons vu jusqu’ici :

mathematic

late 14c. as singular, replaced by early 17c. by *mathematics*, from L. *mathematica* (pl.), from Gk. *mathematike tekhnē* “mathematical science,” fem. sing. of *mathematikos* (adj.) “relating to mathematics, scientific,” from *mathema* (gen. *mathematos*) “science, knowledge, mathematical knowledge,” related to *manthanein* “to learn,” from PIE base **mn-/*men-/*mon-* “to think, have one’s mind aroused” (cf. Gk. *menthere* “to care,” Lith. *mandras* “wide-awake,” O.C.S. *madru* “wise, sage,” Goth. *mundonsis* “to look at,” Ger. *munter* “awake, lively”).

mathematics

1580s, plural of *mathematic* (q.v.). Originally denoting the mathematical sciences collectively, including geometry, astronomy, optics. See *-ics*.

Notons ici que, en dépit de son origine (il désigne en principe *les* sciences mathématiques), en anglais le mot *mathematics* est usuellement considéré comme un singulier, en sorte qu’on écrira donc : *Mathematics is...* Voici ce que propose à cet égard le dictionnaire *Collins* en ligne (<http://www.collinsdictionary.com/dictionary/english/mathematics>) :

- 1 (functioning as singular) a group of related sciences, including algebra, geometry, and calculus, concerned with the study of number, quantity, shape, and space and their interrelationships by using a specialized notation
- 2 (functioning as singular or plural) mathematical operations and processes involved in the solution of a problem or study of some scientific field

Pour illustrer le point 2, voici un exemple pris sur Internet à propos des « mathématiques du poker » : on y rencontre d’abord une occurrence de *mathematics* au singulier, suivie d’une autre au pluriel (<http://www.gamblejack.net/blog/odds-are-key-to-the-poker-1/>) :

Odds are key to the Poker (1)

July 6, 2011 By [admins](#)

Sometimes people shudder when they tell them they need is to know a little math to be a successful player.

But in reality, the mathematics of poker is not intimidating, basically just need to understand a little to master the game.

Mathematically speaking, the most important thing a player needs to learn [are] the odds involved in the game.

Everyone knows that there are only four clubs in a deck of cards. And there are only 13 cards in each suit, and there are only 52 cards in a standard deck.

All the mathematics of poker are within these numbers: 4 times 13 = 52.

Complétons encore cela par une information sur l'origine des suffixes usités en anglais en relation avec le nom des différents champs de connaissance :

-ics

in the names of sciences or disciplines (*acoustics, aerobics, economics, etc.*) it represents a 16c. revival of the classical custom of using the neuter plural of adjectives with *-ikos* (see *-ic*) to mean “matters relevant to” and also as the titles of treatises about them. Subject matters that acquired their names in English before c.1500, however, tend to remain in singular (e.g. *arithmetic, logic*).

-ic

adjective suffix, “having to do with, having the nature of, being, made of, caused by, similar to” (in chemistry, indicating a higher valence than names in *-ous*), from Fr. *-ique* and directly from L. *-icus*, which in many cases represents Gk. *-ikos* “in the manner of; pertaining to.” From PIE **(i)ko*, which also yielded Slavic *-isku*, adjectival suffix indicating origin, the source of the *-sky* (Rus. *-skii*) in many surnames.

-ical

adjectival suffix, mostly the same as *-ic* but sometimes with specialized sense (e.g. *historic/historical*), M.E., from L.L. *-icalis*, from L. *-icus* + *-alis*.

Le même dictionnaire donne une liste des noms des mathématiques dans différentes langues ; nous la reproduisons partiellement ci-après :

Spanish: *matemáticas* npl // French: *mathématiques* nm_pl // German: *Mathematik* nf // Portuguese: *matemática* nf // Russian: *математика* nf // Croatian: *matematika* nf // Czech: *matematika* nf // Danish: *matematik* nutr // Dutch: *wiskunde* nf // Finnish: *matematiikka* n // Greek: *μαθηματικά* npl // Italian: *matematica* nf // Norwegian: *matematikk* nm // Polish: *matematyka* nf // Brazilian Portuguese: *matemática* nf // European Spanish: *matemáticas* npl // Swedish: *matematik* nutr // Turkish: *matematik* npl

On observera un certain flottement quant au nombre et, aussi, quant au genre. Et on notera que, en néerlandais, le nom adopté – *wiskunde* – est autre qu'en la plupart des autres langues

européennes ; on pourra sur ce point se reporter à un dictionnaire étymologique (voir par exemple <http://etymologiebank.nl/trefwoord/wiskunde>) pour vérifier que la valeur didactique emblématique du terme « mathématiques » n'en est pas absente. C'est avec ce viatique que nous partirons pour avancer dans l'examen des problèmes affectant le travail de fondation d'une didactique des mathématiques.

Leçon 2. Recherche et chercheurs

1. Conditions de possibilité

1.1. Pour que puisse exister une didactique des mathématiques, il apparaît nécessaire, du point de vue de la TAD, qu'existe une réalité nommée « mathématiques » et qu'existe – que soit reconnue – la réalité du didactique relatif au mathématique. Nous avons vu dans la première leçon que ces conditions sont *grosso modo* satisfaites, le mathématique apparaissant même comme emblématique, prototypique de ce qui suscite une activité didactique un tant soit peu organisée.

1.2. Bien entendu, tout cela est encore bien peu approfondi. Laisser le problème en l'état, pour une science didactique encore *in statu nascendi*, pourrait être la source d'un grand nombre de difficultés dans son développement (et son contenu), difficultés dont plusieurs, nous le verrons, dérivent de « choix de facilité » auxquels incite l'organisation sociale (ou civilisationnelle) du didactique. Ainsi, au lieu de produire le concept du didactique, qui est pour nous, ici, un concept outil, et un concept crucial, on sera tenté de s'en tenir aux formes du didactique ritualisées à l'école, et encore dans un certain type d'écoles – celles de l'enseignement primaire et secondaire surtout. De même, on n'ira pas plus loin que ce que les institutions en question nous désignent comme étant du didactique, alors même que le didactique tel que nous en avons parlé nous échappe, voire nous est dissimulé.

1.3. Pour ces raisons, il convient d'adopter un point de vue très large sur le mathématique, sur le didactique et sur ce qu'on peut en connaître – c'est là la double question et de la *théorie* didactique, et des *méthodes* de recherche (ou, comme nous dirons, des *praxéologies de recherche*), question que nous n'aborderons que plus tard mais qu'il faut d'ores et déjà avoir en tête. Dans ce but, nous nous référerons à la notion clé de *condition*, pour poser le problème des conditions de la (ou d'une) didactique des mathématiques ou, comme le dit la tradition philosophique, des *conditions de possibilité* d'une didactique des mathématiques. La notion de condition de possibilité est plus ouverte que celle de condition *nécessaire* (qui, si une didactique des mathématiques existe, doit *nécessairement* être réalisée) ou de condition *sine qua non* (ce qui revient à dire, de façon équivalente, que, si elle n'est pas réalisée, alors la didactique des mathématiques ne peut pas exister). On peut ici imaginer un ensemble *C* de conditions « presque suffisantes », c'est-à-dire telles que, si ces conditions sont réalisées, sous

des contraintes K à préciser, alors il est possible qu'une didactique des mathématiques vienne à l'existence, alors même qu'on ne sait pas dire à quoi celle-ci devrait ressembler ! On verra par exemple, dans cette leçon, qu'une condition de possibilité est qu'il existe une recherche (« en didactique des mathématiques ») et (donc) des chercheurs.

2. Les mots : recherche, chercher, chercheur

2.1. Comme on l'a fait déjà, nous aborderons la notion de recherche à partir de ce qu'en disent les dictionnaires (ou, du moins, certains dictionnaires). Nous commencerons par le long article que le TLFi consacre à ce mot, article que nous avons allégé de ses illustrations afin d'en rendre mieux visible la structure :

RECHERCHE, subst. fém.

A. – 1. Action de chercher (pour trouver) quelqu'un/quelque chose d'existant.

a) Action de rechercher quelqu'un/quelque chose de perdu, de disparu.

b) Souvent *au plur.* Enquête sur la vie privée de quelqu'un, sur sa conduite, ses actions ; action de poursuivre quelqu'un par voie policière ou judiciaire.

2. Action de chercher (pour trouver) quelque chose ; efforts entrepris.

B. – Action de chercher pour trouver, pour dévoiler quelque chose de caché, d'ignoré.

1. *Au plur.* Travaux effectués requérant une réflexion approfondie, études entreprises par les savants, les érudits ; leurs résultats.

2. *Au sing.* [Parfois avec une majuscule] Activités intellectuelles, travaux ayant pour objet la découverte, l'invention, la progression des connaissances nouvelles ; conception que l'on a de cette activité.

● *Recherche appliquée**, *fondamentale**, *opérationnelle**, *orientée**, *pure**.

● *Centre National de la Recherche Scientifique* (sigle *C.N.R.S.*). L'un des principaux organismes spécialement chargés de la recherche en France. *Attaché, maître, directeur de recherche au C.N.R.S. André Moles, chargé de recherche au C.N.R.S. (...) a choisi précisément pour sujet de thèse La structure physique du signal en musique microphonique* (SCHAEFFER, *Rech. mus. concr.*, 1952, p 116).

Rem. On dit souvent *la recherche* pour *la recherche scientifique* ou *le CNRS* : *métiers de la recherche, être/travailler dans la recherche.*

3. Gén. *au plur.* Réalisations concrètes de la recherche ; champ d'application, applications possibles de la recherche. *Recherches agronomiques, archéologiques, bactériologiques, ethnographiques, généalogiques, géographiques, géologiques, historiques, linguistiques. La*

connaissance du mécanisme physiologique, à l'aide duquel les substances toxiques ou médicamenteuses arrivent à produire leur action sur l'organisme, doit être le but de toutes les recherches médicales (Cl. BERNARD, *Princ. méd. exp.*, 1878, p. 302).

C. – Action d'essayer d'obtenir, d'acquérir, de se procurer quelque chose.

1. *Vieilli.* « Démarches que l'on fait en vue de se marier » (Ac. 1935).

2. Ensemble des actions, des efforts entrepris pour acquérir, obtenir quelque chose ou s'en approcher. Synon. *quête*¹.

3. Efforts, soins apportés pour se distinguer par son raffinement, son originalité.

D. – **1.** *Loc.* À la recherche de. En quête de ; en cherchant (quelqu'un, quelque chose).

2. *Spécialement*

a) « En termes de Couvreur, de Paveur, il désigne la Réparation que l'on fait en remettant des tuiles, des ardoises ou des pavés aux endroits où il en manque.

b) « En termes d'Eaux et Forêts, L'opération par laquelle on s'assure des arbres qui manquent et qui doivent être remplacés » (Ac. 1835-1935).

c) *Recherche de vitesse.* *Le skieur de descente (...) adopte une position dite de « recherche de vitesse ».* *Cette attitude doit remédier à deux obstacles principaux : la résistance de l'air, et le frottement des skis sur la neige* (GAUTRAT *Ski* 1969).

On voit que la recherche au sens qui nous intéresse plus spécialement ici se trouve mentionnée en B ci-dessus, où pointe l'idée de rendre visibles des choses « cachées », de faire connaître des choses « ignorées », et donc d'exercer une violence sur la réalité sociale existante. Il est intéressant de noter, par ailleurs, que « recherche » s'applique de façon très large et très peu homogène à une foule d'actions. En particulier, le mot peut désigner une « enquête sur la vie privée de quelqu'un, sur sa conduite, ses actions ». En sens inverse, on se doute que, de la même façon que, socialement, le didactique tend à être enfermé dans des écoles, la recherche se trouve confinée dans des institutions *ad hoc*, comme en témoigne ici la remarque selon laquelle « on dit souvent *la recherche* pour *la recherche scientifique* ou *le CNRS* ». L'écologie sociale de « la recherche » apparaît en cela marquée par une dichotomie qu'on pourrait peut-être énoncer plus ordinairement en disant : « Il y a de la recherche dans les labos ; et nulle part ailleurs. » Tel est sans doute le point de vue de nombre de « chercheurs » actuels, en quelque domaine que ce soit.

2.2. La consultation de l'entrée « Recherche » du dictionnaire de Littré fait apparaître une structure voisine de celle de l'article du TLFi. Dans ce qui suit, cette structure a été rendue

plus apparente par la suppression des nombreux exemples proposés par l'auteur et ses collaborateurs :

RECHERCHE

(re-chèr-ch') s. f.

1° Action de rechercher pour trouver quelqu'un ou quelque chose. Fig. Action de rechercher pour se procurer des choses morales, intellectuelles.

2° Terme de couvreur et de paveur. Recherche de pavé, recherche de couverture, la réparation qui s'y fait en mettant de nouvelles ardoises ou de nouvelles pierres, à la place de celles qui manquent.

3° Terme d'eaux et forêts. Opération par laquelle on s'assure des arbres qui manquent et qui doivent être remplacés.

4° Enquête judiciaire.

5° Examen de la vie et des actions de quelqu'un.

6° Il se dit, surtout au pluriel, d'études sur quelques points de la science ou de l'érudition.

7° Poursuite qu'un homme fait en vue d'épouser une femme.

8° Raffinement (ordinairement avec une idée de blâme).

9° Terme de musique. Espèce de fantaisie ou de prélude sur le clavecin ou l'orgue.

Le sens de *recherche* sur lequel nous enquêtons arrive ici en 6^e position, après certains usages traditionnels (chez les couvreurs et les paveurs par exemple) – mais, il est vrai, *avant* le sens de « poursuite qu'un homme fait en vue d'épouser une femme ». Voyons donc les exemples illustrant le point 6 :

Il s'agissait d'une longue recherche et d'une subtile discussion, et il possédait au souverain degré l'esprit de discussion et de recherche, [FONTEN.](#) Dodart. On se met presque toujours en trop grands frais pour les recherches qu'on a entreprises, et il y a peu de génies heureusement avarés qui n'y fassent que la dépense absolument nécessaire, [FONTEN.](#) l'Hopital. Un véritable savant prend de l'amour pour l'objet perpétuel de ses recherches, [FONTEN.](#) Delisle. Si l'on veut des recherches historiques, trouvera-t-on quelque chose de plus savant et du plus profond que les ouvrages de du Cange ? [VOLT.](#) Fragm. sur l'hist. XX. Aussi n'ont-ils [les Romains] eu ni géomètre, ni astronome, ni physicien ; Varron, le seul savant que la République ait produit, s'est borné à des recherches d'érudition, [CONDIL.](#) Hist. anc. XI, 2. Sous Périclès, les recherches philosophiques furent sévèrement proscrites par les Athéniens, [BARTHÉL.](#) Anach. Introd. part. II, sect. 3.

Le tableau brossé à travers ces exemples renvoie à l'évidence à un paysage ancien. Notons cependant qu'on y perçoit une certaine ambivalence, voire une ambivalence certaine à l'endroit de la recherche : la recherche, la conduite de recherches doit-elle être tenue pour bonne ou serait-elle blâmable ? Est-elle chose à admirer (au moins en partie) ou à proscrire ? Entre ces deux pôles, la tradition sociale et culturelle semble osciller, sans choisir.

2.3. Selon une technique désormais familière, nous passerons maintenant du français à l'anglais. Voici d'abord ce que propose *The Online Etymology Dictionary* :

research

1570s, "act of searching closely," from M.Fr. *recerche* (1530s), from O.Fr. *rechercher* "seek out, search closely," from *re-*, intensive prefix, + *cercher* "to seek for" (see *search*). Meaning "scientific inquiry" is first attested 1630s. Related: *Researched*; *researching*. Phrase *research and development* is recorded from 1923.

Nous retrouvons là un fait déjà rencontré : le passage – ancien – du français à l'anglais. En outre, nous tombons ici sur une date relative aux premiers usages de « recherche » (ou plutôt de *research*) dans le sens qui nous occupe : 1630. Voyons alors le mot *search*, auquel l'article précédent renvoie :

search

early 14c., from O.Fr. *cerchier* "to search," from L. *circare* "go about, wander, traverse," from *circus* "circle" (see *circus-*). The noun is first recorded c.1400. Phrase *search me* as a verbal shrug of ignorance first recorded 1901. *Search warrant* first attested 1739. *Search engine* attested from 1988. *Search and destroy* as a modifier is 1966, Amer. Eng., from the Vietnam War. *Search and rescue* is from 1944.

Chercher, ce serait donc « tourner autour d'une réalité sur laquelle on s'interroge » ! C'est là une conclusion que confirme le *Dictionary of word origins*, qui propose ceci :

search [14] Etymologically, *search* denotes 'going round in a circle'—for its ultimate source is Latin *circus* 'circle' (source of English *circle* and *circus*). From this was derived the verb *circāre* 'go round,' which by the time it had reached Old French as *cerchier* had acquired

connotations of ‘examining’ or ‘exploring.’ English took it over via Anglo-Norman *sercher*. (It is no relation, incidentally, to English *seek*.)

► circle, circus

Pour éclairer les références au *cercle*, on peut consulter alors le *Dictionnaire historique de la langue française*, qui nous conduira en même temps, on va le voir, au nom *chercheur* :

CHERCHER v. tr. est la modification, par assimilation (1468), de *cercier* (1080), *cerchier* (v. 1172), encore *cercher* au XVII^e s., issu du bas latin *circare*. Le mot, qui signifie « faire le tour de, parcourir pour examiner » (IV^e s.) puis « fouiller, scruter » (IX^e-X^e s.), est formé sur la préposition *circa* « autour de », de *circus* « cercle, cirque » (→ cirque). *Chercher* a supplanté le verbe *querir** ou *querre* et s’est répandu dans les parlers septentrionaux au détriment de son concurrent qui n’a guère de vitalité qu’en wallon et en lorrain. Il s’est implanté également dans les parlers méridionaux (ancien provençal *cerçar*), dans l’italien *cercare*, l’espagnol *cerçar* « entourer ». L’anglais *to search* est repris à l’ancien français *cercher*, *sercher*.

◆ *Chercher*, « parcourir en tous sens » puis « essayer de découvrir qqch., qqn » (1210), a parfois gardé une notion de déplacement dans certains de ses emplois concrets, jusque dans *aller*, *venir chercher* (XVII^e s.). Avec une valeur abstraite (1538), il signifie « essayer de trouver mentalement (une idée, un souvenir) », en mettant l’accent sur l’effort de la démarche, dans la construction *chercher à* (XVII^e s.) et *chercher à ce que* (1549). <> Plus particulièrement, il induit l’idée d’un gain dans *chercher femme* (1538), *chercher un emploi* (1694), voire celle d’un résultat inévitable (XVI^e s.) au sens de « s’exposer à un danger » (*tu l’as cherché !*). S’y ajoute une valeur agressive dans *chercher querelle* (1592) et, familièrement, *chercher (qqn)*, par exemple dans la phrase de menace *si tu me cherches, tu me trouves !* <> L’usage populaire dit (1945) *ça va chercher dans les (mille francs)* au sens d’« atteindre ».

► **CHERCHEUR**, EUSE n. et adj., d’abord *chercheur* (1538), l’unique dérivé du verbe par suffixation, est d’abord un nom puis aussi, tardivement, un adjectif (XIX^e s.). En emploi absolu, il a pris la valeur de « scientifique adonné à des recherches spécialisées » (1829), cet emploi spécial étant en rapport avec *recherche* et non avec les verbes *chercher* et *rechercher*, plus généraux. Le composé **RECHERCHER** v. tr. (1636 ; 1080, *recercher*) redouble les emplois du simple avec une valeur intensive, se bornant rarement au sens itératif de « chercher une nouvelle fois » (XVII^e s.), tout comme **RECHERCHÉ**, ÉE, l’adjectif tiré de son participe passé (1580), qui a le sens (parfois péjoratif) de « raffiné, étudié » et prend plus tard celui de « rare » (v. 1750). <> Le déverbal **RECHERCHE** n. f. (1508) se spécialise au début du XVIII^e s. en sciences, et

devient par la suite institutionnel (*Centre national de la recherche scientifique* ou *C.N.R.S.*, *ministère de la Recherche*, en France).

On retrouve ici certaines des conclusions auxquelles nous étions arrivés, mais éclairées par quelques données nouvelles. L'emploi actuel de *chercheur* pour désigner qui « fait de la recherche » est relativement récent : 1829. Quant au mot « recherche » pris au sens qui nous concerne, il commence par se « spécialiser » au début du XVIII^e siècle avant de devenir « institutionnel » : ainsi y a-t-il d'abord réduction du champ sémantique, puis monopolisation. En même temps, le mot ne saurait se défaire entièrement d'une charge apparemment ancienne de négativité, que l'on retrouve dans l'emploi des adjectifs « recherché » ou « étudié » – les mots de l'étude apparaissant ici marqués d'une ambiguïté qui, pour paraître marginale, n'en est pas moins indéniable.

2.4. Comment Littré entendait-il le mot *chercheur* ? Voici l'article correspondant, amputé de certains de ses exemples :

CHERCHEUR, EUSE

(cher-cheur, cheû-z') s. m. et f.

1°Celui, celle qui cherche.

Ha ! seigneur don Juan, l'on vous a bien cherché. – L'on devait me trouver, je n'étais pas caché ; Et qui sont ces chercheurs ? [SCARRON](#), *Jodelet*, IV, 3. *Tout l'ancien territoire de la baie d'Hudson qui n'était jadis parcouru que par des chercheurs de pelleteries, sera bientôt une riche annexe du Canada*, MAURY, *Rapport de géogr.* p. 25.

En mauvaise part.

Lui dire Tous les noms des chercheurs de mondes inconnus Qui n'en étaient pas revenus, [LA FONT](#). *Fabl.* VIII, 8. *Quatre chercheurs de nouveaux mondes Presque nus, échappés à la fureur des ondes*, [LA FONT](#). *ib.* X, 16. *Un chevalier errant grand chercheur d'aventures*, [LA FONT](#). *Fianç.*

2°Un chercheur, celui qui cherche avec activité et persévérance des faits, des documents, des livres ou autres pièces de collection.

En mauvaise part.

Celui que j'ai vu est un chercheur de pointes et un faiseur d'antithèses, [BALZ](#). *Socrate chrét.* *disc.* 7.

Une chercheuse d'esprit, femme pédante et prétentieuse.

Chercheuse d'esprit se dit aussi, d'après le conte de La Fontaine qui porte ce titre, d'une jeune fille innocente qui cherche aventure. La Chercheuse d'esprit, opéra de Favart.

Adj. Un esprit chercheur. Une imagination chercheuse.

3° Nom d'une secte chrétienne en Angleterre et en Hollande, qui, admettant les Écritures, prétend qu'elles ne sont bien expliquées par aucune des sectes chrétiennes qui les reçoivent, et en cherche le sens avec beaucoup de zèle.

Et ceux qu'on nomme chercheurs, à cause que, dix-sept cents ans après Jésus-Christ, ils cherchent encore la religion et n'en ont point d'arrêtée, [BOSSUET](#), *Reine d'Anglet.*

4° Terme d'astronomie. Petite lunette subsidiaire, à court foyer, adaptée au télescope.

HISTORIQUE

XVI^e s.

Chercheur de barbets [voleur], [OUDIN](#).

ÉTYMOLOGIE

Chercher.

On voit à nouveau que le mot de *recherche* est souvent pris « en mauvaise part ». Le dictionnaire de Littré a aussi une entrée « Rechercheur », que voici :

RECHERCHEUR

(re-chèr-queur) s. m.

1° Celui qui fait des recherches.

2° Voltaire l'a dit pour inquisiteur :

Les chercheurs attendirent la nuit ; car ils sont poltrons, [VOLT.](#) *Babyl. 11.*

3° Ouvrier qui voiture, au fourneau du briquetier, tout ce qui entre dans la construction de ce fourneau.

HISTORIQUE

XVI^e s.

Gentilhomme de profondissime sçavoir et grand chercheur des antiquités, [CARL.](#) *I, 46.*

SUPPLÉMENT AU DICTIONNAIRE

RECHERCHEUR. 1°

Ajoutez :

Il n'y a rien que je hâisse davantage que les chercheurs de la vérité, lorsqu'ils ne sont pas vraiment à Dieu et que son seul amour ne les conduit pas dans la recherche, SAINT-CYRAN, dans *SAINTE-BEUVE, Port-Royal, t. I, p. 432, 3^e éd.*

Le mot – qui a disparu – semble alors marqué négativement plus encore que ne l'est « chercheur ». Voyons ce que propose, à l'entrée « Chercheur », le TLFi :

CHERCHEUR, EUSE, subst. et adj.

I. – *Substantif*

A. – Celui, celle qui cherche, qui recherche. *Chercheur d'aventures, d'or, de sel. Chercheurs de grisou* (J.-N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Cours d'exploitation des mines*, 1905, p. 733). *Plus tard, quand les arbres auront crû, (...) les chercheuses d'eau deviseront là gaiement* (PESQUIDOUX, *Le Livre de raison*, 1928, p. 116).

– *TECHNOL.* [En parlant d'un appareil] *Chercheur de fuites, de pôles, de télescope. Chercheur de détecteur de TSF à galène* (cf. E. COUSTET, *La T. S. F. pratique, télégraphie, téléphonie*, 1924, p. 83).

B. – [Sans compl. d'obj. ; en parlant d'un esprit curieux, inventif, adonné à des recherches spécialisées] *Au contact de la matière mathématique, le chercheur tâtonne* (*Les Gds courants de la pensée mathématique*, 1948, p. 203). *Gray (...) Chercheur autodidacte et solitaire, il inventa, paraît-il, le téléphone en même temps que Graham Bell* (P. ROUSSEAU, *Hist. des techn. et des inventions*, 1967, p. 286) :

1. On avait fondé à Iéna une petite société philosophique, comme il y en avait tant au seizième siècle, appelée *Societas quaerentium* ; le **chercheur** [Leibniz] par excellence s'empessa d'en faire partie.

COUSIN, *Hist. gén. de la philos.*, 1861, p. 463.

2. Il [Léonard de Vinci] était déjà *savant, expérimentateur, chercheur* et sceptique, avec une grâce de femme et des dégoûts d'homme de génie.

TAINÉ, *Voyage en Italie*, t. 1, 1866, p. 74.

– *Cour., auj.* Titre donné à un spécialiste, le plus souvent attaché à un institut, un organisme de recherche.

SYNT. *Chercheur isolé, qualifié ; les chercheurs du C.N.R.S. ; une équipe de chercheurs. Cet institut du cancer où, en liaison intime, coopèrent cliniciens et chercheurs de laboratoire* (*Ce que la France a apporté à la méd. dep. le début du XX^e s.*, 1946, p. 144).

– *ASTRON.* « Sur un télescope, petite lunette à court foyer servant à pointer l'instrument » (*Mots rares* 1965).

II. – *Adj.* *On entendait hurler les chiens chercheurs de proies* (HUGO, *L'Art d'être grand-père*, 1877, p. 207). *J'éloigne (...) ses mains chercheuses* (COLETTE, *Claudine à Paris*, 1901, p. 269) :

3. Jeté par un dessein de sa vie *inquiète* et **chercheuse** dans les chemins de la Norvège, l'hiver l'y avait surpris [Wilfrid] à Jarvis.

BALZAC, *Séraphita*, 1835, p. 261.

4. Elle [une femme] était belle, d'une beauté irrégulière, mais saisissante, avec une ardeur dans ses prunelles où se devinait une âme *curieuse* et **chercheuse**, avide et inassouvie.

P. BOURGET, *Conflits intimes*, 1923, p. 282.

– ARM. *Fusée à tête chercheuse*. Dont la trajectoire est rectifiée et comme attirée par l'objectif lui-même (cf. A. DAVID, *La Cybernétique et l'humain*, 1965, p. 62).

Prononc. et Orth. : [ʃɛʁ.ʃœːʁ], fém. [-øːz]. Ds Ac. 1694-1932. **Étymol. et Hist.** **1.** le plus souvent avec compl. introduit par *de a*) 1538 *chercheur* « personne qui cherche, qui s'informe » (EST., s.v. *conquistadores*); 1636 *chercheur* (MONET); **b**) 1840 adj. « qui cherche (qqc.) » (PROUDHON, *Qu'est-ce que la propriété*, p. 133); **2.** emploi abs. 1835 adj. *chercheuse* « avide de connaissances, qui essaie de découvrir » (BALZAC, *loc. cit.*); 1829 sc. subst. « personne qui essaie de découvrir » (COUSIN, *Hist. de la philos. du XVIII^e s.*, p. 463). Dér. de *chercher**; suff. *-eur*^{2*}, *-euse**. **Fréq. abs. littér.** : 381. **Fréq. rel. littér.** : XIX^e s. : a) 159, b) 912; XX^e s. : a) 629, b) 616. **Bbg.** SCHUCHARDT (H.). *Trouver. Z. rom. Philol.* 1904, t. 28, p. 37.

On voit ainsi succéder à des emplois plus divers, plus ouverts, le sens contemporain de chercheur « professionnel ». Mais soulignons que, avant cela, le substantif comme l'adjectif *chercheur*, *chercheuse* est en quelque sorte *une propriété de la personne*, et non l'indication d'une position qu'elle occuperait au sein d'une institution, comme il en va généralement aujourd'hui. Ajoutons que, en français du Canada, la modernité a donné le substantif « *rechercheur* », que le *Dictionnaire culturel en langue française* définit ainsi : « Personne qui fait des recherches (pour une publication, une émission...). *Elle est chercheur à Radio Canada.* » Le substantif « *rechercheur* » semble disparu ; et « *chercheur* » a été monopolisé pour désigner un chercheur « scientifique ».

2.4. « Étude » et « recherche » sont sans doute des termes fort proches l'un de l'autre. La TAD parle cependant de *dialectique de l'étude et de la recherche*. Dans cette expression, le mot d'étude est pris volontairement de façon quelque peu restrictive : on *étudie* une œuvre « faite » (une théorie, etc.), alors qu'on *recherche* une vérité non encore énoncée (ou que l'on croit telle, au risque de refaire un parcours de recherche déjà emprunté par d'autres). Cette distinction conduit à souligner que l'expérience de la recherche *stricto sensu* est en fait beaucoup plus rare, semble-t-il, que celle de l'étude d'une œuvre « autorisée ». Pour le dire autrement, l'expérience vécue de *l'étude de la science faite* – l'étude de l'algèbre, par

exemple – est plus commune que celle de *la science-en-train-de-se-faire* – le fait de faire de la recherche en algèbre, par exemple. Cette dernière met en présence d'un paysage encore peu ou mal apprêté, en quelque sorte sauvage, dont l'accès surtout est chose délicate, qui n'a pas la belle ordonnance de jardins bien entretenus offerts à l'étude « pure ». Il y a là au reste une difficulté notoire dans la construction d'une science du didactique : formés et déformés par la culture débonnaire et minutieuse de l'étude scolaire et universitaire, l'apprenti chercheur, le chercheur lui-même peuvent être rebutés par l'apparente incurie des territoires de la recherche, qui ressemblent parfois à des terrains vagues où rien ne semble sûr et où l'on n'est pas certain même, quand on y entre, de ne pas devoir abandonner *ogni speranza*, pour parler comme Dante.

3. Un très long combat

3.1. Nous continuerons l'enquête en tentant d'en savoir plus sur ce que nous pouvons, en ce point, conjecturer : que l'activité de recherche – quel qu'en soit l'objet – n'a pas toujours été regardée avec faveur ; et que, peut-être, elle ne l'est toujours pas ! La recherche, en effet, se traduit par des découvertes, des révélations. Les chercheurs sont – en principe – des découvreurs, des révélateurs. Ce qu'ils découvrent et révèlent n'a pas toujours été bien accueilli et, souvent, les a mis en danger. Considérons là-dessus un tableau brossé autrefois par l'historien Lucien Febvre (1878-1956) dans son livre *Le problème de l'incroyance au 16^e siècle. La religion de Rabelais* (1947/1968) :

La vérité ? Tant mieux pour qui a su la déceler. C'est son trésor mignon ; il la serre sur son cœur, portes closes et la caresse en jaloux. Ni Descartes, ni Malebranche, ni Spinoza ne feront autrement. À plus forte raison ceux du XVI^e siècle. Ils savent le prix des vérités, si dures à arracher. Ils savourent le triomphe des réussites, la jouissance solitaire, violente et rare, de l'intelligence qui, à grand-peine, sans guide presque, ni maître, trouve. Ils savent aussi que ces joies, ces réussites sont le fait d'une élite, la récompense d'une élite. Encore les membres de cette élite s'amuse-t-ils volontiers à jouer des tours aux confrères, aux émules, à dissimuler aux rivaux tel résultat précieux (...). Ruses de vieux enfants : des archivistes, des bibliothécaires y ont pris, pendant tout le XIX^e siècle encore, d'absurdes plaisirs. Au XVI^e siècle ? Copernic attend sa fin pour publier son système ; un siècle plus tard, Huygens tiendra encore secrète – pendant plusieurs années – sa façon de concevoir les anneaux de Saturne ; il se contentera de prendre date, à tout hasard, en faisant imprimer au bas d'un mémoire une formule d'allure cabalistique dont il possède la clef... (p. 387)

Febvre poursuit en ces termes :

Prudence ? Satisfaction de jaloux ? Pour que les choses changent un peu, il faudra le XVIII^e siècle et ses ardeurs de prosélytisme. Le XVI^e siècle ? Relisons, dans le *Discours de la Licorne* d'Ambroise Paré, l'histoire du médecin de Charles IX, Chapelain, qui ne croyait pas plus que Paré à la vertu curative de la corne de licorne. Sommé de s'en expliquer et d'employer son autorité au service du vrai : « Jamais, répondit-il, jamais de son vivant il ne se mettrait en butte pour se faire becqueter des envieux et médisants. » Mais il ajoutait qu'après sa mort, l'on trouverait ce qu'il en avait laissé par écrit... » (p. 388)

L'historien arrive un peu plus loin cette conclusion : « Pendant 2000 ans, les vieilles sciences limitées et traditionnelles ont été cultivées uniquement dans les plates-bandes d'une philosophie qui les abritait... » (p. 390). Notre temps, à cet égard, est l'heureux héritier des XIX^e et XX^e siècles. Mais il nous faut apprendre à voir ce qui nous vient du fond des âges – bien en-deçà même de ce XVI^e siècle dont nous parle Lucien Febvre – et cela pour une raison d'aujourd'hui : le long passé d'interdits qui imprègne notre culture peut en effet pousser le « chercheur » à ne pas *oser* penser ceci ou cela, parce qu'il serait alors en trop grand désaccord avec les idées communes, la *doxa*. Or cette contrainte, qu'il nous faut d'abord identifier, est de nature à empêcher l'existence véritable d'une recherche, en didactique des mathématiques au moins autant qu'ailleurs.

3.2. Nous prendrons appui maintenant sur une étude très érudite due à l'historien Carlo Ginzburg, que celui-ci a intitulé « Le haut et le bas. Le thème de la connaissance interdite aux XVI^e et XVII^e siècles ». Cet article, d'abord publié en anglais (« High and low: The Theme of Forbidden Knowledge in the Sixteenth and Seventeenth Centuries ») dans la revue *Past and Present* en novembre 1976, est disponible aujourd'hui dans le recueil d'articles de C. Ginzburg intitulé *Mythes emblèmes traces. Mythologie et histoire* (pp. 160-184), republié chez Verdier en 2010. Voici le point de départ de l'étude :

Le sujet de cet essai est très vaste : mieux vaudra donc partir d'un texte précis. Dans l'*Épître aux Romains* 11:20, saint Paul invite les Romains qui s'étaient convertis au christianisme à ne pas mépriser les Juifs. Le message du Christ (sous-entendait-il) est universel. D'où l'exhortation [...] « Ne sois pas orgueilleux, crains plutôt... » Dans la Vulgate de saint Jérôme, le passage correspondant devient : « *Noli altum sapere, sed time.* »

La Vulgate est souvent une traduction très littérale et dans ce cas également, *altum sapere* est plus un calque qu'une véritable traduction du grec [...]. Mais à partir du IV^e siècle, dans l'Occident latin, le passage fut souvent mal interprété : *sapere* fut compris comme un verbe ayant un sens non pas moral (« sois sage ») mais intellectuel (« connaître ») ; l'expression adverbiale *altum* fut, par ailleurs, comprise comme un substantif désignant « ce qui est en haut ». « *Non enim prodest scire*, écrivit saint Ambroise, *sed metuere, quod futurum est ; scriptum est enim Noli alta sapere* » (Mieux vaut craindre le futur que de le connaître : il a été écrit, en effet, *Noli alta sapere...*).

La condamnation de l'orgueil moral prononcée par saint Paul devint ainsi un blâme contre la curiosité intellectuelle. Au début du V^e siècle, Pélage critiqua sans les nommer certains personnages qui se méprenaient sur la signification et sur le contexte du passage et soutenaient que, dans l'*Épître aux Romains* 11:20, l'Apôtre voulait interdire l'« étude de la sagesse » (*sapientiae studium*). Plus de mille ans plus tard, Érasme, suivant les indications de l'humaniste Lorenzo Valla, observa que les paroles de saint Paul s'appliquaient au vice moral, non au vice intellectuel. Dans son dialogue inachevé, les *Antibarbares*, il écrivit que « ces mots ne condamnent pas l'érudition, mais tendent à nous détourner de l'orgueil que nous tirons de nos succès mondains ». « Paul, ajoute-t-il, adressa les mots *Non altum sapere* aux riches, et non aux savants. » [...] Il faut noter toutefois que malgré cette interprétation très claire du texte, le malentendu à l'égard du passage de saint Paul persista. (pp. 160-162)

Ginzburg poursuit en ces termes :

Pendant des siècles et des siècles, les paroles de saint Paul, « *Noli altum sapere* », coupées de leur contexte, furent citées par des auteurs laïques ou ecclésiastiques comme un texte s'opposant à toute tentative pour franchir les limites de l'intellect humain (...). À la fin du XV^e siècle, un des premiers traducteurs de la Bible en italien, Niccolò Malermi, pouvait écrire : « *Non volere sapere le cose alte* » (Ne désire pas connaître les choses élevées). (p. 164)

Les « choses élevées », ce furent longtemps trois « niveaux de réalité » que l'auteur précise dans le passage suivant :

Si nous revenons maintenant au passage de la Vulgate d'où nous sommes partis, nous voyons que la mise en garde contre la prétention de connaître les choses « élevées » a été rapportée à des niveaux de connaissance différents, mais articulés entre eux. La réalité cosmique : il est interdit de regarder dans les cieux, et en général dans les secrets de la nature (*arcana naturae*).

La réalité religieuse : il est interdit de connaître les secrets de Dieu (*arcana dei*) comme la prédestination, le dogme de la Trinité, etc. La réalité politique : il est interdit de connaître les secrets du pouvoir (*arcana imperii*), c'est-à-dire les mystères de la politique. Il s'agit d'aspects différents de la réalité, dont chacun implique une hiérarchie bien précise ; différents, mais articulés entre eux... (p. 167)

L'interdit de connaître porte donc sur les « arcanes » de la Nature, sur les « arcanes » divins, sur les arcanes du Pouvoir. Le mot « arcane » (qui est masculin) est défini par le TLFi en ces termes : « Secret dont la pénétration est réservée à un petit nombre d'initiés. » Le *Dictionary of word origins* en dit plus sur la genèse du mot :

arcane [16] *Arcane* comes from the Latin adjective *arcānus* 'hidden, secret.' This was formed from the verb *arcere* 'close up,' which in turn came from *arca* 'chest, box' (source of English *ark*). The neuter form of the adjective, *arcānum*, was used to form a noun, usually used in the plural, *arcāna* 'mysterious secrets,'

► ark

L'interdit pesant sur les arcanes des trois mondes – celui de la Nature, celui de Dieu, celui du Pouvoir – fut l'objet d'un long combat, où l'habileté rhétorique était une arme : on négocia la liberté d'étudier les secrets de la Nature et de cultiver la « philosophie naturelle », en laissant de côté la « Surnature » et le Pouvoir. Là encore, Ginzburg apporte des informations utiles :

Au milieu du XVII^e siècle, un jésuite italien, le cardinal Sforza Pallavicino, adopta une attitude plus souple vis-à-vis du progrès scientifique. Il fit lui aussi allusion à la vieille analogie entre les *arcana naturae* et les *arcana imperii*, les secrets de la nature et les secrets du pouvoir politique, mais en les opposant nettement les uns aux autres. Il était possible de prédire le comportement de la nature, parce que les lois naturelles étaient peu nombreuses, simples et inviolables. Mais prédire le comportement des rois et des princes relevait de la plus pure témérité, comme l'aurait été celle de prédire l'impénétrable volonté de Dieu. Dans le même esprit, le noble Virgile Malvezzi, parent de Sforza Pallavicino, écrivit que « celui qui, pour expliquer les événements physiques, fait appel à Dieu, est peu philosophe, et celui qui n'y fait pas appel pour expliquer les événements politiques, est peu chrétien ». Nous avons donc, d'un côté, le règne de la science, qui en principe est ouvert à tous, même aux artisans et aux paysans – puisque, comme l'observa Sforza Pallavicino, la philosophie naturelle « se répand dans les boutiques et dans les campagnes » et pas seulement « dans les livres et dans les académies ». De l'autre, nous avons

le règne de la politique, qui est interdit aux « particuliers » qui tentent de pénétrer les secrets du pouvoir. De cette manière, l'opposition nette entre la prévisibilité de la nature et l'imprévisibilité de la politique introduisait un thème très différent, autour duquel s'était vraisemblablement construit tout le discours : la nécessité d'empêcher les gens du commun d'intervenir dans les décisions politiques. En même temps, cependant, la subtile distinction énoncée par Sforza Pallavicino impliquait une évaluation réaliste de la nature du progrès scientifique, malgré son avertissement contre qui prétendrait ne pas tenir compte des « barrières de la science humaine ». (pp. 176-177)

Un long cheminement va permettre de dégager une *certaine* liberté moderne de chercher, que Kant devait résumer en répondant à la question *Was ist Aufklärung?* (Qu'est-ce que les Lumières ?, 1784) par l'adage *Sapere aude !*, « ose savoir ». Dans cette perspective, Ginzburg note :

Au début du XVII^e siècle, dans le recueil d'emblèmes plusieurs fois réédité par un jeune avocat hollandais, Florens Schoonhoven, nous trouvons de nouveau l'antique exhortation « *Noli altum sapere* » sous une forme légèrement modifiée « *Altum sapere periculosum* » (Il est dangereux de connaître ce qui est en haut)... (p. 179)

Il ajoute :

« *Sapere aude* » est tiré de l'épître à Lollius d'Horace. La signification littérale en est « Sois sage ». Horace adresse ces mots à un sot qui hésite à traverser un fleuve parce qu'il attend que l'eau s'arrête de couler. Le passage se référait à l'origine au bon sens, non à la connaissance. Mais il est facile de comprendre que la signification du texte d'Horace était, dans le recueil, des emblèmes de Schoonhoven, différente. Là aussi, le mot *sapere* avait glissé du domaine moral au domaine intellectuel, sous l'influence de la devise voisine, « *Altum sapere periculosum* ». Le résultat était une sorte d'équilibre instable : « Il est dangereux de connaître ce qui est en haut », mais « ose connaître ». (p. 181)

Ce passage continue ainsi :

Pour comprendre pleinement la signification de cette dernière exhortation, il faut rappeler que, durant cette période, les intellectuels européens avaient de plus en plus le sentiment de faire partie d'une *respublica literatorum* cosmopolite, une république d'intellectuels. Dans ce

contexte, la solidarité avec les autres intellectuels était plus importante que les engagements respectifs à caractère religieux ou politique. On pourrait dire que la recherche de la vérité était devenue une sorte de religion, un engagement politique en soi. Mais cette insistance mise sur l'esprit de la recherche n'était pas destinée à tous. « *Hic vero libertas aliqua inquirendi, aut etiam dissentiendi doctis omnino concedenda est* » (Mais nous devons concéder à une certaine liberté de recherche, et même de désaccord, surtout aux intellectuels), écrivait [...] Conrad Vorstius, professeur de théologie à Leyde, à Casaubon, « autrement nous semblerions faire obstacle à la lente marche de la vérité ».

Ainsi, la liberté de recherche doit être concédée surtout – ou seulement ? – à un groupe social précis : les intellectuels. On peut dire qu'une nouvelle image des intellectuels émergeait alors – celle qui, pour le meilleur comme pour le pire, est encore vivante. (pp. 181-182)

On sera peut-être surpris de voir l'auteur parler des « intellectuels » (terme dont l'apparition remonterait, en français, à l'affaire Dreyfus : voir l'article « Intellectuel » de *Wikipédia*). Le repérage du texte latin montre que le mot qui y est employé est celui de *docte* – du latin *docere*, « enseigner » : c'est aux doctes qu'il s'agirait de concéder une certaine liberté de chercher, d'enquêter (*libertas inquirendi*).

3.3. Il n'est pas inutile de se reporter au court texte que Kant publia dans la *Berlinische Monatsschrift* en décembre 1784 sous le titre exact *Réponse à la question : qu'est ce que les Lumières ?* (*Beantwortung der Frage : Was ist Aufklärung?*). On le trouvera en ligne sur *Wikisource* à l'adresse suivante : [http://fr.wikisource.org/wiki/Qu'est-ce que les Lumières %3F](http://fr.wikisource.org/wiki/Qu'est-ce_que_les_Lumières_%3F)). En voici le début :

Les lumières sont ce qui fait sortir l'homme de la minorité qu'il doit s'imputer à lui-même. La minorité consiste dans l'incapacité où il est de se servir de son intelligence sans être dirigé par autrui. Il doit *s'imputer à lui-même* cette minorité, quand elle n'a pas pour cause le manque d'intelligence, mais l'absence de la résolution et du courage nécessaires pour user de son esprit sans être guidé par un autre. *Sapere aude*, aie le courage de te servir de ta *propre* intelligence ! voilà donc la devise des lumières.

D'une manière générale, le chercheur doit chercher... à sortir de la situation de minorité où la paresse et le manque de courage pourraient le confiner. Mais cela ne peut se faire qu'au prix d'un combat lucide, continu et collectif. La recherche en didactique des mathématiques se heurte à cet égard à deux grands ordres d'« arcanes ». Elle doit affronter par définition les

arcana naturae, puisque son objet – le didactique, en tant qu’ayant ses lois propres de structure et de fonctionnement – appartient au règne de la nature entendue au sens large, où la culture et les cultures humaines sont *des modes d’être de la nature*. Dans cette perspective, elle doit affronter nombre de contraintes sur lesquelles nous aurons à revenir. Mais, parce que les arcanes qu’étudie la didactique sont partie prenante de la production de la société, leur étude se heurte du même mouvement aux pouvoirs et aux jeux de pouvoirs. En tout ou partie, les réalités que la didactique est amené à examiner sont regardées *par ailleurs* comme des *arcana imperii*. Cela peut conduire à plusieurs dérives qui risquent de vider de sa substance le projet d’une recherche en didactique. L’une de ces dérives consiste à se soumettre au point de vue de tel ou tel pouvoir. Ainsi verra-t-on des « chercheurs » se flatter – de façon illusoire – d’être les « conseillers du Prince ». Plus généralement, les chercheurs, les équipes de recherche tendront à se muer en *bureaux d’études* de tel ou tel niveau de pouvoir – en matière scolaire, ministère, rectorat, etc. Ce faisant, ils auront l’impression d’être au plus près de « l’action », alors qu’est suspendue au-dessus de leur tête une épée de Damoclès, celle de la décision brutale de quelque potentat, qui, le moment venu, leur fera comprendre qu’ils n’appartiennent pas au même monde et qu’il est de la nature de l’un – le chercheur – de s’incliner devant l’autre – le politique. Il s’agit là d’une situation immémoriale, bien illustrée par l’épisode suivant, emprunté aux *Mémoires* de l’abbé André Morellet (1727-1819), personnage que ses amis philosophes, au nombre desquels figuraient Voltaire et d’Alembert, appelaient *Mords-les !* pour sa promptitude à rompre des lances :

En 1764, M. de Laverdy, alors contrôleur général, ayant fait rendre un arrêt du conseil qui défendait d’imprimer sur les matières d’administration, sous peine d’être poursuivi extraordinairement, ceux qu’on appelait alors philosophes furent indignés ; et j’étais de ce nombre. Je combattis pour la liberté de la presse, et j’intitulai mon ouvrage *De la liberté d’écrire et d’imprimer sur les matières de l’administration*. C’était le développement d’une partie du *Traité de la liberté de la presse* que j’avais commencé à la Bastille [...]. Je gardais ici une extrême modération, afin de ne pas rencontrer d’obstacles ; mais cette réserve ne me servit de rien, et je ne pus obtenir pour moi-même la liberté que je demandais pour tous. Cependant mon travail n’avait pas déplu à M. Trudaine ; son fils l’avait communiqué à M. Chauvelin, intendant des finances, et celui-ci au contrôleur général : mais le ministre y fit une réponse à mi-marge, tout entière de maximes despotiques, ou de la théorie des premiers commis : « pour parler d’administration, il faut tenir la queue de la poêle, être dans la bouteille à l’encre ; et ce n’est pas à un écrivain obscur, qui, souvent, n’a pas cent écus vaillants, à endoctriner les gens en place ». J’ai longtemps gardé ce précieux document. On comprend bien que mon ouvrage ne fut

pas alors imprimé ; mais en 1774, M. Turgot étant arrivé au ministère, je le publiai avec l'épigramme de Tacite : *Rara temporum felicitate, ubi sentire quae velis, et quae sentias dicere licet* [Le rare bonheur d'une époque où l'on peut penser ce que l'on veut et dire ce que l'on pense]. (p. 158)

Bien entendu, la Bastille n'est plus. Mais le chercheur ne saurait faire sagement de la recherche s'il doit accepter les vues de puissants qui, eux-mêmes, ne se soumettent nullement aux procédures et aux exigences de la recherche, qu'en règle générale ils ignorent entièrement, et qui, en conséquence, ne connaissent pas le premier mot de ce dont ils parlent.

3.4. La pression exercée sur la libre recherche par le Pouvoir ne se ramène pas à des collaborations conflictuelles et autres rapports de tension avec les pouvoirs d'État. L'interdit religieux et politique sur la connaissance a depuis belle lurette été en quelque sorte sécularisé et « dépolitisé ». C'est ainsi que des rejetons de cet interdit continuent d'exister, au sein du monde scientifique et du monde scolaire, par l'entremise de la spécialisation disciplinaire. Celle-ci a pour effet que, par exemple, seuls les professeurs de mathématiques y semblent habilités à parler de mathématiques (les autres devant, le cas échéant, le faire en cachette), que seuls les professeurs d'anglais peuvent s'exprimer en anglais, etc. Bref, il y a de fait *et de droit* (du point de vue de certaines institutions) accaparement des connaissances par des corporations de doctes. Dans ce contexte, le *Sapere aude !* apparaît limité au domaine de telle discipline ou sous-discipline et perd donc de sa force émancipatrice. Le découpage disciplinaire est ainsi une contrainte imposée à l'exercice de la liberté du chercheur en didactique, qui, on ne le sait que trop, doit – au jugement de certains ! – se dire didacticien *de* telle ou telle discipline « scolaire » ou « universitaire ». Le chercheur ne s'autorise plus alors de lui-même mais d'une institution qui tend à lui imposer ses points de vue, ses objets d'étude, ses démarches d'enquête, etc., et qui lui fera connaître son propre jugement sur ses travaux (si elle ne les ignore pas complètement).

3.5. On peut généraliser ce qui précède en le formalisant un peu. Un chercheur en didactique étudie le didactique en certaines institutions. Soit I l'une d'elles. Chaque institution est dotée d'une *noosphère* plus ou moins développée : la noosphère de I , \mathcal{N}_I , c'est la « sphère » (l'institution) où l'on « pense I » (le préfixe *noo-* vient du grec *nous*, « esprit, intelligence », *noein* signifiant « avoir une pensée dans l'esprit »). Outre qu'une noosphère peut être plus ou moins vaste, elle est en règle générale faite d'un grand nombre de parties hétérogènes dont les acteurs se côtoient, s'ignorent ou se querellent, coopèrent ou s'affrontent. Si I est l'institution

scolaire ordinaire (école primaire, collège, lycée), on trouvera dans la noosphère les associations de professeurs et leurs militants, les corps d'inspection et les inspecteurs, les membres d'associations « pédagogiques », des chercheurs – didacticiens ou non – qui trouvent dans *I* leur objet d'étude, des militants syndicaux, des « spécialistes » mandatés par des partis politiques, des responsables et militants politiques de divers niveaux, des journalistes spécialisés (qui, souvent, ne se considèrent pas comme membres de la noosphère, alors même que leur activité « professionnelle » y a des effets objectifs). La résultante de l'activité de ces multiples mondes noosphériques est un ensemble non spontanément consistant d'assertions à propos de l'institution scolaire qui, en dépit de son manque d'harmonie, engendre souvent une *doxa* dominante. Dans tous les cas de figure, cependant, le chercheur ayant trouvé son objet d'étude dans l'institution *I* est confronté, *volens nolens*, à un concert plus ou moins dissonant de prises de position. En quelques cas, ces prises de position sont pour lui un objet d'étude ; en d'autres cas, non. Dans ce dernier cas notamment, le risque est grand que le chercheur voie sa liberté de pensée bornée, voire diminuée, par les assertions émises, qui se proposent comme vraies et tendent parfois à s'imposer, voire, dans une conjoncture donnée, à « aller de soi ». Pour juger des conditions de la recherche, il convient alors d'examiner ce que sont les contraintes ainsi exercées et la manière dont les chercheurs – ou tel ou tel d'entre eux – en gèrent les effets.

3.6. En ce qui concerne plus précisément le chercheur en didactique des mathématiques, la noosphère de l'enseignement scolaire (et universitaire) des mathématiques (où il trouve traditionnellement une partie de son objet : le didactique relatif au mathématique) contient en particulier des mathématiciens intervenant ès-qualités, qui pensent ordinairement être promis à y assumer des fonctions d'autorité et de leadership à l'endroit des autres composantes de cette noosphère et notamment des didacticiens des mathématiques. La manière dont ces derniers gèrent une telle prétention – alliance complaisante, évitement, débat critique, paix armée, etc. – est bien sûr de nature à renforcer ou à dégrader, voire à détruire les fondements de la recherche en didactique des mathématiques. Notons que la pression évoquée ici est d'autant plus irrésistible que les mathématiciens concernés tendent à la justifier comme visant à « faire le bien » des professeurs, des élèves et (donc) de leurs parents, etc. Nous parlerons à ce propos d'*évergétisme*, lesdits mathématiciens se posant en *évergètes* à l'égard du monde scolaire – le mot vient du grec εὐεργετέω qui signifie « je fais du bien » (on pourra se reporter à ce propos à l'article « Évergétisme » de *Wikipédia*).

4. Une matière sans noblesse : l'éducation

4.1. L'interdit relatif à la connaissance des « choses hautes » – notamment les *arcana imperii* et les *arcana dei* – n'épargne pas la connaissance des « choses basses ». Deux raisons, on va le voir, l'expliquent. D'une part, on n'est jamais sûr que, partant de choses « viles », le chercheur n'en arrive pas, fût-ce sans le vouloir et sans le savoir, à toucher à des choses plus hautes, et notamment aux *arcana imperii*. D'autre part, on ne voit pas pourquoi quiconque s'intéresserait à la connaissance des choses viles ; et cela ne peut que susciter des doutes quant aux intentions véritables d'une recherche sur ces choses.

4.2. Même s'il en coûte à certains de l'entendre, il faut regarder la réalité en face : les choses d'éducation sont précisément, dans nos sociétés, aussi loin que l'on remonte en arrière, des choses basses ! On a vu que le pédagogue antique était d'abord un esclave qui accompagne son petit maître jusqu'à l'école, où le jeune enfant retrouve le *magister*. Mais ce dernier est à peine mieux loti que le *paedagogus*. À Rome comme en Grèce, note Henri-Irénée Marrou (1948), le maître d'école est « un pauvre hère », dont le métier est « le dernier des métiers, *rem indignissimam* », « fatigant et pénible, mal payé », « bon pour des esclaves, des affranchis ou de petites gens : *obscura initia* dit Tacite d'un parvenu qui avait commencé par là » (vol. 2, pp. 66-67). Les métiers du didactique, en règle générale, sont de petits métiers. Ce sont en fait à peine des métiers et ceux qui les exercent sont souvent des occasionnels devenus permanents, membres d'une forme élargie de domesticité : ils ont le statut de « petits boulots » assurés parfois en marge d'une activité principale insuffisamment rémunératrice. C'est ce que rappelle dans le passage ci-après l'historienne Marie-Madeleine Compère (1985) en ce qui concerne la deuxième moitié du XVI^e siècle :

Les répétiteurs officiellement investis de cette fonction sont désignés par deux termes dont la spécificité n'est pas parfaitement établie : le précepteur qualifie plutôt celui qui suit pas à pas son unique disciple depuis la maison paternelle ; le pédagogue s'est ménagé une résidence dans la ville où est situé le collège et peut offrir ses services à plusieurs enfants à la fois après leur arrivée. Les uns et les autres demeurent soit dans le collège dont ils occupent une chambre comme locataires, soit dans toute autre maison du même quartier ; ils sont eux-mêmes écoliers en fin d'études ou, dans le cas de villes universitaires, étudiants suivant les cours d'une faculté supérieure. Jean Déage suivait les leçons les plus avancées du collège chapuisien d'Annecy quand le père d'un jeune condisciple, François de Sales, le choisit comme précepteur de son fils ; tous deux s'acheminèrent ensemble jusqu'à Paris où ils assistent avec le même décalage de

curus aux cours du collège de Clermont ; François est en rhétorique quand Jean Déage entame sa théologie. (pp. 92-93)

La liste est longue des noms donnés aux divers types de *y* : précepteur, répétiteur, pédagogue, régent, écolâtre, maître d'école, pédant, fouette-cul, etc. la liste est longue des personnages qui se pressent autour de la figure de l'élève, et qui, selon le cas, apparaissent complémentaires ou au contraire se concurrencent, parfois durement – en 1563, ainsi, rapporte encore M.-M. Compère, un conflit éclate au collège d'Annecy qui voit les quatre *régents* du collège s'affronter aux neuf *pédagogues* qui s'y sont installés à demeure... On pourrait montrer que tout cela reste vrai jusqu'à aujourd'hui, alors même que ces « petits métiers » semblent ne pas pouvoir parvenir à la maturité d'une véritable profession. C'est ce que rappelle le sociologue Yves Dutercq (1993) dans ce passage extrait d'une étude attentive de la vie professorale :

Si l'on se limite aux professeurs du secondaire, on constate que jusqu'à la création récente des IUFM, la majorité d'entre eux ont eu une formation professionnelle préalable quasiment nulle ce qui, en dehors de toutes préoccupations pédagogiques, retarde voire condamne la constitution d'une unité dans la conception même du métier : autrement dit, ces professeurs ont dû en général attendre une première affectation pour confronter leurs propres idées sur l'enseignement avec celles de leurs congénères. Il est alors beaucoup plus difficile de s'accorder pour travailler ensemble et développer un esprit d'équipe.

Cette difficulté est accentuée par la variété du recrutement des professeurs, particulièrement en évidence dans les collèges. En effet, on trouve, pour assurer le même travail, des gens qui ont un niveau de diplôme allant du baccalauréat au doctorat universitaire et qui appartiennent à une multiplicité de corps différents.

Enfin, le système d'affectation, fondé sur des normes administratives strictes, s'il assure une certaine équité du mouvement, fabrique par la même occasion, au niveau des établissements, des accumulations d'enseignants originales, variées et parfois discordantes. C'est que l'accumulation n'obéit à aucun critère pédagogique et que ceux qui la composent n'ont eux-mêmes guère droit à la parole.

Ainsi est-on en droit d'estimer que le fait qu'une personne enseigne dans un établissement particulier est d'abord le fruit du hasard, que, par ailleurs, un établissement scolaire est un rassemblement d'individus *a priori* tout à fait différents et dont l'harmonie est loin d'être la caractéristique principale. (pp. 10-11)

De fait, les métiers du didactique apparaissent, hier comme aujourd'hui, tout à la fois *peu qualifiés* (au plan technique) et *surpersonnalisés* (dans leur exercice concret), l'inexistence de théories et de technologies didactiques professionnelles bien développées et diffusées se payant du surdéveloppement du mythe du don personnel, indicible et incommunicable, et, en pratique, du repliement sur des manières de faire individuellement construites et thésaurisées, et en conséquence fortement mais illusoirement surinvesties.

4.3. La recherche est, en principe, située au-dessus de l'enseignement – elle est, nous le verrons, une « chose ambivalente », qui peut s'ennoblir ou, en sens inverse, se trouver rabaissée (parfois à l'insu même de ceux qui s'y adonnent). Nous ne prendrons ici qu'un rapide exemple, celui de Nicolas Dominique Marie Janot de Stainville (1783-1828), polytechnicien de la promotion 1802, nommé dès 1810 répétiteur à l'École polytechnique (Verdier, 2010, p. 159). En 1815, alors que paraissent ses *Mélanges d'analyse algébrique et de géométrie*, son poste est supprimé. Il continue pourtant d'assumer ses fonctions avec le seul titre d'adjoint honoraire tout en s'efforçant de retrouver un emploi rémunérateur. Il sollicite à cette fin « son excellence le ministre d'État de l'intérieur », à qui il adresse une lettre non datée où l'on peut lire ceci (d'après Verdier, 2010, p. 161) :

Les malheurs de la révolution ayant détruit mon patrimoine, j'ai dû chercher toutes mes ressources dans mes talents. Je me suis voué constamment à l'étude des sciences et au pénible exercice de l'enseignement.

On voit ici se produire une double déchéance, si l'on peut dire. Issu d'une vieille famille aristocratique, mais ayant perdu tous ses biens sous la Révolution, Janot de Stainville ne peut plus vivre de ses rentes : premier abaissement, il doit donc travailler pour vivre. Il se tourne donc vers ce qui était traditionnellement une activité libre d'un certain nombre de membres de l'élite sociale : la recherche. Mais cela ne lui permet pas de gagner sa vie encore. Deuxième abaissement, il doit s'employer comme répétiteur à l'X, ce qui le contraint à se livrer au « pénible exercice de l'enseignement ». Dans son dictionnaire, à l'entrée « Répétiteur », Émile Littré écrit :

1° Celui qui répète des élèves, qui donne des répétitions. Répétiteur au lycée. Les particuliers qui tiendront seulement des écoliers pensionnaires.... étudiant actuellement en l'université.... qui les instruiront aux lettres ou par eux-mêmes ou par des maîtres et répétiteurs, Arrêt de la cour des aides, 30 déc. 1682.

Docteur en droit, maître ès arts, et répétiteur général des humanités, DANCOURT, la Gazette, SC. 10.

J'avais appris que le collège de Clermont, bien plus considérable que celui de Mauriac, faisait seconder ses régents par des répétiteurs d'études ; ce fut sur cet emploi que je fondai mon existence, MARMONTEL, Mém. I.

Adj. Maître répétiteur, nom qu'on donne, depuis quelques années, dans les lycées aux maîtres d'étude (voy. ÉTUDE).

2° Dans les hautes écoles de sciences, par exemple, à l'école polytechnique, on nomme répétiteurs des professeurs qui interrogent les élèves sur ce qui leur a été enseigné dans le cours principal.

Janot de Stainville était l'un des répétiteurs d'analyse et de mécanique de l'École polytechnique alors que Cauchy (1789-1857) y était (depuis 1815) *professeur* d'analyse et de mécanique. Le premier devra quitter son poste en 1821 du fait d'une santé mentale chancelante et mourra quelques années plus tard (1828) ; quant à Cauchy, il choisira l'exil en 1830, après la Révolution de juillet, pour des motifs tout à la fois politiques et religieux.

4.4. Parce que sa matière même est décriée, voire méprisée, la recherche en éducation sera elle-même tenue pour peu de chose. Sur ce point, nous examinerons quelques-unes des conclusions d'un ouvrage dû à l'historienne de l'éducation Ellen Condliffe Lagemann, livre intitulé significativement *An Elusive Science: The Troubling History of Education Research* (2000). Nous nous référerons ici, plus précisément, à la partie dévolue aux « Problems of Status, Reputation, and Isolation », dont nous découperons ci-après l'examen du texte en un certain nombre de sous-sections successives. Voici d'abord comment la quatrième de couverture présente l'ouvrage (pour les « mots difficiles », le lecteur pourra consulter le dictionnaire en ligne *Onelook dictionary*) :

Since its beginnings at the start of the twentieth century, educational scholarship has been a marginal field, criticized by public policy makers and relegated to the fringes of academe. *An Elusive Science* explains why, providing a critical history of the traditions, conflicts, and institutions that have shaped the study of education over the past century.

L'étude examinée concerne l'histoire de la recherche en éducation aux États-Unis. La conclusion centrale de l'enquête historique est que ce domaine de recherche a été, dès le début du XX^e siècle, un secteur marginal de la recherche, critiqué par les auteurs des politiques

publiques et relégué dans les marges du monde universitaire. Bien entendu, ce qui importe est de tenter de dégager ce que ces contraintes historiques ont imposé, et imposent peut-être toujours, à la recherche en éducation elle-même.

4.4.1. Le premier problème que pointe l'auteure est présenté ainsi :

The first problem has to do with the isolation of educational study from other branches of university scholarship as well as its relative remove from practice. Judging from the historical record, isolation within universities was in large measure a consequence of what historian Carl Kaestle has aptly described as the “awful reputation” of education research. Since the earliest days of university sponsorship, education research has been demeaned by scholars in other fields, ignored by practitioners, and alternatively spoofed and criticized by politicians, policy makers, and members of the public at large.

Ce paragraphe comporte deux parties. La première partie précise la difficulté à laquelle la recherche en éducation se heurte : elle serait coupée, d'un côté des autres domaines de la recherche universitaire – elle serait donc une partie isolée de l'université –, de l'autre de la « pratique », c'est-à-dire – pour ce qui nous concerne – des métiers du didactique. Cette première partie semble indiquer que, pour permettre à de la recherche en éducation de qualité d'exister, cette recherche doit entretenir des relations fortes *et* avec d'autres domaines de recherche, *et* avec le didactique – et, plus généralement, avec l'éducatif – lui-même. L'observation la plus commune montre que ces deux conditions *sine qua non* sont loin d'être partout réalisées, aujourd'hui encore, en France, dans les départements de sciences de l'éducation par exemple.

La deuxième partie du paragraphe propose une cause possible de ce double isolement de la recherche en éducation : son « abominable réputation » (*awful reputation*). Depuis ses débuts à l'université, précise l'auteure, la recherche en éducation a été (a) dévalorisée (*demeaned*) par les universitaires d'autres spécialités, (b) ignorée par les « praticiens » de l'éducation et (c) tantôt charriée (*spoofed*), tantôt critiquée par les responsables des politiques publiques comme par le grand public.

Soulignons un point clé : faire que se crée une situation de non-isolement de la recherche en éducation ne doit pas nécessairement être recherché dans une action prioritaire pour faire que se modifie les attitudes préjudiciables à la vie de relation de cette recherche. On peut en effet

penser qu'une stratégie plus efficace pourrait bien consister dans le fait de tenter de rompre directement l'isolement actuel, sans passer par des préalables qui, au contraire, doivent être regardées comme des conséquences simplement espérées.

4.4.2. Venons-en au second paragraphe :

In considerable measure, gender was the initial cause for the low status of educational study. Associated with teaching, which came to be seen as “woman’s work” relatively early in the nineteenth century, the very term *education research* seemed to be an oxymoron to many notable university leaders. Men like Harvard President Charles W. Eliot prized good teaching, but were not at all sanguine that education could benefit from systematic investigation. Not coincidentally, Eliot was also unwilling to admit women to Harvard College, the result being the opening of the Harvard Annex (later Radcliffe College) in 1879, which, like the Harvard Graduate School of Education once it was organized in 1920, was located conveniently near, but outside the inner precincts of the university. Doubtless the low social rank of education research was further reinforced by issues of social class. Because it did not require a great deal of advanced training for entry, teaching was a profession that was relatively accessible to people of working-class or immigrant backgrounds. Associated with teaching, scholars of education were not generally presumed to have the social cachet attributed to lawyers and doctors.

L’auteur, cette fois, cherche une cause de la cause ; et elle croit trouver cette cause première dans le *genre* (le sexe) : « In considerable measure, gender was the initial cause for the low status of educational study. » Le statut inférieur de la recherche en éducation serait causé par le statut inférieur des femmes *et* par le fait que celles-ci forment les gros bataillons des chercheurs en éducation. La même cause vaudrait à l’*enseignement* un statut des plus inférieurs, dès lors qu’il a été regardé, assez précocement au XIX^e siècle, comme « du travail de femme » (*woman’s work*).

L’explication de Ellen C. Lageman paraît cependant discutable : les métiers du didactique furent durant des millénaires des métiers d’hommes et ils n’en étaient pas moins méprisés ! On peut donc lire « à l’envers » le réseau de causalités évoqué par l’auteure : la péjoration du didactique et (donc) des métiers du didactique doit être posée comme première (pour des raisons profondes, à explorer) et c’est elle qui attire les personnes les plus mal considérées – esclaves, « pauvres hères », sans-emploi, etc. Bien entendu, le fait que des personnes appartenant à des catégories péjorées – notamment les femmes, dans les États-Unis du XIX^e

siècle – exercent ces métiers confortent la péjoration de métiers – de boulots – qui, à l’origine, étaient apparus à ces personnes comme « faits pour elles ». L’identification des métiers du didactique à des métiers de femmes scelle, bien entendu, un état historique de ces métiers (et du statut des femmes).

Ce qui importe surtout, dans le passage précédent, est l’affirmation que « l’expression même de *recherche en éducation* apparaissait comme un oxymore pour bien des leaders universitaires importants ». (Un oxymore est un rapprochement de deux termes contradictoires, une contradiction dans les termes, une forme d’antilogie.) L’exemple de Charles W. Eliot, président de Harvard, qui vient d’abord conforter l’argument mettant en avant le statut des femmes, nous rappelle que tout part du statut minoré de l’enseignement : il prisait l’enseignement de qualité, dit l’auteure, mais n’était pas enthousiasmé par l’idée que la recherche puisse améliorer l’enseignement – la recherche en ces domaines est inutile parce que sans emprise et sans effets. (L’*Online Etymology Dictionary* précise que l’adjectif *sanguine* utilisé par l’auteure s’est mis à signifier vers 1500 « cheerful, hopeful, confident », car « these qualities were thought in medieval physiology to spring from an excess of blood as one of the four humors ».) Bien entendu, la mise à l’écart solidaire, à Harvard, et des étudiantes (dans ce qui devait devenir le Radcliffe College), et de la Harvard Graduate School of Education (où l’auteure, E. C. Lageman, a enseigné et dont elle a été la doyenne), est significative d’une volonté de contenir dans les marges du monde « normal » – celui des hommes et des disciplines « sérieuses » – tout à la fois les femmes et la recherche en éducation.

La dernière partie du paragraphe s’éloigne justement d’une explication « par les femmes » pour s’arrêter sur une explication plus large, dont « les femmes » sont une modalité particulière : parce qu’ils sont associés à l’enseignement et que l’enseignement appartient aux « choses basses », les chercheurs en éducation n’ont pas le « cachet social » reconnu aux monde du droit ou de la médecine : la recherche en éducation est une recherche « inférieure ».

4.4.3. Passons au paragraphe suivant :

If matters of gender and social class helped to define education research as a low-status pursuit, so did the fact that it was intended to be an applied science. Even though most observers of scientific work would now question whether there are significant and sharp differences between “pure” and “applied” study, the fact remains that more theoretical, less hands-on fields of

investigation have tended to carry greater prestige. Thus, physics may benefit from the practical inventions of engineers, but in any ranking of professional status, physics would exceed its more applied first cousin. In law, the law schools that have been most oriented toward theory and least oriented toward questions related to daily professional practice have tended to achieve the highest standing. Given this historical bias, scholarship in education, which has generally been intended to make teaching and school administration more effective, has suffered from a discount common among applied fields of investigation.

L’auteure explicite ici un autre facteur : la recherche en éducation se situerait, pour le commun des commentateurs, davantage du côté des sciences « appliquées » (*applied*) que des sciences « pures » ; or le prestige d’un domaine de recherche serait d’autant plus élevé que ce domaine apparaît comme plus « abstrait » (ainsi en va-t-il, note-t-elle, avec le contraste entre physique et ingénierie). Domaine de recherche « appliqué », dans la mesure où elle se donne pour but de rendre l’enseignement scolaire et son administration plus efficaces, la recherche en éducation aurait pour cela une image peu flatteuse de « science de praticiens » – que, au reste, les praticiens rejettent.

4.4.4. Ellen C. Lagemann en arrive alors à l’examen des effets possibles du statut péjoré – résultant lui-même de divers « facteurs » – de la recherche en éducation sur certaines des conditions affectant la qualité même de cette recherche :

Clearly deriving from multiple sources, the low status that has plagued educational scholarship from the beginning has had several discernable and unfortunate effects, the most important having been the distance it has encouraged between educationists and their peers in the arts and sciences and other professional fields. Because the early educationists preferred to trumpet progress and quite understandably tried not to record the scorn they had endured, few wrote directly about the insults and innuendoes to which they had been subjected. That notwithstanding, one can recapture the shunning in fleeting statements. Henry Johnson’s recollections of the spoofing he encountered when he ventured across 120th Street from Teachers College to the Columbia University Department of History were one example. Beyond that, one can observe the isolation of education institutionally. Although there may be logical historical justifications for the situation, it is nonetheless telling that the American Educational Research Association (AERA) did not become a constituent organization of the Social Science Research Council either when that organization was founded in 1923 or thereafter. In multiple ways, a lack of regular and easy channels for conversing with scholars in other fields, sharing

methods, and discussing problems has constrained the development of education research. That educationists continued to churn out school surveys long after sociologists and anthropologists had begun to develop more nuanced approaches to community study demonstrates the point. What is more, the important insights into education to emanate from the kind of cross-discipline, cross-field collaboration that went on under the auspices of the University of Chicago Committee on Human Development demonstrate the obverse. This was, of course, the group in which W. Lloyd Warner applied his ideas about social class and mobility to education and Allison Davis began his research into the cultural biases of so-called aptitude testing. More recently, educational study has clearly benefited from close relationships with anthropology. This has been evident in the significant knowledge gained from qualitative or interpretative research about teachers, teaching, classroom discourse, and cultural barriers to learning.

Le premier effet est celui de l'isolement, de la distance entre la (petite) communauté des chercheurs en éducation et l'ensemble des chercheurs en sciences sociales par exemple. Une stratégie semble avoir été pour les *educationists* tel Henry Johnson (1867-1953), pionnier en matière de recherche sur l'enseignement de l'histoire, (1) d'ignorer le mépris, les moqueries, voire les insultes dont ils étaient la cible ; et (2) d'ignorer la part d'échecs inévitable en toute recherche pour mettre en avant leurs avancées en matière éducative. Cette situation, vécue individuellement, n'était pas moins réelle au niveau collectif : jamais, ainsi, depuis sa création en 1923, l'association américaine de recherche en éducation (AERA) ne sera acceptée comme organisation constitutive du Conseil de la recherche en sciences sociales (SSRC). Tout au contraire, si l'on peut dire, les sciences sociales ont en quelque sorte empiété sans vergogne sur ce que les *educationists* regardaient comme leur domaine de recherche, et cela, en vérité, en conduisant des études relevant en principe de la sociologie – pour William Lloyd Warner (1898-1970) – ou de l'anthropologie sociale – pour Allison Davis (1902-1983) – *appliquées* à la chose éducative. (Allison Davis est présenté, par exemple dans la notice qui lui est consacrée dans *Wikipedia*, comme anthropologue et *educator*, et non bien sûr comme *educationist*.) Mieux (ou pire) encore, les sciences de l'éducation ont tiré profit de l'apport théorique et méthodologique des sciences sociales, et notamment de l'anthropologie, dans leur domaine même, où elles étaient demeurées enfermées de façon largement improductive. (On notera ici – nous y reviendrons – l'opposition qu'esquisse l'auteure entre les grandes enquêtes empiriques – les *surveys* – traditionnellement privilégiées par la recherche en éducation et les approches plus « subtiles » (*nuanced*) de type qualitatif et interprétatif.)

4.4.5. Voici l'avant-dernier paragraphe du texte que nous avons suivi sous le titre « Problems of Status, Reputation, and Isolation » :

Taking many forms, the isolation of educationists could be seen quite differently depending on one's perspective. Indeed, from the perspective of practitioners, especially teachers, location in the university could be read as providing scholars with a powerful shield from the diurnal problems of practice. Ironically, in fact, although education was seen within the university as a low-status field, on the outside it could be said to have provided scholars with superior status to that of teachers. What is more, suffering disdain from colleagues within the university, scholars of education may have been more inclined to assume superior attitudes toward their colleagues in the field than would otherwise have been the case.

L'auteur aborde ici les effets de la constitution d'une corporation d'*educationists* – regardés de haut par leurs « pairs » universitaires – sur les rapports de ces spécialistes avec « le terrain », avec les « praticiens » (*practitioners*) et, en particulier, avec les professeurs. Le seul fait d'être « logés » à l'université peut induire chez eux une prise de distance avec les difficultés du terrain, avec ce que l'auteur nomme « les problèmes journaliers de la pratique » (*the diurnal problems of practice*), l'emploi de l'adjectif *diurnal* (diurne) faisant *peut-être*



écho, aussi, à l'image employée par Hegel, dans la préface à sa *Philosophie du droit* (1820), de la « chouette de Minerve » (ci-contre), symbole de la sagesse de la déesse Minerve, qui ne prend son envol qu'à la nuit, *après* que l'événement à expliquer s'est produit (voir par exemple l'article « Glaucus (owl) » de *Wikipedia*).

Il est clair qu'une telle attitude a toutes chances de troubler de façon mal maîtrisée le rapport du chercheur à son « objet d'étude ». (Le chercheur spécialiste du génome, par exemple, n'a aucune raison de se regarder comme supérieur ou inférieur à son objet d'étude.)

4.4.6. Le tout dernier paragraphe souligne des comportements de chercheurs qui paraissent liés à – voire engendrés par – la hiérarchie contingente entre chercheurs et praticiens :

Like the segmented relationship that emerged between medical doctors and nurses, the relationship that grew up between scholars and practitioners of education was gender related and hierarchical. As a scientist formulating the laws of learning, Edward L. Thorndike felt

confident that he could enhance a teacher's performance without ever watching that teacher teach. Buoyed by a false sense of superiority and by then-common assumptions about linear relationships between theory and practice, scholars like Thorndike failed to heed the old adage that doctors could not cure if nurses did not care. Apparently, scholars like Thorndike did not appreciate what nurses have long understood about the professional status of doctors. They did not understand the degree to which medical success was dependent upon the knowledge, skill, and service provided by nurses. In consequence, they failed to realize that a science of education formulated apart from its elaboration in practice could not be powerful either as a set of systematic and criticized understandings and insights—a science—or as an instrument for changing behavior. Taking many forms, isolation resulting from low status has significantly weakened educational scholarship.

Edward Lee Thorndike (1874-1949) fut un notable de la psychologie américaine. Il est utile de savoir, ici, comme le précise d'ailleurs l'article qui lui est consacré par l'encyclopédie *Wikipedia*, qu'il passa « nearly his entire career at Teachers College, Columbia University ». Ainsi que le souligne l'auteure que nous suivons, il pensait pouvoir améliorer la qualité de l'enseignement sans jamais se préoccuper de l'activité réelle des professeurs (et, ajoutons-le, des élèves).

Plus largement, Ellen C. Lagemann conclut sur les effets délétères sur la recherche en éducation qui lui semblent liés au statut déprimé de ce domaine de recherche et, plus encore peut-être – ajoutons-le –, à la péjoration immémoriale de la chose éducative. En vérité, l'isolement des chercheurs en éducation apparaît ainsi double : vers le « haut », si l'on peut dire, avec leur exclusion de la communauté universitaire des sciences sociales, vers le « bas », avec l'attitude hautaine de chercheurs qui ne veulent pas même connaître ce qu'il s'agirait d'aider à changer – un peu comme un médecin qui n'envisagerait pas d'examiner le malade qu'il prétend pourtant soigner d'une science sûre. Cela nous conduira, dans la leçon suivante, à examiner les conditions de possibilité d'un rapport théorique et pratique adéquat du chercheur à la matière à étudier – pour nous, au didactique relatif au mathématique.

Leçon 3. Praxéologies de recherche I

1. Prolégomènes

1.1. On a vu que certaines conditions de possibilité d'une recherche en didactique des mathématiques semblent être satisfaites : l'existence du mathématicien, l'existence du didactique, notamment relatif au mathématicien, sont de telles conditions, même si le didactique est, d'une façon générale, soumis à un processus immémorial de refoulement, donc de très large mise en invisibilité, avec péjoration culturelle de ce qui cependant s'en laisse voir. On a noté aussi que l'idée même de recherche, la réalité de l'existence de chercheurs, leur visibilité et leur assomption sociale et culturelle semblaient, elles, plus problématiques, et supposaient un combat pluriséculaire, qui, bien que dans des formes renouvelées, ne cesse pas.

1.2. Dans ce qui suit, nous envisagerons le scénario suivant : on imagine une personne notée ξ – le chercheur ou l'apprenti chercheur en didactique des mathématiques – et on explorera alors les conditions et contraintes d'un engagement de ξ dans une activité qui *pourrait* être dite de « recherche en didactique des mathématiques ». D'une manière générale, pour entrer en contact avec un domaine d'activité, il faut en passer par l'assujettissement à – par le fait de se faire le sujet de – une ou plusieurs institutions *ad hoc* : un individu est fort rarement à lui tout seul « toute une institution ». Ici, on supposera que ξ s'assujettit à une équipe, un groupe, un collectif – si peu structuré soit-il – supposé être de « recherche en didactique des mathématiques ». Cette institution, qu'on notera Ξ , pourra assumer des visages bien différents. On envisagera en outre que Ξ « vive » dans le voisinage d'un regroupement plus vaste, qu'on notera Ξ^* (par exemple une communauté scientifique au niveau national), celui-ci à son tour se situant par rapport à un regroupement Ξ^{**} (situé par exemple au niveau international), etc. Ce qu'il importe de souligner à ce stade est que les liens de ξ avec Ξ , Ξ^* ou Ξ^{**} lui permettent de « bénéficier » de conditions C_ξ mais lui imposent en même temps des contraintes K_ξ qui détermineront au moins en partie l'activité de ξ en matière de recherche en didactique des mathématiques, si une telle activité existe.

1.3. Imaginons un instant que le chercheur ξ ait commencé par « suivre des cours de didactique des mathématiques », par exemple dans le cadre d'un master... En ce cas *comme en tout autre*, on pourra entendre dans la noosphère correspondante des jugements erratiques

ou massifs tels ceux-ci : « Cette formation, ce n'est pas de la didactique ! » ; « Si c'est de la didactique, en tout cas ça n'est pas de la didactique des mathématiques ! », et cela, répétons-le, de la même façon que d'aucuns pourraient brocarder un cours supposé de « littérature comparée », par exemple, en disant que tout comparatisme en est absent et qu'on n'y traite pas davantage de littérature ! Même si l'on perçoit derrière de tels décrets une attitude polémique, il s'agit là d'un questionnement *auquel on n'échappe pas* et avec lequel il nous faudra vivre, ici, indéfiniment. De la même façon, tel ou tel observateur, qui en général est aussi un acteur – parfois perfide – de Ξ , Ξ^* ou Ξ^{**} , pourra décréter que tel travail présenté comme un travail « recherche » *n'est en fait pas de la recherche !* Tout cela est en effet quasi quotidien – quoique non public en général – dans la vie d'une communauté de recherche un tant soit peu étendue.

1.4. Pour aborder ces problèmes et bien d'autres encore, nous devons disposer d'un outillage praxéologique qui se complètera au fur et à mesure. Nous aurons en perspective l'élaboration solidaire

- d'un modèle de *l'équipement praxéologique institutionnel* \mathcal{P} de qui occupe une *position* ρ de chercheur en didactique des mathématiques en telle ou telle institution de la société (plus rigoureusement : de telle ou telle société) ;
- d'un modèle du *rapport institutionnel* \mathcal{R} à la recherche en didactique des mathématiques pour une personne occupant ladite position ρ .

Bien entendu, on se réfèrera aussi à la modélisation de l'équipement praxéologique *personnel* de tel chercheur en didactique des mathématiques ξ et à la modélisation de son *rapport personnel* à la recherche en didactique des mathématiques. L'activité concrète de recherche en didactique des mathématiques sera regardée comme un *déploiement* du rapport (institutionnel ou personnel) à la recherche en didactique des mathématiques résultant de la *mise en œuvre* de l'équipement praxéologique (personnel ou institutionnel), sous des contraintes et dans des conditions déterminées.

1.5. On mettra d'abord dans le modèle du rapport \mathcal{R} le fait qu'un sujet ξ en position ρ *se pose une question* Q – une question « de recherche », donc ; et qu'il mette en œuvre à son propos une *dialectique de l'étude et de la recherche*, où l'étude de R^\diamond (et d'autres œuvres) est un moyen de la recherche, laquelle vise à élaborer R^\heartsuit . En cela, le chercheur ξ est un personnage *herbartien*, qui doit s'efforcer – seul ou au sein d'un collectif Ξ – de « fabriquer » une réponse R^\heartsuit à la question Q . Plus précisément, ξ devra pour cela réaliser les cinq « gestes de

base » de l'étude d'une question Q , c'est-à-dire devra (1) *observer* les réponses R^\diamond déposées dans la « littérature » écrite et orale, (2) *analyser*, au double plan expérimental et théorique, ces réponses R^\diamond , (3) *évaluer* ces mêmes réponses R^\diamond (c'est-à-dire estimer la valeur qu'elles pourraient avoir pour sa recherche), (4) *développer* sa réponse propre R^\heartsuit et (5) *diffuser et défendre* la réponse R^\heartsuit ainsi produite. S'agissant de la fabrication de R^\heartsuit et de sa diffusion-défense écrite, nous distinguerons ci-après les *notes de travail* de ξ (par exemple dans un carnet ou un cahier de bord), les *écrits* de ξ (qui sont des exposés, « privés » ou « publics », rédigés sur tel ou tel aspect d'un travail de recherche) et les *publications* de ξ (ou de $\Xi \ni \xi$), quel qu'en soit le support.

1.6. Le rapport \mathcal{R} comporte cette exigence que la réponse R^\heartsuit à une question de recherche Q soit *vraie* – ou, du moins, soit une conjecture que la *dialectique des médias et des milieux* n'aura pas permis de rejeter. Le mot *vérité* vient du latin *verus* « vrai ». L'anglais possède le terme *verity* (classé généralement comme littéraire), dont un dictionnaire donne les exemples d'emploi suivants : *to challenge the verity of something, the eternal verities, these things are verities, unquestionable verities*. L'idée de vérité est liée à l'idée de *réalité*. Le même dictionnaire donne ainsi pour traduction de *these things are verities* « ces choses sont vraies, ce sont là des faits » ; et, pour *unquestionable verities*, il propose « faits, vérités indiscutables ». Mais on sait aussi que, en anglais courant, « vérité » se traduit par *truth* ; et il est intéressant de s'arrêter sur ce vocable. Le *Onelook dictionary* propose (comme venant du dictionnaire WordNet) la notice suivante relative à *true* :

- ▶ **noun**: proper alignment; the property possessed by something that is in correct or proper alignment (“*Out of true*”)
- ▶ **verb**: make level, square, balanced, or concentric (“*True up the cylinder of an engine*”)
- ▶ **adjective**: consistent with fact or reality; not false (“*The story is true*”)
- ▶ **adjective**: conforming to definitive criteria (“*The horseshoe crab is not a true crab*”)
- ▶ **adjective**: accurately placed or thrown (“*His aim was true*”)
- ▶ **adjective**: reliable as a basis for action (“*A true prophesy*”)
- ▶ **adjective**: accurately fitted; level (“*The window frame isn't quite true*”)
- ▶ **adjective**: devoted (sometimes fanatically) to a cause or concept or truth (“*True believers bonded together against all who disagreed with them*”)
- ▶ **adjective**: expressing or given to expressing the truth (“*A true statement*”)
- ▶ **adjective**: not synthetic or spurious; of real or natural origin (“*True gold*”)
- ▶ **adjective**: in tune; accurate in pitch (“*A true note*”)

- ▶ **adverb:** as acknowledged (“*True, she is the smartest in her class*”)

Certains des sens indiqués sont communs à l’anglais et au français ; d’autres non, tels les suivants :

- ▶ **noun:** proper alignment; the property possessed by something that is in correct or proper alignment (“*Out of true*”)
- ▶ **verb:** make level, square, balanced, or concentric (“*True up the cylinder of an engine*”)
- ▶ **adjective:** accurately placed or thrown (“*His aim was true*”)
- ▶ **adjective:** accurately fitted; level (“*The window frame isn’t quite true*”)
- ▶ **adjective:** in tune; accurate in pitch (“*A true note*”)

Un ouvrage intitulé *Word Wise* et sous-titré *A dictionary of English idioms* (Clark, 1988, p. 559) donne de l’expression *Out of true* l’exemple suivant : « It annoys me to see a row of pictures hanging on a wall with one or two of them out of true. » On a là l’idée d’aplomb, d’équilibre, d’accord, d’équerre, etc. Pour expliciter le premier sens de l’adjectif *true* dans la même sous-liste, mentionnons aussi cet extrait de l’entrée *true* dans l’*American Heritage Dictionary of the English Language* (en ligne) : « Unswervingly; exactly: *The archer aimed true.* » Le *Dictionary of word origins* nous informe alors de ceci :

true [OE] The underlying etymological meaning of *true* is ‘faithful, steadfast, firm’; ‘in accordance with the facts’ is a secondary development. It goes back to the prehistoric Germanic base **treww-*, which also produced German *treue* and Dutch *trouw* ‘faithful’ and the English noun *truce*, and it has been speculated that it may ultimately have links with the Indo-European base **dru-* ‘wood, tree’ (source of English *tree*), the semantic link being the firmness or steadfastness of oaks and suchlike trees. *Truth* [OE] comes from the same source, as do its derivative *betroth* [14], its now archaic variant *troth* [16], the equally dated *trou* [OE], and probably also *trust* and *tryst*.

- ▶ betroth, troth, trou, truce, trust, truth, tryst

Les mots *betroth* (donner [sa fille] en mariage), *truce* (armistice), *trust* (confiance), *tryst* (rendez-vous [amoureux]) expriment tous un engagement, une promesse (*a pledge*). On retiendra surtout de là que la conformité aux faits, à la réalité ne vient – vers 1200, précise le *Online etymology dictionary* – qu’après un premier sens, la propriété d’être fidèle (*faithful*), ferme (*firm*), stable, inébranlable, la capacité à ne pas broncher (*steadfast*). Le lien fait ici

avec le caractère inébranlable des chênes (*oaks*) est particulièrement suggestif ; voici ce qu'en dit (à l'entrée *true*, toujours) l'*American Heritage Dictionary of the English Language* :

The words *true* and *tree* are joined at the root, etymologically speaking. In Old English, the words looked and sounded much more alike than they do now: "tree" was *trēow* and "true" was *trēowe*. The first of these comes from the Germanic noun **trewam*; the second, from the adjective **trewaz*. Both these Germanic words ultimately go back to an Indo-European root **deru-* or **dreu-*, appearing in derivatives referring to wood and, by extension, firmness. Truth may be thought of as something firm; so too can certain bonds between people, like *trust*, another derivative of the same root.

Retenons de tout cela que la vérité est un « quelque chose » qui est d'aplomb, bien calé, une flèche qui ne rate pas sa cible ; et aussi quelque chose de solide, de ferme, de difficile à ébranler. On retrouve là les attributs de ce qui résiste – ou plutôt de ce qui a *jusqu'ici* résisté – aux assauts de la dialectique des médias et des milieux.

1.7. Pourquoi insister sur ce truisme apparent que la réponse R^{\heartsuit} visée par la recherche doit tendre vers la vérité ? En principe, en effet, un chercheur est par définition un *chercheur de vérité(s)*. Mais de multiples obstacles s'élèvent sur le chemin de la vérité. L'un d'eux concerne moins les *chercheurs* que les sages qui, au sein de la noosphère, croient avoir tôt trouvé la vérité, d'un coup d'un seul, et passent alors le reste de leur âge à juger chacun, et les chercheurs en particulier, à leur aune. Cela n'est là que l'une des multiples contraintes de tous niveaux pesant en tous lieux sur l'activité du chercheur qui risquent pourtant de le transformer, *volens nolens*, en un chercheur de reconnaissance et de *notoriété*. Au lieu de se demander si ce qu'il avance est *juste, exact*, d'équerre avec le réel, il se demandera si « c'est bien », si « cela passe bien », si cela « le fait connaître » (avantageusement), etc. Le passage de la recherche de la vérité à celle de la notoriété peut se produire très tôt dans une carrière de « chercheur » : la notoriété future est d'abord souci de plaire, ou déjà de ne pas déplaire, voire de complaire, *d'être conforme*. Plus tard, le souci de la notoriété se manifestera chez quelques-uns qui se pensent « arrivés » par le privilège donné *par eux* à ce qu'ils « croient », à ce qu'ils « pensent », etc., sur la vérité à rechercher. Le système des « milieux » que doit interroger un chercheur – dans le cadre de la dialectique des médias et des milieux – tend alors à se réduire à une instance unique : lui-même.

1.8. Il y a la notoriété individuelle – celle de ξ – et il y a la notoriété collective – celle de Ξ , de Ξ^* ou de Ξ^{**} . L’objet idéal de l’activité collective de Ξ , de Ξ^* ou de Ξ^{**} et de leurs membres est, certes, la recherche de la vérité. Mais parmi les moyens de la notoriété figurent classiquement le fait de transformer les collectifs Ξ , de Ξ^* ou de Ξ^{**} en ce que Henry David Thoreau (1817-1862) a appelé une « société d’admiration mutuelle » (*mutual admiration society*). Une telle situation engendre une contrainte que l’on peut d’ores et déjà noter : l’obligation de citer tel ou tel auteur dans une publication rendant compte d’une recherche qui ne s’est nullement appuyée sur les publications (ou les écrits, ou les travaux) de cet auteur. Dans le principe, la liste des références figurant à la fin d’un article doit se rapporter strictement aux réponses R^\diamond et aux œuvres O qui apparaissent dans le schéma herbartien développé qui résume la recherche :

$$[S(X; Y; Q) \rightsquigarrow \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, O_{n+2}, \dots, O_m \}] \rightsquigarrow R^\heartsuit.$$

Les pressions exercées par les revues scientifiques pour que les articles qu’elles publient citent leurs auteurs « favoris » – ce qui fait monter l’*impact factor* de la revue (voir l’article « Facteur d’impact » de *Wikipédia* par exemple) – sont bien connues. Elles ont été récemment mises en évidence par deux chercheurs américains, Allen W. Wilhite and Eric A. Fong, dans un article rendant compte d’une enquête auprès de chercheurs en sciences sociales, publié dans la revue *Science* et intitulé « Coercive Citation in Academic Publishing ». Ces auteurs écrivent dans leur conclusion :

Although most of our respondents condemn coercion, less than 7% thought an author would refuse to add superfluous citations if coerced to do so. Thus, an author can become both a victim and a conspirator in the self-citation game; they are rewarded for acquiescing because their manuscript is published, and their gratuitous citations help to boost the impact factor of the journal in which they published.

Ils rappellent à cet égard le principe directeur, qui semble pourtant n’être guère respecté :

The American Psychological Association Publication Manual states, “Cite the work of those individuals whose ideas, theories, or research *have directly influenced your work*” (emphasis added)...

(La citation de l’*American Psychological Association Publication Manual* se trouve page 169 de l’édition de 2010.) Nous verrons (en travaux dirigés) que, lorsqu’on s’efforce de vérifier si

ce principe – ne citer que les auteurs qui, en quelque façon, ont influencé directement la recherche présentée – est bien respecté, on tombe généralement sur des surprises. D'une manière plus générale, nous serons attentifs aux diverses formes d'*emprises*, de domination intellectuelle qui, comme autant de filets lancés sur lui pour le subjuguier, menacent la liberté scientifique du chercheur.

1.9. On a déjà évoqué (dans la leçon 1) la notion de *rupture épistémologique*, en reprenant ainsi une expression classique introduite autrefois par l'épistémologue Gaston Bachelard (1884-1962). Nous lui substituerons ici une notion plus large – qui, donc, la contient –, celle de *rupture praxéologique*. L'une des sources de nombre de difficultés qui assaillent le chercheur en didactique est en effet son rapport ambigu à la figure du professeur ; ou, pour être plus précis, son rapport au rapport du professeur à une foule d'objets. Plus précisément, on s'arrêtera un instant ici sur la question de l'*évaluation par les pairs*, qu'on nomme en anglais *peer review* et que l'article de même nom de *Wikipédia* présent en ces termes :

Dans les disciplines scientifiques, l'*évaluation par les pairs* désigne l'activité collective des chercheurs qui jaugent de façon critique les travaux d'autres chercheurs (leurs « pairs »). Ces évaluations peuvent porter sur une recherche précise soumise pour publication dans une revue scientifique ou destinée à être présentée à une conférence mais elles peuvent aussi couvrir l'ensemble des travaux du chercheur ou du groupe de chercheurs évalués, notamment lors du recrutement d'un candidat à un poste ou lors de l'évaluation de projets de recherche par des institutions publiques (comme le CNRS) ou privées (comme une fondation). Pour les revues scientifiques, l'évaluation par les pairs est menée par des **comités de lecture** qui décident si le compte-rendu d'un travail de recherche soumis pour publication est acceptable ou non.

Complétons cela par un extrait de l'article correspondant en anglais, intitulé « Peer review » :

Scholarly peer review (also known as *refereeing*) is the process of subjecting an author's scholarly work, research, or ideas to the scrutiny of others who are experts in the same field, before a paper describing this work is published in a journal. The work may be accepted, considered acceptable with revisions, or rejected. Peer review requires a community of experts in a given (and often narrowly defined) field, who are qualified and able to perform impartial review. Impartial review, especially of work in less narrowly defined or inter-disciplinary fields, may be difficult to accomplish; and the significance (good or bad) of an idea may never be widely appreciated among its contemporaries. Although generally considered essential to

academic quality, and used in most important scientific publications, peer review has been criticized as ineffective, slow, and misunderstood (also see anonymous peer review and open peer review).

Le même article précise encore :

This process encourages authors to meet the accepted standards of their discipline and prevents the dissemination of irrelevant findings, unwarranted claims, unacceptable interpretations, and personal views. Publications that have not undergone peer review are likely to be regarded with suspicion by scholars and professionals.

En d'autres termes, le *peer reviewing* a pour ambition d'inciter les chercheurs à poursuivre la vérité, et non la seule notoriété achetée au prix d'entorses à la vérité. Mais outre que c'est alors que l'on voit se produire le phénomène, évoqué plus haut, d'incitation « coercitive » et intéressée à la citation sur commande, un autre phénomène remarquable se produit. Fréquemment – et en tout cas trop fréquemment –, en effet, les chercheurs réputés « experts » (qui, souvent, ne le sont pas), en particulier dans une communauté scientifique pauvre en ressources humaines, se comportent non pas en *pairs*, mais en caricatures de professeurs tançant – et, parfois, insultant – les « élèves » que deviennent à leurs yeux les auteurs des articles soumis à leur jugement. Bien entendu, il existerait une solution à ce problème : remplacer l'*anonymous peer review* ou *blind review*, où les auteurs ne connaissent pas l'identité de leurs juges – les « lecteurs » (ou *referees* en anglais) – et où ces *referees* sont censés ne pas connaître l'identité des auteurs qu'ils jugent, par l'*open peer review*, où tout est « en clair ». Mais il s'agit là d'une pratique qui est encore loin de triompher ! (Sur les diverses variantes possibles de l'évaluation par les pairs, voir l'article « Peer review » de *Wikipedia* ou encore les pages 225 à 228 du *Publication Manual* de l'American Psychological Association.)

1.10. Les observations précédentes appellent une mise au point. D'une façon générale, un chercheur en didactique, ξ , qui est souvent un professeur ou un ancien professeur ou s'en trouve proche, doit construire aux objets de son activité de chercheur des rapports propres, *sui generis*. Or, bien souvent, faute d'un travail collectif et individuel suffisant dans Ξ , Ξ^* ou Ξ^{**} , ξ conserve, en quelque sorte par défaut, le rapport personnel qui s'était construit dans l'exercice de son activité professorale et qui est souvent le rapport commun – et dominant – parmi les gens de métier – les professeurs. Deux aspects sont alors à souligner. Tout d'abord,

le rapport professoral à tel ou tel objet, que les chercheurs peuvent avoir à *étudier, analyser, expliquer*, n'a pas vocation à constituer le « bon » rapport d'un *chercheur en didactique* à cet objet, même s'il apparaît momentanément optimal dans les conditions et sous les contraintes où opèrent généralement les professeurs. Ensuite, ce rapport professoral n'est par principe pas figé pour l'éternité mais est au contraire appelé à évoluer du fait de l'évolution des conditions et contraintes sous lesquelles il s'est formé. Enfin, les résultats des travaux de recherche en didactique eux-mêmes peuvent, à terme, créer des conditions ou faire évoluer des contraintes qui participeront, avec d'autres forces sociales, à cette évolution même, et cela de façon spontanée ou délibérée (dans le cas notamment de travaux d'ingénierie de la formation des professeurs).

2. Problématiques : « le(s) mathématique(s) »

2.1. L'enquête sur les fondements de la recherche en didactique des mathématiques conduit à s'interroger sur les conditions de possibilité d'une *recherche* sur le *didactique* relatif aux *mathématiques*. Cela suppose que l'on s'interroge en particulier sur « le mathématique » et sur « les mathématiques ». Nous allons voir que, à l'instar *du didactique et de la recherche* (aspects sur lesquels nous viendrons plus tard), *le mathématique* est une réalité elle-même problématique.

2.2. Un premier aspect de la problématique des mathématiques tient d'abord à la difficulté de définir ce qui relèverait « des mathématiques » et ce qui n'en relèverait pas. En vérité, la ligne de démarcation « officielle » s'est beaucoup déplacée au fil du temps. « Ça n'est pas des mathématiques ! » est un cri du cœur qu'on peut ainsi entendre venant d'un professeur de mathématiques, par exemple à propos de ce qu'il ne connaît pas et qu'il déclarerait se refuser à enseigner (parce que, selon lui, cela n'entrerait pas dans son domaine de spécialité, « les mathématiques »). On pourrait l'entendre aussi de la part d'un professeur de physique, voire d'un professeur de biologie, à propos par exemple de ce qui fonde telle ou telle conclusion « physique » ou « biologique ». Il se trouve pourtant que les frontières du champ des mathématiques ont historiquement beaucoup évolué. Donnons un premier exemple. Dans la notice de *Wikipedia* qui lui est consacrée sous le titre « William Emerson (mathematician) », celui chez qui l'on trouve, semble-t-il, la première occurrence du signe de proportionnalité \propto (voir le TD 1) apparaît comme comptant parmi ses œuvres de mathématicien les titres suivants :

- *The Doctrine of Fluxions* (1748)
- *The Projection of the Sphere, Orthographic, Stereographic and Gnomical* (1749)
- *The Elements of Trigonometry* (1749)
- *The Principles of Mechanics* (1754)
- *A Treatise of Navigation* (1755)
- *A Treatise of Algebra*, in two books (1765)
- *The Arithmetic of Infinities, and the Differential Method, illustrated by Examples* (1767)
- *Mechanics, or the Doctrine of Motion* (1769)
- *The Elements of Optics*, in four books (1768)
- *A System of Astronomy* (1769)
- *The Laws of Centripetal and Centrifugal Force* (1769)
- *The Mathematical Principles of Geography* (1770)
- *Tracts* (1770)
- *Cyclomathesis, or an Easy Introduction to the several branches of the Mathematics* (1770), in ten volumes
- *A Short Comment on Sir Isaac Newton's Principia; to which is added, A Defence of Sir Isaac against the objections that have been made to several parts of his works* (1770)

Le professeur de mathématiques d'aujourd'hui sera sans doute surpris de voir des ouvrages de mécanique, de navigation, d'optique ou de géographie, notamment, figurer parmi les productions « mathématiques » d'Emerson (et de bien d'autres mathématiciens, jusqu'au plus haut niveau). Ce sont là en effet des parties des mathématiques que l'on nomme alors des *mathématiques mixtes*. L'une des premières mentions de cette expression apparaît dans les écrits de Francis Bacon (1561-1626), en particulier dans son ouvrage intitulé *Of the Proficiency and Advancement of Learning* (1605), où l'on peut lire cette déclaration enthousiaste – la traduction de la colonne de droite est empruntée à Bacon (1605/1991) :

<p>The Mathematics are either pure or mixed. To the Pure Mathematics are those sciences belonging which handle quantity determinate, merely severed from any axioms of natural philosophy; and these are two, Geometry and Arithmetic; the one handling quantity continued, and the</p>	<p>Les mathématiques sont soit pures soit mixtes [c'est-à-dire mêlées de matière]. Appartiennent aux mathématiques pures les sciences qui traitent de la quantité définie, absolument séparée de tout axiome de philosophie naturelle ; il y en a deux, la géométrie et l'arithmétique. La première traite de la quantité continue, la</p>
---	--

other dissevered. Mixed hath for subject some axioms or parts of natural philosophy, and considereth quantity determined, as it is auxiliary and incident unto them. For many parts of nature can neither be invented with sufficient subtilty, nor demonstrated with sufficient perspicuity, nor accommodated unto use with sufficient dexterity, without the aid and intervening of the mathematics; of which sort are perspective, music, astronomy, cosmography, architecture, enginery, and divers others.

seconde de la quantité discrète. Les mathématiques mixtes ont pour objet quelques axiomes ou parties de la philosophie naturelle, et elles s'occupent de la quantité déterminée en tant que celle-ci leur est annexe et secondaire. Car nombreuses sont les parties de la nature qui ne peuvent être découvertes de manière suffisamment sagace, ni mises en évidence de manière suffisamment fine, ni adaptées à l'utilité d'une manière suffisamment adroite, sans l'aide et l'intervention des mathématiques. De cette espèce sont l'optique, la musique, l'astronomie, la géographie, l'architecture, la science des machines, et quelques autres. (pp. 130-131)

Le texte de Bacon continue par ces considérations :

In the Mathematics I can report no deficiencie, except it be that men do not sufficiently understand the excellent use of the Pure Mathematics, in that they do remedy and cure many defects in the wit and faculties intellectual. For if the wit be too dull, they sharpen it; if too wandering, they fix it; if too inherent in the sense, they abstract it. So that as tennis is a game of no use in itself, but of great use in respect it maketh a quick eye and a body ready to put itself into all postures; so in the Mathematics, that use which is collateral and intervenient is no less worthy than that which is principal and intended. [--] And as for the Mixed Mathematics, I may only make this

Pour les mathématiques, je ne relève aucune lacune. À ceci près que les hommes ne comprennent pas assez quel usage excellent les mathématiques pures peuvent avoir en ce qu'elles apportent remède et guérison à de nombreux défauts de l'esprit et des facultés intellectuelles. Car si l'esprit est trop obtus, elles l'aiguisent ; s'il a trop tendance à vagabonder, elles le fixent, s'il est trop plongé dans le sensible, elles le rendent abstrait. Ainsi, il en est des mathématiques comme du tennis, qui est un jeu en lui-même sans utilité, mais qui est fort utile en tant qu'il rend l'œil rapide et le corps prêt à se plier à toutes sortes de postures ; l'utilité qu'ont les mathématiques, de façon accessoire et latérale, a tout à fait autant de valeur que leur utilité principale et voulue.

prediction, that there cannot fail to be more kinds of them, as nature grows further disclosed. Thus much of Natural Science, or the part of nature speculative.

Quant aux mathématiques mixtes, je me permettrai simplement cette prédiction : de plus nombreuses espèces de ces mathématiques ne peuvent manquer d'apparaître à mesure que la nature sera davantage découverte. En voilà assez de la science naturelle, ou de sa partie spéculative.

La notion de mathématiques mixtes va demeurer vivante durant près de trois siècles. L'édition de 1933 du célèbre *Oxford English Dictionary* en signale une occurrence datée de 1648 : « Wilkins, Math. Magick: Mathematics is usually divided into pure and mixed. » L'ouvrage mentionné ici, est dû à John Wilkins (1614-1672) et s'intitule *Mathematical Magick*. Le sous-titre manifeste l'une des significations populaires attachées à l'idée de mathématiques mixtes, celle de *puissance pratique*, puisqu'il promet de dévoiler au lecteur « the wonders that may be performed by mechanical geometry » (« les merveilles qu'on peut réaliser à l'aide de la géométrie mécanique »). Dans sa plénitude, le concept de mathématique mixte, qui plonge ses racines dans la science grecque antique, sera constamment sous-jacent à l'immense floraison scientifique des XVII^e et XVIII^e siècles. En France, c'est d'Alembert (1717-1783) qui en formalise l'idée dans l'article « Mathématique ou Mathématiques » de l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* (1751-1772). Il écrit notamment :

Les Mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle *Mathématiques pures*, considère les propriétés de la grandeur d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second, par l'étendue : dans le premier cas, les Mathématiques pures s'appellent Arithmétique, dans le second, Géométrie [...] La seconde classe s'appelle *Mathématiques mixtes* ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire, de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers [...]. Du nombre des Mathématiques mixtes, sont la Mécanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, &c.

On retrouve là l'essentiel de la doctrine baconienne. Tandis que les mathématiques *pures* étudient « les propriétés de la grandeur d'une manière abstraite », les mathématiques *mixtes*

s'occupent des « grandeurs concrètes ». Dans son discours préliminaire à l'*Encyclopédie méthodique* (1784) – laquelle reprend notamment les articles mathématiques de l'*Encyclopédie* –, l'abbé Charles Bossut (1730-1814) offrira ce découpage :

- 1°. La Mécanique, science de l'équilibre et du mouvement des corps solides.
- 2°. L'hydrodynamique, qui considère l'équilibre et le mouvement des corps fluides.
- 3°. L'Acoustique ou la Théorie du son. 4°. L'Optique ou la Théorie du mouvement de la lumière. 5°. L'astronomie, science du mouvement des corps célestes.

Dans son *Histoire des mathématiques*, dont la seconde édition paraît en 1799-1802, Jean-Étienne Montucla (1725-1799) accueille dans le royaume des mathématiques mixtes, à côté de l'*art de conjecturer*, de la *gnomonique*, de la *perspective*, la *coupe de pierres*, « art qui, écrit-il, exige souvent des considérations géométriques assez profondes ». Dépassant la simple énumération, d'Alembert énonce, dans l'article « Application » qu'il donne à l'*Encyclopédie*, et en se référant au cas de la « catoptrique » – l'optique des miroirs –, la *formule épistémologique* sous laquelle on peut subsumer toute mathématique mixte :

La plupart des propriétés des corps ont entr'elles des rapports plus ou moins marqués que nous pouvons comparer, et c'est à quoi nous parvenons par la Géométrie ou par l'Analyse et l'Algèbre. [...] Une seule observation ou expérience donne souvent toute une science. Supposez, comme on le sait par l'expérience, que les rayons de lumière se réfléchissent en faisant l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion, vous aurez toute la Catoptrique [...]. Cette expérience une fois admise, la Catoptrique devient une science purement géométrique, puisqu'elle se réduit à comparer des angles et des lignes [...]. Il en est de même d'une infinité d'autres.

Quelques décennies plus tard, Bossut reprend ce thème dans son discours préliminaire :

Les Mathématiques mixtes empruntent de la Physique une ou plusieurs expériences incontestables, ou bien supposent dans les corps une qualité principale et nécessaire ; ensuite, par des raisonnements méthodiques et démonstratifs, elles tirent du principe établi, des conclusions évidentes et certaines, comme celles que les Mathématiques pures tirent immédiatement des axiomes et des définitions. »

Se référant à l'optique, Montucla défendra sans complexe cet impérialisme potentiel de la connaissance mathématique :

On ne peut disconvenir que ces recherches ne soient proprement du ressort de la Physique : mais en tant que mêlées intimement, et dépendantes des Mathématiques abstraites qui leur font part de la certitude qui les distingue elles-mêmes, elles sont en quelque sorte élevées par-là au rang des Mathématiques dont elles forment la seconde division. En cette qualité elles occupent une sorte de milieu entre la Physique souvent enveloppée d'incertitude et de ténèbres, et les Mathématiques pures dont la clarté et l'évidence sont toujours sans nuages. Elles ne sauraient avoir plus de certitude que le principe qui leur sert de fondement ; c'est en quoi elles tiennent de la Physique : d'un autre côté elles jouissent d'une évidence hypothétique, égale à celle des Mathématiques abstraites ; je veux dire que leur principe supposé vrai, elles ne sont pas moins certaines que ces dernières.

L'empire des mathématiques est ainsi immensément étendu.

2.3. Que se passe-t-il entre d'Alembert et nous ? À partir de 1800 environ, « mixte » est progressivement remplacé par « appliqué ». La huitième édition (1853-1860) de l'*Encyclopædia Britannica* subdivise encore les mathématiques en pures et mixtes ; mais la neuvième édition (1875-1889) distingue désormais mathématiques pures et mathématiques *appliquées*. En 1908 encore, l'*Oxford English Dictionary* mentionne l'expression *mixed science*, mais c'est pour dire qu'elle est devenue obsolète, « except for mixed mathematics ». Dès 1810, Joseph-Diez Gergonne (1771-1859) lance ses *Annales de mathématiques pures et appliquées*. En Allemagne, August Leopold Crelle (1780-1855) crée en 1826 le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, « journal de mathématiques pures et appliquées » vite surnommé, devant l'inflation théoricienne qui s'y donne cours, *Journal für die reine unangewandte Mathematik*, « journal de mathématique pures inappliquées ». La vitesse de disparition de l'expression varie selon les contextes. En 1875, ainsi, paraît un ouvrage en langue anglaise que son auteur, Alfred Wigley, a intitulé *A Collection of Examples and Problems in Pure and Mixed Mathematics: With Answers and Occasional Hints*. Un an plus tôt avait paru en France un *Dictionnaire des mathématiques appliquées* dû à H. Sonnet, « docteur ès sciences, inspecteur de l'académie de Paris, professeur d'analyse et de mécanique à l'École centrale des arts et manufactures, ancien répétiteur de mécanique industrielle à la même école ». Même si les mots changent, l'ouvrage est un panorama des mathématiques mixtes, dont le titre complet montre bien l'ouverture à la diversité du monde, puisqu'on y

expose l'application des mathématiques « à l'architecture, à l'arithmétique commerciale, à l'arpentage, à l'artillerie, aux assurances, à la balistique, à la banque, à la charpente, aux chemins de fer, à la cinématique, à la construction navale, à la cosmographie, à la coupe des pierres, au dessin linéaire, aux établissements de prévoyance, à la fortification, à la géodésie, à la géographie, à la géométrie descriptive, à l'horlogerie, à l'hydraulique, à l'hydrostatique, aux machines, à la mécanique générale, à la mécanique des gaz, à la navigation, aux ombres, à la perspective, à la population, aux probabilités, aux questions de bourse, à la topographie, aux travaux publics, aux voies de communication, etc., etc. » Allant au-delà de cet inventaire hétéroclite, l'auteur entame sa préface par cette précision :

On désigne sous le nom de *Mathématiques appliquées* un ensemble de connaissances qu'il est plus facile d'énumérer que de réunir sous une définition précise. Cette définition n'embrasse pas, en effet, toutes les applications des mathématiques ; car l'Astronomie, par exemple, ainsi que la Physique appliquée, constituent des sciences à part, quoiqu'elles empruntent l'une et l'autre le secours de la Géométrie et de l'Analyse. On peut dire toutefois que les Mathématiques appliquées comprennent, d'une part, les questions de calcul qui se rapportent au commerce, à la banque, aux établissements de crédit et de prévoyance ; d'autre part, toutes les applications des mathématiques (*sic*) aux constructions civiles et militaires, aux voies de communication et aux machines. L'énumération placée sur le titre de l'ouvrage compléterait, au besoin, ce que cette définition peut laisser à désirer.

On saisit là le phénomène qui, sur deux siècles environ, va progressivement vider les mathématiques mixtes de leurs contenus : des domaines qui relevaient des mathématiques *lato sensu* finissent par s'émanciper, et prennent leur autonomie épistémologique. Ainsi en va-t-il, donc, de l'*astronomie* – par contraste avec la *cosmographie*, qui, elle, demeure l'affaire du « mathématicien appliqué ». Trois degrés donc : mathématique mixte (ou appliquée), application des mathématiques, science autonome. Tout au long du XIX^e siècle, de nouveaux domaines scientifiques prennent ainsi leur indépendance. Les « mélanges » physico-mathématiques chers à d'Alembert semblent devenus instables, et leurs composants se séparent, selon un mouvement d'ensemble dont un historien prend acte en ces termes : « More and more “pure” mathematical theories of physics were developed to be “applied” to more and more physically obtained data. By 1875 theories were no longer “mixed” with experience, they were “applied” to experience » (Brown, 1991). Le passage des mathématiques mixtes aux mathématiques appliquées marque dans les manières de dire une *mise à distance du monde* de la part des mathématiciens. Appliquer les mathématiques ? Pourquoi pas ? Mais se

mêler sans façon à une matière autre, *se mélanger à elle*, non ! Un très ancien *habitus* mathématicien devenait ainsi « mathématiquement incorrect ».

2.4. Dans l'enseignement secondaire français, la tradition demeura longtemps vivante de confier au professeur *de mathématiques* l'enseignement de matières qu'on ne songerait plus, aujourd'hui, à regarder comme de son ressort. Il y a soixante ans, ainsi, la *statique* figurait au programme de mathématiques, avec, notamment, le thème des *machines simples* (levier, treuil, cabestan, bascule du commerce, poulies, palan, moufle), qui ne disparaîtra des programmes de mathématiques qu'au début des années 1960. Le programme de mathématiques du 10 juillet 1925 pour les « classes de mathématiques » (c'est-à-dire pour les classes terminales scientifiques) comportait huit domaines. Les quatre premiers – arithmétique, algèbre, trigonométrie, géométrie – relevaient pour l'essentiel des mathématiques *pures*, tout en contenant certains thèmes *appliqués* traditionnels, relevant en particulier des mathématiques *financières* (intérêts composés, annuités, etc.). Les quatre autres domaines seraient vraisemblablement regardés aujourd'hui par les professeurs de mathématiques comme étrangers à leur domaine de compétence : *géométrie descriptive et géométrie cotée, cinématique, statique, cosmographie*. Certains domaines disparurent plus vite que d'autres ; les auteurs (anonymes) d'un ouvrage (s.d.) de préparation au baccalauréat publié au début des années 1940 notaient par exemple :

Le programme relatif à la Géométrie Descriptive et à la Géométrie Cotée du Cours de Mathématiques Élémentaires est très restreint et prête peu aux problèmes. En fait, depuis 10 ans, le nombre de problèmes donnés sur ce sujet aux Examens est à peu près nul. Il faut cependant en prévoir de possibles...

Mais d'autres régions du continent mathématique résistèrent plus longuement au processus de « purification épistémologique ». Ainsi la cinématique survécut-elle jusqu'au milieu des années 1980. Quant à la cosmographie, rebaptisée astronomie, elle demeurera longtemps présente dans les classes terminales littéraires, pour n'en disparaître qu'avec les programmes de 1994. Notons que les mathématiques « mixtes », rebaptisées « appliquées », sont toujours, en nombre de pays, l'apanage du professeur de mathématiques. Dans un ouvrage britannique pour l'enseignement secondaire intitulé *Concise Applied Mathematics* (Neal, 1988), la table des matières est ainsi la suivante :

1. Basics // 2. Introduction to vectors // 3. Equilibrium of forces. Friction // 4. Moments, forces and equilibrium // 5. Velocity and acceleration in a straight line // 6. Further vector analysis // 7. Projectiles // 8. Work, energy and power // 9. Motion of particles in two dimensions // 10. Circular motion // 11. Momentum and impact // 12. Simple harmonic motion // 13. Differential equations // 14. Relative motion // 15. Centres of gravity and mass // 16. Frameworks // 17. Equilibrium of forces in three dimensions // 18. Motion of the centre of mass. Stability // 19. Rotation: moments of inertia

À l'inverse, la conquête de leur indépendance par rapport aux mathématiques de nombreux domaines « récupérés » par la physique s'est accompagnée d'une *démathématisation* qui est d'abord un signe revendicatif sans pour cela être dépourvu d'un certain appauvrissement praxéologique – sujet sur lequel nous reviendrons. À titre d'illustration, voici les premiers lignes qu'écrivait l'auteur, qui se présente comme « agrégé de physique », d'un ouvrage de la collection « Que sais-je ? » intitulé *La statique* (Ricci, 1969, p. 5) :

Mécanique et mathématiques. – Peut-être certains lecteurs de ce petit livre seront-ils déçus de voir qu'on y fait usage de dérivées, de vecteurs et de produits vectoriels. Ces notions, qui permettent seules une description convenable de la réalité naturelle, ne devraient en fait rebuter personne ; nous en avons d'ailleurs rappelé la signification avant de les employer (...). D'autres lecteurs, à l'inverse, seront-ils choqués de nous voir rester au niveau mathématique le plus modeste possible ? C'est qu'alors ils sont déjà mathématiciens et peut-être trop enclins à perdre de vue que la Mécanique fait partie de la Physique (dont elle forme, assurément, l'une des branches maîtresses). Encore qu'il ne laisse pas d'admirer la beauté logique de la « Mécanique rationnelle », le physicien ne peut renoncer à souligner la présence primordiale et savoureuse des faits expérimentaux.

On aperçoit ici la rétraction de la « physique » sur elle-même – à distance des « mathématiques ». Cette attitude s'est construite progressivement et l'on peut apercevoir aisément le « travail » historique pour « rapatrier » la mécanique dans la physique. Le point d'arrivée est sans doute assez bien représenté par l'article actuel de *Wikipédia* intitulé « Mécanique rationnelle » (http://fr.wikipedia.org/wiki/Mécanique_rationnelle), que le lecteur est invité à consulter. Mais les choses n'ont pas toujours été ainsi. C'est ce que rappelle le physicien, chimiste et philosophe des sciences Pierre Duhem (1861-1916) dans un long commentaire élogieux du livre de son ami Henri Bouasse (1866-1953), *Mécanique rationnelle et expérimentale* (1910), paru la même année. Duhem écrit ainsi :

L'esprit même de [l'enseignement de la Mécanique] paraît avoir été très anciennement faussé par une fâcheuse classification des sciences.

Les règlements qui, pendant quatre-vingts ans, ont régi la licence ès sciences, ceux qui sont encore en vigueur pour l'agrégation et le doctorat ont établi une ligne de démarcation entre les Sciences mathématiques et les Sciences physiques.

En dépit de ce qu'une telle démarcation a toujours d'artificiel, partant de faux par quelque endroit, il était, semble-t-il, deux manières sensées de tracer cette frontière.

On pouvait réunir sous le nom de Sciences mathématiques non seulement celles qui étudient et perfectionnent l'instrument mathématique, mais toutes celles qui usent de cet instrument pour coordonner en théories les lois issues de l'expérience ; la Physique eût alors pris place parmi les Sciences mathématiques, auprès de la Mécanique et de l'Astronomie, puisque la construction de théories mathématiques où se rangent les lois du son, de la chaleur, de la lumière, de l'électricité et du magnétisme est son objet propre. Au-delà de la frontière qui borne les Sciences mathématiques se fussent trouvées les Sciences de la nature, dont la fonction essentielle n'est plus de coordonner, à l'aide de la déduction mathématique, une foule de propositions en théories, mais bien, par la comparaison révélatrice des analogies, de classer une foule d'êtres en familles naturelles ; et la Chimie se fût alors très logiquement placée au voisinage de la Botanique et de la Zoologie. Cette façon de partager le domaine des Sciences, moins par leurs objets que par les facultés intellectuelles auxquelles elles font le plus fréquent appel, est celle qui a été adoptée en la constitution de l'Académie des Sciences, où la Section de Physique générale appartient aux Sciences mathématiques.

On pouvait définir autrement les Sciences mathématiques ; on pouvait réserver ce nom aux doctrines purement abstraites des nombres et des figures ; elles ne demandent à l'expérience que des renseignements que tout homme possède, que l'usage quotidien, courant, nullement scientifique des sens suffit à lui fournir. Hors de ce domaine restreint des Sciences purement mathématiques, se fût étendue l'immense contrée des sciences qui se constituent à l'aide d'expériences plus raffinées et plus compliquées que la perception vulgaire, qui accroissent à l'aide d'instruments la puissance et la précision de nos sens ; parmi ces Sciences expérimentales, on eût trouvé l'Astronomie et la Mécanique en même temps que la Physique. C'est cette division qui est, je crois, adoptée par les Universités allemandes ; c'est grâce à elle que les *Vorlesungen über die mathematische Physik* de Kirchhoff débutent par un Volume consacré à la Mécanique.

La distinction entre les Sciences mathématiques et les Sciences physiques ne se fit, dans les Facultés des Sciences, ni par l'un ni par l'autre de ces deux procédés ; la Mécanique et

l'Astronomie furent mises au nombre des Sciences mathématiques, tandis que la Physique se trouvait indissolublement liée à la Chimie. (pp. 150-151)

On sera peut-être surpris de voir Duhem considérer aussi librement des « réarrangements » disciplinaires potentiels alors même que beaucoup regardent la cartographie des disciplines comme intrinsèque et, en quelque sorte, établie de toute éternité – ce que, bien évidemment, elle n'est pas ! Mais on a là une étape intermédiaire entre le tout-mathématique qu'impulsait la notion de mathématiques mixtes – que l'on nommait aussi sciences physico-mathématiques – et la situation d'aujourd'hui, où la mécanique est regardée comme une branche de la physique, la mécanique rationnelle étant rebaptisée « mécanique classique » (voir l'article « Mécanique newtonienne » de *Wikipédia*). On ne saurait mieux souligner que le « champ des mathématiques » est vaste et divers : pour un point actuel, on pourra consulter l'article « Mathématiques appliquées » de l'encyclopédie déjà cité.)

2.5. Le texte de Pierre Duhem aborde longuement les dangers d'un enfermement « purement mathématique », d'une « surmathématisation » de la mécanique. C'est là un discours qui, prit seul – nous allons voir que Duhem ne dit pas *que* cela –, est toujours banal dans la noosphère de l'enseignement secondaire (et peut-être universitaire) de la physique :

Les savants auxquels fut confié, dans les Facultés, l'enseignement de la Mécanique étaient, pour la plupart, munis de l'agrégation de Mathématiques ; toujours et nécessairement, ils avaient pris le doctorat ès sciences mathématiques ; c'étaient donc des hommes qui, dès leur jeunesse, s'étaient montrés particulièrement doués pour la contemplation et l'analyse des idées abstraites ; qui, par une longue et laborieuse éducation, avaient exalté en leur raison la faculté de combiner les constructions de la Géométrie et les algorithmes de l'Algèbre.

Au moment de professer la Mécanique, ils ont cherché à revêtir cette science de la forme qui leur semblait la plus parfaite, à la rendre donc aussi semblable que possible aux doctrines qu'ils avaient appris dès longtemps à regarder comme absolument belles, à la Géométrie et à l'Algèbre.

Imitant ce que le géomètre avait fait depuis des millénaires, ils ont voulu ne faire à l'expérience que des emprunts aussi peu nombreux que possible, et ils ont voulu que ces emprunts fussent faits aux observations les plus courantes, les plus obviees ; ils ont pris ainsi, pour les fondements de la doctrine qu'ils allaient exposer, un ensemble, aussi restreint qu'il se pût faire, de postulats sur les masses et les mouvements ; puis, sur ces fondements, tout semblables d'aspect aux axiomes de la Géométrie, ils ont, par la déduction mathématique, élevé

un monument vaste et régulier. Pour mieux marquer que l'expérience n'avait pris, à l'érection de ce monument, qu'une part infime, que la raison raisonnante pouvait se vanter de l'avoir presque en entier construit par ses propres forces, on a donné à ce bel édifice mathématique le nom de Mécanique *rationnelle*. Le jour où, à côté de la chaire de Mécanique rationnelle, la Sorbonne créa une chaire de Mécanique physique et expérimentale, elle affirma, me semble-t-il, avec une particulière netteté, que l'essence de la Mécanique rationnelle était de n'être d'aucune manière ni physique ni expérimentale.

Traitée par des hommes qu'avait formés la plus pure éducation mathématique, par des hommes qui n'eussent su rien écrire qui ne fût très rigoureux, très clair, très ordonné, très élégant, la Mécanique rationnelle a produit des chefs-d'œuvre ; parmi les Livres et les Mémoires qui lui sont consacrés, abondent les écrits admirables. Mais ce qu'on admire, en ces œuvres, c'est l'art de combiner les constructions géométriques et les symboles algébriques. Cet art qui, en Mécanique, ne devait être qu'un moyen, qui devait servir à résoudre des problèmes utiles à l'ingénieur, à construire des théories propres à guider le physicien, cet art s'est posé comme une fin qui eût en elle-même sa propre valeur. Les lignes géométriques ne se sont plus enchevêtrées, les équations différentielles intégrées afin que le mécanicien sût répondre à une question formulée par l'expérience ; c'est le problème qui a été artificieusement choisi afin que le géomètre nous pût montrer la pénétrante clarté de son intuition et l'algébriste sa dextérité à manier le Calcul intégral. Séparée par une frontière malencontreuse de la Physique qui pouvait seule lui poser des questions utiles et des problèmes féconds, rendue stérile par le décret qui l'a rattachée au domaine des Mathématiques pures, la Mécanique rationnelle n'est plus qu'une sorte de terrain de manœuvre où s'exécutent d'habiles exercices d'Analyse et de Géométrie.

2.6. Poursuivant l'expression de son insatisfaction, Duhem argumente alors pour suggérer que ce à quoi aboutit en réaction la démathématisation virulente de la physique – à travers la promotion d'une « physique purement expérimentale » – est un processus non moins recommandable :

La forme que la Physique allait revêtir était, pour ainsi dire, déterminée d'avance par l'étroite parenté qui était assignée à cette science avec la Chimie, c'est-à-dire avec une science naturelle, la plus simple et la plus avancée des Sciences naturelles.

C'est parmi les mêmes hommes qu'allaient se recruter les futurs professeurs de Physique et de Chimie ; non point donc parmi ceux qui se complaisent aux idées très abstraites et aux raisonnements très rigoureux, mais bien parmi ceux chez qui la finesse d'observation est très aiguisée, voire parmi ceux qui sont doués d'une extrême dextérité manuelle, précieuse à

l'expérimentateur ; futurs physiciens ou futurs chimistes, ils allaient entendre les mêmes enseignements, s'exercer aux mêmes manipulations, être éprouvés par les mêmes examens ; et ce que ces examens auraient pour objet d'y reconnaître, ce seraient surtout les facultés communes au physicien et au chimiste, l'habileté en l'art expérimental.

De même, alors, que le mécanicien, formé par une discipline presque exclusivement mathématique, en était venu à regarder la Géométrie et l'Algèbre non point comme des instruments propres à résoudre les questions proprement mécaniques, mais comme les objets mêmes auxquels doit tendre l'étude de la Mécanique, de même le physicien se prit à regarder l'observation et l'expérience non pas comme les ouvrières qui doivent poser les fondations de la Physique, mais comme les architectes qui doivent tracer le plan du monument tout entier.

La Physique, comme la Mécanique, devait résulter de l'intime union d'une forme définie par les Mathématiques avec une matière fournie par l'observation et l'expérience. Les mécaniciens s'étaient appliqués à faire abstraction aussi complète que possible de ce contenu, donné par l'expérience, et ils avaient obtenu cette forme, à peu près vide de toute matière, qu'ils avaient appelée Mécanique rationnelle. Les physiciens, de leur côté, réduisirent autant qu'ils purent le faire le rôle que la forme mathématique était appelée à jouer dans leur science ; leur idéal, de plus en plus ardemment et explicitement souhaité, fut de ne rien considérer sinon les lois que l'induction tire de l'observation ; la matière presque informe constituée par l'ensemble de ces lois leur apparut comme la plus parfaite des Physiques, la Physique purement expérimentale.

Ainsi la simple mesure administrative qui a tracé une ligne de démarcation entre la Mécanique et la Physique, qui a mis la Mécanique au nombre des sciences mathématiques et qui a rejeté la Physique au voisinage de la Chimie, a produit deux sciences également incomplètes, bien qu'elles le soient par deux privations inverses l'une de l'autre ; elle a engendré ces deux monstres complémentaires : la Mécanique rationnelle dégagée de toute Mécanique physique et expérimentale, et la Physique purement expérimentale soigneusement séparée de toute Physique mathématique.

La Mécanique est, par sa nature même, la partie la plus abstraite et la plus simplifiée de la Physique ; pour se constituer donc, la Mécanique rationnelle n'a eu besoin que de pousser à l'excès une abstraction et une simplification qui eussent été légitimes si elles fussent demeurées en deçà de certaines bornes.

Il n'en va pas de même de la Physique expérimentale. Le langage de l'Algèbre et de la Géométrie est si complètement indispensable à qui prétend énoncer avec clarté et précision les lois physiques issues de l'observation, ces lois tendent si naturellement à se grouper et à s'ordonner en théories mathématiques, que la constitution d'une Physique purement expérimentale semble être une irréalisable gageure ; sans cesse la Physique mathématique

reparaît en la science au moment même qu'on l'en croit chassée. Ceux donc qui voudraient arracher à la Physique le dernier lambeau de son vêtement d'Algèbre et de Géométrie se voient condamnés au supplice d'un perpétuel recommencement.

Ils ne se découragent pas, cependant ; par un travail incessant, ils creusent de plus en plus le fossé que les règlements d'examens ont tracé entre la Physique et les Sciences mathématiques ; ils comptent bien qu'ils formeront ainsi des esprits tournés d'une manière invariable vers la science purement expérimentale à laquelle ils tendent...

On voit ainsi les tensions qui ont pu exister et peuvent exister entre le mathématique et le non-mathématique, entre mathématisation et démathématisation. C'est à partir de là qu'il nous faudra avancer maintenant.

3. Mathématique, mathématisation, mathématisé

3.1. Le mathématique est ce qui naît de la mathématisation du non-mathématique : la formule peut paraître facile, mais elle nous servira de repère. Dans l'introduction de son petit ouvrage *Euclide. Extraits des Éléments* (1967), Charles Mugler écrit :

La rigueur, la pertinence et l'économie qui caractérisent la pensée d'Euclide ont marqué aussi l'expression de sa pensée. Le style d'Euclide est sobre et élégant, le vocabulaire précis et différencié, la syntaxe à la fois restreinte et nuancée. La terminologie des *Éléments*, créée en partie par les prédécesseurs d'Euclide, en partie par Euclide lui-même, a fixé définitivement la langue de la géométrie, non seulement en grec jusqu'à la fin des civilisations antiques, mais aussi, à travers les traductions, dans les autres langues de l'Occident.

Dans notre jargon géométrique, par exemple, cette influence est sensible, entre autres, dans une série de termes empruntés directement à la langue grecque, où ils avaient désigné à l'origine des objets de la vie courante, de la nature ou de la technique. À ce groupe appartiennent les mots *centre*, de *kentron*, aiguillon ; *cube*, de *kybos*, dé à jouer ; *cône*, de *konos*, pomme de pin ; *cylindre*, de *kylindros*, rouleau ; *parallèle*, de *parallellos*, ligne qui court le long d'une autre ligne ; *prisme*, de *prisma*, bloc de bois découpé par une scie ; *rhombe* (losange), de *rhombos*, toupie ; *sphère*, de *sphaira*, balle à jouer, etc.

La balle à jouer n'est pas une réalité mathématique. Mais on peut la mathématiser : sa mathématisation – nous devrions dire prudemment : *une* de ses mathématisations – engendre la notion mathématique de *sphère*, définie comme l'ensemble des points situés à une distance

donnée d'un point donné, appelé centre de la sphère. Dès ce moment-là, on peut démontrer des théorèmes « mathématiques », par exemple celui-ci : une sphère, ou un cercle, a un centre *unique* (voir le TD 2, question 1). Bien entendu, une entité « mathématique », qui est donc *du mathématisé*, peut être *plus encore* mathématisée : un cercle est l'ensemble des points à une distance donnée d'un point donné ; mais cela deviendra plus tard l'ensemble des points qui, dans un certain type de repères, possède une équation de la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, où r est un nombre positif. *L'histoire du « mathématique » est une histoire de mathématisations.*

3.2. Dans l'activité mathématique, on croise à tout instant du *non-mathématisé*, en attente éventuelle de mathématisation. Cela a été le cas avec la notion de *variable* (rencontrée dans le TD 1), qui a été durant des siècles, et reste encore aujourd'hui, « sous-mathématisée », même si elle est, bien entendu, aisément mathématisable (voir le TD 2, question 2), la stratégie « moderne » ayant consisté, non à la mathématiser, mais en quelque sorte à « l'évider » de façon à ce qu'une telle mathématisation devienne inutile (ce qui, en vérité, n'est pas le cas). Dans le paradigme mathématique « classique », on écrivait une fonction f sous la forme $y = f(x)$, le symbole f ne faisant ici que désigner la procédure permettant de passer d'une valeur de la *variable* (« indépendante ») x supposée à la valeur « simultanée » de la *variable* (« dépendante ») y supposée. Par contraste, dans le paradigme « moderne », on « évide » la référence à des variables x et y qui seraient définies *par ailleurs*. Le symbole f désigne le « protocole » permettant d'associer une valeur numérique à une autre, ces valeurs n'étant plus alors valeurs *de rien* : ce sont des valeurs « abstraites », des nombres purs, qui ne « mesurent » aucune grandeur. Comme il faut bien noter le nombre x auquel f associe le nombre $f(x)$, la lettre x , et son nom ancien, « variable », ont été conservés ; mais y a été banni, au profit du schéma notationnel « bien connu » $f : x \mapsto f(x) = \dots$. Là où l'on parlait autrefois « de la fonction $y = 2x^3 - 5$ » par exemple, on s'est mis à parler de « la fonction f qui, à x , associe $2x^3 - 5$ », de « la fonction f , “ x donne $2x^3 - 5$ ” », etc.

3.3. L'exemple précédent montre notamment que, à une époque et dans un contexte donnés, le travail mathématique mêle du mathématique – qui n'est jamais que du déjà-mathématisé – à du non-mathématique non encore mathématisé, à du protomathématique en attente de mathématisation : *l'univers mathématique n'est jamais « mathématiquement pur »*. Il arrive régulièrement que des notions aussi familières que l'était pour les anciens Grecs celle de « balle à jouer » (par exemple), mais qui n'avait pas été proprement mathématisées, apparaissent tout à coup comme requérant une telle mathématisation. Ainsi en va-t-il avec la notion appelée en anglais *bag* « sac » (voir le TD 2, question 3), qui sera mathématisée par la

notion non classique de *multiset* (ou de... *bag*). D'où vient le besoin de mathématiser cette notion familière – celle d'un sac contenant trois bananes, quatre pommes, six mandarines, par exemple ? En mathématiques, une fonction est classiquement fonction d'un nombre *déterminé* de variables. Selon un usage apparu en logique mathématique, ce nombre est appelé l'*arité* de la fonction. Ainsi parle-t-on d'une fonction *unaire* (à une variable), *binaire* (à deux variables), *n-aire* (à n variables). Une des limitations de ce système conceptuel tient dans le fait que l'arité d'une fonction y est *fixée*. Or on peut vouloir considérer des fonctions à *arité variable* – des fonctions *variadiques*. Ainsi le symbole $+$, qui désigne *a priori* la fonction binaire « addition de deux nombres » (on écrira $+(2, 5) = 7$), peut aussi s'appliquer à l'addition d'un nombre fini *quelconque* de nombres (on aura par exemple $+(2, 5, -8, -11, 1, 0, 12) = 1$). Pour n'avoir pas à « déclarer » *a priori* l'arité d'une fonction, on voudrait donc pouvoir regarder ses différentes variables comme un « tout », dont la composition exacte n'est pas fixée – ce qui revient à regarder toute fonction comme d'arité *un* par rapport à une « variable de variables », c'est-à-dire comme une fonction unaire *et* « variadique » à la fois. Mais comment penser mathématiquement ce « tout » ? On peut songer à la notion de *liste* – non pas de p -liste, mais de liste, car p doit pouvoir varier. Mais cette notion, encore une fois, impose un ordre sur le contenu. D'où l'introduction de la notion de sac, comme l'indique Alan Bundy (1983, pp. 48-49) :

Although the order of parameters of functions [...] is important in general, it is actually immaterial for [...] + [...]. Thus, it would actually be more convenient to use a composite parameter for such functions with built in commutativity, i.e. in which order was ignored, but multiple occurrences of elements were retained. Such a composite object has been invented in Artificial Intelligence: it is called a *bag*. (If you put two cans of baked beans and a pound of sausages in a shopping bag, they may get jumbled about, but no cans will disappear.) We will delimit bags by square brackets and separate the elements by commas, e.g. [2, 3, 2]. Our unary (variadic) + is written : $+[2, 3, 2]$.

Voilà donc comme on peut envisager la somme d'un *sac* de nombres ! Nous n'irons pas plus loin ici sur le destin de la « nouvelle » notion *mathématique* de sac qui va résulter du besoin de mathématisation ainsi rencontrée. Nous examinerons un peu plus loin une notion, celle de *tangente à une courbe*, dont la non-mathématisation, qui fut au XIX^e siècle un facteur de difficultés, n'a pas créé, une fois ces difficultés surmontées, d'obstacles sérieux dans les contextes traditionnels de l'activité mathématique.

3.4. Avant cela, deux points doivent être soulignés. D'une part, la présence d'ingrédients non mathématisés, ou partiellement mathématisés, n'invalide pas *ipso facto* le travail mathématique – sinon les mathématiques n'existeraient pas ! D'autre part, le développement historique des mathématiques suppose la mathématisation progressive des objets qui, formés dans la pratique extramathématique, ont été intégrés dans la pratique mathématique, parce que leur non-mathématisation finit un jour par être contre-productive, comme le suggère Jean Dieudonné (1987, p. 249), à propos des conditions de la pratique démonstrative en mathématiques :

La situation est toute différente lorsqu'il s'agit de prétendues démonstrations, viciées dès le début parce qu'elles sont relatives à des objets *non définis* de façon précise. C'est ce qui s'est passé en analyse aux XVII^e et XVIII^e siècles, puisqu'on raisonnait sur des « infiniment petits » ou sur la « somme » d'une série, sans jamais être en état de dire ce que cela signifiait. Bien entendu, dans la plupart des cas, les meilleurs mathématiciens de l'époque avaient une idée juste de ce qu'ils pouvaient faire avec ces notions vagues, et leurs remarquables découvertes les encourageaient à aller de l'avant ; mais ils ne pouvaient exprimer leurs preuves dans un langage proprement mathématique ; et s'il n'a pas été difficile, au XIX^e siècle, de donner des démonstrations entièrement correctes de leurs résultats, cela n'est devenu possible qu'après avoir dégagé clairement la notion de limite comme concept de base, et en avoir entièrement codifié les propriétés [...].

De fait, la plupart des notions mathématiques *fondamentales* ont été utilisées par les mathématiciens *avant* d'avoir été complètement mathématisées : ainsi en va-t-il par exemple des notions de *nombre*, de *courbe*, de *surface*, ou encore simplement de *polyèdre*. Longtemps, au XIX^e siècle, la dérivabilité d'une fonction continue *va de soi* (d'après Delachet, 1961, pp. 56-57). C'est ainsi que Louis Poinsot (1777-1859) écrit dans son cours à l'École polytechnique (Poinsot, 1815) :

On peut même dire que le rapport de deux choses homogènes ne dépendant ni de leur nature, ni de leurs grandeurs absolues, par la définition même du rapport, la quantité ($Dy : Dx$) a toujours une limite ; et c'est ce que la considération d'une courbe et de sa tangente, dont l'existence n'est pas douteuse, fait voir d'ailleurs avec la dernière évidence.

On aperçoit ici le rôle inducteur de la notion – tenue pour aller de soi – de tangente à une courbe en un point. Bien que Karl Weierstrass ait donné en 1872 son fameux exemple de

fonction continue n'ayant de dérivée en aucun point, on retrouvera encore un raisonnement du type précédent – où la notion de tangente joue un rôle clé – dans l'édition de 1878 du *Traité d'algèbre* de Joseph Bertrand et Henri Garcet (vol. II, p. 94) :

On peut demander si une fonction continue quelconque a une dérivée. Nous répondrons d'abord qu'en fait nous allons trouver, dans les paragraphes suivants, les dérivées des principales fonctions ; ce qui démontrera leur existence *a posteriori*. Nous ajouterons d'ailleurs que la fonction étant continue, l'équation : $y = f(x)$, représente une courbe plane continue, rapportée à deux axes rectangulaires; et l'on démontre, en géométrie analytique, que la dérivée représente la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe Ox la tangente à la courbe au point (x, y) . Comme en chaque point une courbe continue a une tangente bien déterminée, la fonction admet une dérivée.

Longtemps, en fait, la tangente à une courbe d'équation $y = f(x)$ en un point M_0 fut définie comme « la position limite de la corde (M_0M) lorsque M tend vers M_0 en restant sur la courbe », et cela sans que l'on se préoccupe de savoir si cette position limite existait, ni même de définir préalablement la notion de *limite* impliquée dans une telle définition. L'article « Tangente » de *Wikipédia* indique à ce propos :

Définition géométrique de la tangente

On commence par définir la [droite sécante](#) entre deux points M et N de la courbe : c'est la droite qui les relie. La tangente en M peut alors être définie comme la position limite de la sécante lorsque le point N tend vers M .

Pour être rendue parfaitement rigoureuse, cette définition demande d'introduire des notions de [topologie](#) permettant le calcul d'une telle [limite](#). Elle est cependant très imagée.

La « définition géométrique » de la tangente, utilisée pendant des siècles, peut certes être mathématisée. Mais la chose requiert un certain travail dont on prendra la mesure dans la question 4 du TD 2.

3.5. La mathématisation est toujours *relative*. Mais elle peut être plus ou moins « poussée ». Dans un certain nombre de cas, on peut même observer, en telle ou telle institution, une *démathématisation*, phénomène dont les effets doivent chaque fois être appréciés de façon spécifique. C'est ainsi que, au collège et au lycée, après le temps – relativement bref – de “surmathématisation” qui a suivi la réforme des mathématiques modernes, s'est accrue une

pression démathématisante exercée notamment par les manuels et généralement confortée par les professeurs. Cette propension curriculaire à la démathématisation érode en général, dans le système des praxéologies mathématiques à faire étudier en telle classe ou en tel cursus d'études, les parties technologico-théoriques Λ (*logos*), généralement *latentes* et très peu mathématisées, au point de dénaturer les parties pratico-techniques Π (*praxis*), elles *manifestes* (ou *patentes*). À la praxéologie initiale, qu'on peut noter $\Pi \oplus \Lambda$, se substitue d'abord une praxéologie $\Pi \oplus \Lambda^\dagger$, puis une praxéologie $\Pi^\dagger \oplus \Lambda^\dagger$, laquelle est déterminée en partie par les effets constatés du nouveau *logos* Λ^\dagger sur l'ancienne *praxis* Π . On trouvera de tout cela un exemple développé dans le TD 2, question 5.

3.6. La question du *logos* et plus précisément encore de la *théorie* (au sens de la TAD) appellerait des développements que l'on réduira ici à trois remarques seulement. Tout d'abord, la théorie existe toujours. Quand bien même elle s'exprimerait par bribes et paraîtrait inconsistante, elle n'en serait pas moins opérante ! Ensuite, plus encore que les technologies « mathématiques », une telle théorie est généralement mêlée d'éléments divers empruntés à l'ensemble de la culture, et intégrés à la théorie « mathématique », *de facto*, sans avoir été « mathématisés », ce qui, notons-le en passant, comme le montrent les analyses explicitées à propos de la question 5 du TD 2, donnent à ces éléments théoriques une grande fragilité qui conduit fréquemment à leur effacement silencieux et à leur remplacement subreptice par d'autres éléments théoriques qui n'auront pas été davantage analysés. Enfin, ajoutons que la « couche » supérieure de la composante théorique d'un complexe praxéologique donné a été désignée, historiquement, sous le nom de *métaphysique*, mot à propos duquel Littré écrit ceci dans son dictionnaire :

4° Les parties les plus élevées d'une science particulière, d'un art quelconque. La métaphysique du droit. La métaphysique des mathématiques. Je veux mourir s'il y a dans toutes ces têtes-là le premier mot de la métaphysique de leur art, DIDEROT, Salon de 1767, Œuvr. t. XIV, p. 140, dans POUGENS. Métaphysique de la géométrie, expression dont Descartes (Lettre au P. Mersenne, janv. 1639) se servait pour désigner la géométrie générale.

Dans l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert (1751-1772), Diderot rédige l'article suivant :

MÉTAPHYSIQUE, s. f. c'est la science des raisons des choses. Tout a sa *métaphysique* & sa pratique : la pratique, sans la raison de la pratique, & la raison sans l'exercice, ne forment qu'une science imparfaite. Interrogez un peintre, un poète, un musicien, un géomètre, & vous le

forcerez à rendre compte de ses opérations, c'est-à-dire à en venir à la *métaphysique* de son art. Quand on borne l'objet de la *métaphysique* à des considérations vuides & abstraites sur le tems, l'espace, la matiere, l'esprit, c'est une science méprisable ; mais quand on la considere sous son vrai point de vûe, c'est autre chose. Il n'y a guere que ceux qui n'ont pas assez de pénétration qui en disent du mal.

Le lecteur intéressé pourra par exemple enquêter sur la *théorie de l'algèbre* due à William Rowan Hamilton (1805-1865) : en simplifiant beaucoup, on peut dire que l'idée directrice en est que, de même que la géométrie est la science de l'*espace*, l'algèbre est, elle, la science du *temps* – « *the science of pure time* ».

Leçon 4. Praxéologies de recherche II

1. Problématiques fondamentales et questions de recherche

1.1. Revenons à la modélisation, introduite dans la leçon précédente, de la position ρ de chercheur en didactique des mathématiques. Ce que nous nommerons *une recherche* sera associé à une question Q que le chercheur ξ ou son équipe Ξ étudie afin de lui apporter une réponse R^\heartsuit – qu'on pourrait aussi bien noter, selon le cas, R_ξ^\heartsuit ou R_Ξ^\heartsuit . On notera que, souvent, le « sujet » de la recherche *n'est pas formulé en termes de questions*, mais par la désignation – de façon plus ou moins vague – de l'*objet* « principal » sur lequel porterait la question de recherche. L'existence d'une question Q est un critère important, voire décisif, pour décider si « une recherche » mérite bien ce titre. Il est vrai cependant que les chercheurs procèdent souvent à l'envers : étant arrivés à certains « résultats », ils les regardent (et les font apparaître) comme apportant réponse à une question Q qu'ils n'avaient pas nécessairement formulée à l'avance : le travail accompli devient ainsi *retrospectivement* un travail de recherche !

1.2. Quelles questions étudie un chercheur en didactique ? Plus exactement : comment peut-on modéliser le système (ouvert) des questions étudiées en didactique ? Les questions de recherche – « prospectives » ou « rétrospectives », si l'on peut dire – participent très généralement d'un petit nombre de grands « corps de problèmes », de grandes *problématiques*, que l'on rappelle rapidement ci-après. La première de ces *problématiques fondamentales* est la *problématique de base*, dans laquelle on étudie l'ensemble des systèmes de conditions C qui, sous des contraintes K_0 , provoquent la rencontre (\mathfrak{R}) ou l'étude (∂) d'une entité praxéologique \wp_0 par l'instance U_0 (qui est une personne ou une institution, telle une classe par exemple) : $\{C / \partial\mathfrak{R}(K_0, C, \wp_0, U_0)\}$. Une *question de recherche* typique consiste ainsi à déterminer ce que peut être un système C^* de conditions tel que

$$C^* \in \{C / \partial\mathfrak{R}(K_0, C, \wp_0, U_0)\}.$$

Un *résultat de recherche* peut consister en la conclusion que, pour un certain système C^* de conditions, on aurait $C^* \in \{C / \partial\mathfrak{R}(K_0, C, \wp_0, U_0)\}$; ou, au contraire, que l'on aurait

$$C^* \notin \{C / \partial\mathfrak{R}(K_0, C, \wp_0, U_0)\}.$$

1.3. Si l'on échange C et \wp dans ce qui précède, on obtient l'ensemble

$$\{\wp / \partial \mathcal{V}\mathcal{R}(K_0, C_0, \wp, U_0)\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des entités praxéologiques \wp que l'instance U_0 rencontre ou étudie dès lors qu'elle est soumise aux conditions C_0 sous les contraintes K_0 . Il s'agit là de la problématique dite *duale* de la problématique de base : on l'appelle problématique *possibiliste*. On notera que, lorsqu'un chercheur s'efforce de déterminer si

$$C^* \in \{C / \partial \mathcal{V}\mathcal{R}(K_0, C, \wp_0, U_0)\}$$

cela revient à se demander si $\wp_0 \in \{\wp / \partial \mathcal{V}\mathcal{R}(K_0, C^*, \wp, U_0)\}$. On passe ainsi naturellement de la problématique *de base* à la problématique *possibiliste*, et inversement.

1.4. Plus généralement, un travail de recherche dans le cadre de la problématique de base – ou, au demeurant, de l'une quelconque des quatre problématiques fondamentales – peut engendrer diverses questions *qu'on regardera, en puissance, comme autant de questions de recherche en didactique*. Une telle question de recherche peut ainsi être la suivante, en désignant par $E(U_0)$ l'équipement praxéologique de U_0 : « Étant donné une entité praxéologique \wp_0 et une instance U_0 , est-il vrai que $\wp_0 \in E(U_0)$? Plus généralement, quel est le “degré d'appartenance” de \wp_0 à $E(U_0)$? Quelle est sa “volatilité” ? » Tout cela mériterait bien sûr d'être élaboré tant du point de vue théorique que du point de vue empirique.

1.5. La TAD reconnaît actuellement parmi les problématiques fondamentales de la didactique deux autres problématiques, elles aussi duales l'une de l'autre. La première est la problématique *primordiale*. On s'y réfère à la notion de *projet* (de connaissance ou d'action), que l'on désigne par la lettre grecque Π . S'il s'inscrit dans cette problématique, un chercheur en didactique ξ ou une équipe Ξ étudie l'ensemble $\{\wp / \mathfrak{I}(K_0, \wp, \Pi_0, U_0)\}$ des entités praxéologiques \wp qui, sous l'ensemble de contraintes K_0 , sont utiles ou indispensables (\mathfrak{I}) à l'instance U_0 pour concevoir ou mener à bien le projet Π_0 . De façon duale, la problématique *interventionniste* conduit à l'étude de l'ensemble $\{\Pi / \mathfrak{I}(K_0, \wp_0, \Pi, U_0)\}$, c'est-à-dire de l'ensemble des projets Π pour la conception ou la réalisation desquels, sous les contraintes K_0 , l'entité praxéologique \wp_0 est reconnue utile ou indispensable. Si la problématique interventionniste n'est pas étrangère au monde de l'enseignement – d'elle relève par exemple le souci des « applications » d'une notion ou d'une technique mathématique donnée –, la problématique *primordiale* semble généralement échapper aux professeurs pour constituer l'apanage des « autorités de tutelle » et de certains des « penseurs » noosphériques qui ambitionnent de se préoccuper des *buts* de l'éducation scolaire plutôt que de ses *moyens*.

1.6. *Tous* les termes employés dans ce qui précède sont en vérité *problématiques*. Qu'est-ce, ainsi, que « rencontrer » une entité praxéologique \wp ? En quoi peut-on dire que telle instance U aura « intégré » \wp à son équipement praxéologique $E(U)$? En quoi l'entité \wp lui est-elle « indispensable » en tel projet Π ? Nous nous sommes arrêtés déjà sur la problématicité de ce que la *doxa* professorale (et noosphérique) regarde comme *non problématique* par excellence, dès lors du moins qu'elle relève de l'une des disciplines enseignées : l'entité praxéologique \wp . Cette prétendue non-problématicité de \wp contraste avec l'insistance sur le caractère problématique du processus de « transmission » de \wp – dont la difficulté tiendrait à l'instance U_0 , et non au « savoir enseigné » ! Mais c'est en fait *tous* les termes employés qui appellent une analyse et une interrogation permanentes.

1.7. On commencera, ici, par généraliser légèrement la formulation des problématiques fondamentales, en y remplaçant le symbole \wp désignant une « entité praxéologique » quelconque par la lettre O pour désigner ce que nous avons nommé, dans la *Leçon 1*, une *œuvre*. (Nous avons utilisé pour cela le symbole \heartsuit : la substitution de O à \heartsuit s'expliquera un peu plus loin.) On écrira donc par exemple

$$\{C / \partial \forall \mathfrak{R}(K_0, C, O_0, U_0)\}.$$

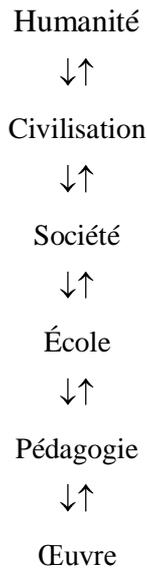
L'intérêt de cet élargissement est de pouvoir considérer non seulement des entités praxéologiques \wp , mais aussi des questions Q (on a vu dans la *Leçon 1* qu'une question est un œuvre, et une œuvre généralement précieuse). Comme dans le cas d'une entité praxéologique \wp quelconque, l'instance U_0 pourra « rencontrer » (\mathfrak{R}) la question Q ou pourra l'étudier (∂) de façon plus ou moins approfondie. La relation notée $\partial \forall \mathfrak{R}$ devra être précisée en fonction de la question que le chercheur étudie. On peut par exemple (voir le TD 3) se demander si, étant donné des contraintes K_0 , il existe un ensemble C de conditions qui rendent hautement probable le fait que $E(U_0)$ contienne l'élément technologique suivant : « Contrairement à une symétrie axiale, une symétrie centrale transforme toute droite en une droite parallèle. » On notera de même

$$\{O / \mathfrak{I}(K_0, O, \Pi_0, U_0)\}$$

l'ensemble des œuvres qu'il est reconnu utile ou indispensable d'avoir rencontrées ou étudiées pour concevoir ou mener à bien le projet Π_0 sous les contraintes K_0 . Parmi les œuvres envisagées figureront éventuellement des *questions*, que l'instance U_0 aurait avantage à avoir rencontrées, à « s'être posée », voire à avoir étudiées plus ou moins en profondeur.

2. Conditions & contraintes

2.1. Que sont les *conditions* que le chercheur en didactique des mathématiques doit prendre en compte dans ses recherches ? À cette question, on a rencontré d'ores et déjà une grande partie de la réponse en rencontrant *l'échelle des niveaux de codétermination didactique*, qu'on reprend ci-après en l'augmentant d'un échelon supérieur, celui de... l'*Humanité* :



Le singulier employé pour le nom des différents échelons – *Société, École, Pédagogie, etc.* – ne doit pas tromper : il s'agit sauf exception de « singuliers génériques ». Car il y a en fait *des* civilisations et *des* sociétés participant d'une civilisation donnée. Au sein d'une société il ya *des* écoles (chacune ayant, au reste, divers *établissements*) ; et, en une même école, il peut exister *des* pédagogies – assez différentes pour qu'on soit fondé à les distinguer. Bien entendu, il existe une foultitude d'*œuvres* qu'une pédagogie donnée conduit à rencontrer et à étudier (même si une pédagogie ne permet jamais de rencontrer *toute œuvre possible*). À la règle qui vaut pour tous ces échelons, seul le premier des échelons échappe : depuis quelques dizaines de milliers d'années, en effet, il n'y a plus, sur la planète, qu'*une* humanité.

2.2. Les recherches les plus classiques en didactique des mathématiques ne considèrent qu'un petit nombre de types de conditions – ce qui les distingue *en principe* des recherches pensées et conduites dans le cadre de la TAD. L'insuffisante rupture praxéologique entre chercheur et professeur – mentionnée notamment dans la leçon précédente – en est l'une des causes premières. Un lien trop étroitement maintenu conduit en effet certains chercheurs à considérer surtout, voire exclusivement, ces conditions que le professeur peut, sous les contraintes

usuelles, modifier ou créer, et donc, du même mouvement, à *ignorer* ces conditions qui sont, pour le professeur, dans l'état de choses actuel, des *contraintes* – un peu comme si les chercheurs ne s'adressaient qu'aux professeurs. Mais un second faisceau de causes est à considérer, qui est, dans les faits, souvent solidaire de la non-rupture entre le chercheur et le professeur : il s'agit de la difficulté, pour le chercheur en didactique, à aller au-delà des conditions et contraintes portées par l'œuvre étudiée, comme s'il ne pouvait s'en détacher ni à plus forte raison s'en éloigner sans perdre brutalement sa légitimité de chercheur *en didactique de...* Quelles que soient les raisons effectives et les motifs allégués, cela conduit en règle générale à grossir considérablement et, surtout, silencieusement, comme clandestinement, l'ensemble K_0 des contraintes sous lesquelles se trouve placé l'objet de la recherche : le chercheur prétendra établir par exemple que, pour tel ensemble C de conditions, on a bien $\partial \forall \mathcal{R}(K_0, C, O_0, U_0)$, mais sans pouvoir préciser ce qu'est l'ensemble K_0 . Ce type de situations de recherche, il est vrai, n'est pas propre à la didactique : on l'exprime quelquefois, en d'autres sciences, en disant que l'on étudie les effets de conditions C « toutes choses étant égales par ailleurs » – ce qui se dit en latin *ceteris paribus* '(ou, de façon complète, *ceteris paribus sic stantibus*). Voici un extrait éclairant de l'article « *Ceteris paribus* » de *Wikipedia* :

One of the disciplines in which *ceteris paribus* clauses are most widely used is [economics](#), in which they are employed to simplify the formulation and description of economic outcomes. When using *ceteris paribus* in economics, assume all other variables except those under immediate consideration are held constant. For example, it can be predicted that if the price of [beef](#) increases—*ceteris paribus*—the quantity of beef demanded by buyers will *decrease*. In this example, the clause is used to operationally describe everything surrounding the relationship between both the *price* and the *quantity demanded* of an [ordinary good](#). This operational description intentionally ignores both known and unknown factors that may also influence the relationship between price and quantity demanded, and thus to assume *ceteris paribus* is to assume away any interference with the given example. Such factors that would be intentionally ignored include: the relative change in price of substitute goods (e.g., the price of beef vs. pork or lamb); the level of [risk aversion](#) among buyers (e.g., fear of [mad cow disease](#)); and the level of overall demand for a good regardless of its current price level (e.g., a societal shift toward [vegetarianism](#)).

The clause is often loosely translated as “holding all else constant.”

Cette analyse se laisse « traduire » aisément en termes de phénomènes didactiques (plutôt qu'économiques) : on laissera au lecteur le soin de cette traduction.

2.3. Le principe *ceteris paribus*, on le voit, est utile à court terme mais ne saurait permettre d'ignorer les autres conditions, notamment lorsque celles-ci évoluent, à la longue, de façon plus ou moins « souterraine », ce qui se produit s'agissant du didactique non moins sans doute que concernant l'économique. Dans l'abord d'une recherche faite ou à faire, on s'interrogera donc sur les conditions non prises en compte et dont on peut penser qu'elles jouent un rôle non négligeable dans les phénomènes didactiques étudiés. Dans ce qui suit, on s'arrêtera d'abord très brièvement, et seulement pour en donner une idée, sur le tout premier niveau, c'est-à-dire sur les conditions et contraintes qui semblent avoir leur siège au niveau de l'*humanité* toute entière. De nombreux travaux, aujourd'hui, s'attachent à mettre en évidence des traits de comportements humains qui ne seraient pas le propre d'une culture humaine donnée, mais appartiendraient à l'espèce humaine en général. On ne donnera ici qu'un exemple, emprunté au livre de Michael Tomasello, *Why we cooperate* (2009) :

Researchers set up a situation in which twelve-month-old, pre-linguistic infants watched while an adult engaged in some adult-centered task such as stapling papers. The adult also manipulated another object during the same period of time. Then she left the room and another adult came in and moved the two objects to some shelves. The original adult then came back in, papers in hand, ready to continue stapling. But there was no stapler on her table, as she searched for it gesturing quizzically but not talking at all. As in the instrumental helping studies, the infants perceived the adult's problem and were motivated to help her, which most of them did by pointing to the location of the sought-for stapler. The children were far less likely to point at the other object, which had been handled an equal amount. The infants did not want the stapler for themselves. They did not engage in the usual demanding behavior—whining, reaching, and so forth—after the adult grasped the stapler. Once she had it in her hand, the children stopped pointing and were satisfied. In follow-up studies, the researchers also ruled out that infants simply wanted to see the stapling activity reinstated.

While infants consistently demonstrate understanding of informative pointing, the same is not true of apes. Apes do not point for one another, and when they do point for humans, they do so mainly to get humans to fetch food for them. Indeed, in all observed cases of apes pointing for humans, the motive is directive (imperative). Also, apes who have learned some kind of human-centered communication use it to communicate only with humans, not with one another, and they do so almost exclusively for directive purposes. (pp. 15-16)

Ce comportement de tout-petits et d'autres comportements semblables ne paraît pas naître de l'éducation à proprement parler mais semble procéder de ce que l'évolution darwinienne a fait des « humains ». Le même auteur écrit à ce propos :

In the next chapter I will try to provide an evolutionary explanation for why only humans help others by providing needed information. In terms of ontogeny, it seems hard to imagine that these twelve-month-old infants are providing information helpfully because they have been rewarded or encouraged to do so; sharing information freely seems to come naturally even to very young children. Of course children soon learn to lie also, but that comes only some years later and presupposes preexisting cooperation and trust. If people did not have a tendency to trust one another's helpfulness, lying could never get off the ground. (p. 21)

Il y aurait ainsi des conditions portées par les humains en tant que tels, des conditions qui seraient indépendantes des civilisations et des sociétés, même si leur manifestation concrète revêt des expressions culturelles variables. On est donc là, en principe, dans un cas où *l'on peut compter* sur de telles conditions : elles iraient de soi pour l'espèce humaine en général.

2.4. Qu'en est-il au niveau de la civilisation ? Ce terme renvoie à des groupements de sociétés qui, à propos d'un domaine d'activité, montrent des équipements praxéologiques voisins sinon identiques. (Une même société peut ainsi, à un moment donné de son histoire, participer de *plusieurs* civilisations différentes.) Une civilisation apporte des réponses aux grandes questions qui assaillent *Homo sapiens*, notamment celles de la reproduction de l'espèce, du statut des femmes, du rapport aux œuvres et à la connaissance des œuvres. Ces réponses sont diffractées au sein des diverses *sociétés* qui participent de la civilisation considérée, à travers notamment le prisme de l'*école* ou, plus exactement, des diverses *formes d'école* auxquelles une société donnée permet d'exister. À leur tour, ces formes d'école commandent les diverses *pédagogies* possibles ainsi que les types de *systèmes didactiques* $S(X ; Y ; ♥)$ compatibles avec elles.

2.5. D'une manière générale, l'ensemble des contraintes pesant sur la formation des systèmes didactiques $S(X ; Y ; ♥)$ fait que tant les instances X et Y que les enjeux didactiques ♥ sont soumis à des déterminants parfois très stricts. Illustrons cela sur l'exemple des mathématiques et de l'éducation des filles. On n'ignore pas que l'on doit à Camille Sée (1847-1919) la première loi organisant l'enseignement *secondaire* féminin. Dans sa proposition de loi (1879),

Sée précise ce que, selon lui, devraient être les œuvres étudiées dans les nouveaux établissements de jeunes filles :

Le programme d'enseignement ne peut pas être fait par la loi ; il suffit d'en indiquer les bases. À Genève et dans les autres établissements analogues de la Suisse, le collège de jeunes filles s'est bien peu écarté du programme imposé au collège de garçons. Tout ce qui, dans les mathématiques, est préparation aux écoles spéciales, doit naturellement disparaître ; mais il est nécessaire aux femmes de savoir très bien compter, et avec une bonne préparation, elles y excellent. La physique, la chimie, l'histoire naturelle, l'histoire, la géographie peuvent être conservées sans modifications ; il en est de même des études littéraires. Nous n'irons pas jusqu'à bannir le latin et le grec. C'est une puérité de dire que les hommes ont surtout besoin des langues anciennes pour l'étude du droit et de la médecine ; les lettres classiques sont surtout un moyen puissant d'éducation intellectuelle et morale.

Tout au plus pourrait-on, à l'inverse de ce qui se passe dans les lycées, rendre l'étude des langues vivantes obligatoire, et celle des langues anciennes facultative. Le latin bien enseigné s'apprend plus facilement et en moins de temps que l'allemand.

Le cours de philosophie comprendra, comme dans les collèges de garçons, la psychologie, la logique et la morale. Il n'est pas bon, même pour les garçons, de se perdre dans les systèmes philosophiques, qu'on doit réserver aux Facultés ; on doit se borner, dans l'enseignement des collèges, aux vérités incontestables, aux méthodes éprouvées. On y enseignera, comme dit Condorcet, « les principes de la morale qui, fondés sur nos sentiments naturels et sur la raison, appartiennent également à tous les hommes ». On bannira l'enseignement qui « donnerait à des dogmes particuliers un avantage contraire à la liberté des opinions ». On laissera les ministres des différents cultes le donner, en dehors des classes, aux élèves internes, quand les parents en auront manifesté la volonté.

La liberté sera ainsi satisfaite et « la puissance publique n'aura point usurpé sur les droits de la conscience, sous prétexte de l'éclairer et de la conduire ».

Le cours d'hygiène, prescrit en 1872 pour les lycées, aurait ici un intérêt tout spécial. On y enseignerait tout ce que doit savoir une bonne infirmière, et, par dessus tout, tout ce que doit savoir une bonne mère.

On pourrait aussi faire utilement quelques leçons de droit usuel. Les femmes savent à peine ce que c'est qu'un contrat de mariage, une donation, un testament, un bail, un sous-seing, une tutelle ; elles comprennent très mal leurs droits, elles donnent aveuglément leur signature, se compromettent par ignorance, sont obligées de recourir à un conseiller pour les actes les plus

simples. Elles se font même gloire, chose singulière, d'une ignorance dont on abuse souvent contre elles.

La distinction entre filles et garçons fait là, comme en passant, l'objet d'une remarque savoureuse à propos des langues anciennes ! Mais elle transparaît surtout dans la référence aux « écoles spéciales », c'est-à-dire aux « grandes écoles » : les filles, pour longtemps encore (l'École polytechnique n'acceptera des filles qu'à partir de 1972), n'ont pas « vocation » à y être admises. Cela noté, voici le texte de la loi – dite Camille Sée – qui sera effectivement votée le 21 décembre 1880 :

Loi du 21 décembre 1880 sur l'enseignement secondaire des jeunes filles

Le Sénat et la Chambre des députés ont adopté,

Le Président de la République promulgue la loi dont la teneur suit :

Art. 1er.- Il sera fondé par l'Etat, avec le concours des départements et des communes, des établissements destinés à l'enseignement secondaire des jeunes filles.

Art. 2.- Ces établissements seront des externats. Des internats pourront y être annexés, sur la demande des conseils municipaux, et après entente entre eux et l'Etat. Ils seront soumis au même régime que les collèges communaux.

Art. 3.- Il sera fondé par l'Etat, les départements et les communes, au profit des internes et des demi-pensionnaires, tant élèves qu'élèves-maîtresses, des bourses dont le nombre sera déterminé dans le traité constitutif qui interviendra entre le ministère, le département et la commune où sera créé l'établissement.

Art. 4.- L'enseignement comprend : 1° l'enseignement moral ; 2° la langue française, la lecture à haute voix, et au moins une langue vivante ; 3° les littératures anciennes et modernes ; 4° la géographie et la cosmographie ; 5° l'histoire nationale et un aperçu de l'histoire générale ; 6° l'arithmétique, les éléments de la géométrie, de la chimie, de la physique et de l'histoire naturelle ; 7° l'hygiène ; 8° l'économie domestique ; 9° les travaux d'aiguille ; 10° des notions en droit usuel ; 11° le dessin ; 12° la musique ; 13° la gymnastique.

Art. 5.- L'enseignement religieux sera donné, sur la demande des parents, par les ministres des différents cultes, dans l'intérieur des établissements, en-dehors des heures des classes. Les ministres des différents cultes seront agréés par le ministre de l'instruction publique. Ils ne résideront pas dans l'établissement.

Art. 6.- Il pourra être annexé aux établissements d'enseignement secondaire un cours de pédagogie.

Art. 7.- Aucune élève ne pourra être admise dans les établissements d'enseignement secondaire sans avoir subi un examen constatant qu'elle est en état d'en suivre les cours.

Art. 8.- Il sera, à la suite d'un examen, délivré un diplôme aux jeunes filles qui auront suivi les cours des établissements publics d'enseignement secondaire.

Art. 9.- Chaque établissement est placé sous l'autorité d'une directrice. L'enseignement est donné par des professeurs hommes ou femmes munis de diplômes réguliers.

La présente loi, délibérée et adoptée par le Sénat et par la Chambre des députés, sera exécutée comme loi de l'Etat.

Fait à Paris, le 21 décembre 1880.

JULES GREVY.

Par le Président de la République :

Le ministre de l'instruction publique et des beaux-arts,

JULES FERRY.

On aura noté que les études dans les « établissements destinés à l'enseignement secondaire des jeunes filles » ne sont pas sanctionnées par un baccalauréat en bonne et due forme – cela attendra la réforme de Léon Bérard en 1924 (sur tout cela, voir l'article de *Wikipédia* intitulé « Lycées de jeunes filles » ; et aussi Prost, 1968, pp. 261-265). Ajoutons que la distinction *de jure* (et pas seulement *de facto*), si l'on peut dire, entre garçons et filles durera longtemps encore. À titre d'illustration, on a reproduit ci-après un large extrait de l'épreuve du certificat d'études primaires proposée en 1959 en Dordogne (Cabanel, 2008, pp. 42-44). On y découvrira qu'il y avait des questions *pour les filles* et des questions *pour les garçons*, et même des questions pour les filles *rurales* et des questions pour les filles *urbaines* – et il en était de même pour les garçons, il y avait parfois même des questions spéciales pour les « maritimes ») :

DICTÉE. ...

Questions. – ...

CALCUL. – I. Au centre d'un terrain carré de 120 mètres de périmètre, on trace un cercle de 18 mètres de diamètre pour faire une pelouse.

On demande : 1. La surface totale du terrain carré.

2. La surface de la pelouse.

3. La surface du terrain qui reste en dehors de la pelouse.

II. 1. Une maison a été achetée 20 000 NF et le propriétaire a eu 20 % de frais d'acquisition.

Quel est le prix de revient de cette maison ?

2. La maison est louée à trois locataires. Le premier paie 144 NF par trimestre. Le deuxième 37 NF par mois et le dernier 7 NF par semaine. Quel est le montant annuel du loyer [perçu] par le propriétaire ?

3. Le propriétaire effectue chaque année des réparations pour une somme de 400 NF. Il paie, en outre, 220,80 NF d'impôts et une prime d'assurance se montant à 0,48 % du prix de revient de la maison.

Quel est le revenu net annuel que cette maison assure à son propriétaire ?

4. Quel est le taux de placement du capital représenté par la maison ?

RÉDACTION. ...

HISTOIRE – GÉOGRAPHIE. – I. Citez trois grands ministres de l'Ancien Régime. Sous quels rois ont-ils exercé leur pouvoir ? Dites ce qu'ils ont fait de plus important.

II. Croquis simple des États-Unis d'Amérique : indiquez les deux principales chaînes de montagnes, les océans, les grands lacs, un grand fleuve, une ville sur chaque côte.

Énumérez les trois États de l'Amérique du Nord et donnez leur capitale.

SCIENCES. 1^{re} question :

Commune à tous les candidats : Dessinez une dent en coupe et indiquez ses différentes parties.

À l'aide d'un autre croquis, expliquez ce qu'est une carie dentaire.

Comment doit-on procéder pour éviter d'avoir des dents cariées ?

2^e question :

a) Garçons urbains et ruraux : Dessinez une ampoule électrique et indiquez ses différentes parties.

Vous lisez sur la douille d'une lampe les indications suivantes :

125 V. 60 W ; que signifient-elles ?

Sachant que le kWh coûte 0,24 NF, combien dépensera cette ampoule lorsqu'elle demeurera allumée 10 heures.

b) Filles urbaines : Dites quel peut être l'emploi, dans les travaux de nettoyage et d'entretien, des produits suivants : la laine d'acier, le carbonate de soude, l'eau de javel, la benzine, l'encaustique.

c) Filles rurales : Quels sont les avantages de l'allaitement maternel ? Indiquez quelques aliments que ne doit pas prendre une maman qui allaite.

CALCUL MENTAL. 1. Un séchoir à linge comprend 10 fils tendus de 275 cm. Quelle est en mètres la longueur totale du fil de fer employé ?

2. Un bol contient 0,25 litre. Combien pourra-t-on remplir de bols avec 12 litres de lait ?

3. J'obtiens une remise de 20 % sur un article de 15 NF. Combien dois-je payer ?

4. Une montre retarde de 6 mn par jour. Elle est mise à l'heure le lundi à midi. Quelle heure marquera-t-elle le mercredi à midi ?

5. Une ménagère rentre chez elle avec 3,50 NF. Elle a dépensé les $\frac{3}{4}$ de la somme qu'elle avait emportée. Quelle était cette somme ?

DESSIN. – Décoration d'une assiette de 8 cm de rayon extérieur et 5 cm de rayon intérieur.

Motif imposé : des cerises.

COUTURE. – Bâter un ourlet de 10 cm. Faire une boutonnière.

2.7. C'est peu dire que certaines des conditions qui organisent une civilisation peuvent avoir des effets non seulement dans les salles de classe mais dans le choix des œuvres à étudier et la manière dont elles se présentent aux élèves : dans leur transposition didactique. On s'arrêtera ici sur un exemple central, celui de l'usage, en mathématiques, des symboles, des notations et des formalismes. On a rencontré, dans le « menu » prévu par la loi Camille Sée du 21 décembre 1880, la mention de « l'arithmétique » ainsi que des « éléments de la géométrie », mais non de l'algèbre. Traditionnellement, l'étude de l'algèbre, à l'occasion de laquelle étaient introduits ce qu'on appelait alors les « nombres algébriques », c'est-à-dire les nombres dits aujourd'hui *relatifs*, marquait un passage d'un univers dans un autre, plus avancé et plus sophistiqué, qui conduisait jusqu'au seuil des « hautes » mathématiques. Aujourd'hui encore, dès lors qu'ils s'adressent à un public de « non-mathématiciens » (ce qui est une appellation contestable), certains auteurs se gardent d'user de notations « mathématiques », voire de tout autre outillage que celui des mots de la langue dite « naturelle ». C'est ainsi que, dans son ouvrage *Seeing through statistics* (2^e éd., 1999 ; 3^e éd., 2005), Jessica M. Utts use de cette très ancienne distinction entre « formulation en mots » – sous la forme de *règles* – et usage de symboles – pour écrire des *formules*. Prenons ainsi le cas de l'écart type d'une série statistique univariée ; l'auteure propose la règle de calcul de l'écart type sous la forme suivante :

Computing the Standard Deviation

Here are the steps necessary to compute the standard deviation:

1. Find the mean.
2. Find the deviation of each value from the mean = value – mean.
3. Square the deviations.
4. Sum the squared deviations.
5. Divide the sum by #Values (the number of values) – 1, resulting in the variance.
6. Take the square root of the variance. The result is the standard deviation.

Let's try this for the set of values 90, 90, 100, 110, 110.

1. The mean is 100.
2. The deviations are $-10, -10, 0, 10, 10$.
3. The squared deviations are 100, 100, 0, 100, 100.
4. The sum of the squared deviations is 400.
5. The #Values $-1 = 5 - 1 = 4$, so the variance is $400/4 = 100$.
6. The standard deviation is the square root of 100, or 10.

Although it may seem more logical in step 5 to divide by the number of values, rather than by the number of values minus 1, there is a technical reason for subtracting 1. The reason is beyond the level of this discussion but concerns statistical bias, as discussed in Chapter 3. (p. 121)

La remarque sur l'écart type *corrigé* semble faire référence à un plus haut savoir, présent *in absentia*, si l'on peut dire, et que symbolise la notion de *biais* – en fait d'*estimateur* « *sans biais* ». Cela étant, l'auteure introduit aussi, en certains chapitres, une section intitulée *For those who like formulas*, ce qu'on illustrera à nouveau sur le cas de l'écart type (3^e éd, pp. 140-141) :

For Those Who Like Formulas

The Data

n = number of observations

x_i = the *i*th observation, $i = 1, 2, \dots, n$

The Mean

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

The Variance

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

The Computational Formula for the Variance (easier to compute directly with a calculator)

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right)$$

The Standard Deviation

Use either formula to find s^2 , then take the square root to get the standard deviation s .

Tout cela, donc, est réservé par l'auteure à une petite fraction de ses lecteurs.

2.8. L'opposition entre *règle* pour les gens ordinaires et *formule* pour les « savants » est ancienne. Longtemps, la règle, exprimée en *mots*, est faite pour être sue par cœur et récitée (à autrui ou à soi-même). On la retrouve dans tous les textes d'enseignement d'autrefois. Ainsi en va-t-il dans ces extraits du *Cours abrégé d'arithmétique* de Carlo Bourlet :

RÈGLE. – Pour faire la preuve par 9 d'une division, on calcule les restes de division par 9 du diviseur et du quotient. On en fait le produit on en prend le reste de division par 9. On ajoute ce premier reste au reste de division par 9 du reste de l'opération à vérifier, et on prend le reste de division par 9 de cette somme. Ce résultat doit être égal au reste de division par 9 du dividende.

RÈGLE. – Pour calculer la longueur d'un arc de cercle on calcule d'abord la longueur de la circonférence entière dont il fait partie ; on la divise par 360 et on multiplie le résultat par le nombre des degrés et fraction décimale de degré contenus dans l'arc.

Il faut donc, au préalable, quand l'arc est donné en degrés, minutes et secondes, transformer ce nombre en degrés et fraction décimale de degré.

RÈGLE. – Pour avoir, dans une règle de trois simple et directe, la valeur inconnue de la grandeur dont on ne connaît qu'une première valeur, on multiplie cette première valeur par le rapport de la seconde à la première valeur de l'autre grandeur.

RÈGLE – Pour partager un nombre en parties proportionnelles à plusieurs autres, il suffit de calculer des nombres proportionnels aux nombres donnés dans le rapport du nombre à partager à la somme de ces nombres.

La *règle* est au centre de toute l'arithmétique traditionnelle, où elle ne sera que très tardivement remplacée par la *formule*. Là où on utiliserait, aujourd'hui, la formule

$$\ell = \frac{2\pi R}{360^\circ} \times a,$$

en obtenant ainsi, par exemple, lorsque le rayon du cercle est $R = 3$ cm et l'arc $a = 37,8^\circ$, pour longueur ℓ de l'arc d'angle a le nombre $\ell = \frac{2\pi R}{360^\circ} \times a = \frac{6 \text{ cm} \times \pi}{360^\circ} \times 37,8^\circ = \frac{6 \text{ cm} \times 37,8}{360} \times \pi = \frac{226,8 \text{ cm}}{360} \times \pi = 0,63 \text{ cm} \times \pi \approx 1,98 \text{ cm}$, on doit ici, selon la règle, calculer « d'abord la

longueur de la circonférence entière », soit $6 \times \pi$ cm, ou 18,84 cm à peu près (en prenant π égal à 3,14) ; ensuite diviser le résultat intermédiaire ainsi obtenu par 360, ce qui donne (approximativement) $0,05 \text{ cm}^\circ$, enfin multiplier (ici) par $37,8^\circ$: on obtient en l'espèce $\ell \approx 1,89 \text{ cm}$. On aura noté que, à cause des approximations – traditionnelles – mais aussi de

l'ordre des opérations tel que le prescrit la règle, la longueur de l'arc est sous-évaluée de presque un millimètre ! C'est que les règles sont des formules « mises en mots » et, par cela, *rigidifiées* – rigidité propre à l'*arithmétique* et qui disparaîtra avec l'*algèbre*, où l'on apprend à « manipuler » les formules, et par exemple à écrire des égalités telles que celles-ci :

$$\ell = \frac{2\pi R}{360^\circ} \times a = \frac{2aR}{360^\circ} \times \pi, \text{ etc.}$$

À un niveau certes élémentaire, une grande partie des connaissances mathématiques utiles est longtemps exprimée sous forme de petits discours, de textes, que l'on peut dès lors *apprendre par cœur* : il n'y a pas de bornes aisément assignables à l'*empire de l'apprendre et du savoir par cœur*. Par contraste, les *formules* resteront longtemps une affaire de « savants » ou de quasi-savants, comme on le saisira mieux en lisant ce qu'Émile Littré en dit dans son *Dictionnaire de la langue française*. Voici d'abord un extrait de la notice consacrée par Littré à l'entrée « Règle » :

RÈGLE

Opération d'arithmétique. L'addition, la soustraction, la multiplication et la division sont les quatre premières règles de l'arithmétique, dites, par antonomase, les quatre règles. Faire la règle du plus grand commun diviseur.

Vous ferez deux règles d'arithmétique, et vous copierez trois pages dans l'Imitation, GENLIS, Théât. d'éduc. la Lingère, I, 6.

Il faut se prémunir, en calcul de finance, contre toutes les idées qui ne sont pas très simples, parce que la science ne doit pas s'élever plus haut que celle des quatre règles de l'arithmétique, TOULONGEON, Instit. Mém. sc. mor. et pol. t. IV, p. 445.

Règle de trois, question où, trois termes d'une proportion étant donnés, il faut chercher le quatrième.

Règle de fausse position, règle dans laquelle, ayant à découvrir un ou plusieurs nombres inconnus, on prend faussement, à la place d'un d'entre eux, un nombre connu quelconque, avec lequel on calcule les autres ; ce qui en fait connaître les rapports et par suite la valeur véritable.

Il y a des problèmes que l'on ne résout commodément que par la règle de fausse position, CORDIER, Instit. Mém. scienc. t. VII, p. 537.

Par contraste, voici un extrait de la notice où Littré explicite le mot « Formule » :

FORMULE (extrait)

Terme de mathématique. Ensemble de termes algébriques contenant l'expression générale d'un calcul ou son résultat. Formule algébrique. Formule différentielle. Formule intégrale.

Il [König] fit, l'année passée, le voyage de la Haye à Berlin, uniquement pour aller conférer avec Maupertuis sur une formule d'algèbre et sur une loi de la nature dont vous ne vous souciez guère, VOLT. Lett. Mme Denis, 24 juill. 1752.

Le mot de formule évoque presque toujours un contexte technique (judiciaire, diplomatique, scientifique, etc.) en même temps qu'il exhale un léger parfum d'arcanes. Notons que, en anglais courant, *formula* a un autre emploi, quelque peu inattendu pour un francophone, mais bien dans la lignée sémantique du mot : il y désigne *aussi* « a type of liquid for babies that is made to be similar to a mother's milk », acception qui dérive manifestement de l'emploi du mot pour désigner « a prescription for making up a medicine, baby's food, etc. » et donc « a substance prepared according to such a prescription ». Le mot de formule n'est employé en mathématiques, semble-t-il, qu'à partir du milieu du XVIII^e siècle environ – d'après le *Dictionnaire historique de la langue française*, on trouve ainsi l'expression « formule algébrique » sous la plume de Voltaire en 1752. L'*Encyclopédie* de Diderot et D'Alembert renferme l'article suivant, dû à d'Alembert (qui signe O), où l'on verra s'insinuer un débat scientifique sans aménité sur la valeur d'un résultat et les « mérites » d'un chercheur, victime de l'humeur de d'Alembert, en l'espèce le pauvre Pierre Varignon (1654-1722) qui, dans l'histoire des sciences mathématiques, n'a sans doute pas autant démerité que le laisse entendre d'Alembert :

S. f. (Algebre) est un résultat général tiré d'un calcul algébrique, & renfermant une infinité de cas ; ensorte qu'on n'a plus à substituer que des nombres particuliers aux lettres, pour trouver le résultat particulier dans quelque cas proposé que ce soit. Une formule est donc une méthode facile pour opérer ; & si l'on peut la rendre absolument générale, c'est le plus grand avantage qu'on puisse lui procurer ; c'est souvent réduire à une seule ligne toute une science. Mais pour qu'une formule générale soit vraiment utile, & qu'il y ait du mérite à l'avoir trouvée, il faut que la formule générale soit plus difficile à trouver que la formule particuliere, c'est-à-dire que le problème énoncé généralement renferme des difficultés plus grandes que le problème particulier qui a donné occasion de chercher la méthode générale. Feu M. Varignon, géometre de l'académie des Sciences, aimoit à généraliser ainsi des formules ; mais malheureusement ses formules générales étoient presque toujourns privées de l'avantage dont nous parlons : & dans ce cas une formule générale n'est qu'une puérilité ou une charlatanerie. M. Bernoulli, ou un autre

géometre, résolvait-il un problème difficile ? M. Varignon aussi-tôt le généralisoit, de manière que l'énoncé plus général renfermoit en apparence plus de difficultés, mais en effet n'en avoit aucune de plus, & n'exigeoit pas qu'on ajoutât la moindre chose à la méthode particulière : aussi M. Bernoulli disoit-il quelquefois après avoir résolu un problème, qu'il le laissoit à généraliser à M. Varignon. (O)

2.9. Ce qui précède suggère que la foule immense des conditions et contraintes de tous niveaux qui peut gouverner le didactique est tissée d'innombrables interdépendances, en sorte qu'on ne saurait vraiment prétendre séparer dogmatiquement tel ou tel « paquet » de conditions. Pour ne prendre ici qu'un exemple, l'enseignement d'une œuvre que d'aucuns tiennent pour « mathématique » pourra se faire avec « très peu » de mathématiques, parce qu'on souhaite « épargner » au public concerné le franchissement de la frontière séculaire qui sépare les mots des symboles. Voici de cela un exemple simple. Il est classique, en statistique, de noter comme suit un *tableau de contingence* croisant deux variables X et Y (la variable X a ici deux modalités, x_1 et x_2 , tandis que Y a trois modalités, y_1, y_2, y_3) :

	y_1	y_2	y_3	Total en ligne
x_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	$n_{1\bullet}$
x_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$n_{2\bullet}$
Total en colonne	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	$n_{\bullet 3}$	N

On a, pour tout i ($= 1, 2$), $n_{i\bullet} = \sum_j n_{ij}$ et, de même, pour tout j ($= 1, 2, 3$), $n_{\bullet j} = \sum_i n_{ij}$. Le total général est $N = \sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j} = \sum_{i,j} n_{ij}$. À partir de ces « effectifs observés », on calcule les « effectifs théoriques » correspondant à l'hypothèse selon lesquelles X et Y seraient des variables *indépendantes*. Avec des notations évidentes on aurait alors : $P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i) P(Y = y_j)$. Admettons que $P(X = x_i) \approx \frac{n_{i\bullet}}{N}$ et $P(Y = y_j) \approx \frac{n_{\bullet j}}{N}$. Désignons par c_{ij} l'effectif théorique cherché et admettons de même que $\frac{c_{ij}}{N} \approx P(X = x_i \text{ et } Y = y_j)$; il vient alors $\frac{c_{ij}}{N} \approx \frac{n_{i\bullet}}{N} \frac{n_{\bullet j}}{N}$. On définit pour cela « l'effectif théorique » c_{ij} en posant : $c_{ij} = \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{N}$. On peut écrire :

$$c_{ij} = \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{N} = \frac{n_{i\bullet}}{N} \times n_{\bullet j} = \frac{n_{\bullet j}}{N} \times n_{i\bullet}$$

L'effectif théorique c_{ij} apparaît ainsi comme égal à l'effectif qu'on aurait observé dans la case (i, j) si...

– la distribution dans la colonne j (pour $Y = y_j$) avait été la même (en proportion) que la « distribution marginale » de Y (marge de droite) : $c_{ij} = \frac{n_{i\bullet}}{N} \times n_{\bullet j}$ (on distribue dans la colonne j l'effectif marginal $n_{\bullet j}$ selon la distribution marginale de X : voir le tableau ci-dessous) ;

	...	y_j	...	Total en ligne
...
x_i	...	c_{ij}	...	$n_{i\bullet}$
...
Total en colonne	...	$n_{\bullet j}$...	N

– la distribution dans la ligne i (pour $X = x_i$) avait été la même (en proportion) que la distribution marginale de X (marge d'en bas) : $c_{ij} = \frac{n_{\bullet j}}{N} \times n_{i\bullet}$ (on distribue dans la ligne i l'effectif marginal $n_{i\bullet}$ selon la distribution marginale de Y : voir-dessus). Cette présentation fait un usage décomplexé de notations elles-mêmes classiques. Mais certains auteurs présentent cet ensemble de notions (qui permettront notamment de définir la distance du χ^2) en n'utilisant aucune notation littérale, tout se passant à l'aide d'exemples numériques regardés comme « paradigmatiques ». Voici par exemple un extrait de l'ouvrage *L'analyse factorielle* de Philippe Cibois (1994, p. 9) :

En premier lieu, exprimons la façon dont nous avons calculé les effectifs théoriques correspondant à la situation d'indépendance entre les séries et les orientations. Pour chaque série nous avons multiplié l'effectif de la série par la proportion moyenne, c'est-à-dire 50/100 pour l'Université, 10/100 pour les CPGE et 40/100 pour les autres orientations.

On voit que pour avoir l'effectif théorique d'une case, il suffit de multiplier l'effectif de la ligne correspondante par la proportion de la colonne, ou, ce qui revient au même de multiplier les effectifs marginaux de ligne et de colonne en divisant par le total général.

Chaque case du tableau ci-dessous est obtenue en multipliant la marge correspondante ligne par la marge correspondante colonne.

	<i>Université</i>	<i>CPGE</i>	<i>Autres</i>	
Série A	10	2	8	20
BDD'	15	3	12	30
CE	10	2	8	20
Technique	15	3	12	30
	50/100	10/100	40/100	

Dans tout l'ouvrage, l'auteur s'impose à l'évidence de n'employer jamais aucune « formule » exprimée symboliquement. Bien entendu, cela n'est pas une obligation absolue, même en sciences humaines et sociales (SHS). Et cela semble l'être d'autant moins qu'on se rapproche plus des sciences de la nature. Il semble en outre que les choix faits en la matière dépendent des cultures nationales et donc varient de société à société. Voici à titre de simple illustration un extrait de l'ouvrage de Stephen Holzner intitulé *Physics Essentials for Dummies* (2010), c'est-à-dire « Les bases de la physique pour les Nuls ». Le passage choisi, bien que très simple, comporte pourtant plusieurs aspects dignes d'intérêt (pp. 23-24) :

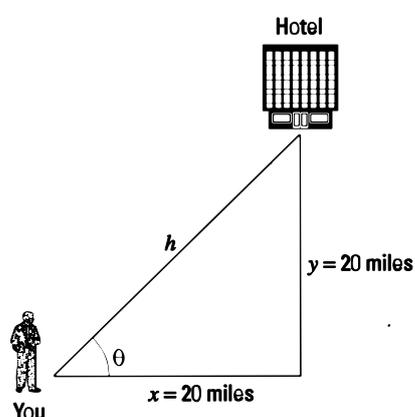


Figure 2-7: Using the angle created by a vector to get to a hotel.

Finding h isn't so hard because you can use the Pythagorean theorem:

$$h = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Plugging in the numbers gives you

$$h = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(20 \text{ mi})^2 + (20 \text{ mi})^2} = 28.3 \text{ mi}$$

The hotel is 28.3 miles away. What about the angle θ ? Because of your superior knowledge of trigonometry, you know that

$$y = h \sin \theta$$

In other words, you know that

$$y / h = \sin \theta$$

Now all you have to do is take the inverse sine:

$$\theta = \sin^{-1} (y / h) = \sin^{-1} [(20 \text{ mi}) / (20 \text{ mi})] = 45^\circ$$

You now know all there is to know. The hotel is 28.3 miles away, at an angle of 45° . Another physics triumph!

Par rapport à la *culture mathématique scolaire française actuelle*, on aura noté d'abord le maintien des unités dans les calculs (ce qu'on n'ose pas trop faire encore au collège, en France), ensuite l'usage du sinus inverse, noté \sin^{-1} . Ce calcul, qui, aux yeux de professeurs de mathématiques français, relève (à ces détails près) *des mathématiques*, est présenté ici comme « un triomphe de la physique » (bien qu'il faille pour le conduire le secours de cette science auxiliaire qu'est la *trigonométrie*). Il y a là une stratégie usuelle pour intégrer les mathématiques nécessaires à un type d'activité donné : ce ne sont pas des mathématiques, dit-on implicitement au lecteur amateur de physique, simplement quelques-uns des outils de travail indispensables au physicien. Mais on aura noté surtout que la technique relative au cas général est présentée ici sur un cas particulier *ayant valeur paradigmatique*, cas particulier que d'aucuns seraient peut-être tentés de « traiter » par une technique *ad hoc* : l'angle est ici de 45° puisque c'est un angle à la base d'un triangle rectangle isocèle ; et l'on peut savoir, de même, que la distance, c'est-à-dire l'hypoténuse de ce triangle rectangle isocèle, est donnée par $20 \text{ mi} \times \sqrt{2} \approx 20 \text{ mi} \times 1,414 = 28,28 \text{ mi} \approx 28,3 \text{ mi}$. Bien entendu, si l'on avait eu $x = 20 \text{ mi}$ et $y = 25 \text{ mi}$ (par exemple), c'est à la technique *présentée par l'auteur* qu'il aurait fallu recourir ; on aurait eu en l'espèce : $h = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(20 \text{ mi})^2 + (25 \text{ mi})^2} = \sqrt{400 + 625} \text{ mi} = 31,015... \text{ mi} \approx 31 \text{ mi}$; et $\sin^{-1} (y / h) = \sin^{-1} (25 \text{ mi} / 31,015... \text{ mi}) \approx 51,34^\circ$. L'auteur a donc fait un choix « moyen » entre l'usage « moderne » de formalismes et l'emploi « à l'ancienne » de valeurs numériques « paradigmatiques ». La frontière numérique/symbolique a ainsi des tracés variables, que le chercheur en didactique doit apprendre à repérer.

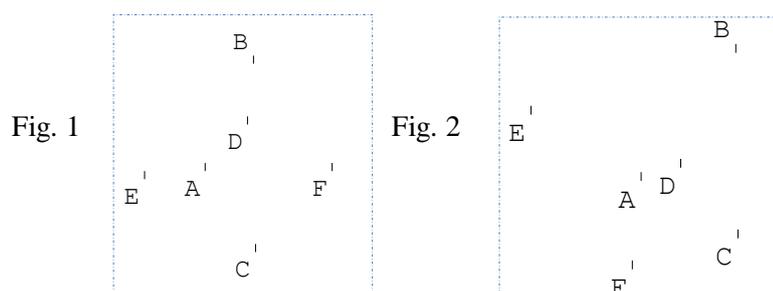
3. Une recherche en questions (1)

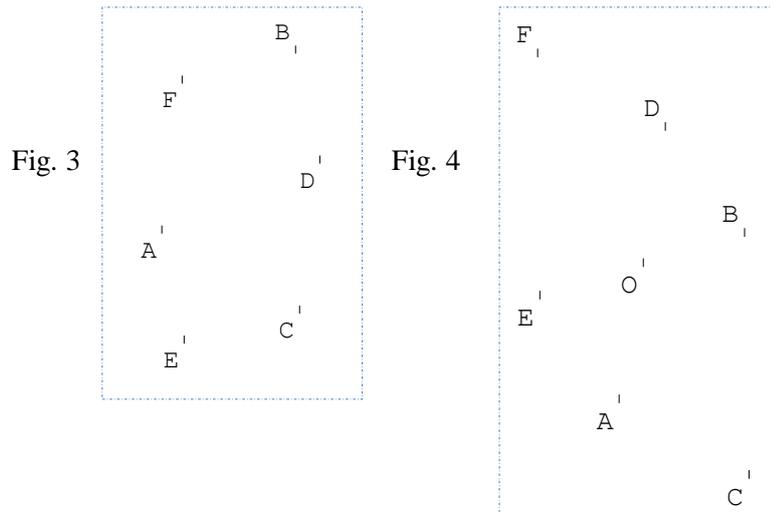
3.1. La rupture praxéologique nécessaire entre chercheur et professeur suppose que les chercheurs et les équipes de recherche en didactique se saisissent pleinement de la pluralité des conditions qui « jouent » dans la diffusion de la connaissance des œuvres – mathématiques ou autres – au sein des sociétés et de leurs institutions, donc auprès de leurs

acteurs. À cet égard, un premier point mérite d'être précisé à nouveau. On a défini plus haut (dans la *Leçon 1*) le didactique en exigeant qu'une *intention* didactique se manifeste : « ... dans une situation sociale donnée, il y a du didactique lorsque quelqu'un ou, plus généralement, quelque instance (personne ou institution) envisage de faire (ou fait) quelque chose *afin de* faire que quelqu'un ou quelque instance apprenne quelque chose. » C'est ici la locution « afin de » qui traduit l'intention prêtée à l'instance qui « fait » ou « envisage de faire » un geste didactique. On a remarqué déjà que les conditions et contraintes résultant de tels gestes didactiques « ne sont pas les seules conditions et contraintes que la science didactique doit prendre en compte pour étudier la diffusion sociale des œuvres », puisque, par exemple « telle conséquence non voulue d'une condition créée par un geste didactique intentionnel peut avoir des effets didactiques ». Ajoutons à cela une autre remarque fondamentale. Une condition créée délibérément dans une intention didactique peut ne pas avoir d'effets sensibles en termes d'étude, de rencontre, d'apprentissage de telle ou telle œuvre. Mais, inversement, une condition créée *pour de tout autres motifs* ou qui s'est créée « spontanément » pourra apparaître à certains, à raison ou à tort, *comme didactiquement opérante*. Dans un tel cas, très généralement, d'aucuns en viendront à *manifester alors l'intention de créer cette condition* dans des situations où elle ne prévaut pas « spontanément », et cela afin de favoriser certaines rencontres d'œuvres et certains apprentissages. La condition non didactique initiale passera ainsi à l'état de condition « didactique », regardée comme telle par certaines instances. C'est là évidemment une raison essentielle pour que le chercheur en didactique n'en reste pas à prendre en compte les seules conditions qu'inspire, à ce qu'il croit savoir, une intention didactique manifeste.

3.2. Donnons une brève illustration, à rattacher au TD 3 : dans une classe de 5^e, le professeur décide de proposer l'activité suivante :

Dans les quatre figures ci-dessous, on a marqué les images D, E et F des points A, B et C par une symétrie centrale ou axiale. Dans chaque cas, dire si la symétrie est axiale ou centrale et justifier votre choix.





On peut *imaginer* que ce professeur se persuade qu'en proposant une telle activité dans une classe de 5^e il crée une condition de nature à aider les élèves à distinguer plus sûrement entre symétries centrales et symétries axiales, donc à mieux « apprendre » la symétrie centrale. On *imagine* aussi qu'il se peut *que cela ne les aide en rien*. On voit en outre que la décision de créer une telle condition – ou d'inviter les professeurs à la créer dans les classes – peut avoir été imaginée à un niveau plus élevé pour s'inscrire par exemple dans ces organes spécialisés que sont les programmes nationaux ou, un peu en aval, les manuels de mathématiques du commerce. Concluons : dans tous les cas, en principe, *rien n'est sûr* ; tout doit être *vérifié*.

3.3. Pour étudier le didactique et les conditions – facilitatrices ou inhibitrices – du didactique, le chercheur ξ doit étudier les conditions sous lesquelles pourront se former et vivre – « fonctionner » – certains types de systèmes didactiques $S(X; Y; \heartsuit)$. Situons-les rapidement par rapport à l'ensemble examiné jusqu'ici. Pour cela, on peut partir d'une situation relevant de la problématique primordiale, dans laquelle une instance V regarde une œuvre O comme vérifiant la relation $\mathfrak{I}(K, O, \Pi, U)$: pour V , l'œuvre O est, sous les contraintes K , indispensable ou utile à l'instance U pour que cette dernière puisse concevoir et mener à bien un certain projet Π . (Pour simplifier, on supposera dans ce qui suit que l'instance U est une institution.) Cela détermine V (ou telle autre instance W) à rechercher des conditions C vérifiant la relation $\partial \vee \mathfrak{R}(K, C, O, U)$. La quête par V ou W des conditions C et de leur « réalisation » institutionnelle s'achèvera avec la mise en fonctionnement de systèmes didactiques $S(X; Y; \heartsuit)$ dans lesquels l'enjeu didactique \heartsuit est l'œuvre O , l'ensemble X étant fait au moins en partie d'acteurs de l'institution U . Mais cette quête commence en règle générale par la recherche – voire la création – d'une école E appropriée, avec ses divers *établissements*, qui propose une certaine pédagogie et au sein de laquelle de tels systèmes

didactiques – répondant à certaines spécifications touchant notamment ♥ (= O) ainsi que X – sont susceptibles d'exister et de fonctionner de façon satisfaisante – E ou tel de ses établissements étant l'institution mandate des systèmes didactiques $S(X ; Y ; ♥)$.

3.4. Soulignons que, ès qualités, le chercheur ξ n'est partie prenante ni de U , ni de V (ou de W), ni de X , ni de Y . Surtout, quelle que soit la question de recherche sur laquelle il entend travailler, ξ doit faire en sorte de disposer, en un processus d'élaboration et de réélaboration continué, d'un *modèle de recherche en didactique* de référence comportant plusieurs composantes solidaires, ce modèle ayant pour fonction d'éclairer, de suggérer, de contrôler les gestes de recherche que ξ se devra d'accomplir. La première composante de ce modèle est ce qu'on nommera le *modèle praxéologique de référence* de l'œuvre O promise à devenir enjeu didactique. Dans le cas où l'œuvre O est regardée comme une œuvre mathématique, on parlera aussi bien de modèle *mathématique* de référence (pour un exemple, on se reportera à la question 2 du TD 3). Bien entendu, le modèle de recherche de référence est également un modèle praxéologique, mais il se réfère à l'activité du chercheur ξ , et non pas à celle des usagers de l'œuvre O .

3.5. Le modèle de recherche de référence du chercheur ξ se définit – de façon évolutive – par l'ensemble des questions auxquelles il se montre capable d'apporter réponse. Une partie essentielle de ce modèle est à évolution lente : il s'agit de la théorie du didactique sur laquelle s'appuie le chercheur – c'est pour nous, ici, la TAD. C'est à l'intérieur de ce cadre théorique que le modèle de recherche de référence se déploie. Pour en avoir une vue d'ensemble, il nous faut revenir au *schéma herbartien développé* tel qu'il a été explicité dans la *Leçon 2* :

$$[S(X ; Y ; Q) \rightsquigarrow \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, O_{n+2}, \dots, O_m \}] \rightsquigarrow R^\heartsuit.$$

Ce schéma prétend modéliser *toute enquête, tout processus d'étude et de recherche* possible, que X soit composé d'élèves jeunes, de chercheurs « professionnels » ou de personnes quelconques. Toutefois, afin de ne pas introduire de confusion, lorsque X et Y sont constitués de chercheurs ξ et de directeurs de recherche et d'aide à la recherche ζ , nous remplacerons les notations X et Y par les lettres grecques majuscules Ξ et Z . Le schéma herbartien « pour la recherche » s'écrira donc formellement :

$$[S(\Xi ; Z ; Q) \rightsquigarrow \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, O_{n+2}, \dots, O_m \}] \rightsquigarrow R^\heartsuit.$$

Redisons-le : ce schéma entend représenter *toute recherche possible*, en quelque domaine que ce soit. En particulier, il suppose que tout chercheur ξ (ou ζ) « durable » est herbartien : c'est

là une condition de possibilité « incorporée » de toute recherche. En exploitant l'ensemble des développements précédents, nous expliciterons plus généralement, certaines au moins des conditions de possibilité d'une recherche en didactique des mathématiques, soit ce qui fonde, au moins en partie, la recherche en didactique des mathématiques.

3.6. En recherche comme ailleurs, la constitution d'un système « didactique » $S(\Xi ; Z ; Q)$ prend place dans une société donnée, relevant elle-même, à tel ou tel égard, d'une civilisation donnée, dans une école Ξ^* donnée, où prévaut une « pédagogie » déterminée. Pour signaler qu'on est ici dans un domaine d'activités – « la recherche » – qui, dans la civilisation dont nous participons à cet égard, est regardé comme ayant une forte spécificité (ce qu'on peut au reste discuter), je noterai provisoirement, ici, toutes ces réalités en leur apposant le préfixe *r-* : je parlerai donc ainsi de *r*-système didactique, de *r*-école, de *r*-pédagogie, etc. (On peut aussi remplacer le préfixe *r-* par le déterminant « de recherche » et dire donc « école de recherche », « pédagogie de recherche », etc.) La *r*-pédagogie au sein d'une certaine *r*-école c'est, par exemple, la manière dont les chercheurs (et les apprentis chercheurs), $\xi_1, \xi_2, \dots, \zeta_1, \zeta_2, \dots$, sont « amenés » jusqu'aux œuvres à étudier – et notamment jusqu'aux questions Q à étudier. La première question que l'on peut soulever à propos d'une recherche faite, d'une recherche en cours ou d'un projet de recherche est alors celle-ci :

*H*₀. Sur quelle question Q porte la recherche considérée ? Quelle est, aux niveaux pratique et théorique, l'origine (la provenance, la source) de cette question ?

L'utilisation de la lettre *H* est motivée par ce fait qu'elle est la première lettre de *historia*, mot grec qui signifie « enquête ». Dans ce qui suit, une recherche sera aussi désignée comme une « enquête de recherche » ou « *r*-enquête ». Le fait qu'une recherche (faite, ou en cours, ou en projet) relève ou non, ou ne relève que marginalement, de la didactique des mathématiques dépendra bien sûr et de la *r*-question Q , et de la définition que l'on adopte de la « didactique des mathématiques ».

3.6. La liste amorcée avec H_0 peut être complétée de différentes façons. Pour ce qui est des recherches en SHS, par exemple, voici une petite *checklist* qui a pu être proposée – à propos essentiellement des recherches « empiriques » (Utts, 1999) :

Component 1: The *source* of the research and of the *funding*.

Component 2: The *researchers* who had *contact* with the participants.

Component 3: The *individuals* or objects studied and how they were *selected*.

Component 4: The exact nature of the *measurements* made or *questions* asked.

Component 5: The *setting* in which the measurements were taken.

Component 6: *Differences* in the groups being compared, *in addition* to the factor of interest.

Component 7: The *extent* or *size* of any claimed effects or differences. (pp. 18-19)

On voit qu'une partie de la « Composante 1 » a d'ores et déjà été intégrée dans la question H_0 . Plus généralement, on peut s'inspirer partiellement de cette liste en sept points, à condition toutefois de généraliser les formulations qui y sont adoptées. La « composante 1 », ainsi, donnera lieu encore aux deux questions suivantes (pour faciliter les formulations, dans les questions H_k , $k \geq 1$, nous parlerons de la r-enquête considérée comme si elle était en cours) :

H_1 . Quelle équipe de recherche $[\Xi, Z]$ conduit la recherche sur Q ? Quelles conditions C_1 cela offre-t-il à cette recherche et quelles contraintes K_1 cela lui impose-t-il ?

H_2 . À quel établissement de quelle r-école la r-équipe $[\Xi, Z]$ appartient-elle ? Quelles conditions C_2 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_2 cela lui impose-t-il ?

On a dit que, dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique, le niveau de l'*école* renvoie à une institution possédant un ou plusieurs *établissements*. Ici comme ailleurs, une même école (de recherche) peut avoir plusieurs établissements (de recherche) ou se réduire à un unique établissement.

3.7. C'est dans la réponse aux questions H_1 et H_2 que l'on précisera notamment le financement (*funding*) de la r-enquête considérée : on sait notamment que, selon la question Q , l'origine des financements de la recherche peut créer des contraintes non négligeables sur la conduite de la recherche et sur son aboutissement (ses résultats). Plus généralement, on précisera les *moyens de recherche* disponibles du fait des liens de la r-équipe $[\Xi, Z]$ avec la r-école d'appartenance, moyens permettant de constituer en partie au moins le *milieu didactique* (ou *milieu pour la recherche*) M , avec

$$M = \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, O_{n+2}, \dots, O_m \},$$

s'agissant par exemple des outils théoriques et méthodologiques O de la r-enquête sur la question Q considérée.

4. Une recherche en questions (2)

4.1. À la liste des « composantes » reproduite plus haut, ajoutons un autre outil de questionnement, celui de la structure d'article scientifique désignée internationalement par l'acronyme IMRAD, qui s'impose en nombre de revues scientifiques, s'agissant des comptes rendus de recherche « empiriques ». L'article « IMRAD » de l'encyclopédie *Wikipedia* présente la chose ainsi :

IMRAD is an acronym for **I**ntroduction, **M**ethods, **R**esults **A**nd **D**iscussion. It relates to the standard main structure of a scientific paper, which typically includes these four sections in this order:

- **Introduction** – why and where was the study undertaken? What was the purpose?
- **Materials & Methods** – how was the study done? What materials and methods were used?
- **Results** – what did the study find?
- **Discussion** – what might it mean, why does it matter, what next? And, last but not least, How does it fit in with what other researchers have found?

Ici, ces indications sont données à la seule fin de nourrir le questionnement d'une recherche donnée – et non de *juger* un compte rendu de recherche dont la publication est demandée par ses auteurs à une revue scientifique.

4.2. Ainsi qu'on aura pu l'observer, tant la liste des sept composantes que la structure en quatre parties du patron d'article IMRAD mettent l'accent sur un point fondamental non abordé jusqu'ici : le *contact* de l'équipe de recherche avec les « objets empiriques » auxquels renvoie la question *Q*. Supposant par exemple que ces « objets empiriques » sont des personnes – en didactique ce seront souvent des élèves et/ou des professeurs –, la *checklist* de Jessica M. Utts interroge ainsi « the *researchers* who had *contact* with the participants », « the *individuals* or objects studied and how they were *selected* », « the exact nature of the *measurements* made or *questions* asked », « the *setting* in which the measurements were taken », en s'inquiétant enfin des « *differences* in the groups being compared, *in addition* to the factor of interest ». Dans le cadre de la TAD nous pouvons réunir tout cela sous un titre unique : celui de la production (ou du choix) de milieux (ou systèmes) « adidactiques » et des *prises d'information* sur ces systèmes constitutifs de la *dialectique des médias et des milieux*. On subsumera donc ce qui précède sous la question suivante :

H_3 . Quels systèmes adidactiques sont-ils créés ou découpés dans la réalité empirique étudiée et quelles prises d'information sont-elles réalisées sur ces systèmes par la r-équipe $[\Xi, Z]$ dans le cadre de la recherche considérée ? Quelles conditions C_3 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_3 cela lui impose-t-il ?

Cette question appelle des commentaires sur un aspect fondamental auxquels nous consacrerons le point suivant.

4.3. D'une façon générale, comme toute question, une question de recherche Q porte sur un univers d'objets activés dans un certain nombre de types d'activités humaines. Il faut entendre le mot d'objet, ici, en un sens extensif (humain ou non humain, matériel ou immatériel, etc.) : en TAD, est objet tout ce qui existe pour au moins une personne ou une institution ! Comment donc constituer ces systèmes d'objets en *systèmes adidactiques*, c'est-à-dire comment *prendre de l'information* sur eux selon la manière dont on les sollicite ? Tel est le contenu essentiel de la question H_3 ci-dessus. Percer les arcanes de la nature physique ou sociale et humaine ne va pas de soi, nous le savons. Le chercheur ξ , ou plutôt l'équipe de recherche $[\Xi, Z]$, doit ainsi, en dépit d'une foule de contraintes, *organiser ses rapports avec l'univers empirique à étudier*, ce qui exige souvent un investissement considérable en temps de travail. Lorsque les objets empiriques en cause sont non humains ou, plus largement, lorsqu'ils sont accessibles par des moyens qui ne supposent pas d'interactions susceptibles d'altérer d'une façon non maîtrisable par le chercheur l'information qu'ils délivrent lorsque le chercheur les sollicite, les choses sont relativement simples. Ainsi en va-t-il par exemple, aujourd'hui, lorsque ces objets sont des documents librement disponibles en ligne ou, plus généralement, des productions humaines non suscitées par l'activité du chercheur – ce qui, pour le chercheur en didactique, sera le cas, en principe, s'agissant des programmes officiels, des manuels scolaires, des cours ou « activités » en ligne, des cahiers ou des travaux d'élèves, etc. En ce cas, on se demandera classiquement si le corpus effectivement accessible est ou non biaisé par rapport à telle ou telle variable sensible (il peut l'être d'un certain point de vue et pas d'un autre : cela dépend de la question qu'on entend lui poser). Mais un certain nombre de difficultés sont classiques lorsque le chercheur doit interagir ès qualités avec le monde humain dans sa multiplicité institutionnelle, ce qui n'est pas inattendu s'agissant de recherches « en SHS » ! Or c'est là que des difficultés assez génériques surgissent.

4.4. Dans un ouvrage dû à deux sociologues, Stéphane Beaud et Florence Weber, intitulé *Guide de l'enquête de terrain* (2010), les auteurs mettent en relief les résistances

institutionnelles et personnelles que le chercheur – ou plutôt l'étudiant apprenti chercheur – ne manquera pas de rencontrer s'il enquête par exemple sur l'école, la justice, la police, la prison ou le système de santé :

La forte visibilité sociale, inscrite dans l'espace, de ces institutions, sous la forme de noms, d'adresses, de contacts faciles à établir, en fait des objets *a priori* attractifs : vous les supposez faciles à enquêter. Or ce n'est pas le cas : elles exigent des autorisations, des permissions, un droit « officiel » à enquêter dans leurs murs. Ces enquêtes apparaissent, à tort, comme les plus aisément réalisables : il suffirait de s'adresser à l'institution en question, de solliciter l'autorisation, de faire montre de bonne volonté, pour que l'enquête fût acceptée. Les choses ne se passent pas ainsi dans la réalité sociale, loin de là ! On peut même dire que, sauf si vous êtes déjà membre (même à titre précaire) de l'institution, et donc installé dans les lieux, ces enquêtes sont hérissées d'obstacles « bureaucratiques » qui peuvent les rendre réalisables (...). Si elle n'est pas refusée ou interdite par l'institution, l'enquête risque d'être entièrement dirigée, guidée, par la direction de l'établissement qui cherchera à en contrôler le déroulement de bout en bout. Il faut savoir aussi que l'acceptation de l'enquête dépend du moment où vous arrivez dans l'institution : des portes peuvent se fermer seulement parce que celle-ci traverse un moment difficile. (p. 23)

Lorsque ces difficultés sont reconnues – il arrive quelles soient niées, ce qui est plus encore peut-être de nature à biaiser le rapport du chercheur aux objets empiriques de sa recherche –, une autre réaction peut s'ensuivre, que les auteurs cités décrivent à leurs lecteurs étudiants, s'agissant de ce qu'ils nomment l'enquête *ethnographique*, dans les termes suivants :

On s'aperçoit, lorsque l'on veut faire effectuer à des étudiants un travail ethnographique, que leur premier réflexe est toujours de choisir un objet où ils peuvent observer à distance, ne pas être pris dans des interactions, observer à couvert, ne pas avoir à s'impliquer dans des relations personnelles, à justifier leur présence. C'est cette crainte qui explique le choix spontané des lieux publics comme thème d'enquête, des interactions anonymes, entre inconnus : le modèle du genre est le (grand) café, mais on peut aussi citer les grands magasins, les *fast food*, les gares, des lieux de passage où les interactions sont sans lendemain, c'est-à-dire sans conséquences. Ce sont surtout des lieux où l'enquêteur peut passer inaperçu, ce qui révèle bien la situation d'enquête rêvée par les étudiants : celle qui permet à l'enquêteur débutant de rester à l'écart, observant de loin, sans risque de contamination par la situation sociale, dans une position de parfaite « neutralité ». (pp. 31-32)

Les auteurs poursuivent ainsi :

Ainsi à l'écart, vous croyez ne pas avoir à vous mêler de ce que vous voyez ; mais vous courez d'autres risques : celui d'être soudain repéré par votre insistance, d'avoir l'ambiguïté du passant qui s'arrête, du voyeur indiscret ; celui de ne rien comprendre à ce qui se passe. C'est un choix négatif, une sorte de précaution pour s'économiser socialement, une forme de protection de soi et de suspension de la relation d'enquête. Comme si l'on pouvait faire l'enquête à moindres frais, en évitant les risques inhérents à toute interaction personnelle, comme si l'on pouvait rester anonyme, ne pas avoir à se présenter, éviter les contraintes de la politesse.

C'est ce qu'on pourrait appeler le fantasme de l'observateur débutant : il suffirait d'observer à distance pour comprendre. (pp. 32-33)

Le type d'interaction dans lequel ξ doit entrer est presque toujours inédit ; et la difficulté à y entrer peut avoir des effets dénaturants, ainsi que les mêmes auteurs le précisent en ces termes :

On a maintes fois constaté les difficultés rencontrées par les étudiants à endosser le rôle d'enquêteur, constitutives de l'apprentissage du terrain, même si elles varient selon les individus et leurs trajectoires scolaires. Votre malaise à jouer ce rôle d'enquêteur et à occuper cette position peut vous empêcher de mener votre enquête.

La situation d'enquête est tout sauf naturelle. Elle vous place dans une relation sociale à la fois artificielle et inédite. Lorsque vous devenez enquêteur, vous êtes contraint par la situation, durant tout le temps de l'enquête, de changer de rôle, de mener une existence différente de votre vie d'étudiant « traditionnel » (lecture, cinéma, bibliothèque, resto U, copains, etc.) ou celle d'étudiant salarié. La situation d'enquête vous coupe de vos réseaux ordinaires (famille, amis), de vos activités et de vos horaires ordinaires ; elle vous oblige à vous défaire provisoirement de vos appartenances (sociales, familiales, territoriales), à mettre en suspens une bonne part de votre identité sociale antérieure. (pp. 81-82)

Nombre de chercheurs débutants ont ainsi la tentation de se cacher derrière des rôles institutionnels qui leur semblent familiers, qui les rendraient – croient-ils – presque invisibles. Or l'intention autodidactique qui anime le chercheur ne saurait tenir à l'intérieur de tels rôles, ce que les auteurs suivis ici explicitent ainsi :

Vous serez aussi conduit, par la force des choses, à devoir discuter d'égal à égal, ou temporairement sur un pied d'égalité, avec des personnes d'âge et de statut très différents des vôtres, déjà installées dans la vie professionnelle et sociale, qui peuvent vous en imposer socialement (et qui ne manquent pas d'essayer de le faire pour vous « intimider »). Vous devrez alors tenir une double obligation : respecter les convenances extérieurement et, intérieurement, en être suffisamment libéré pour les *observer*. (pp. 82-83)

Ce double jeu, assumé pleinement et *sincèrement*, est difficilement compatible avec ce qui se révélera vite être une fausse solution : le fait d'observer une institution et ses acteurs « de l'intérieur », *parce que l'on est un acteur* parmi d'autres.

4.5. Plus spécifiquement, en didactique, un professeur qui s'initie à la recherche doit se garder d'imaginer que sa position institutionnelle – celle de professeur – lui permettra d'avoir spontanément avec les objets de sa recherche des rapports adéquats. En tant que chercheur, il devra se construire un accès à des types d'information que le professeur généralement ignore (et, parfois, qu'il gagne à ignorer). Chaque position institutionnelle, celle de professeur, celle de chercheur, a ses exigences propres, qui sont loin d'être superposables ! Notons ici une variante plus trompeuse encore du schéma « Je suis professeur, je peux avoir accès à tout » : l'illusion de « l'informateur indigène » auquel on prête abusivement la capacité institutionnelle de tout voir, de tout savoir et, qui plus est, de pouvoir *tout dire* au chercheur qui l'interroge. Tel étudiant, qui connaît une professeure de physique-chimie qu'il croit pouvoir interroger – c'est une tante de sa petite amie –, croira à tort que cela le dispensera d'enquêter longuement – et souvent difficultueusement –, disons, sur la place des mathématiques dans l'enseignement des sciences physiques et chimiques ; et cela, en outre, l'empêchera de constituer – courtoisement, de façon humainement respectueuse – cette professeure en un « système adidactique » à *certaines égards*, et donc lui fera « rater » ce que cette « informatrice » pourrait lui apporter qui soit de bon aloi dans l'optique de sa recherche. L'illusion commune – et invasive – est ici que, par le truchement d'un informateur bien choisi, on peut avoir un accès *direct* à la « vérité ». Cet accès n'est bien sûr jamais simple ; il suppose un rapport à l'empirie approprié, que l'on situera maintenant en se référant plus précisément au schéma herbartien et aux questions *Q* étudiées généralement en didactique. De telles questions, on l'a souligné plus haut, impliquent une œuvre *O* et son destin didactique dans un type de processus impliquant des systèmes didactiques $S(X ; Y ; \heartsuit)$ mandatés par certaines institutions « scolaires » pour étudier l'œuvre $\heartsuit = O$ en s'appuyant sur une certaine

pédagogie. Cela conduit à soulever une question que, par méthode, nous dissociérons en deux questions en réalité étroitement solidaires :

H_4 . Quel modèle de recherche en didactique est-il mis en œuvre dans la recherche considérée ? Quelles conditions C_4 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_4 cela lui impose-t-il ?

H_5 . Quels modèles praxéologiques de référence des œuvres enjeux didactiques apparaissant dans la recherche considérée sont-ils mis en œuvre ? Quelles conditions C_5 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_5 cela lui impose-t-il ?

C'est là évidemment le « morceau » le plus spécifique de la mise en questions d'une recherche *en didactique*. On ne doit pas oublier cependant que, si beaucoup se joue là, c'est bien *l'ensemble* des aspects évoqués jusqu'ici qu'il convient d'examiner pour produire une analyse d'une recherche. Soulignons que les questions H_4 et H_5 impliquent en particulier d'interroger la place donnée et le « traitement » appliqué aux réponses *préalables* – si partielles ou lacunaires soient-elles – que le schéma herbartien désigne par la notation R^\diamond .

4.6. Précisons ici, de façon minimaliste, une liste de questions qu'impliquent de poser les questions H_4 et H_5 ci-dessus :

Σ_0 . Quelle est l'institution mandante de $S(X ; Y ; \heartsuit)$ et quelle en est la pédagogie ?

Σ_1 . Qu'est-ce que X ?

Σ_2 . Qu'est-ce que Y ?

Σ_3 . Qu'est-ce que \heartsuit ?

Σ_4 . Que font X et Y pour que X « apprenne » \heartsuit ?

Σ_5 . Qu'est-ce que X aura-t-il pu apprendre, à court ou moyen terme, du fait du fonctionnement de $S(X ; Y ; \heartsuit)$?

Σ_6 . Qu'est-ce que Y et certains environnements éventuels de $S(X ; Y ; \heartsuit)$ auront-ils pu apprendre, à court ou moyen terme, du fait du fonctionnement de $S(X ; Y ; \heartsuit)$?

Σ_7 . Quels changements le fonctionnement de $S(X ; Y ; \heartsuit)$ a-t-il pu apporter dans les conditions et les contraintes gouvernant son fonctionnement ultérieur ?

Pour espérer pouvoir répondre à ces questions, il convient d'identifier les principaux « paquets » de *conditions et contraintes* qui rendent possibles, facilitent ou au contraire

interdisent (ou, du moins, gênent) la survenue de tel ou tel *état* des systèmes didactiques examinés. Notons que la question Σ_5 – Qu'est-ce que X aura-t-il pu apprendre, à court ou moyen terme, du fait du fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$? – comporte une double référence, d'une part au fait que tout ce qui était à apprendre de \heartsuit n'a peut-être pas été appris par X , d'autre part au fait que le fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$ a pu provoquer chez les membres de X des « acquisitions » hétérogènes à l'enjeu didactique officiel \heartsuit . On peut dire à cet égard que le fonctionnement du système didactique $S(X; Y; \heartsuit)$ peut *engendrer* chez $x \in X$ un *rapport* qui n'existait pas jusque-là à une certaine œuvre $O^* \neq \heartsuit$, ou encore peut *modifier* le rapport que x avait déjà à cette œuvre O^* , mais – quelquefois ! – ne rien faire de tel à propos de l'œuvre $O = \heartsuit$, en ne confortant chez x qu'un rapport à \heartsuit grossièrement *inadéquat* au projet social d'enseignement et d'apprentissage concrétisé par la création du système didactique $S(X; Y; \heartsuit)$. La question Σ_6 – Qu'est-ce que Y et certains environnements éventuels de $S(X; Y; \heartsuit)$ auront-ils pu apprendre, à court ou moyen terme, du fait du fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$? – peut paraître plus inattendue encore. Elle renvoie à ce phénomène que, en aidant X à étudier et à apprendre, Y lui-même apprend, à propos de \heartsuit comme à propos d'autres objets $O^* \neq \heartsuit$. Elle rappelle en même temps que d'autres collectifs de personnes encore peuvent apprendre, voire *doivent* apprendre, parce qu'ils participent à des systèmes didactiques *induits* par le fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$ – ainsi en va-t-il souvent des parents, des conjoints, etc. La question Σ_7 – Quels changements le fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$ a-t-il pu apporter dans les conditions et les contraintes gouvernant son fonctionnement ultérieur? – souligne que les effets d'apprentissage (en subsumant sous cette expression aussi bien ce qui est *désappris*) du fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$, sur X d'abord, sur Y ensuite, sur les personnes et les institutions « en contact » avec $S(X; Y; \heartsuit)$ enfin, changent les conditions et les contraintes gouvernant le fonctionnement ultérieur de $S(X; Y; \heartsuit)$ ou d'autres systèmes didactiques du type $S(X; Y; \heartsuit^*)$ (où \heartsuit^* est une autre œuvre à étudier).

4.7. Ajoutons enfin une dernière question, essentielle, qui fait référence tant à la composante 7 de la liste proposée par J. M. Utts – « The *extent* or *size* of any claimed effects or differences » – qu'aux deux derniers volets d'un article scientifique suivant le patron IMRAD, volets dont on reproduit ici la description vue plus haut :

- **Results** – what did the study find?
- **Discussion** – what might it mean, why does it matter, what next? And, last but not least, How does it fit in with what other researchers have found?

Cette ultime question peut être formulée ainsi :

H_6 . Quelle réponse R^\heartsuit la recherche permet-elle d'apporter à la question Q ? Quelles conditions C_6 cela offre-t-il aux recherches futures dans le domaine auquel appartient la question Q et quelles contraintes K_6 cela impose-t-il à de telles recherches ?

Ce qui est en cause ici à travers la référence aux conditions C_6 , c'est le *débat scientifique* autour de la question de recherche Q ; et, à travers les contraintes K_6 , c'est l'organisation même des recherches futures et des questions sur lesquelles elles porteront – ce qui ramène à un nouveau cycle de recherche, qu'ouvre la question H_0 .

4.8. Concluons. Voici d'abord la liste des questions H_k formulées dans ce qui précède :

H_0 . Sur quelle question Q porte la recherche considérée ? Quelle est, aux niveaux pratique et/ou théorique, l'origine (la provenance, la source) de cette question ? Quelles conditions C_0 cela offre-t-il à cette recherche et quelles contraintes K_0 cela lui impose-t-il ?

H_1 . Quelle équipe de recherche $[\Xi, Z]$ conduit la recherche sur Q ? Quelles conditions C_1 cela offre-t-il à cette recherche et quelles contraintes K_1 cela lui impose-t-il ?

H_2 . À quel établissement de quelle r-école la r-équipe $[\Xi, Z]$ appartient-elle ? Quelles conditions C_2 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_2 cela lui impose-t-il ?

H_3 . Quels systèmes adidactiques sont-ils créés ou découpés dans la réalité empirique étudiée et quelles prises d'information sont-elles réalisées sur ces systèmes par la r-équipe $[\Xi, Z]$ dans le cadre de la recherche considérée ? Quelles conditions C_3 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_3 cela lui impose-t-il ?

H_4 . Quel modèle de recherche en didactique est-il mis en œuvre dans la recherche considérée ? Quelles conditions C_4 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_4 cela lui impose-t-il ?

H_5 . Quels modèles praxéologiques de référence des œuvres enjeux didactiques apparaissant dans la recherche considérée sont-ils mis en œuvre ? Quelles conditions C_5 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_5 cela lui impose-t-il ?

H_6 . Quelle réponse R^\heartsuit la recherche permet-elle d'apporter à la question Q ? Quelles conditions C_6 cela offre-t-il aux recherches futures dans le domaine auquel appartient la question Q et quelles contraintes K_6 cela impose-t-il à de telles recherches ?

Comment le questionnement impulsé par ces sept questions se relie-t-il à la question de ce qui fonde la possibilité d'une recherche en didactique des mathématiques ? Le lien est volontairement faible : tout travail qui peut être présenté – par ses auteurs ou par quiconque – comme une recherche en didactique des mathématiques doit être abordé sur la base des réponses que l'on pourra apporter aux questions H_0 à H_6 . Le verdict reste ouvert.

Références

- American Psychological Association. (2010). *American Psychological Association Publication Manual* (6e éd.). Washington, DC : Auteur.
- Ayto, J. (1994). *Dictionary of word origins*. Amersham Bucks, GB : Columbia Marketing.
- Bacon, F. (1991). *Du progrès et de la promotion des savoirs*. [traduction de Michèle Le Dœuff]. Paris : Gallimard. (Édition originale, 1605)
- Batschelet, E. (1976). *Introduction to Mathematics for Life Sciences*. Berlin: Springer.
- Beaud, S. & Weber, F. (2010). *Guide de l'enquête de terrain*. Paris : La Découverte.
- Bouasse, H. (1910). *Mécanique rationnelle et expérimentale, spécialement écrit pour les physiciens et les ingénieurs, conforme au programme du certificat de mécanique rationnelle*. Paris : Delagrave.
- <http://name.umdl.umich.edu/ABR2526.0001.001>
- Bourlet, C. *Cours abrégé d'arithmétique*. (1922). Paris : Hachette.
- Brown, G.I. (1991, janvier-mars). The Evolution of the Term "Mixed Mathematics". *Journal of the History of Ideas*, 52(1), 81-102.
- Bundy, A. (1983). *The Computer Modelling of Mathematical Reasoning*. Londres : Academic Press.
- Cabanel, P. (Éd.). (2008). *Le certif. Annales du certificat d'études primaires, session 1959*. Paris : Les quatre chemins.
- Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations*. New York : Dover. (Édition originale, 1928)
- Ceteris paribus*. (2012, 26 avril). *Wikipedia, the free encyclopedia*.
- http://en.wikipedia.org/wiki/Ceteris_paribus

- Chrystal, G. (1866). *Algebra: An elementary text-book for the higher classes of secondary schools and for colleges* (vol. 1). Londres : Adam and Charles Black.
- Cibois, P. (1994). *L'analyse factorielle*. Paris : PUF.
- Clark, J. (1988). *Word Wise. A dictionary of English idioms*. Londres : Harrap.
- Combinaison avec répétition (2011, 2 septembre). *Wikipédia, l'encyclopédie libre*.
http://fr.wikipedia.org/wiki/Combinaison_avec_répétition
- Compère, M.-M. (1985). *Du collège au lycée (1500-1850)*. Paris : Gallimard/Julliard.
- De Fontenay, É. (2009). Introduction au *De rerum natura* de Lucrèce. Paris : Les Belles Lettres.
- De Libera, A. (1991). *Penser au Moyen Âge*. Paris : Seuil.
- Delachet, A. (1961). *L'analyse mathématique*. Paris : PUF.
- Diderot, D. & D'Alembert, J. L. R. (1751-1772). *L'Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*. Paris : Le Breton et al.
http://www.lexilogos.com/encyclopedie_diderot_alembert.htm
- Dieudonné, J. (1987). *Pour l'honneur de l'esprit humain*. Paris : Hatier.
- Duhem, P. (1910, juin). [Compte rendu de Bouasse, 1910]. *Bulletin des sciences mathématiques*, 34, 144-176.
<http://bibnum.education.fr/scienceshumainesetsociales/histoire-de-lenseignement/duhem-et-la-mécanique-rationnelle-et-expérimen>
- Dutercq, Y. (1993). *Les professeurs*. Paris : Hachette.
- Emerson, W. (1768). *The Doctrine of fluxions*. Londres : Richardson.
- Febvre, L. (1968). *Le problème de l'incroyance au 16^e siècle. La religion de Rabelais*. Paris : Albin Michel. (Édition originale, 1947)
- Fondements des mathématiques. (2012, 19 janvier). *Wikipédia, l'encyclopédie libre*.
http://fr.wikipedia.org/wiki/Fondements_des_math%C3%A9matiques
- Foundations of mathematics. (2012, 12 janvier). *Wikipedia, the free encyclopedia*.
http://en.wikipedia.org/wiki/Foundations_of_mathematics
- Gostiaux, B. (1995). *Cours de mathématiques spéciales*. Vol. 5. *Géométrie : arcs et nappes*. Paris : PUF.
- Griffiths, H. B. & Hilton, P. (1970). *A Comprehensive Textbook of Classical Mathematics: A Contemporary Interpretation*. New York : Springer-Verlag.
- Holzner, S. (2010). *Physics Essentials for Dummies*. Hoboken, NJ : Wiley.
- Lagemann, E. C. (2000). *An elusive science: The troubling history of education research*. Chicago : The University of Chicago Press.
- Le Goff, J. (1985). *Les intellectuels au Moyen Âge*. Paris : Seuil.

- Le collègue en poche. Tout le programme de 6^e en fiches.* (2002). Lyon : Maxi-Livres.
- Littré, É. (1872-1877). *Dictionnaire de la langue française* [en ligne]
<http://francois.gannaz.free.fr/Littré/accueil.php>
- Loi du 21 décembre 1880 sur l'enseignement secondaire des jeunes filles. (1880, 22 décembre). *Journal officiel de la République française.*
<http://www.senat.fr/evenement/archives/D42/dec1880.pdf>
- Lycées de jeunes filles. (2012, 29 avril). *Wikipédia, l'encyclopédie libre.*
http://fr.wikipedia.org/wiki/Lyc%C3%A9e_de_jeunes_filles
- Marrou, H.-I. (1948). *Histoire de l'éducation dans l'antiquité* (2 vols). Paris : Seuil.
- Matthews, R. M. (2009). *The Origin of the (gaseous) Species.*
http://rmarkmatthews.squarespace.com/storage/chemtutor/gas_law1.htm
- Morellet, A. (2000). *Mémoires sur le dix-huitième siècle et sur la Révolution.* Paris : Mercure de France. (Édition originale, 1822.)
- Mugler, C. (1967). *Euclide. Extraits des Éléments.* Paris : Gauthier-Villars.
- Multiensemble. (2011, 20 juillet). *Wikipédia, l'encyclopédie libre.*
<http://fr.wikipedia.org/wiki/Multiensemble>
- Multiset. (2011, 15 novembre). *Wikipedia, the free encyclopedia.*
<http://en.wikipedia.org/wiki/Multiset>
- Natali, C. (1996). Lieux et écoles du savoir. Dans J. Brunshwig & G. Lloyd (Éds), *Le savoir grec* (pp. 229-249). Paris : Flammarion.
- Nouvelle encyclopédie autodidactique Quillet. L'enseignement moderne et pratique* (vol. 1). (1958). Paris : Quillet.
- Online etymology dictionary.*
<http://www.etymonline.com/>
- Pena-Ruiz, H. (2005). *Qu'est-ce que l'école ?* Paris : Gallimard.
- Pham, F. (1992). *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés* ; Paris : InterEditions.
- Picoche, J. (1979). *Dictionnaire étymologique du français.* Paris : Le Robert.
- Poinsot, L. (1815, mai). Des Principes fondamentaux et des règles générales du calcul différentiel. *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, III(2)*, 115.
- Proportionality (mathematics). (2012, 15 janvier). *Wikipedia, the free encyclopedia.*
[http://en.wikipedia.org/wiki/Proportionality_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Proportionality_(mathematics))
- Proportionnalité. (2012, 15 janvier). *Wikipédia, l'encyclopédie libre.*
<http://fr.wikipedia.org/wiki/Proportionnalité>
- Prost, A. (1968). *Histoire de l'enseignement en France (1800-1967).* Paris : Armand Colin.
- Random variable. (2012, 20 mars). *Wikipedia, the free encyclopedia.*

http://en.wikipedia.org/wiki/Random_variable

Rey, A. (Éd.) (1993). *Dictionnaire historique de la langue française*. Paris : Le Robert.

Rey, A. (Éd.) (2005). *Dictionnaire culturel en langue française*. Paris : Le Robert – SEJER.

Trésor de la langue française informatisé[en ligne]

<http://atilf.atilf.fr/tlf.htm>

Ricci, A. (1969). *La statique*. Paris : PUF.

Sée, C. (1888), Proposition de loi sur l'enseignement secondaire des jeunes filles. Dans Anonyme (Éds), *Lycées et collèges de jeunes filles. Documents, rapports et discours à la chambre des députés et au sénat, décrets, arrêtés, circulaires, etc., relatifs à la loi sur l'enseignement secondaire des jeunes filles. Avec carte figurative. Préface de M. Camille Sée, Conseiller d'État* (pp. 57-64). Paris : Léopold Cerf.

<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k54988777.image.r=diplome+de+fin+d%27%C3%A9tudes+secondaires.langeFR.f000097.tableDesMatières>

Tomasello, M. with Dweck, C., Silk, J., Skyrms, B., & Spelke, E. (2009). *Why we cooperate*. Cambridge, Mass. : The MIT Press.

Utts, J. M. (1999). *Seeing through statistics*. Pacific Grove, CA : Duxbury Press.

Variable aléatoire. (2011, 21 octobre). *Wikipédia, l'encyclopédie libre*.

http://fr.wikipedia.org/wiki/Variable_aléatoire

Verdier, N. (2010). L'irrationalité de e par Janot de Stainville, Liouville et quelques autres. Dans A. Moatti (Éd.), *Regards sur les textes fondateurs de la science*, vol. 1 (pp. 159-166). Paris : Cassini.

Wilhite, A.W. & Fong, E.A. (2012, 3 février). Coercive Citation in Academic Publishing. *Science*, 335, 542-543.