Université d’Aix-Marseille

2013-2014

Master « Mathématiques et applications »

Spécialité « Enseignement et formation en mathématiques »

Parcours « Didactique » (2e année)

UE 35

Fondements et méthodes de la recherche en didactique

Yves Chevallard & Michèle Artaud

Leçon 3. Praxéologies de recherche I

1. Prolégomènes

1.1. On a vu que certaines conditions de possibilité d’une recherche en didactique des mathématiques semblent être satisfaites : l’existence du mathématique, l’existence du didactique, notamment relatif au mathématique, sont de telles conditions, même si le didactique est, d’une façon générale, soumis à un processus immémorial de refoulement, donc de très large *mise en invisibilité*, avec *péjoration culturelle* de ce qui cependant s’en laisse voir. On a noté aussi que l’idée même de recherche, la réalité de l’existence de chercheurs, leur visibilité et leur acceptation sociale et culturelle semblait, elle, plus problématique, et supposait un combat séculaire, qui, bien que dans des formes renouvelées, ne cesse pas aujourd’hui.

1.2. Dans ce qui suit, nous envisagerons le scénario suivant : on imagine une personne notée ξ − le chercheur ou l’apprenti chercheur en didactique des mathématiques − et on explorera alors les conditions et contraintes d’un engagement de ξ dans une activité qui *pourrait* être dite de « recherche en didactique des mathématiques ». D’une manière générale, pour entrer en contact avec un domaine d’activité, il faut en passer par l’assujettissement à − par le fait de se faire le sujet de − une ou plusieurs institutions *ad hoc* : un individu est fort rarement à lui tout seul « toute une institution » ! Ici, on supposera que ξ s’assujettit à une équipe, un groupe, un collectif − si peu structuré soit-il − supposé être de « recherche en didactique des mathématiques ». Cette institution, qu’on notera Ξ, pourra assumer des visages bien différents. On envisagera en outre que Ξ « vive » dans le voisinage d'un regroupement plus vaste, qu'on notera Ξ^* (par exemple une communauté scientifique au niveau national), celui-ci à son tour se situant par rapport à un regroupement Ξ^{**} (situé par exemple au niveau international), etc. Ce qu'il importe de souligner à ce stade est que les liens de ξ avec Ξ, Ξ^* ou Ξ^{**} lui permettent de « bénéficier » de conditions C_ξ mais lui imposent en même temps des contraintes K_ξ qui détermineront au moins en partie l'activité de ξ en matière de recherche en didactique des mathématiques, si une telle activité vient à se produire.

1.3. Imaginons un instant que le chercheur ξ ait commencé par « suivre des cours de didactique des mathématiques », par exemple dans le cadre d'un master… En ce cas *comme en tout autre*, on pourra entendre dans la noosphère correspondante des jugements erratiques ou massifs tels ceux-ci : « Cette formation, ce n'est pas de la didactique ! » ; « Si c'est de la didactique, en tout cas ça n'est pas de la didactique des mathématiques ! », et cela, répétons-le, de la même façon que d'aucuns pourraient brocarder un cours supposé de « littérature comparée », par exemple, en disant que tout comparatisme en est absent et qu'on n'y traite pas davantage de littérature ! Même si l'on perçoit derrière de tels décrets une attitude polémique, il s'agit là d'un questionnement *auquel on n'échappe pas* et avec lequel il nous faudra vivre, ici, indéfiniment. De la même façon, tel ou tel observateur, qui en général est aussi un acteur − parfois perfide − de Ξ, Ξ^* ou Ξ^{**}, pourra décréter que tel travail présenté comme un travail « recherche » *n'est en fait pas de la recherche !* Ou que, s'il s'agit peut-être de recherche, ce n'est à coup sûr pas une recherche en didactique des mathématiques ! Tout cela est en effet quasi quotidien − quoique non public en général − dans la vie d'une communauté de recherche un tant soit peu étendue.

1.4. Pour aborder ces problèmes et bien d'autres encore, nous devrons disposer d'un outillage praxéologique qui se complètera au fur et à mesure. Nous aurons en perspective l'élaboration solidaire

− d'un modèle de *l'équipement praxéologique institutionnel* $\mathcal{P}$ de qui occupe une *position* ρ de chercheur en didactique des mathématiques en telle ou telle institution de la société (plus exactement : de telle ou telle société) ;

− d'un modèle du *rapport institutionnel* $\mathcal{R}$ à la recherche en didactique des mathématiques pour une personne occupant ladite position ρ.

Bien entendu, on se réfèrera aussi à la modélisation de l'équipement praxéologique *personnel* de tel chercheur en didactique des mathématiques ξ et à la modélisation de son *rapport* *personnel* à la recherche en didactique des mathématiques. L'activité concrète de recherche en didactique des mathématiques sera regardée comme un *déploiement* du rapport (institutionnel ou personnel) à la recherche en didactique des mathématiques résultant de la *mise en œuvre* de l'équipement praxéologique (personnel ou institutionnel), sous des contraintes et dans des conditions déterminées : on parlera à cet égard du *fonctionnement praxéologique* du chercheur ou de l'équipe de recherche.

1.5. On mettra d'abord dans le modèle du rapport $\Re$ le fait qu'un sujet ξ en position ρ *se pose une question* Q − une question « de recherche », donc ; et qu'il mette en œuvre à son propos une *dialectique de l'étude et de la recherche*, où l'étude de $R^\lozenge$ (et d'autres œuvres) est un moyen de la recherche, laquelle vise à élaborer $R^\heartsuit$. En cela, le chercheur ξ est un personnage *herbartien*, qui doit s'efforcer − seul ou au sein d'un collectif Ξ − de « fabriquer » une réponse $R^\heartsuit$ à la question Q. Plus précisément, ξ devra pour cela réaliser les cinq « gestes de base » de l'étude d'une question Q, c'est-à-dire devra (1) *observer* les réponses $R^\lozenge$ déposées dans la « littérature » écrite et orale, (2) *analyser*, au double plan expérimental et théorique, ces réponses $R^\lozenge$, (3) *évaluer* ces mêmes réponses $R^\lozenge$ (c'est-à-dire estimer la valeur qu'elles pourraient avoir pour sa recherche), (4) *développer* sa réponse propre $R^\heartsuit$ et (5) *diffuser et défendre* la réponse $R^\heartsuit$ ainsi produite. S'agissant de la fabrication de $R^\heartsuit$ et de sa diffusion-défense écrite, nous distinguerons ci-après les *notes de travail* de ξ (par exemple dans un carnet ou un cahier de bord), les *écrits* de ξ (qui sont des exposés, « privés » ou « publics », rédigés sur tel ou tel aspect d'un travail de recherche) et les *publications* de ξ (ou de Ξ, avec $\xi \in \Xi$), quel qu'en soit le support.

1.6. Le rapport $\Re$ comporte cette exigence que la réponse $R^\heartsuit$ à une question de recherche Q soit *vraie* ; ou, du moins, qu'elle soit une conjecture que la *dialectique des médias et des milieux* n'aura pas permis de rejeter. Le mot *vérité* vient du latin *verus,* « vrai ». À l'instar du français, l'anglais possède le terme *verity* (classé généralement comme littéraire), dont un dictionnaire donne les exemples d'emploi suivants : *to challenge the verity of something*, *the eternal verities*, *these things are verities*, *unquestionable verities*. L'idée de vérité est liée à l'idée de *réalité*. Le même dictionnaire donne ainsi pour traduction de *these things are verities* « ces choses sont vraies, ce sont là des faits » ; et, pour *unquestionable verities*, il propose « faits, vérités indiscutables ». Mais on sait aussi que, en anglais courant, « vérité » se traduit par *truth* ; et il est intéressant de s'arrêter sur ce vocable. Le dictionnaire *WordNet* propose une notice relative à *true* dont on peut faire deux parts. La première rejoint de façon évidente le sens du français *vrai* (ou *véritable*) :

- ▸ ***adjective*:** consistent with fact or reality; not false (*“The story is true”*)
- ▸ ***adjective*:** conforming to definitive criteria (*“The horseshoe crab is not a true crab”*)
- ▸ ***adjective*:** reliable as a basis for action (*“A true prophesy”*)
- ▸ ***adjective*:** devoted (sometimes fanatically) to a cause or concept or truth (*“True believers bonded together against all who disagreed with them”*)
- ▸ ***adjective*:** expressing or given to expressing the truth (*“A true statement”*)
- ▸ ***adjective*:** not synthetic or spurious; of real or natural origin (*“True gold”*)
- ▸ ***adverb*:** as acknowledged (*“True, she is the smartest in her class”*)

D’autres emplois sont plus propres à l’anglais :

- ▸ ***noun*:** proper alignment; the property possessed by something that is in correct or proper alignment (*“Out of true”*)
- ▸ ***verb*:** make level, square, balanced, or concentric (*“True up the cylinder of an engine”*)
- ▸ ***adjective*:** accurately placed or thrown (*“His aim was true”*)
- ▸ ***adjective*:** accurately fitted; level (*“The window frame isn’t quite true”*)
- ▸ ***adjective*:** in tune; accurate in pitch (*“A true note”*)

Un ouvrage intitulé *Word Wise* et sous-titré *A dictionary of English idioms* (Clark, 1988, p. 559) donne de l’expression *Out of true* l’exemple suivant : « It annoys me to see a row of pictures hanging on a wall with one or two of them out of true. » On a là l’idée d’aplomb, d’équilibre, d’accord, d’équerre, etc. Pour expliciter le premier sens de l’adjectif *true* dans la même sous-liste, mentionnons aussi cet extrait de l’entrée *true* dans l’*American Heritage Dictionary of the English Language* (en ligne) : « Unswervingly; exactly: *The archer aimed true.* » Le *Dictionary of word origins* nous informe alors de ceci, où l’adjectif *steadfast* signifie « constant », « tenace », « ferme » :

> **true** [OE] The underlying etymological meaning of *true* is ‘faithful, steadfast, firm’; ‘in accordance with the facts’ is a secondary development. It goes back to the prehistoric Germanic base **treww-*, which also produced German *treue* and Dutch *trouw* ‘faithful’ and the English noun *truce*, and it has been speculated that it may ultimately have links with the Indo-European base **dru-* ‘wood, tree’ (source of English *tree*), the semantic link being the firmness or steadfastness of oaks and suchlike trees. *Truth* [OE] comes from the same source, as do its

> derivative *betroth* [14], its now archaic variant *troth* [16], the equally dated *trow* [OE], and probably also *trust* and *tryst*.
>
> ► betroth, troth, trow, truce, trust, truth, tryst

Les mots *betroth* (/bɪˈtrəʊð/), « donner [sa fille] en mariage », *truce*, « armistice », *trust*, « confiance », *tryst* (/trɪst ; traɪst/), « rendez-vous [amoureux] », expriment tous un engagement, une promesse (*a pledge*). On retiendra surtout de là que la conformité aux faits, à la réalité ne vient − vers 1200, précise le *Online etymology dictionary* − qu'après un premier sens, la propriété d'être fidèle (*faithful*), ferme (*firm*), stable, inébranlable, la capacité à ne pas « broncher » (*steadfast*). Le lien fait ici avec le caractère inébranlable des chênes (*oaks*) est particulièrement suggestif ; voici ce qu'en dit (à l'entrée *true*, toujours) l'*American Heritage Dictionary of the English Language* :

> The words *true* and *tree* are joined at the root, etymologically speaking. In Old English, the words looked and sounded much more alike than they do now: "tree" was *trēow* and "true" was *trēowe.* The first of these comes from the Germanic noun **trewam*; the second, from the adjective **treuwaz.* Both these Germanic words ultimately go back to an Indo-European root **deru-* or **dreu-*, appearing in derivatives referring to wood and, by extension, firmness. Truth may be thought of as something firm; so too can certain bonds between people, like *trust*, another derivative of the same root.

Retenons de tout cela que la vérité est un « quelque chose » qui est d'aplomb, bien calé, une flèche qui ne rate pas sa cible ; et aussi quelque chose de solide, de ferme, de difficile à ébranler. On retrouve là les attributs de ce qui résiste − ou plutôt de ce qui a *jusqu'ici* résisté − aux assauts de la dialectique des médias et des milieux.

1.7. Pourquoi insister sur ce truisme apparent que la réponse $R^{\heartsuit}$ visée par la recherche doit tendre vers la vérité ? En principe, en effet, un chercheur est par définition un *chercheur de vérités*. Mais de multiples obstacles s'élèvent sur le chemin de la vérité. L'un d'eux concerne moins les *chercheurs* que les « sages » qui, au sein de la noosphère, croient avoir tôt trouvé la vérité, d'un seul coup d'un seul, et passent alors le reste de leur âge à juger chacun, et les chercheurs en particulier, à leur aune. Ce n'est là que l'une des multiples contraintes de tous niveaux pesant en tous lieux sur l'activité du chercheur, contraintes qui risquent pourtant de le transformer, *volens nolens*, en un chercheur *de reconnaissance et de notoriété*. Au lieu de se demander si ce qu'il avance est *juste*, *exact*, d'équerre avec le réel, il se demandera si « c'est bien », si « cela passe bien », si cela « le fait connaître » (avantageusement), etc. Le passage de la recherche de la vérité à celle de la notoriété peut se produire très tôt dans une carrière de « chercheur » : la notoriété future est d'abord souci de plaire, ou déjà souci de ne pas déplaire, souci de complaire, *d'être conforme*. Plus tard, le souci de la notoriété se manifestera chez quelques-uns qui se pensent « arrivés » par le privilège donné *par eux* à ce qu'ils « croient », à ce qu'ils « pensent », etc., sur la vérité à rechercher. Le système des « milieux » que doit interroger un chercheur dans le cadre de la dialectique des médias et des milieux tend alors à se réduire à une instance unique : *lui-même*.

1.8. Il y a la notoriété individuelle − celle de ξ − et il y a la notoriété collective − celle de Ξ, de Ξ^* ou de Ξ^{**}. L'objet idéal de l'activité collective de Ξ, de Ξ^* ou de Ξ^{**} et de leurs membres est, certes, la recherche de la vérité. Mais parmi les moyens de la notoriété figurent classiquement le fait de transformer les collectifs Ξ, de Ξ^* ou de Ξ^{**} en ce que Henry David Thoreau (1817-1862) a appelé une « société d'admiration mutuelle » (*mutual admiration society*). Une telle situation engendre une contrainte que l'on peut d'ores et déjà noter : l'obligation de citer tel ou tel auteur dans une publication rendant compte d'une recherche qui ne s'est nullement appuyée sur les publications (ou les écrits, ou les travaux) de cet auteur. Dans le principe, la liste des références figurant à la fin d'un article doit se rapporter strictement aux réponses $R^\lozenge$ et aux œuvres O qui apparaissent dans le schéma herbartien développé qui résume la recherche :

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \curvearrowright \{\, R^\lozenge_1, R^\lozenge_2, \ldots, R^\lozenge_n, O_{n+1}, O_{n+2}, \ldots\, O_m, Q_{m+1}, Q_{m+2}, \ldots, Q_p\}] \hookrightarrow R^\heartsuit.$$

Les pressions exercées par les revues scientifiques pour que les articles qu'elles publient citent leurs auteurs « favoris » − ce qui fait monter l'*impact factor* de la revue (voir l'article « Facteur d'impact » de *Wikipédia* par exemple) − sont bien connues. Elles ont été récemment mises en évidence par deux chercheurs américains, Allen W. Wilhite and Eric A. Fong, dans un article rendant compte d'une enquête auprès de chercheurs en sciences sociales, publié dans la revue *Science* et intitulé « Coercive Citation in Academic Publishing ». Ces auteurs écrivent dans leur conclusion :

> Although most of our respondents condemn coercion, less than 7% thought an author would refuse to add superfluous citations if coerced to do so. Thus, an author can become both a victim and a coconspirator in the self-citation game; they are rewarded for acquiescing because their manuscript is published, and their gratuitous citations help to boost the impact factor of the journal in which they published.

Ils rappellent à cet égard le principe directeur, qui semble pourtant n'être guère respecté :

> The American Psychological Association Publication Manual states, "Cite the work of those individuals whose ideas, theories, or research *have directly influenced your work*" (emphasis added)…

(La citation de l'*American Psychological Association Publication Manual* se trouve page 169 de l'édition de 2010.) En fait, lorsqu'on s'efforce de vérifier si ce principe − ne citer que les auteurs qui, en quelque façon, ont influencé directement la recherche présentée − est bien respecté, on tombe généralement sur des surprises. D'une manière plus générale, nous serons attentifs aux diverses formes d'*emprises*, de domination intellectuelle qui, comme autant de filets lancés sur lui pour le subjuguer, menacent la liberté scientifique du chercheur.

1.9. On a déjà évoqué (dans la leçon 1) la notion de *rupture épistémologique*, en reprenant ainsi une expression classique introduite autrefois par l'épistémologue Gaston Bachelard (1884-1962). Nous lui substituerons ici une notion plus large − qui, donc, la contient −, celle de *rupture praxéologique*. L'une des sources de nombre de difficultés qui assaillent le chercheur en didactique est en effet son rapport ambigu à la figure du professeur ; ou, pour être plus précis, *son rapport au rapport du professeur* à une foule d'objets. Plus précisément, on s'arrêtera un instant ici sur la question de l'*évaluation par les pairs*, ce qu'on nomme en anglais *peer review*, et que l'article de *Wikipédia* qui lui est consacré présente en ces termes :

> Dans les disciplines scientifiques, l'*évaluation par les pairs* désigne l'activité collective des chercheurs qui jaugent de façon critique les travaux d'autres chercheurs (leurs « pairs »). Ces évaluations peuvent porter sur une recherche précise soumise pour publication dans une revue scientifique ou destinée à être présentée à une conférence mais elles peuvent aussi couvrir l'ensemble des travaux du chercheur ou du groupe de chercheurs évalués, notamment lors du recrutement d'un candidat à un poste ou lors de l'évaluation de projets de recherche par des institutions publiques (comme le CNRS) ou privées (comme une fondation). Pour les revues scientifiques, l'évaluation par les pairs est menée par des ***comités de lecture*** qui décident si le compte-rendu d'un travail de recherche soumis pour publication est acceptable ou non.

Complétons cela par un extrait de l'article correspondant en anglais, intitulé « Peer review » :

> Scholarly peer review (also known as *refereeing*) is the process of subjecting an author's scholarly work, research, or ideas to the scrutiny of others who are experts in the same field, before a paper describing this work is published in a journal. The work may be accepted, considered acceptable with revisions, or rejected. Peer review requires a community of experts in a given (and often narrowly defined) field, who are qualified and able to perform impartial review. Impartial review, especially of work in less narrowly defined or inter-disciplinary fields, may be difficult to accomplish; and the significance (good or bad) of an idea may never be widely appreciated among its contemporaries. Although generally considered essential to academic quality, and used in most important scientific publications, peer review has been criticized as ineffective, slow, and misunderstood (also see anonymous peer review and open peer review).

Le même article précise encore :

> This process encourages authors to meet the accepted standards of their discipline and prevents the dissemination of irrelevant findings, unwarranted claims, unacceptable interpretations, and personal views. Publications that have not undergone peer review are likely to be regarded with suspicion by scholars and professionals.

En d'autres termes, le *peer reviewing* a pour ambition d'inciter les chercheurs à poursuivre la vérité, et non la seule notoriété achetée au prix d'entorses à la vérité. Mais outre que c'est alors que l'on voit se produire le phénomène, évoqué plus haut, d'incitation « coercitive » et intéressée à la citation sur commande, un autre phénomène remarquable se produit. Fréquemment − et en tout cas trop fréquemment −, en effet, les chercheurs réputés « experts » (qui, souvent, ne le sont guère), en particulier dans une communauté scientifique pauvre en ressources humaines, se comportent non pas en *pairs*, mais en caricatures de professeurs tançant − et, parfois, insultant − les « élèves » que deviennent à leurs yeux les auteurs des articles soumis à leur jugement. Bien entendu, il existerait une solution à ce problème : remplacer l'*anonymous peer review* ou *blind review*, où les auteurs ne connaissent pas l'identité de leurs juges − les « lecteurs » (ou *referees* en anglais) − et où ces *referees* sont censés ne pas connaître l'identité des auteurs qu'ils jugent, par l'*open peer review*, où tout est « en clair ». Mais il s'agit là d'une pratique qui est encore loin de triompher ! (Sur les diverses variantes possibles de l'évaluation par les pairs, voir l'article « Peer review » de *Wikipedia* ou encore les pages 225 à 228 du *Publication Manual* de l'American Psychological Association.)

1.10. Les observations précédentes appellent une mise au point. D'une façon générale, un chercheur en didactique, ξ, qui est souvent un professeur ou un ancien professeur ou s'en trouve proche, doit construire aux objets de son activité de chercheur des rapports propres, *sui generis*. Or, bien souvent, faute d'un travail collectif et individuel suffisant dans Ξ, Ξ^* ou Ξ^{**}, ξ conserve, en quelque sorte par défaut, le rapport personnel qui s'était construit dans l'exercice de son activité professorale et qui est souvent le rapport commun − et dominant − parmi les gens de métier − les professeurs. Deux aspects sont alors à souligner. Tout d'abord, le rapport professoral à tel ou tel objet, que les chercheurs peuvent avoir à *étudier*, *analyser*, *expliquer*, n'a pas vocation à constituer le « bon » rapport d'un *chercheur en didactique* à cet objet, même s'il apparaît momentanément optimal dans les conditions et sous les contraintes où opèrent généralement les professeurs. Ensuite, ce rapport professoral n'est par principe pas figé pour l'éternité mais est au contraire appelé à évoluer du fait de l'évolution des conditions et contraintes sous lesquelles il s'est formé. Enfin, les résultats des travaux de recherche en didactique eux-mêmes peuvent, à terme, créer des conditions ou faire évoluer des contraintes qui participeront, avec d'autres forces sociales, à cette évolution même, et cela de façon spontanée ou délibérée (dans le cas notamment de travaux d'ingénierie de la formation des professeurs).

2. Problématicités : « le(s) mathématique(s) »

2.1. L'enquête sur les fondements de la recherche en didactique des mathématiques conduit à s'interroger sur les conditions de possibilité d'une *recherche* sur le *didactique* relatif au *mathématique*. Cela suppose que l'on s'interroge en particulier sur « le mathématique » et sur « les mathématiques ». Nous allons voir que, à l'instar *du didactique* et *de la recherche* (sur lesquels nous viendrons plus tard), *le mathématique* est une réalité *elle-même problématique*.

2.2. Un premier aspect de la problématicité des mathématiques tient d'abord à la difficulté de définir ce qui relèverait « des mathématiques » et ce qui n'en relèverait pas. En vérité, la ligne de démarcation « officielle » s'est beaucoup déplacée au fil du temps. « Ça n'est pas des mathématiques ! » est un cri du cœur qu'on peut ainsi entendre venant d'un professeur de mathématiques, par exemple à propos de ce qu'il ne connaît pas et qu'il déclarerait se refuser à enseigner (parce que, selon lui, cela n'entrerait pas dans son domaine de spécialité, « les mathématiques »). On pourrait l'entendre aussi de la part d'un professeur de physique, voire d'un professeur de biologie, à propos par exemple de ce qui fonde telle ou telle conclusion « physique » ou « biologique ». Il se trouve pourtant que les frontières du champ des mathématiques ont historiquement beaucoup évolué. Donnons de cela un premier exemple. Dans la notice de *Wikipedia* intitulée « William Emerson (mathematician) », consacré au mathématicien W. Emerson (1701-1782), on trouve cette liste des œuvres mathématiques de celui-ci :

- *The Doctrine of Fluxions* (1748)
- *The Projection of the Sphere, Orthographic, Stereographic and Gnomical* (1749)
- *The Elements of Trigonometry* (1749)
- *The Principles of Mechanics* (1754)
- *A Treatise of Navigation* (1755)
- *A Treatise of Algebra*, in two books (1765)
- *The Arithmetic of Infinites, and the Differential Method, illustrated by Examples* (1767)
- *Mechanics, or the Doctrine of Motion* (1769)
- *The Elements of Optics*, in four books (1768)
- *A System of Astronomy* (1769)
- *The Laws of Centripetal and Centrifugal Force* (1769)
- *The Mathematical Principles of Geography* (1770)
- *Tracts* (1770)
- *Cyclomathesis, or an Easy Introduction to the several branches of the Mathematics* (1770), in ten volumes
- *A Short Comment on Sir Isaac Newton's Principia; to which is added, A Defence of Sir Isaac against the objections that have been made to several parts of his works* (1770)

Le professeur de mathématiques d'aujourd'hui serait sans doute surpris de voir des ouvrages de mécanique, de navigation, d'optique ou de géographie, notamment, figurer parmi les productions « mathématiques » d'Emerson (et de bien d'autres mathématiciens, jusqu'au plus haut niveau). Ce sont là en effet des parties des mathématiques que l'on nomme alors des *mathématiques mixtes*. L'une des premières mentions de cette expression apparaît dans les écrits de Francis Bacon (1561-1626), en particulier dans son ouvrage *Of the Proficience and Advancement of Learning* (1605), où l'on peut lire cette déclaration enthousiaste − la traduction de la colonne de droite est empruntée à Bacon (1605/1991) :

The Mathematics are either pure or mixed. To the Pure Mathematics are those	Les mathématiques sont soit pures soit mixtes [c'est-à-dire mêlées de matière]. Appartiennent

sciences belonging which handle quantity determinate, merely severed from any axioms of natural philosophy; and these are two, Geometry and Arithmetic; the one handling quantity continued, and the other dissevered. Mixed hath for subject some axioms or parts of natural philosophy, and considereth quantity determined, as it is auxiliary and incident unto them. For many parts of nature can neither be invented with sufficient subtilty, nor demonstrated with sufficient perspicuity, nor accommodated unto use with sufficient dexterity, without the aid and intervening of the mathematics; of which sort are perspective, music, astronomy, cosmography, architecture, enginery, and divers others.

aux mathématiques pures les sciences qui traitent de la quantité définie, absolument séparée de tout axiome de philosophie naturelle ; il y en a deux, la géométrie et l’arithmétique. La première traite de la quantité continue, la seconde de la quantité discrète. Les mathématiques mixtes ont pour objet quelques axiomes ou parties de la philosophie naturelle, et elles s’occupent de la quantité déterminée en tant que celle-ci leur est annexe et secondaire. Car nombreuses sont les parties de la nature qui ne peuvent être découvertes de manière suffisamment sagace, ni mises en évidence de manière suffisamment fine, ni adaptées à l’utilité d’une manière suffisamment adroite, sans l’aide et l’intervention des mathématiques. De cette espèce sont l’optique, la musique, l’astronomie, la géographie, l’architecture, la science des machines, et quelques autres. (pp. 130-131)

Le texte de Bacon continue par ces considérations :

In the Mathematics I can report no deficience, except it be that men do not sufficiently understand the excellent use of the Pure Mathematics, in that they do remedy and cure many defects in the wit and faculties intellectual. For if the wit be too dull, they sharpen it; if too wandering, they fix it; if too inherent in the sense, they abstract it. So that as tennis is a game of no use in itself, but of great use in respect it maketh a quick eye and a body ready to put itself into all postures; so in

Pour les mathématiques, je ne relève aucune lacune. À ceci près que les hommes ne comprennent pas assez quel usage excellent les mathématiques pures peuvent avoir en ce qu’elles apportent remède et guérison à de nombreux défauts de l’esprit et des facultés intellectuelles. Car si l’esprit est trop obtus, elles l’aiguisent ; s’il a trop tendance à vagabonder, elles le fixent, s’il est trop plongé dans le sensible, elles le rendent abstrait. Ainsi, il en est des mathématiques comme du tennis, qui est un jeu en lui-même sans utilité, mais qui est fort the Mathematics, that use which is collateral and intervenient is no less worthy than that which is principal and intended. [--] And as for the Mixed Mathematics, I may only make this prediction, that there cannot fail to be more kinds of them, as nature grows further disclosed. Thus much of Natural Science, or the part of nature speculative.

utile en tant qu'il rend l'œil rapide et le corps prêt à se plier à toutes sortes de postures ; l'utilité qu'ont les mathématiques, de façon accessoire et latérale, a tout à fait autant de valeur que leur utilité principale et voulue. Quant aux mathématiques mixtes, je me permettrai simplement cette prédiction : de plus nombreuses espèces de ces mathématiques ne peuvent manquer d'apparaître à mesure que la nature sera davantage découverte. En voilà assez de la science naturelle, ou de sa partie spéculative.

La notion de mathématiques mixtes va demeurer vivante durant près de trois siècles. L'édition de 1933 du célèbre *Oxford English Dictionary* en signale une occurrence datée de 1648 : « Wilkins, Math. Magick: Mathematics is usually divided into pure and mixed. » L'ouvrage mentionné ici, est dû à John Wilkins (1614-1672) et s'intitule *Mathematical Magick*. Le sous-titre manifeste l'une des significations populaires attachées à l'idée de mathématiques mixtes, celle de *puissance pratique*, puisqu'il promet de dévoiler au lecteur « the wonders that may be performed by mechanical geometry » (« les merveilles qu'on peut réaliser à l'aide de la géométrie mécanique »). Dans sa plénitude, le concept de mathématique mixte, qui plonge ses racines dans la science grecque antique, sera constamment sous-jacent à l'immense floraison scientifique des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles. En France, c'est d'Alembert (1717-1783) qui en formalise l'idée dans l'article « Mathématique ou Mathématiques » de l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* (1751-1772). Il écrit notamment :

> Les Mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle *Mathématiques pures*, considère les propriétés de la grandeur d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second, par l'étendue : dans le premier cas, les Mathématiques pures s'appellent Arithmétique, dans le second, Géométrie [...] La seconde classe s'appelle *Mathématiques mixtes* ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire, de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers [...]. Du nombre des Mathématiques mixtes,

> sont la Méchanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, &c.

On retrouve là l'essentiel de la doctrine baconienne. Tandis que les mathématiques *pures* étudient « les propriétés de la grandeur d'une manière abstraite », les mathématiques *mixtes* s'occupent des « grandeurs concrètes ». Dans son discours préliminaire à l'*Encyclopédie méthodique* (1784) − laquelle reprend notamment les articles mathématiques de l'*Encyclopédie* −, l'abbé Charles Bossut (1730-1814) offrira ce découpage :

> 1°. La Méchanique, science de l'équilibre et du mouvement des corps solides.
> 2°. L'hydrodynamique, qui considère l'équilibre et le mouvement des corps fluides.
> 3°. L'Acoustique ou la Théorie du son.
> 4°. L'Optique ou la Théorie du mouvement de la lumière.
> 5°. L'astronomie, science du mouvement des corps célestes.

Dans son *Histoire des mathématiques*, dont la seconde édition paraît en 1799-1802, Jean-Étienne Montucla (1725-1799) accueille dans le royaume des mathématiques mixtes, à côté de l'*art de conjecturer*, de la *gnomonique* (l'art de concevoir et fabriquer des cadrans solaires), de la *perspective*, la *coupe de pierres*, « art qui, écrit Montucla, exige souvent des considérations géométriques assez profondes ». Dépassant la simple énumération, d'Alembert énonce, dans l'article « Application » qu'il donne à l'*Encyclopédie*, et en se référant au cas de la « catoptrique » – l'optique des miroirs –, la *formule épistémologique* sous laquelle on peut subsumer toute mathématique mixte :

> La plupart des propriétés des corps ont entr'elles des rapports plus ou moins marqués que nous pouvons comparer, et c'est à quoi nous parvenons par la Géométrie ou par l'Analyse et l'Algèbre. […] Une seule observation ou expérience donne souvent toute une science. Supposez, comme on le sait par l'expérience, que les rayons de lumière se réfléchissent en faisant l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion, vous aurez toute la Catoptrique [...]. Cette expérience une fois admise, la Catoptrique devient une science purement géométrique, puisqu'elle se réduit à comparer des angles et des lignes [...]. Il en est de même d'une infinité d'autres.

Quelques décennies plus tard, Bossut reprend ce thème dans son discours préliminaire :

> Les Mathématiques mixtes empruntent de la Physique une ou plusieurs expériences incontestables, ou bien supposent dans les corps une qualité principale et nécessaire ; ensuite, par des raisonnements méthodiques et démonstratifs, elles tirent du principe établi, des conclusions évidentes et certaines, comme celles que les Mathématiques pures tirent immédiatement des axiomes et des définitions. »

Se référant à l'optique, Montucla défendra sans complexe cet impérialisme potentiel de la connaissance mathématique :

> On ne peut disconvenir que ces recherches ne soient proprement du ressort de la Physique : mais en tant que mêlées intimement, et dépendantes des Mathématiques abstraites qui leur font part de la certitude qui les distingue elles-mêmes, elles sont en quelque sorte élevées par-là au rang des Mathématiques dont elles forment la seconde division. En cette qualité elles occupent une sorte de milieu entre la Physique souvent enveloppée d'incertitude et de ténèbres, et les Mathématiques pures dont la clarté et l'évidence sont toujours sans nuages. Elles ne sauraient avoir plus de certitude que le principe qui leur sert de fondement ; c'est en quoi elles tiennent de la Physique : d'un autre côté elles jouissent d'une évidence hypothétique, égale à celle des Mathématiques abstraites ; je veux dire que leur principe supposé vrai, elles ne sont pas moins certaines que ces dernières.

L'empire des mathématiques est ainsi immensément étendu.

2.3. Que se passe-t-il entre d'Alembert et nous ? À partir de 1800 environ, l'adjectif « mixte » est progressivement remplacé par le qualificatif « appliqué ». La huitième édition (1853-1860) de l'*Encyclopædia Britannica* subdivise encore les mathématiques en pures et mixtes ; mais la neuvième édition (1875-1889) distingue désormais mathématiques pures et mathématiques *appliquées*. En 1908 encore, l'*Oxford English Dictionary* mentionne l'expression *mixed science*, mais c'est pour dire qu'elle est devenue obsolète, « except for mixed mathematics ». Dès 1810, Joseph-Diez Gergonne (1771-1859) lance ses *Annales de mathématiques pures et appliquées*. En Allemagne, August Leopold Crelle (1780-1855) crée en 1826 le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, « journal de mathématiques pures et appliquées » vite surnommé, devant l'inflation théoriciste qui s'y donne cours, *Journal für die reine unangewandte Mathematik*, « journal de mathématique pures inappliquées ». La vitesse de disparition de l'expression varie selon les contextes. En 1875, ainsi, paraît un ouvrage en langue anglaise que son auteur, Alfred Wigley, a intitulé *A Collection of Examples and*

Problems in Pure and Mixed Mathematics: With Answers and Occasional Hints. Un an plus tôt avait paru en France un *Dictionnaire des mathématiques appliquées* dû à H. Sonnet, « docteur ès sciences, inspecteur de l'académie de Paris, professeur d'analyse et de mécanique à l'École centrale des arts et manufactures, ancien répétiteur de mécanique industrielle à la même école ». Même si les mots changent, l'ouvrage est un panorama des mathématiques mixtes, dont le titre complet montre bien l'ouverture à la diversité du monde, puisqu'on y expose l'application des mathématiques « à l'architecture, à l'arithmétique commerciale, à l'arpentage, à l'artillerie, aux assurances, à la balistique, à la banque, à la charpente, aux chemins de fer, à la cinématique, à la construction navale, à la cosmographie, à la coupe des pierres, au dessin linéaire, aux établissements de prévoyance, à la fortification, à la géodésie, à la géographie, à la géométrie descriptive, à l'horlogerie, à l'hydraulique, à l'hydrostatique, aux machines, à la mécanique générale, à la mécanique des gaz, à la navigation, aux ombres, à la perspective, à la population, aux probabilités, aux questions de bourse, à la topographie, aux travaux publics, aux voies de communication, etc., etc. » Allant au-delà de cet inventaire hétéroclite, l'auteur entame sa préface par cette précision :

> On désigne sous le nom de *Mathématiques appliquées* un ensemble de connaissances qu'il est plus facile d'énumérer que de réunir sous une définition précise. Cette définition n'embrasse pas, en effet, toutes les applications des mathématiques ; car l'Astronomie, par exemple, ainsi que la Physique appliquée, constituent des sciences à part, quoiqu'elles empruntent l'une et l'autre le secours de la Géométrie et de l'Analyse. On peut dire toutefois que les Mathématiques appliquées comprennent, d'une part, les questions de calcul qui se rapportent au commerce, à la banque, aux établissements de crédit et de prévoyance ; d'autre part, toutes les applications des mathématique *(sic)* aux constructions civiles et militaires, aux voies de communication et aux machines. L'énumération placée sur le titre de l'ouvrage complèterait, au besoin, ce que cette définition peut laisser à désirer.

On saisit là le phénomène qui, sur deux siècles environ, va progressivement vider les mathématiques mixtes de leurs contenus : des domaines qui relevaient des mathématiques *lato sensu* finissent par s'émanciper, et prennent leur autonomie épistémologique. Ainsi en va-t-il, donc, de l'*astronomie* – par contraste avec la *cosmographie*, qui, elle, demeure l'affaire du « mathématicien appliqué ». Trois degrés donc : mathématique mixte (ou appliquée), application des mathématiques, science autonome. Tout au long du XIX^{e} siècle, de nouveaux domaines scientifiques prennent ainsi leur indépendance par rapport aux « mathématiques pures et appliquées ». Les « mélanges » physico-mathématiques chers à d'Alembert semblent devenus instables, et leurs composants se séparent, selon un mouvement d'ensemble dont un historien prend acte en ces termes : « More and more "pure" mathematical theories of physics were developed to be "applied" to more and more physically obtained data. By 1875 theories were no longer "mixed" with experience, they were "applied" to experience » (Brown, 1991). Le passage des mathématiques mixtes aux mathématiques appliquées marque dans les manières de dire une *mise à distance du monde* de la part des mathématiciens. Appliquer les mathématiques ? Pourquoi pas ? Mais se mêler sans façon à une matière autre, *se mélanger à elle*, non ! Un très ancien *habitus* mathématicien devenait ainsi « mathématiquement incorrect ».

2.4. Dans l'enseignement secondaire français, la tradition demeura longtemps vivante de confier au professeur *de mathématiques* l'enseignement de matières qu'on ne songerait plus, aujourd'hui, à regarder comme de son ressort. Il y a soixante ans, ainsi, la *statique* figurait au programme de mathématiques, avec, notamment, le thème des *machines simples* (levier, treuil, cabestan, bascule du commerce, poulies, palan, moufle), qui ne disparaîtra des programmes de mathématiques qu'au début des années 1960. Le programme de mathématiques du 10 juillet 1925 pour les « classes de mathématiques » (c'est-à-dire pour les classes terminales scientifiques) comportait huit domaines. Les quatre premiers − arithmétique, algèbre, trigonométrie, géométrie − relevaient pour l'essentiel des mathématiques *pures*, tout en contenant certains thèmes *appliqués* traditionnels, relevant en particulier des mathématiques *financières* (intérêts composés, annuités, etc.). Les quatre autres domaines seraient vraisemblablement regardés aujourd'hui par les professeurs de mathématiques comme étrangers à leur domaine de compétence : *géométrie descriptive et géométrie cotée*, *cinématique*, *statique*, *cosmographie*. Certains domaines disparurent plus vite que d'autres ; les auteurs (anonymes) d'un ouvrage (s.d.) de préparation au baccalauréat publié au début des années 1940 notaient par exemple :

> Le programme relatif à la Géométrie Descriptive et à la Géométrie Cotée du Cours de Mathématiques Élémentaires est très restreint et prête peu aux problèmes. En fait, depuis 10 ans, le nombre de problèmes donnés sur ce sujet aux Examens est à peu près nul. Il faut cependant en prévoir de possibles…

Mais d'autres régions du continent mathématique résistèrent plus longuement au processus de « purification épistémologique ». Ainsi la cinématique survécut-elle jusqu'au milieu des années 1980. Quant à la cosmographie, rebaptisée astronomie, elle demeurera longtemps présente dans les classes terminales littéraires, pour n'en disparaître qu'avec les programmes de 1994. Notons que les mathématiques « mixtes », rebaptisées « appliquées », sont toujours, en nombre de pays, l'apanage du professeur de mathématiques. Dans un ouvrage britannique pour l'enseignement secondaire intitulé *Concise Applied Mathematics* (Neal, 1988), la table des matières est ainsi la suivante :

> 1. Basics // 2. Introduction to vectors // 3. Equilibrium of forces. Friction // 4. Moments, forces and equilibrium // 5. Velocity and acceleration in a straight line // 6. Further vector analysis // 7. Projectiles // 8. Work, energy and power // 9. Motion of particles in two dimensions // 10. Circular motion // 11. Momentum and impact // 12. Simple harmonic motion // 13. Differential equations // 14. Relative motion // 15. Centres of gravity and mass // 16. Frameworks [structures] // 17. Equilibrium of forces in three dimensions 18 Motion of the centre of mass. Stability // 19. Rotation: moments of inertia

À l'inverse, la conquête de leur indépendance par rapport aux mathématiques de nombreux domaines « récupérés » par la physique s'est accompagnée d'une *démathématisation* qui, pour être d'abord un « geste revendicatif », n'en est pas moins la source d'un certain appauvrissement praxéologique. À titre d'illustration, voici les premiers lignes qu'écrit l'auteur, qui se présente comme « agrégé de physique », d'un ouvrage de la collection « Que sais-je ? » intitulé *La statique* (Ricci, 1969, p. 5) :

> **Mécanique et mathématiques.** − Peut-être certains lecteurs de ce petit livre seront-ils déçus de voir qu'on y fait usage de dérivées, de vecteurs et de produits vectoriels. Ces notions, qui permettent seules une description convenable de la réalité naturelle, ne devraient en fait rebuter personne ; nous en avons d'ailleurs rappelé la signification avant de les employer (…). D'autres lecteurs, à l'inverse, seront-ils choqués de nous voir rester au niveau mathématique le plus modeste possible ? C'est qu'alors ils sont déjà mathématiciens et peut-être trop enclins à perdre de vue que la Mécanique fait partie de la Physique (dont elle forme, assurément, l'une des branches maîtresses). Encore qu'il ne laisse pas d'admirer la beauté logique de la « Mécanique rationnelle », le physicien ne peut renoncer à souligner la présence primordiale et savoureuse des faits expérimentaux.

On aperçoit ici la rétraction de la « physique » sur elle-même − à distance des « mathématiques ». Cette attitude s'est construite progressivement et l'on peut apercevoir aisément le « travail » historique pour « rapatrier » la mécanique dans la physique. Le point d’arrivée est sans doute assez bien représenté par l’article actuel de *Wikipédia* intitulé « Mécanique rationnelle » (http://fr.wikipedia.org/wiki/Mécanique_rationnelle), que le lecteur est invité à consulter. Mais les choses n’ont pas toujours été ainsi. C’est ce que rappelle le physicien, chimiste et philosophe des sciences Pierre Duhem (1861-1916) dans un long commentaire élogieux du livre de son ami Henri Bouasse (1866-1953), *Mécanique rationnelle et expérimentale* (1910), paru la même année. Duhem écrit ainsi :

> L’esprit même de [l’enseignement de la Mécanique] paraît avoir été très anciennement faussé par une fâcheuse classification des sciences.
>
> Les règlements qui, pendant quatre-vingts ans, ont régi la licence ès sciences, ceux qui sont encore en vigueur pour l’agrégation et le doctorat ont établi une ligne de démarcation entre les Sciences mathématiques et les Sciences physiques.
>
> En dépit de ce qu’une telle démarcation a toujours d’artificiel, partant de faux par quelque endroit, il était, semble-t-il, deux manières sensées de tracer cette frontière.
>
> On pouvait réunir sous le nom de Sciences mathématiques non seulement celles qui étudient et perfectionnent l’instrument mathématique, mais toutes celles qui usent de cet instrument pour coordonner en théories les lois issues de l’expérience ; la Physique eût alors pris place parmi les Sciences mathématiques, auprès de la Mécanique et de l’Astronomie, puisque la construction de théories mathématiques où se rangent les lois du son, de la chaleur, de la lumière, de l’électricité et du magnétisme est son objet propre. Au-delà de la frontière qui borne les Sciences mathématiques se fussent trouvées les Sciences de la nature, dont la fonction essentielle n’est plus de coordonner, à l’aide de la déduction mathématique, une foule de propositions en théories, mais bien, par la comparaison révélatrice des analogies, de classer une foule d’êtres en familles naturelles ; et la Chimie se fût alors très logiquement placée au voisinage de la Botanique et de la Zoologie. Cette façon de partager le domaine des Sciences, moins par leurs objets que par les facultés intellectuelles auxquelles elles font le plus fréquent appel, est celle qui a été adoptée en la constitution de l’Académie des Sciences, où la Section de Physique générale appartient aux Sciences mathématiques.
>
> On pouvait définir autrement les Sciences mathématiques ; on pouvait réserver ce nom aux doctrines purement abstraites des nombres et des figures ; elles ne demandent à l’expérience que des renseignements que tout homme possède, que l’usage quotidien, courant, nullement scientifique des sens suffit à lui fournir. Hors de ce domaine restreint des Sciences purement mathématiques, se fût étendue l’immense contrée des sciences qui se constituent à l’aide d’expériences plus raffinées et plus compliquées que la perception vulgaire, qui accroissent à l’aide d’instruments la puissance et la précision de nos sens ; parmi ces Sciences

expérimentales, on eût trouvé l'Astronomie et la Mécanique en même temps que la Physique. C'est cette division qui est, je crois, adoptée par les Universités allemandes ; c'est grâce à elle que les *Vorlesungen über die mathematische Physik* [« Leçons de physique mathématique »] de Kirchhoff débutent par un Volume consacré à la Mécanique.

> La distinction entre les Sciences mathématiques et les Sciences physiques ne se fit, dans les Facultés des Sciences, ni par l'un ni par l'autre de ces deux procédés ; la Mécanique et l'Astronomie furent mises au nombre des Sciences mathématiques, tandis que la Physique se trouvait indissolublement liée à la Chimie. (pp. 150-151)

On sera peut-être surpris de voir Duhem considérer aussi librement des « réarrangements » disciplinaires potentiels alors même que beaucoup regardent la cartographie des disciplines comme intrinsèque et, en quelque sorte, établie de toute éternité − ce que, bien évidemment, elle n'est pas ! Mais on a là une étape intermédiaire entre le tout-mathématique qu'impulsait la notion de mathématiques mixtes − ou « sciences physico-mathématiques » − et la situation d'aujourd'hui, où la mécanique est regardée comme une branche de la physique, la mécanique rationnelle étant rebaptisée « mécanique classique » (voir l'article « Mécanique newtonienne » de *Wikipédia*). On ne saurait mieux souligner que le « champ des mathématiques » est vaste et divers : pour un point actuel, on pourra consulter l'article « Mathématiques appliquées » de l'encyclopédie déjà cité.)

2.5. Le texte de Pierre Duhem aborde longuement les dangers d'un enfermement « purement mathématique », d'une « surmathématisation » de la mécanique. C'est là un discours qui, prit seul − nous allons voir que Duhem ne dit pas *que* cela −, est toujours banal dans la noosphère de l'enseignement secondaire (et peut-être universitaire) *de la physique* :

> Les savants auxquels fut confié, dans les Facultés, l'enseignement de la Mécanique étaient, pour la plupart, munis de l'agrégation de Mathématiques ; toujours et nécessairement, ils avaient pris le doctorat ès sciences mathématiques ; c'étaient donc des hommes qui, dès leur jeunesse, s'étaient montrés particulièrement doués pour la contemplation et l'analyse des idées abstraites ; qui, par une longue et laborieuse éducation, avaient exalté en leur raison la faculté de combiner les constructions de la Géométrie et les algorithmes de l'Algèbre.
>
> Au moment de professer la Mécanique, ils ont cherché à revêtir cette science de la forme qui leur semblait la plus parfaite, à la rendre donc aussi semblable que possible aux doctrines qu'ils avaient appris dès longtemps à regarder comme absolument belles, à la Géométrie et à l'Algèbre.

Imitant ce que le géomètre avait fait depuis des millénaires, ils ont voulu ne faire à l'expérience que des emprunts aussi peu nombreux que possible, et ils ont voulu que ces emprunts fussent faits aux observations les plus courantes, les plus obvies ; ils ont pris ainsi, pour les fondements de la doctrine qu'ils allaient exposer, un ensemble, aussi restreint qu'il se pût faire, de postulats sur les masses et les mouvements ; puis, sur ces fondements, tout semblables d'aspect aux axiomes de la Géométrie, ils ont, par la déduction mathématique, élevé un monument vaste et régulier. Pour mieux marquer que l'expérience n'avait pris, à l'érection de ce monument, qu'une part infime, que la raison raisonnante pouvait se vanter de l'avoir presque en entier construit par ses propres forces, on a donné à ce bel édifice mathématique le nom de Mécanique *rationnelle*. Le jour où, à côté de la chaire de Mécanique rationnelle, la Sorbonne créa une chaire de Mécanique physique et expérimentale, elle affirma, me semble-t-il, avec une particulière netteté, que l'essence de la Mécanique rationnelle était de n'être d'aucune manière ni physique ni expérimentale.

Traitée par des hommes qu'avait formés la plus pure éducation mathématique, par des hommes qui n'eussent su rien écrire qui ne fût très rigoureux, très clair, très ordonné, très élégant, la Mécanique rationnelle a produit des chefs-d'œuvre ; parmi les Livres et les Mémoires qui lui sont consacrés, abondent les écrits admirables. Mais ce qu'on admire, en ces œuvres, c'est l'art de combiner les constructions géométriques et les symboles algébriques. Cet art qui, en Mécanique, ne devait être qu'un moyen, qui devait servir à résoudre des problèmes utiles à l'ingénieur, à construire des théories propres à guider le physicien, cet art s'est posé comme une fin qui eût en elle-même sa propre valeur. Les lignes géométriques ne se sont plus enchevêtrées, les équations différentielles intégrées afin que le mécanicien sût répondre à une question formulée par l'expérience ; c'est le problème qui a été artificieusement choisi afin que le géomètre nous pût montrer la pénétrante clarté de son intuition et l'algébriste sa dextérité à manier le Calcul intégral. Séparée par une frontière malencontreuse de la Physique qui pouvait seule lui poser des questions utiles et des problèmes féconds, rendue stérile par le décret qui l'a rattachée au domaine des Mathématiques pures, la Mécanique rationnelle n'est plus qu'une sorte de terrain de manœuvre où s'exécutent d'habiles exercices d'Analyse et de Géométrie.

2.6. Poursuivant l'expression de son insatisfaction, Duhem argumente alors pour suggérer que ce à quoi aboutit en réaction la démathématisation virulente de la physique − à travers la promotion d'une « physique purement expérimentale » − est un processus non moins recommandable :

La forme que la Physique allait revêtir était, pour ainsi dire, déterminée d'avance par l'étroite parenté qui était assignée à cette science avec la Chimie, c'est-à-dire avec une science naturelle, la plus simple et la plus avancée des Sciences naturelles.

C'est parmi les mêmes hommes qu'allaient se recruter les futurs professeurs de Physique et de Chimie ; non point donc parmi ceux qui se complaisent aux idées très abstraites et aux raisonnements très rigoureux, mais bien parmi ceux chez qui la finesse d'observation est très aiguisée, voire parmi ceux qui sont doués d'une extrême dextérité manuelle, précieuse à l'expérimentateur ; futurs physiciens ou futurs chimistes, ils allaient entendre les mêmes enseignements, s'exercer aux mêmes manipulations, être éprouvés par les mêmes examens ; et ce que ces examens auraient pour objet d'y reconnaître, ce seraient surtout les facultés communes au physicien et au chimiste, l'habileté en l'art expérimental.

De même, alors, que le mécanicien, formé par une discipline presque exclusivement mathématique, en était venu à regarder la Géométrie et l'Algèbre non point comme des instruments propres à résoudre les questions proprement mécaniques, mais comme les objets mêmes auxquels doit tendre l'étude de la Mécanique, de même le physicien se prit à regarder l'observation et l'expérience non pas comme les ouvrières qui doivent poser les fondations de la Physique, mais comme les architectes qui doivent tracer le plan du monument tout entier.

La Physique, comme la Mécanique, devait résulter de l'intime union d'une forme définie par les Mathématiques avec une matière fournie par l'observation et l'expérience. Les mécaniciens s'étaient appliqués à faire abstraction aussi complète que possible de ce contenu, donné par l'expérience, et ils avaient obtenu cette forme, à peu près vide de toute matière, qu'ils avaient appelée Mécanique rationnelle. Les physiciens, de leur côté, réduisirent autant qu'ils purent le faire le rôle que la forme mathématique était appelée à jouer dans leur science ; leur idéal, de plus en plus ardemment et explicitement souhaité, fut de ne rien considérer sinon les lois que l'induction tire de l'observation ; la matière presque informe constituée par l'ensemble de ces lois leur apparut comme la plus parfaite des Physiques, la Physique purement expérimentale.

Ainsi la simple mesure administrative qui a tracé une ligne de démarcation entre la Mécanique et la Physique, qui a mis la Mécanique au nombre des sciences mathématiques et qui a rejeté la Physique au voisinage de la Chimie, a produit deux sciences également incomplètes, bien qu'elles le soient par deux privations inverses l'une de l'autre ; elle a engendré ces deux monstres complémentaires : la Mécanique rationnelle dégagée de toute Mécanique physique et expérimentale, et la Physique purement expérimentale soigneusement séparée de toute Physique mathématique.

La Mécanique est, par sa nature même, la partie la plus abstraite et la plus simplifiée de la Physique ; pour se constituer donc, la Mécanique rationnelle n'a eu besoin que de pousser à l'excès une abstraction et une simplification qui eussent été légitimes si elles fussent demeurées en deçà de certaines bornes.

Il n'en va pas de même de la Physique expérimentale. Le langage de l'Algèbre et de la Géométrie est si complètement indispensable à qui prétend énoncer avec clarté et précision les lois physiques issues de l'observation, ces lois tendent si naturellement à se grouper et à s'ordonner en théories mathématiques, que la constitution d'une Physique purement expérimentale semble être une irréalisable gageure ; sans cesse la Physique mathématique reparaît en la science au moment même qu'on l'en croit chassée. Ceux donc qui voudraient arracher à la Physique le dernier lambeau de son vêtement d'Algèbre et de Géométrie se voient condamnés au supplice d'un perpétuel recommencement.

Ils ne se découragent pas, cependant ; par un travail incessant, ils creusent de plus en plus le fossé que les règlements d'examens ont tracé entre la Physique et les Sciences mathématiques ; ils comptent bien qu'ils formeront ainsi des esprits tournés d'une manière invariable vers la science purement expérimentale à laquelle ils tendent…

On voit ainsi les tensions qui ont pu exister et peuvent exister entre le mathématique et le non-mathématique, entre mathématisation et démathématisation. C'est à partir de là que nous avancerons maintenant.

3. Mathématique, mathématisation, mathématisé

3.1. Le mathématique est ce qui naît de la mathématisation du non-mathématique : la formule peut paraître facile, mais elle nous servira de repère. Dans l'introduction de son petit ouvrage *Euclide. Extraits des Éléments* (1967), Charles Mugler écrit :

La rigueur, la pertinence et l'économie qui caractérisent la pensée d'Euclide ont marqué aussi l'expression de sa pensée. Le style d'Euclide est sobre et élégant, le vocabulaire précis et différencié, la syntaxe à la fois restreinte et nuancée. La terminologie des *Éléments*, créée en partie par les prédécesseurs d'Euclide, en partie par Euclide lui-même, a fixé définitivement la langue de la géométrie, non seulement en grec jusqu'à la fin des civilisations antiques, mais aussi, à travers les traductions, dans les autres langues de l'Occident.

Dans notre jargon géométrique, par exemple, cette influence est sensible, entre autres, dans une série de termes empruntés directement à la langue grecque, où ils avaient désigné à l'origine des objets de la vie courante, de la nature ou de la technique. À ce groupe appartiennent les mots *centre*, de *kentron*, aiguillon ; *cube*, de *kybos*, dé à jouer ; *cône*, de *konos*, pomme de pin ;

> *cylindre,* de *kylindros,* rouleau ; *parallèle,* de *parallelos,* ligne qui court le long d'une autre ligne ; *prisme,* de *prisma,* bloc de bois découpé par une scie ; *rhombe* (losange), de *rhombos,* toupie ; *sphère,* de *sphaira,* balle à jouer, etc.

La balle à jouer n'est pas une réalité mathématique. Mais on peut la mathématiser : sa mathématisation – nous devrions dire prudemment : *une* de ses mathématisations − engendre la notion mathématique de *sphère*, définie comme l'ensemble des points situés à une distance donnée d'un point donné, appelé centre de la sphère. Dès ce moment-là, on peut démontrer des théorèmes « mathématiques », par exemple celui-ci, rarement énoncé : une sphère, ou un cercle, a un centre *unique*. Bien entendu, une entité « mathématique », qui est donc *du mathématisé,* peut mathématisée être *plus encore* : un cercle est l'ensemble des points à une distance donnée d'un point donné ; mais cela deviendra plus tard l'ensemble des points qui, dans un certain type de repères, possède une équation de la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, où r est un nombre positif. *L'histoire du « mathématique » est une histoire de mathématisations.*

3.2. Deux points doivent être soulignés. D'une part, la présence d'ingrédients non mathématisés, ou partiellement mathématisés, n'invalide pas *ipso facto* le travail mathématique – sinon les mathématiques n'existeraient pas ! D'autre part, le développement historique des mathématiques suppose la mathématisation progressive des objets qui, formés dans la pratique extramathématique, ont été intégrés dans la pratique mathématique, parce que leur non-mathématisation finit un jour par être contre-productive, comme le suggère Jean Dieudonné (1987, p. 249), à propos des conditions de la pratique démonstrative en mathématiques :

> La situation est toute différente lorsqu'il s'agit de prétendues démonstrations, viciées dès le début parce qu'elles sont relatives à des objets *non définis* de façon précise. C'est ce qui s'est passé en analyse aux XVII^e^ et XVIII^e^ siècles, puisqu'on raisonnait sur des « infiniment petits » ou sur la « somme » d'une série, sans jamais être en état de dire ce que cela signifiait. Bien entendu, dans la plupart des cas, les meilleurs mathématiciens de l'époque avaient une idée juste de ce qu'ils pouvaient faire avec ces notions vagues, et leurs remarquables découvertes les encourageaient à aller de l'avant ; mais ils ne pouvaient exprimer leurs preuves dans un langage proprement mathématique ; et s'il n'a pas été difficile, au XIX^e^ siècle, de donner des démonstrations entièrement correctes de leurs résultats, cela n'est devenu possible qu'après avoir dégagé clairement la notion de limite comme concept de base, et en avoir entièrement codifié les propriétés [...].

De fait, la plupart des notions mathématiques *fondamentales* ont été utilisées par les mathématiciens *avant* d'avoir été complètement mathématisées : ainsi en va-t-il par exemple des notions de *nombre*, de *courbe*, de *surface*, ou encore simplement de *polyèdre*. Longtemps, au XIX^e^ siècle, la dérivabilité d'une fonction continue *va de soi* (d'après Delachet, 1961, pp. 56-57). C'est ainsi que Louis Poinsot (1777-1859) écrit dans son cours à l'École polytechnique (Poinsot, 1815) :

> On peut même dire que le rapport de deux choses homogènes ne dépendant ni de leur nature, ni de leurs grandeurs absolues, par la définition même du rapport, la quantité (Dy : Dx) a toujours une limite ; et c'est ce que la considération d'une courbe et de sa tangente, dont l'existence n'est pas douteuse, fait voir d'ailleurs avec la dernière évidence.

On aperçoit ici le rôle inducteur de la notion − tenue pour aller de soi − de tangente à une courbe en un point. Bien que Karl Weierstrass ait donné en 1872 son fameux exemple de fonction continue n'ayant de dérivée en aucun point, on retrouvera encore un raisonnement du type précédent − où la notion de tangente joue un rôle clé − dans l'édition de 1878 du *Traité d'algèbre* de Joseph Bertrand et Henri Garcet (vol. II, p. 94) :

> On peut demander si une fonction continue quelconque a une dérivée. Nous répondrons d'abord qu'en fait nous allons trouver, dans les paragraphes suivants, les dérivées des principales fonctions ; ce qui démontrera leur existence *a posteriori*. Nous ajouterons d'ailleurs que la fonction étant continue, l'équation : $y = f(x)$, représente une courbe plane continue, rapportée à deux axes rectangulaires; et l'on démontre, en géométrie analytique, que la dérivée représente la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe Ox la tangente à la courbe au point (x, y). Comme en chaque point une courbe continue a une tangente bien déterminée, la fonction admet une dérivée.

Longtemps, en fait, la tangente à une courbe d'équation $y = f(x)$ en un point M_0 fut définie comme « la position limite de la corde (M_0M) lorsque M tend vers M_0 en restant sur la courbe », et cela sans que l'on se préoccupe de savoir si cette position limite existait, ni même de définir préalablement la notion de *limite* impliquée dans une telle définition. L'article « Tangente » de *Wikipédia* indique à ce propos :

Définition géométrique de la tangente

On commence par définir la droite sécante entre deux points *M* et *N* de la courbe : c'est la droite qui les relie. La tangente en *M* peut alors être définie comme la position limite de la sécante lorsque le point *N* tend vers *M*.

Pour être rendue parfaitement rigoureuse, cette définition demande d'introduire des notions de topologie permettant le calcul d'une telle limite. Elle est cependant très imagée.

La « définition géométrique » de la tangente, utilisée pendant des siècles, peut certes être mathématisée. Mais la chose requiert un certain travail dont on prendra la mesure dans l'*annexe* à cette leçon.

3.3. La mathématisation est toujours *relative*. Mais elle peut être plus ou moins « poussée ». Dans un certain nombre de cas, nous l'avons vu, on peut même observer, en telle ou telle institution, un processus de *démathématisation*, phénomène dont les effets doivent chaque fois être appréciés de façon spécifique. C'est ainsi que, au collège et au lycée, après le temps − relativement bref − de "surmathématisation" qu'a impulsé la réforme des mathématiques modernes, s'est accrue une pression démathématisante exercée notamment par les manuels et généralement confortée par les professeurs. Cette propension curriculaire à la démathématisation érode en général, dans le système des praxéologies mathématiques à faire étudier en telle classe ou en tel cursus d'études, les parties technologico-théoriques Λ (*logos*), généralement *latentes* et très peu mathématisées, au point de dénaturer les parties pratico-techniques Π (*praxis*), elles *manifestes* (ou *patentes*). À la praxéologie initiale, qu'on peut noter $\Pi \oplus \Lambda$, se substitue d'abord une praxéologie $\Pi \oplus \Lambda^\dagger$, puis une praxéologie $\Pi^\dagger \oplus \Lambda^\dagger$, laquelle est déterminée en partie par les effets constatés du nouveau *logos* $\Lambda^\dagger$ sur l'ancienne *praxis* Π.

3.4. La question du *logos* et plus précisément encore de la *théorie* (au sens de la TAD) appellerait des développements que l'on réduira ici à trois remarques seulement. Tout d'abord, la théorie existe toujours. Quand bien même elle s'exprimerait par bribes et paraîtrait inconsistante, elle n'en serait pas moins opérante ! Ensuite, plus encore que les technologies « mathématiques », une telle théorie est généralement mêlée d'éléments divers empruntés à l'ensemble de la culture, et intégrés à la théorie « mathématique », *de facto*, sans avoir été « mathématisés », ce qui donne à ces éléments théoriques une grande fragilité qui conduit fréquemment à leur effacement silencieux et à leur remplacement subreptice par d'autres éléments théoriques qui n'auront pas été davantage analysés.

3.5. Ajoutons enfin que la « couche » supérieure de la composante théorique d'un complexe praxéologique donné a été désignée, historiquement, sous le nom de *métaphysique*, mot à propos duquel Littré écrit ceci dans son dictionnaire :

> 4°Les parties les plus élevées d'une science particulière, d'un art quelconque. La métaphysique du droit. La métaphysique des mathématiques. Je veux mourir s'il y a dans toutes ces têtes-là le premier mot de la métaphysique de leur art, DIDEROT, Salon de 1767, Œuvr. t. XIV, p. 140, dans POUGENS. Métaphysique de la géométrie, expression dont Descartes (Lettre au P. Mersenne, janv. 1639) se servait pour désigner la géométrie générale.

Dans l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert (1751-1772), Diderot rédige l'article suivant :

> MÉTAPHYSIQUE, s. f. c'est la science des raisons des choses. Tout a sa *métaphysique* & sa pratique : la pratique, sans la raison de la pratique, & la raison sans l'exercice, ne forment qu'une science imparfaite. Interrogez un peintre, un poete, un musicien, un géometre, & vous le forcerez à rendre compte de ses opérations, c'est-à-dire à en venir à la *métaphysique* de son art. Quand on borne l'objet de la *métaphysique* à des considerations vuides & abstraites sur le tems, l'espace, la matiere, l'esprit, c'est une science méprisable ; mais quand on la considere sous son vrai point de vûe, c'est autre chose. Il n'y a guere que ceux qui n'ont pas assez de pénetration qui en disent du mal.

Le lecteur intéressé pourra par exemple enquêter sur la *théorie de l'algèbre* due à William Rowan Hamilton (1805-1865) : en simplifiant beaucoup, on peut dire que l'idée directrice en est que, de même que la géométrie est la science de l'*espace*, l'algèbre est, elle, la science du *temps* – « *the science of pure time* ».

Annexe

Un exemple de mathématisation incomplète : la notion de tangente

1. Comment justifier la définition géométrique traditionnelle de la tangente à une courbe en un point M_0 comme étant « la position limite de la corde (M_0M) lorsque M tend vers M_0 en restant sur la courbe » ? L'énoncé ci-après d'un « petit problème » proposé par l'auteur, le jeudi 6 janvier 2000, à des étudiants préparant le CAPES de mathématiques, joint au corrigé dudit problème, apporte une réponse à cette question laissée traditionnellement ouverte.

Énoncé

L'étude ci-après a pour objet de mathématiser l'idée intuitive selon laquelle « une tangente à une courbe en un point M_0 *est la limite de la corde* (M_0M) *lorsque* M *tend vers* M_0 *en restant sur la courbe ».*

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et soit $\tau \in I$.

1. On note L l'ensemble des applications $u : t \mapsto u(t)$ de $I\backslash\{\tau\}$ dans $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ telles que $\ell(u) = \lim_{t\to\tau, t\neq\tau} u(t)$ existe et soit non nul. Soit alors $u_1, u_2 \in L$ telles que, pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$, on a $\mathbb{R}u_1 = \mathbb{R}u_2$. Montrer qu'il existe une application φ de $I\backslash\{\tau\}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$, on a $u_1(t) = \varphi(t)u_2(t)$, et que φ a une limite quand t tend vers τ, $t \neq \tau$. En déduire que $\mathbb{R}\ell(u_1) = \mathbb{R}\ell(u_2)$.

2. Soit $\delta : t \mapsto \delta(t)$ une application de $I\backslash\{\tau\}$ dans l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$. On dit que δ a pour limite la droite vectorielle Δ quand t tend vers τ, $t \neq \tau$ s'il existe $u \in L$ telle que, pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$, $\mathbb{R}u(t) = \delta(t)$, avec $\mathbb{R}\ell(u) = \Delta$ Justifier cette définition.

3. Soit $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ une application injective de I dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$, on pose $\delta(t) = \mathbb{R}\overrightarrow{\gamma(\tau)\gamma(t)}$. Si Δ existe, on dit que $\gamma(I)$ a pour tangente en $\gamma(\tau)$ la droite affine $\gamma(\tau)+\Delta$.

a) Montrer que si γ est dérivable en τ et si $\gamma'(\tau) \neq 0$, alors $\gamma(I)$ a pour tangente en $\gamma(\tau)$ la droite affine $\gamma(\tau)+\mathbb{R}\gamma'(\tau)$.

b) On suppose que $\gamma(t) = (t, f(t))$, où f est une application de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\gamma(I)$ a une tangente en $\gamma(\tau)$ si et seulement si f admet en τ une dérivée finie ou infinie.

Corrigé

1. Pour tout $t \in I\backslash\{\tau\}$, les conditions $u_2(t) \neq 0$ et $\mathbb{R}u_1(t) = \mathbb{R}u_2(t)$ entraînent l'existence d'un réel $\varphi(t)$ tel que $u_1(t) = (x_1(t),y_1(t)) = \varphi(t)u_2(t) = \varphi(t)(x_2(t),y_2(t))$. Le vecteur $\ell(u_2) = (X_2,Y_2)$ étant non nul, on a X_2 ou $Y_2 \neq 0$. Supposons $Y_2 \neq 0$; pour tout $t \neq \tau$ assez voisin de τ, on a donc $y_2(t) \neq 0$ et l'égalité $y_1(t) = \varphi(t)y_2(t)$ s'écrit $\varphi(t)= y_1(t)/y_2(t)$: $\varphi(t)$ tend vers Y_1/Y_2 quand t tend vers τ, $t \neq \tau$.

Par suite on a $\ell(u_1) = (Y_1/Y_2)\ell(u_2)$, et donc $\mathbb{R}\ell(u_1) = \mathbb{R}\ell(u_2)$. Le cas $Y_2 = 0$, $X_2 \neq 0$ se traite de même.

2. Si $v \in L$ vérifie $\mathbb{R}v(t) = \mathbb{R}u(t)$ pour tout $t \in \mathrm{I}\setminus\{\tau\}$, on a, d'après ce qui précède, $\mathbb{R}\ell(v) = \mathbb{R}\ell(u)$. L'existence et la valeur de $\Delta = \ell(\delta)$ sont donc indépendantes du choix de $u \in L$ telle que $\mathbb{R}u = \delta$ sur $\mathrm{I}\setminus\{\tau\}$.

3. a) On a d'abord : $\delta(t) = \mathbb{R}\overrightarrow{\gamma(\tau)\gamma(t)} = \mathbb{R}(\gamma(t)-\gamma(\tau)) = \mathbb{R}\frac{\gamma(t)-\gamma(\tau)}{t-\tau}$. L'application γ étant dérivable en τ, on a $\lim_{t\to\tau, t\neq\tau} \frac{\gamma(t)-\gamma(\tau)}{t-\tau} = \gamma'(\tau)$; il en résulte que $\Delta = \ell(\delta)$ existe et est égale à $\mathbb{R}\gamma'(\tau)$: la tangente à $\gamma(\mathrm{I})$ en $\gamma(\tau)$ est la droite affine $\gamma(\tau)+\mathbb{R}\gamma'(\tau)$.

b) Pour tout $t \in \mathrm{I}\setminus\{\tau\}$ posons $\delta(t) = \mathbb{R}\overrightarrow{\gamma(\tau)\gamma(t)} = \mathbb{R}(\gamma(t)-\gamma(\tau)) = \mathbb{R}(t-\tau, f(t)-f(\tau))$. Supposons d'abord que $f'(\tau)$ existe. Si $f'(\tau)$ est finie, on a $\delta(t) = \mathbb{R}(t-\tau, f(t)-f(\tau)) = \mathbb{R}(1, \frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau})$: il vient donc $\Delta = \ell(\delta) = \mathbb{R}(1, f'(\tau))$. Si $f'(\tau)$ est infinie, on a : $\delta(t) = \mathbb{R}(t-\tau, f(t)-f(\tau)) = \mathbb{R}(\frac{t-\tau}{f(t)-f(\tau)}, 1)$: il vient donc $\Delta = \ell(\delta) = \mathbb{R}(0,1)$. Inversement, supposons que $\Delta = \ell(\delta)$ existe, et soit $u = (x,y) \in L$ telle que, pour $t \in \mathrm{I}\setminus\{\tau\}$, $\delta(t) = \mathbb{R}(t-\tau, f(t)-f(\tau)) = \mathbb{R}u(t)$: on a $\ell(\delta) = \mathbb{R}\ell(u) = (X,Y)$. Si $X \neq 0$, on a $x(t) \neq 0$ pour tout $t \neq \tau$ assez proche de τ, et donc $\mathbb{R}(1, \frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau}) = \mathbb{R}(x(t), x(t)\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau})$: il en découle que $x(t)\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau} = y(t)$, soit $\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau} = \frac{y(t)}{x(t)}$, et donc que $f'(\tau) = \frac{Y}{X}$. Si $X = 0$, alors $Y \neq 0$: on montre de même que $\frac{t-\tau}{f(t)-f(\tau)}$ tend vers 0 quand t tend vers τ, $t \neq \tau$, et donc que $f'(\tau) = \pm\infty$.

2. La mathématisation réalisée par l'ensemble constitué de l'énoncé du problème et de son corrigé est inspirée de l'étude proposée Bernard Gostiaux dans le volume 5 (intitulé « Géométrie : arcs et nappes ») de son *Cours de mathématiques spéciales* (1995, pp. 13-16). À son propos, Gostiaux s'adresse à son lecteur dans les termes suivants :

> Je vous dois un aveu. Depuis que j'enseigne, jamais je n'avais rédigé ce passage (et je ne l'ai jamais vu rédigé, mais je ne suis pas très curieux) et je me contentais, pour parler de tangentes, plan osculateurs... de faire comme tout le monde, de parler de « position limite » d'une droite ou d'un plan, sans m'étendre davantage.
>
> Il est bon, de temps en temps, de faire un effort de rigueur, et ce d'autant plus que l'emploi de calculettes et d'ordinateurs, certes performants, affaiblit encore le souci de rigueur dans le domaine de l'étude des arcs paramétrés. Je vous ennuie peut-être avec cette étude, mais je me suis fait plaisir ! D'autant qu'en ce mois de février, dans le Morvan, il pleut, alors autant rédiger au coin du feu ! (p. 14)

Nous avons là un bel exemple de ces mathématisations laissées incomplètes − sauf exception !