Université d’Aix-Marseille

2013-2014

Master « Mathématiques et applications »

Spécialité « Enseignement et formation en mathématiques »

Parcours « Didactique » (2^e^ année)

UE 1

Fondements et méthodes de la recherche en didactique

Yves Chevallard & Michèle Artaud

Travaux dirigés 1 : Enchaînements d’opérations

Dans un travail de recherche portant sur la mise en œuvre d’une « progression » annuelle au cours préparatoire en arithmétique, les chercheurs recueillent des écritures d’élèves du type $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 6 - 2$. L’un des chercheurs rappelle à cet égard l’épisode que voici : « J’avais eu une fois une petite discussion avec un formateur IUFM de mathématiques, ancien professeur de collège, qui me disait que, lorsqu’il enseignait, il refusait à ses élèves le droit d’écrire de telles “suites” de signe “égal” : les équations ne devaient comporter que deux expressions, l’une à droite, l’autre à gauche du signe “égal”. Autrement dit, il acceptait $a = b$, mais refusait $a = b = c$, cette dernière égalité devant s’écrire en deux lignes. Je lui ai dit que je trouvais cette interdiction curieuse et sans véritable sens, et il n’a pas pu d’ailleurs me donner une raison d’être de cette “coutume”. Je me demande ce qu’il faut en penser. » Une équipe de didacticiens Ξ_1 se propose de conduire une recherche pour tirer au clair cette observation :

> Q^1_∂. Est-il exact que nombre de professeurs de mathématiques interdisent à leurs élèves (ou, du moins, leur déconseillent) d’écrire des suites d’égalités comme $23 + (45 - 2 \times 7) = 23 + (45 - 14) = 23 + 31 = 54$? Pourquoi cela ? Pour des raisons mathématiques ou pour d’autres raisons ? Lesquelles ?

☞ *Dans tout ce qui suit dans ce TD 1, on se placera dans la perspective de l’étude de la question Q^1_∂ ci-dessus.*

Question 1. L'équipe Ξ_1 envisage d'abord d'effectuer le « geste de recherche » consistant à enquêter auprès de professeurs de mathématiques enseignant en collège ou en lycée. Apportez votre contribution à cette enquête en répondant par écrit au questionnaire suivant :

1. a) Favorisez-vous les suites d'écritures du type

$$\begin{aligned} A &= 4 \times (2 + 1) \\ &= 4 \times 3 \\ &= 12 \end{aligned} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{aligned} A &= 4 \times (2 + 1) \\ A &= 4 \times 3 \\ A &= 12 \end{aligned}$$

par rapport aux écritures du type $A = 4 \times (2 + 1) = 4 \times 3 = 12$?

b) Quel que soit votre choix, comment le justifieriez-vous ?

2. a) Interdisez-vous les écritures du deuxième type aux élèves ?

b) Quel que soit votre choix, comment le justifieriez-vous ?

3. a) Vous permettez-vous vous-même d'utiliser des écritures du deuxième type, soit au tableau, soit dans des documents rédigés à l'intention des élèves ?

b) Quel que soit votre choix, comment le justifieriez-vous ?

Éléments d'analyse 1

1. Une enquête a été conduite auprès de $n = 6$ professeurs à l'aide du questionnaire ci-dessus. Voici les réponses apportées aux différentes questions soulevées.

Réponses à la question 1 (a et b)

1. a) Favorisez-vous les suites d'écritures du type

$$\begin{aligned} A &= 4 \times (2 + 1) \\ &= 4 \times 3 \\ &= 12 \end{aligned} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{aligned} A &= 4 \times (2 + 1) \\ A &= 4 \times 3 \\ A &= 12 \end{aligned}$$

par rapport aux écritures du type $A = 4 \times (2 + 1) = 4 \times 3 = 12$?

b) Quel que soit votre choix, comment le justifieriez-vous ?

① a & b) « Par exemple en 5^{e} j'écris les deux formes que j'appelle calculs en lignes et en colonnes mais je favorise les écritures en colonne par exemple en 5^{e} dans les suites de calculs pour éviter les égalités du type A= 3 + (5 + 4) = 9 = 9 + 3 = 12, où les élèves font des calculs intermédiaires : ils calculent les opérations prioritaires dans leur tête et du coup les écrivent comme calculs intermédiaires lorsqu'ils sont en lignes dans des calculs plus compliqués. »

② a) « Oui j’ai eu l’habitude de l’interdire à mes élèves. »
b) « Je pense que l’égalité est une relation entre DEUX expressions, donc une seule fois par ligne pour montrer cette relation. Mais je sais que la relation égale est transitive donc on peut écrire plusieurs = sur la même ligne. »

③ a) « Je propose aux élèves d’utiliser les deux types d’écritures. »
b) « Première raison : les deux types d’écritures sont corrects. Deuxième raison : le premier type fait penser aux écritures équationnelles, le second type fait penser à une suite de calculs écrite à la suite. Troisième raison, les élèves ont le choix de l’écriture qu’ils préfèrent. »

④ a) « Non je ne favorise pas la première écriture par rapport à l’autre. »
b) « S’il y a de la place pour écrire sur la ligne, on continue à écrire en ligne ; sinon on revient à la ligne en rappelant le signe “=” et le nom de l’expression “A” auquel il se rapporte.

⑤ a) « Oui dans une conduite de calculs algébriques avec des priorités, et sans variables (lettres). Non pour des élèves qui “maîtrisent” cette présentation sans faire d’erreurs.
b) « Ex. : 14 – 5 × 2 + 3 = 10 + 3 = 13 – 14 = –1. Le nombre d’erreurs dans l’organisation de la conduite du calcul me pousse à proposer d’aller à la ligne pour considérer que l’ensemble de l’expression a *une* (et une seule) valeur que l’on doit retrouver entre chaque signe =. »

⑥ a) « Pour une série de calcul avec des enchaînements de plusieurs opérations je favorise l’écriture ligne par ligne. »
b) « Je justifie le choix par la confusion de beaucoup d’élèves sur le sens du signe “=”. Pour une majorité “=” peut être remplacé “ça donne”. Il oublie ainsi le reste du calcul. Pour d’autres chapitres j’utilise *aussi* l’écriture en ligne. »

Réponses à la question 2 (a et b)

2. a) Interdisez-vous les écritures du deuxième type aux élèves ?
b) Quel que soit votre choix, comment le justifieriez-vous ?

① a) « Je ne les interdis pas. »
b) Ø

② [Voir la réponse à la question 1.]

③ a) « Non. Pas d'interdiction. »
b) Ø

④ a) « Je pourrais interdire l'écriture en ligne dans le cadre de la résolution d'équations. »
b) « Je le justifie par l'équivalence des écritures dans la résolution pour la recherche de valeurs de l'inconnue. »

⑤ a) Non.
b) Ø

⑥ a) « Non, pour des égalités de fractions par exemple. »
b) « Indiquer des écritures qui montrent qu'un nombre peut s'écrire de plusieurs manières. »

Réponses à la question 3 (a et b)

3. a) Vous permettez-vous vous-même d'utiliser des écritures du deuxième type, soit au tableau, soit dans des documents rédigés à l'intention des élèves ?
b) Quel que soit votre choix, comment le justifieriez-vous ?

① a) « Je le fais dans la classe et je me l'autorise. »
b) Ø

② Ø.

③ a) « Oui. Je m'autorise les deux types d'écriture. »
b) Ø

④ a) « Oui je me permets de le faire quel que soit le support. »
b) « Ce que j'autorise aux élèves, je m'autorise à le faire et inversement. »

⑤ a) « Oui, et sans faire vraiment attention. »
b) « Je choisis d'y faire attention suivant le cas, suivant l'élève, la tâche mathématique. »

⑥ a) Non, sauf pour certains sujets pour accentuer le fait d'avoir plusieurs écritures d'un même "objet". »
b) Ø

2. Les conclusions qu'il est possible de tirer de ce corpus de réponses ne concernent a priori *que* notre petit échantillon (n = 6) de professeurs ayant répondu au questionnaire. On considérera plus loin la question de la *généralisabilité* de telles conclusions, le mot *généralisabilité* désigne, d'après le dictionnaire *Larousse* en ligne (voir à l'adresse http://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/généralisabilité/36519), la « capacité d'une observation d'être généralisée à une classe d'observations à laquelle elle appartient ».

3. Dans cet échantillon de réponses, l'attitude rapportée par les enquêtés tend nettement, sinon toujours à *interdire*, du moins à *écarter* les enchaînements *« en ligne »* pour favoriser les enchaînements *« par saut de ligne »*. Même l'enquêté ④, qui affirme ne pas favoriser l'enchaînement par saut de ligne par rapport à l'enchaînement en ligne, écrit pourtant : « S'il y a de la place pour écrire sur la ligne, on continue à écrire en ligne ; sinon on revient à la ligne en rappelant le signe "=" et le nom de l'expression "A" auquel il se rapporte ». Cette raison n'est cependant pas absolument contraignante puisqu'on peut « passer à la ligne » en calculant comme on le fait en écrivant, ce qui donne quelque chose comme ceci :

$$\begin{aligned} a &= b = c \\ &= d = e. \end{aligned}$$

D'une façon plus générale, les enchaînements d'égalités en ligne *ne sont pas proscrits* mais sont inégalement acceptés, en fonction des conditions prévalentes. Dans le système didactique $S(X\,;\,y\,;\,♥)$, ces conditions peuvent concerner tant l'enjeu mathématique ♥ que les élèves $x \in X$; on notera au passage que, de manière apparente, *elles ne concernent pas y*. Ces enchaînements semblent ainsi acceptés plus souvent quand il s'agit de calcul de *fractions* et, à l'inverse, sont refusés s'agissant des *équations* (où le saut de ligne retrouve ses « prérogatives »). On doit souligner que, dans ce dernier cas, il ne s'agit pas d'enchaînements d'*égalités* mais d'*équivalences* (ou d'*implications*). Or, alors que l'on dispose du signe d'égalité (=), on ne dispose pas au collège du signe d'équivalence (⇔) ou du signe d'implication (⇒). Le saut de ligne équivaut alors à… l'affirmation d'une équivalence !

4. Le même corpus de réponses permet ainsi d'*esquisser* une réponse à la question des motifs de mise en avant des enchaînements d'égalités *par saut de ligne*. Les réponses recueillies invoquent d'une part la non-fiabilité supposée, entre les mains des élèves, du maniement *en* *ligne* des suites d'égalités, parce que nombre d'élèves interpréteraient de façon inadéquate les signes d'égalité. Le corpus de réponses mentionne aussi des raisons mathématiques : la relation d'égalité est une relation *binaire* (alors que l'écriture $a = b = c$, interprétée comme $a = b \wedge b = c$, est une relation *ternaire*), même si, il est vrai, cette relation binaire est transitive (ce qui justifierait l'écriture en ligne par le fait que $a = b = c \Rightarrow a = c$).

5. Nous sommes ici tout près d'une *technologie* des enchaînements d'égalités. D'une manière générale, on dira que l'on a

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1} = \dots a_{n-1} = a_n$$

(écriture qui exprime une relation n-aire) si et seulement si l'on a

$$a_1 = a_2 \wedge \dots \wedge a_k = a_{k+1} \wedge \dots \wedge a_{n-1} = a_n.$$

S'il en est ainsi, on a aussi $a_i = a_j$ pour tous les entiers i, j vérifiant $1 \leq i < j \leq n$. En particulier, l'écriture $a = b = c = d$ équivaut à $a = b \wedge b = c \wedge c = d$ et implique (notamment) $a = c$ et $a = d$. Le *dispositif technique* de calcul permettant de produire l'énoncé $a = b = c$ peut donc être écrit sans ambiguïté à l'aide de sauts de ligne, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} a &= b \\ &= c \\ &= d. \end{aligned}$$

En revanche, il n'en est pas de même du second dispositif mentionné dans la question 1, à savoir

$$\begin{aligned} a &= b \\ a &= c \\ a &= d. \end{aligned}$$

Ce dispositif technique, qui semble découler de la volonté de rappeler sans relâche aux élèves que c'est bien à la valeur de a que l'on s'intéresse, paraît ambigu, du fait qu'il gomme les égalités successives $b = c$ et $c = d$. Les égalités $a = b$ et $a = c$ des deux premières lignes pourraient aussi bien être lues comme entraînant l'égalité $b = c$, comme il en va dans l'exemple suivant. Prenons $a = \int_1^x 3(t-1)^2\, dt$; on a $a = b$, où $b = (x-1)^3$. Par ailleurs, il vient $a = \int_1^x (3t^2 - 6t + 3)\, dt = c$, où $c = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Des égalités $a = b$ et $a = c$ on déduit alors l'égalité $b = c$, à savoir : $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. À condition d'adopter le style elliptique d'une économie ostensive avare de moyens, l'implication

$$(a = b \wedge a = c) \Rightarrow b = c$$

pourrait aussi bien être écrite ainsi :

$a = b$

$a = c$

$b = c$.

Paradoxalement, le désir de contrôler au plus près le « sens » des gestes que l'élève doit accomplir peut contribuer à *diminuer l'intelligibilité de la technique* ainsi mise en œuvre.

6. L'examen de la généralisabilité des résultats précédents conduit à soulever diverses questions. Ce qu'on demande aux « enquêtés », c'est de *témoigner* sur leur propre pratique (on aurait pu leur demander de témoigner de la pratique d'autres professeurs qu'eux-mêmes, ce qui aurait posé d'autres problèmes). Les enquêtés sont donc des *témoins*. On sait qu'un témoignage est, certes, chose fragile : son contenu peut être altéré par de nombreux facteurs, et notamment par la situation même de témoignage, qui porte parfois certains témoins à conformer leur propos à ce qu'ils croient attendu, par exemple parce que plus « institutionnellement correct ». Dans le cas présent, toutefois, le « détail » sur lequel porte l'enquête n'est pas connu pour être un sujet de débat dans la profession, sur lequel il existerait diverses positions fortement revendiquées, dont certaines seraient susceptibles d'apporter aux professeurs qui les adoptent un bénéfice symbolique net par exemple sur l'axe progressiste/conservateur, « à la page »/« pas au courant », etc. Ce serait, au fond, un détail *obscur* de l'exercice du métier de professeur de mathématiques. En conséquence, on ne s'attend pas à ce que l'échantillon interrogé, *à certains égards* sans doute non représentatif de la population des professeurs de mathématiques, se différencie fortement de cette population sur le sujet étudié. Tout cela, à ce stade, reste bien sûr quelque peu conjectural.

7. Les conclusions énoncées plus haut doivent cependant être confrontées à d'autres « milieux » (au sens de la « dialectique des médias et des milieux »). Plusieurs voies s'ouvrent à cet égard. Tout d'abord, on peut vouloir observer des classes « au long cours » pour y saisir la technique dominante d'enchaînements d'égalités. On sait que, dans le cadre scolaire actuel, il n'existe pas de position institutionnelle établie qui permettrait ce type d'observations. Il en irait différemment dans certaines formations universitaires auxquelles le chercheur peut par exemple s'inscrire comme étudiant afin d'observer de « l'intérieur » l'enseignement prodigué. D'une façon générale, c'est le problème de l'accès du chercheur à une information à la fois la plus pertinente et la moins altérée possible. Divers « témoins » non humains peuvent apporter une telle information : selon une progression du plus intime au plus exposé, citons 1) les notes personnelles du professeur, 2) les documents rédigés par le professeur et distribués aux élèves, 3) les cahiers et devoirs des élèves, 4) les manuels et 5) les ouvrages « parascolaires » et l'offre parascolaire sur Internet. Le mot « parascolaire » est défini ainsi par *Wikipédia* (http://fr.wikipedia.org/wiki/Parascolaire) : « Le terme *parascolaire* désigne un secteur de l'édition recouvrant tous les ouvrages didactiques à usage personnel, par opposition au secteur scolaire qui concerne les manuels utilisés en classe. Il comprend notamment les cahiers de vacances et les annales d'examens. » Dans ce qui suit, nous exploiterons en particulier, mais pas uniquement, cette dernière catégorie, la plus facilement accessible et dont une vertu utile au chercheur est de « simplifier les lignes » et de dire souvent sans façon la vérité ou, du moins, *une* vérité sur les pratiques proprement *scolaires*.

Question 2. L'équipe Ξ_1 entame l'examen de divers documents témoignant de pratiques arithmétiques, notamment en matière d'enchaînement d'opérations. Analysez les deux documents reproduits ci-après.

Exposé 2.1

☛ *Le collège en poche. Tout le programme de 5^e^ en fiches* (Maxi-Livres, 2002), p. 55

Calculer une expression comportant des parenthèses

■ Les parenthèses signalent les calculs à effectuer **avant les autres.**

$A = 7 \times (\mathbf{5+4,2})$

$A = 7 \times 9,2$

$A = 64,4$

■ À l'intérieur des parenthèses, les calculs s'effectuent en respectant les **priorités opératoires.**

$B = 12 - (4 + \mathbf{2 \times 3})$

$B = 12 - 4 + 6$

$B = 12 - 10 = 2$

■ Quand l'expression présente des parenthèses enchâssées, on considère d'abord les **parenthèses « intérieures »**.

$C = 10 \times [(\mathbf{8,3 - 5,3}) \times 2 + 7]$

$C = 10 \times [\mathbf{3 \times 2} + 7]$

$C = 10 \times [6 + 7]$

$C = 10 \times 13 = 130$

■ Attention aux parenthèses inutiles ! On peut supprimer les parenthèses dans $D = (9 \times 7) + (7 \times 2)$ puisque, par convention, la multiplication est prioritaire sur l'addition.

Éléments d'analyse 2.1

Ici, c'est le second des deux dispositifs de calcul par sauts de ligne qui est, de fait, *imposé* par l'ouvrage examiné. On aperçoit mieux en ce cas que la suite de symboles « A = » (respectivement, « B = » et « C = ») est *inerte* et semble n'avoir qu'une fonction de *mémoire*, comme si, à écrire

$$12 - (4 + \mathbf{2 \times 3}) = 12 - 4 + 6 = 12 - 10 = 2$$

ou plutôt

$$\begin{aligned} 12 - (4 + \mathbf{2 \times 3}) &= 12 - 4 + 6 \\ &= 12 - 10 \\ &= 2 \end{aligned}$$

on risquait d'oublier l'expression numérique dont on calcule la valeur. On notera par ailleurs que l'écriture « en ligne » apparaît ici, dans les deux derniers exemples traités, dans la dernière ligne, à savoir sous la forme $B = 12 - 10 = 2$ et $C = 10 \times 13 = 130$. Dans chacun de ces deux cas, l'expression à calculer ne comporte qu'*une* opération élémentaire, alors que les lignes immédiatement au-dessus en comporte *deux* (à savoir $B = 12 - 4 + 6$ et $C = 10 \times [6 + 7]$), ce qui pourrait engendrer des conflits de priorité.

Exposé 2.2

☛ *Le collège en poche. Tout le programme de 5^e^ en fiches* (Maxi-Livres, 2002), p. 57

Connaître la règle de distributivité

■ On veut calculer le produit d'un nombre par une somme :

$6 \times (10+2) = ?$

– Méthode 1 : on effectue d'abord la somme entre parenthèses.

$6 \times (10 + 2) = 6 \times 12 = 72$

– Méthode 2 : on développe le produit.

Comme la multiplication est **distributive** par rapport à l'addition, on a :

$k \times (a + b) = \boldsymbol{k} \times a + \boldsymbol{k} \times b$.

Donc $6 \times (10 + 2) = 6 \times 10 + 6 \times 2 = 60 + 12 = 72$.

■ On veut calculer le produit d'un nombre par une différence : $8 \times (100 - 2) = ?$

– Méthode 1 : on effectue d'abord la différence entre parenthèses :

$8 \times (100 - 2) = 8 \times 98 = 784$

– Méthode 2 : on développe le produit.

Comme la multiplication est **distributive** par rapport à la soustraction, on a :

$k \times (a - b) = \boldsymbol{k} \times a - \boldsymbol{k} \times b$.

Donc $8 \times (100 - 2) = 8 \times 100 - 8 \times 2 = 784$.

Éléments d'analyse 2.2

Ce document est extrait du même ouvrage que le précédent. Ici, les enchaînements d'égalités *en ligne* ne semblent nullement proscrits, puisqu'on trouve sur une seule page les exemples suivants : $6 \times (10 + 2) = 6 \times 12 = 72$; $6 \times (10 + 2) = 6 \times 10 + 6 \times 2 = 60 + 12 = 72$; $8 \times (100 - 2) = 8 \times 100 - 8 \times 2 = 784$. Chacun d'eux ne contient, on le voit que *deux* signes d'égalité : les trois sont de la forme $a = b = c$. La différence avec le document précédent tient d'abord à ceci : le *topos* de l'élève est réduit ici à une simple lecture. L'élève fonctionne « en lecture » et c'est le « professeur » (ou plutôt l'auteur, individuel ou collectif, de l'ouvrage cité) qui fonctionne « en écriture ». On peut donc formuler cette conjecture : lorsque le professeur fonctionne en écriture et l'élève en lecture, les enchaînements en ligne sont acceptables ; lorsque c'est l'élève qui doit fonctionner en écriture, c'est l'enchaînement par saut de ligne qui est prescrit. On peut imaginer en outre un « bénéfice secondaire » pour le professeur, lequel doit alors opérer en lecture pour vérifier le travail de l'élève : la disposition avec une égalité par ligne facilite le contrôle visuel.

Question 3. L'équipe Ξ_1 continue de se poser la question de la technologie et de la théorie des techniques mises en jeu dans les documents qu'elle a examinés. Répondez à cette question
– à propos des exposés 2.1 et 2.2 ci-dessus ;
– à propos de l'exposé 3.1 ci-après.

Exposé 3

☛ L.C. Pascoe, *Arithmetic* (Hodder and Stoughton, 1979), pp. 16-17

5. Brackets and Miscellaneous Signs

Brackets are used when a group of numbers is to be treated as a single number.

Ex. 17. $3 \times (4 + 5) = 3 \times 9$
$= \mathbf{27}$.

Ex. 18. $42 - (17 + 3) = 42 - 20$
$= \mathbf{22}$.

The part inside the bracket is worked out first. More than one pair of brackets may be used, and in this case the innermost bracket is evaluated first.

Ex. 19.

$$
\begin{aligned}
6 \times (3 + 4) - 4 \times (5 - 2) &= 6 \times 7 - 4 \times 3 \\
&= 42 - 12 \\
&= \mathbf{30.}
\end{aligned}
$$

Ex. 20.

$$
\begin{aligned}
63 - \{7 + 2 \times (8 - 5)\} &= 63 - \{7 + 2 \times 3\} \\
&= 63 - \{7 + 6\} \\
&= 63 - 13 \\
&= \mathbf{50}.
\end{aligned}
$$

When using different signs together as above, the word BODMAS is helpful, indicating:

1	B	Brackets
2	O	Of
3	D	Division
4	M	Multiplication
5	A	Addition
6	S	Subtraction

This gives the order in which the working must be done, starting with 1 (Brackets). ‘Of’ means ‘multiply’, but is not often used, e.g. 5 of 7 = 35. Unlike multiplication, when it is used, ‘of’ *takes priority over division*.

1. Deal with inside of Brackets.
2. Work out Of (if any).
3. Workout Division.
4. Work out Multiplication.

5 and 6. Work out Addition and Subtraction as previously explained.

Ex. 21. Simplify 3 of (12 – 7) + 56 ÷ (9 – 5)

The expression = 3 of 5 + 56 ÷ 4 Rule 1

= 15 + 56 ÷ 4 Rule 2

= 15 + 14 Rule 3

= **29** Rule 5

Éléments d’analyse 3

Dans les exemples 17 à 20, les enchaînements se font « classiquement » par saut de ligne. Deux points méritent d’être notés. Tout d’abord, ce dispositif ostensif semble s’articuler au souci d’aider l’élève – qui, ici, peut être un adulte – à respecter les règles de priorité opératoire, ce qui confirme une observation déjà faite. Ensuite, on n’a pas ici de présence d’une lettre désignant l’expression de départ, donnée à calculer. On ne peut donc pas avoir le second dispositif vu (et critiqué) plus haut où est répété en tête de chaque ligne « A = ». Tout au plus voit-on, dans l’exemple 21, l’expression donnée à calculer, à savoir

$$3 \text{ of } (12 - 7) + 56 \div (9 - 5)$$

être désignée par le syntagme « The expression ». (Les lettres ne faisaient pas partie, autrefois, de l’arithmétique, et apparaissaient en même temps que l’algèbre.) La motivation du type de dispositif employé ici par les règles de priorité est bien mise en évidence par le développement consacré auxdites règles. À propos de l’acronyme BODMAS, on pourra se reporter à l’article « Order of operations » de *Wikipedia* : on y verra que l’usage de *of* présenté dans le document examiné ici semble n’être plus compris et a été remplacé en conséquences par « orders »… Enfin, on soulignera ce qui semble absent de tout ce qui précède : dans l’exemple 21, on voit que les sauts de ligne permettent surtout de *justifier*, ligne après ligne, dans la marge du calcul, les opérations successivement réalisées.

Question 4. La question du bloc technologico-théorique qu’on pourrait faire correspondre aux variantes techniques rencontrées jusqu’ici reste encore quelque peu obscure pour l’équipe Ξ_1. Faute de mieux, elle se propose d’examiner l’exposé ci-après. Que peut-elle y trouver de pertinent par rapport à ses interrogations ?

Exposé 4.1

☛ André Lentin et Jacques Rivaud, *Leçons d’algèbre moderne* (Vuibert, 1964), pp. 23-24

Théorème d’associativité. – *Pour une loi associative le composé de n éléments* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *pris dans cet ordre est unique : il ne dépend pas des groupements faits au cours du calcul.*

Par convention, le résultat s'écrit $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$, sans parenthèse.

Le théorème est vrai par définition pour $n = 3$. Supposons-le vrai pour tout ensemble ordonné de $n - 1$ éléments et considérons, pour n éléments, l'un quelconque des composés possibles.

L'étoile indiquant la dernière opération sépare un couple de parenthèses écrit à gauche et un couple analogue écrit à droite ; l'un ou l'autre peut ne comprendre qu'un élément. En tous les cas, chaque couple contient moins de n éléments et, l'hypothèse de récurrence s'y appliquant, on peut y supprimer les parenthèses. On arrive donc

soit à $a_1 * (a_2 * a_8 * \ldots * a_{n-1} * a_n)$ (cas α),

soit à $(a_1 * a_2 * \ldots * a_k) * (a_{k+1} * \ldots * a_{n-1} * a_n)$ (cas β),

soit à $(a_1 * a_2 * \ldots * a_{n-1}) * a_n$ (cas γ),

Le cas γ correspond à la définition naturelle du produit. Montrons que les cas α et β s'y ramènent ; par exemple β donne successivement

$$(a_1 * a_2 * \ldots * a_k) * [(a_{k+1} * \ldots * a_{n-1}) * a_n]$$

par l'hypothèse de récurrence ;

$$[(a_1 * a_2 * \ldots * a_k) * (a_{k+1} * \ldots * a_{n-1})] * a_n$$

par l'axiome d'associativité, et enfin

$$(a_1 * a_2 * \ldots * a_{n-1}) * a_n$$

par l'hypothèse de récurrence. C'est la troisième expression (cas γ).

Démonstration analogue pour le cas α.

Quel que soit le groupement considéré, on obtient donc le même résultat que pour la définition naturelle du produit. Le théorème est vrai pour n éléments.

Éléments d'analyse 4.1

1. Les auteurs démontrent le théorème d'associativité dans un monoïde. Ce théorème implique, par exemple, que le produit

$$[(a * b) * c] * d$$

est égal *par exemple* à

$$a * [(b * c) * d].$$

2. On peut noter d'abord qu'il est bien rare, aujourd'hui, de voir un ouvrage donner cette démonstration. Il est possible même que certains jeunes professeurs de mathématiques n'aient jamais rencontré une telle démonstration !

3. Ce qui importe, au-delà d'une démonstration déterminée, c'est le *questionnement* qui sous-tend ce théorème. Lorsqu'on écrit par exemple l'expression numérique

$$5 + 7 + 1 + 3$$

il faut comprendre que cette expression désigne un certain nombre dont elle est l'un des *noms*, nombre que nous appellerons *la valeur de l'expression*. On considèrera que l'on a calculé cette valeur quand on aura déterminé son *nom standard*, c'est-à-dire (ici) son *écriture décimale*. La « définition *naturelle* » de la valeur de l'expression 5 + 7 + 1 + 3, par exemple, est celle-ci : cette valeur est le nombre qui s'obtient par l'effectuation des opérations successives 5 + 7, (5 + 7) + 1, [(5 + 7) + 1] + 3, ce qui donne successivement 12, 13, 16. Le théorème d'associativité nous dit alors que l'on obtiendrait le *même* nombre – et donc la valeur de l'expression – en effectuant successivement, par exemple, les opérations

$$7 + 1,\ 5 + (7 + 1),\ [5 + (7 + 1)] + 3$$

ce qui, en effet, donne successivement 8, 13, 16.

4. La méditation de cet extrait d'un ouvrage de mathématiques conduit à la réflexion suivante sur les situations considérées jusqu'à présent : dans tous les cas rencontrés, on considère une « expression numérique » dont on suppose *implicitement* qu'elle a une valeur et une seule ; et on se demande alors, *de facto*, quelles *techniques* de calcul permettent de déterminer cette valeur. Ce postulat « théorique » est vérifié si l'expression est « bien formée » (*well formed*). Ainsi par exemple des expressions telles que

$$4 + 5 + (\times 3) \text{ ou } 4 + (5 \times) + 3$$

ne sont-elles pas « bien formées », en sorte qu'elles n'ont pas de valeur déterminée. Si l'expression donnée est bien formée, la valeur de l'expression est celle obtenue en effectuant les opérations de la gauche vers la droite tout en observant les règles de priorité (nous revenons là-dessus plus loin), comme ci-après :

$$5 + 32/5 - 2 \times (5 - 2) = 5 + 6{,}4 - 2 \times 3 = 5 + 6{,}4 - 6 = 11{,}4 - 6 = 5{,}4.$$

On voit que la propriété d'associativité permet aussi bien d'écrire :

$$5 + 6{,}4 - 6 = 5 + (6{,}4 - 6) = 5 + 0{,}4 = 5{,}4.$$

En pratique, comment sait-on que l'expression est bien formée ou non ? Dans tous les cas rencontrés, l'expression à calculer *est « donnée » par l'institution enseignante*, qui, *implicitement*, du fait qu'elle demande de calculer l'expression, se porte *garante* de la chose. *Le problème du caractère bien formé de l'expression n'est donc pas posé*. L'élève peut avoir un problème de bonne *lecture* de l'expression : il peut l'interpréter de façon à en faire une expression *mal formée* ou la lire comme une expression certes bien formée mais ayant une *autre* valeur. En revanche, l'élève n'a pas, dans les cas examinés jusqu'ici, de problème d'*écriture* de l'expression. Le fait que les expressions à calculer ont une valeur (unique) est donc tenu pour aller de soi, et cela pour des raisons *institutionnelles* plutôt que pour des raisons *mathématiques*.

Exposé 4.2

☛ Paul Dubreil et Marie-Louise Dubreil-Jacotin, *Leçons d'algèbre moderne* (Dunod, 1964), pp. 34-36

Dans l'ensemble E muni de la loi de composition interne définie par la table

T	a	b	c
a	b	c	a
b	b	c	a
c	b	c	a

on a

$$(a \mathbf{T} a) \mathbf{T} a = b \mathbf{T} a = b,\ a \mathbf{T} (a \mathbf{T} a) = a \mathbf{T} b = c$$

$$[(a \mathbf{T} a) \mathbf{T} a] \mathbf{T} a = b \mathbf{T} a = b,\ (a \mathbf{T} a) \mathbf{T} (a \mathbf{T} a) = b \mathbf{T} b = c,\ a \mathbf{T} [a \mathbf{T} (a \mathbf{T} a)] = a \mathbf{T} c = a.$$

On sait cependant que dans beaucoup de cas, par exemple pour l'addition ou la multiplication de nombres naturels, rationnels, réels ou complexes, ces complications n'existent pas, et cela parce que la loi de composition est une loi *associative*.

On dit que la loi de composition $\top$ de D est *associative* si l'on a

(1) $\qquad (x \top y) \top z = x \top (y \top z) \qquad \forall\ x, y, z \in D$;

D est alors appelé *demi-groupe* [ou *semi-groupe* ou *monoïde*]. On emploie généralement la *notation multiplicative* pour la loi de composition d'un demi-groupe D ; avec cette notation, (1) s'écrit :

(1') $\qquad (xy)z = x(yz) \qquad \forall\ x, y, z \in D.$

Il est commode de représenter la valeur commune des deux membres par le *symbole unique* xyz ; xyz est ce qu'on appelle le *produit des trois éléments* x, y, z pris dans cet ordre.

D'une façon générale, soient, dans un demi-groupe multiplicatif D, n éléments $a_1, a_2, ..., a_n$ [distincts ou non) rangés dans l'ordre des indices croissants. Posons :

$$p = \{\ldots [(a_1\, a_2)a_3] \ldots\}\, a_n.$$

et convenons d'écrire ce produit sous la forme :

$$p = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Théorème 1. – *Tout autre produit p' formé avec les facteurs a_1, a_2, ..., a_n pris dans cet ordre est égal à p.*

Corollaire. – Dans un demi-groupe on peut parler de la *puissance m-ième d'un élément a*, produit de *m* éléments *a* effectué en composant les éléments de n'importe quelle manière. On désigne cet élément par a^m et on a la règle :

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

ainsi que

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Théorème 2. – *Dans un demi-groupe abélien, le produit*

$$p = a_1 a_2 \dots a_n.$$

est en outre indépendant de l'ordre des facteurs.

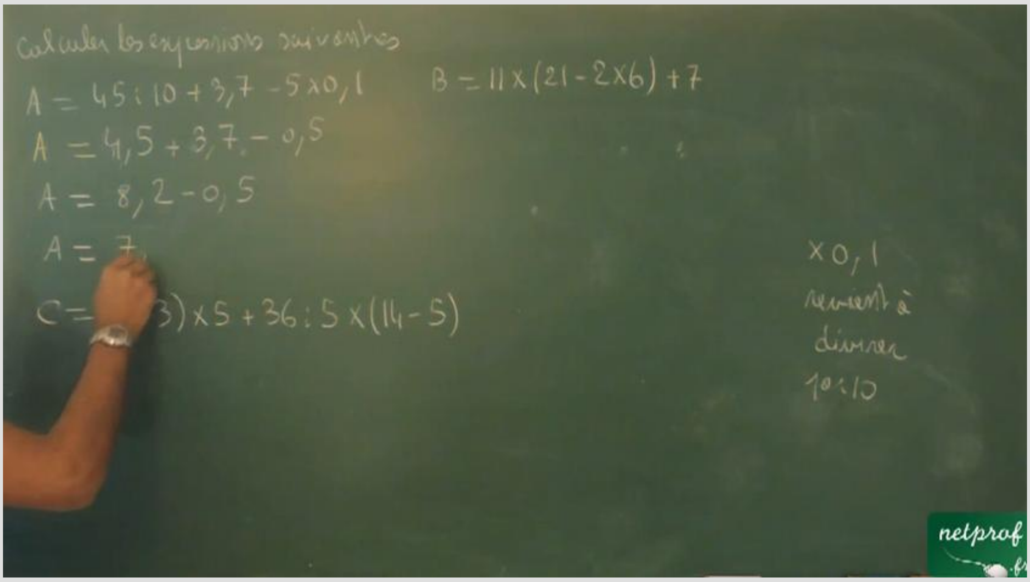
Éléments d'analyse 4.2

1. On a là un autre exemple du soin pris, à une époque « reculée » (il y a un demi-siècle : les deux ouvrages sont de 1964), pour établir l'existence de la « valeur d'une expression », du moins dans le cas le plus simple et le plus fondamental que l'on a vu.

2. On aura noté que, à propos de l'égalité $(xy)z = x(yz)$, les auteurs parlent de « la *valeur* commune des deux membres » (c'est moi qui souligne).

3. On notera en outre le corollaire énoncé : les expressions a^3 et a^4 sont « bien formées », et donc ont une valeur unique, dès lors que la multiplication sous-jacente à l'exponentiation est *associative*. Lorsqu'il n'en est rien, ces expressions *n'ont pas nécessairement de valeur* : selon les associations faites dans leur calcul, *on obtient des résultats différents*. Le contre-exemple qui ouvre le passage cité – une loi de composition interne sur l'ensemble $\{a, b, c\}$ qui se révèle *non associative* – est à cet égard très éclairant : on a (si l'on ose l'écrire ainsi !), d'une part, $a^3 = b$ et, d'autre part, $a^3 = c$. Semblablement, on a d'abord $a^4 = b$, ensuite $a^4 = c$, enfin $a^4 = a$. On voit ainsi que la notion de puissance, qui semble si « évidente », ne l'est que dans un monde « associatif ».

Question 5. L’équipe Ξ_1 a recherché sur Internet des vidéos portant sur l’enchaînement d’opérations. Elle examine une vidéo présente sur YouTube, que l’on trouvera à l’adresse suivante : http://www.youtube.com/watch?v=Ui8QyDbVFZg



Éléments d’analyse 5

1. On examine les deux premières minutes de cette vidéo (d’une durée totale de 4 min 53 s). L’enseignant se prénomme Jonathan (nous ne savons pas s’il s’agit d’un pseudonyme ou pas).

2. On peut supposer que la présentation que fait Jonathan ne diffère guère de celle qu’il pourrait faire devant une classe de 5^e réelle, à ceci près bien sûr qu’il n’y a pas, ici, les bruits qui peuvent gêner le professeur dans une classe véritable d’aujourd’hui.

3. Ainsi qu’il en va souvent s’agissant d’un professeur, Jonathan parle sur un *ton* qui semble *très assuré*. Mais, étonnamment, ses premiers mots sont maladroits : « Bon, alors, un petit dernier exercice », lance-t-il pour commencer. Est-ce parce qu’il est filmé ? En tout cas, on ne doit pas oublier que, d’une façon générale, un enseignant « joue » une assurance de surface (qui peut l’abuser lui-même), masquant ainsi la problématicité mathématique de ce qu’il avance.

4. La présentation du type de tâches étudié tend à banaliser le travail mathématique à réaliser, comme si la technique en était par avance « routinisée » : Jonathan annonce en effet que sa présentation aura à voir « … avec des calculs d'expressions… avec additions, soustractions, divisions, un peu de tout, parenthèses ou pas… » Rien, donc, ne serait tragique là-dedans !

5. Jonathan s'apprête à calculer l'expression 45 : 10 + 3,7 – 5 × 0,1 tout en commentant son calcul. En fait, avant même le démarrage de la vidéo, il a écrit lui-même (semble-t-il) sur le tableau sur lequel il travaille :

A = 45 : 10 + 3,7 – 5 × 0,1

Cette écriture est l'objet d'un premier commentaire de Jonathan : « Alors ici vous voyez que l'expression porte un nom. C'est l'expression A, qui est égale à tout ça… » On peut conjecturer (dans le cadre de cette mini-recherche) qu'il s'agit là d'un commentaire *rarement proféré*. Un autre professeur aurait pu dire/écrire, en effet, ceci sans autre forme de commentaire : « Calculer [la valeur de] l'expression A = 45 : 10 + 3,7 – 5 × 0,1. »

6. Peut-on voir une raison à une telle explicitation ? La suite du propos de Jonathan va fournir une réponse. Jonathan enchaîne son propos précédent avec ce commentaire : « Dans ce cas, dans ma rédaction, à chaque fois je dois mettre "A =", "A =", "A =". D'accord ? Pour que les choses soient claires. » Il y a là toute une *technologie* de la disposition technique (scripturale/graphique) qu'a adoptée Jonathan. Ce serait *parce qu'on a donné un nom* (littéral) à l'expression à calculer qu'il conviendrait maintenant de *répéter ce nom* au début de chacune des lignes composant la rédaction du calcul ! Que se passerait-il si l'on n'avait pas donné de nom ?... Nous ne le savons pas. Notons que l'auteur de cette nomination (qui a toutes les chances d'être Jonathan lui-même) n'est « officiellement » pas connu. Son choix d'écriture est une *donnée* non discutable de l'exercice proposé, comme s'il s'agissait là d'une situation de la Nature. Toutefois, Jonathan livre ce qui est sans doute *pour lui* la « vraie » raison de la répétition de l'en-tête de ligne « A = » : si l'on doit faire ainsi, c'est « pour que les choses soient claires », c'est-à-dire pour qu'il soit clair que c'est l'expression (nommée) A que l'on calcule. On comprend alors la fonction du commentaire initial relatif à la nomination de l'expression à calculer : ce commentaire est quasi indispensable pour « justifier » ensuite l'injonction de répéter « A = » en chaque début de ligne. Écoutons à nouveau ce que dit Jonathan, mais cette fois sans le scinder en deux morceaux successifs :

> Alors ici vous voyez que l'expression porte un nom. C'est l'expression A qui est égale à tout ça… Dans ce cas, dans ma rédaction, à chaque fois, je dois mettre « A = », « A = », « A = ». D'accord ? Pour que les choses soient claires.

Tout est dit !

7. Il faut souligner un phénomène insistant de l'enseignement des mathématiques, un phénomène qui, en vérité, excède le seul domaine des mathématiques : la substitution subreptice à « l'autorité des mathématiques » de « l'autorité pédagogique » du professeur. L'autorité pédagogique du professeur est chose normale (faute de quoi celui-ci n'aurait guère la possibilité d'exercer son métier). Ce qui est problématique, en revanche, c'est l'extension épistémologiquement illégitime du domaine de compétence de cette autorité pédagogique. Si l'on tient pour vraie, par exemple, l'identité $(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1$, ce n'est pas parce que « le professeur l'a dit » mais parce que les mathématiques permettent de démontrer qu'il en est bien ainsi. La substitution trop fréquente aux raisons mathématiques des injonctions du professeur met en péril l'*enseignabilité* même des mathématiques en mettant en péril le rôle de la raison – ici, de la raison mathématique – dans l'étude des mathématiques. Loin d'émanciper l'élève en l'initiant à la rationalité, on l'enferme dans la dépendance à la figure du professeur. S'il y a alors, peut-être, *enseignement*, ce n'est plus vraiment un enseignement *des mathématiques*. La chose enseignée s'éloigne jusqu'à la dénaturation de la chose mathématique.

8. Appelons *opération élémentaire* une opération binaire dont les opérandes sont donnés par leur *nom standard* (soit, ici, par leur *écriture décimale*). Dans l'expression

$$45 : 10 + 3{,}7 - 5 \times 0{,}1$$

les seules opérations élémentaires sont la division $45 : 10$ et la multiplication $5 \times 0{,}1$. Jonathan déclare d'emblée : « Je commence évidemment par les multiplications et les divisions puisqu'elles sont prioritaires. » Il y a là une ambiguïté classique : si l'expression à calculer avait été

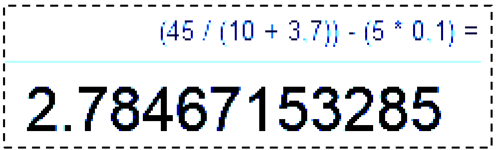
$$45 : (13 - (0{,}3 + 2{,}7)) + 3{,}7 - (12 - 7) \times 0{,}1$$

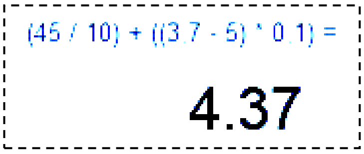
il aurait fallu commencer par effectuer les opérations élémentaires $0{,}3 + 2{,}7$ et $12 - 7$, avant de poursuivre par le calcul – dans un ordre quelconque – des opérations élémentaires ainsi « produites », à savoir, respectivement, $45 : 10$ et $5 \times 0{,}1$. Les règles de priorité nous disent en fait comment il faudrait parenthéser l'expression donnée si elle ne l'est pas suffisamment afin qu'elle ne soit pas ambiguë. Par exemple l'expression

$$45 : 10 + 3{,}7 - 5 \times 0{,}1$$

doit être parenthésée comme suit : $(45 : 10) + 3{,}7 - (5 \times 0{,}1)$. Elle ne doit pas l'être de cette autre manière : $45 : (10 + 3{,}7) - (5 \times 0{,}1)$. Elle ne doit pas l'être non plus de la façon suivante : $(45 : 10) + (3{,}7 - 5) \times 0{,}1$. Il est intéressant, à cet égard, de confier le calcul de ces trois expressions à la calculatrice de Google. Dans le premier cas, on obtient ceci :

On voit en bas à droite le parenthésage réalisé par Google. Dans le cas des deux autres expressions, Google opère comme on le verra ci-après :

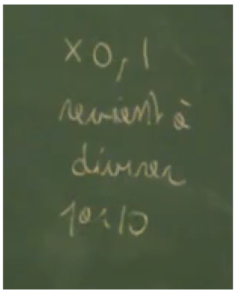




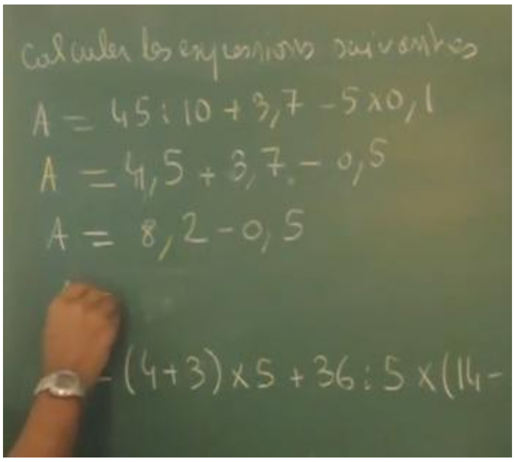
Rappelons les priorités en citant l'article « Ordre des opérations » de *Wikipédia* :

> Les règles de priorité sont :
>
> 1. les calculs contenus entre parenthèses (ou crochets) sont prioritaires sur les calculs situés en dehors de ces parenthèses. La barre d'une fraction ou d'une racine carrée joue le rôle d'une parenthèse ;
>
> 2. les exposants sont prioritaires sur les multiplications, divisions, additions et soustractions ;
>
> 3. les multiplications et divisions sont prioritaires sur les additions et soustractions.

9. Le calcul de (la valeur de) l'expression donnée appelle l'effectuation des opérations élémentaires $45 : 10$ et $5 \times 0{,}1$. Pour la première, Jonathan semble se référer à une technique bien connue puisqu'il indique simplement : « 45 divisé par 10, ça fait 4,5. » Pour la seconde, par contraste, il prend la peine d'écrire dans un autre endroit du tableau un « rappel », comme si la technique à mettre en œuvre n'était pas si bien connue. Il indique oralement : « On se rappelle que multiplier par 0,1 revient à diviser par



10. » Ce qu'il écrit en même temps au tableau (comme on le verra ci-contre). L'explicitation écrite du fait que $a \times 0{,}1 = a : 10$ ne semble pas absolument indispensable. Mais avançons. Après avoir indiqué que, s'agissant de l'expression 4,5 + 3,7 – 0,5, il effectuera les calculs *de la gauche vers la droite* (il ne s'autorise pas l'usage, semble-t-il, du théorème d'associativité dans $\mathbb{D}$), Jonathan amorce le calcul de l'opération élémentaire 4,5 + 3,7. Or, ce faisant, il commet une erreur, en donnant d'abord le nombre 7 pour partie entière de la somme ; puis, comprenant qu'elle ne peut être égale qu'à 8, il reste silencieux une fraction de seconde avant de conclure que la décimale est 2. Il arrive ainsi à l'expression 8,2 – 0,5, qui appelle elle-même une opération élémentaire. À nouveau, face à l'expression élémentaire 8,2 – 0,5, on constate une hésitation de Jonathan. Comme précédemment, on constate ici ce qu'on peut appeler un *amuïssement praxéologique*, comme si la praxéologie mise en œuvre relevait presque entièrement de la sphère privée, de l'intime. Cette attitude est en accord avec une certaine tradition de l'enseignement élémentaire pour laquelle chacun se débrouille pour effectuer une opération élémentaire dès lors que celle-ci est censée « se faire de tête ».



Il résulte de là que la praxéologie de calcul des expressions numériques que Jonathan est supposé « montrer » apparaît ici comme une praxéologie « trouée », en cela que les techniques relatives à certains des types de tâches « élémentaires » appelés par la technique de calcul de l'expression « enseignée » restent inaudibles, invisibles, absents. Par contraste, on songera ici à l'emphase (relative) mise sur l'effectuation du produit $5 \times 0{,}1$! Une raison possible de ce phénomène se trouve dans l'impératif institutionnel du calcul *mental*, auquel on peut imaginer de substituer un calcul *oral*, qui, lui, explicite (au moins en partie) la technique mise en œuvre *au lieu de la cacher*.

Question 6. L’équipe Ξ_1 examine un nouveau document, relatif, lui, à l’art d’« écrire des mathématiques ». Que peut-elle tirer de ce document à propos de la question Q_∂^1 que cette équipe étudie ?

Exposé 6

☛ Kevin P. Lee, *A Guide to Writing Mathematics* (pp. 4-6). En ligne : http://www.cs.ucdavis.edu/~amenta/w10/writingman.pdf

Symbols and words

It is important to use words and symbols appropriately. Part of being able to write mathematics well is knowing when to use symbols and knowing when to use words.

Don’t use mathematical symbols when you really mean something else. A common mistake is to misuse the “=” symbol. For instance:

$$3^{2x} - 2(3^x) = -1 = (3^x)^2 - 2(3^x) + 1 = 0 =$$
$$(3^x - 1)^2 = 0 = 3^x = 1 = x = 0.$$

Do not use the equal sign when you really mean “the next step is” or “implies”. The above example is really saying that –1 = 0 = 1! Using arrows instead of equal signs is a slight improvement, but still not desirable:

$$3^{2x} - 2(3^x) = -1 \rightarrow (3^x)^2 - 2(3^x) + 1 = 0 \rightarrow$$
$$(3^x - 1)^2 = 0 \rightarrow 3^x = 1 \rightarrow x = 0.$$

With a sequence of calculations, sometimes it is best to just place each equation on a separate line.

$$3^{2x} - 2(3^x) = -1$$
$$(3^x - 1)^2 = 0$$
$$3^x = 1$$
$$x = 0.$$

For a difficult computation where the reader might not readily follow each step, you can include words to describe the steps you take.

We want to solve for x in the equation

$$3^{2x} - 2(3^x) = -1.$$

We can rewrite this equation in terms of 3^x:

$$(3^x)^2 - 2(3^x) + 1 = 0$$

After factoring, this becomes

$$(3^x - 1)^2 = 0$$

and it follows that $3^x = 1$, or $x = 0$.

However, make sure that your paper has a single flow. Don't explain a calculation using the "two-column method".

$3^{2x} - 2(3^x) = -1.$ Solve this equation

$(3^x)^2 - 2(3^x) + 1 = 0$ Collect the terms on one side.

$(3^x - 1)^2 = 0$ Factor.

$3^x = 1$ Use the Zero Factor Property.

$x = 0$ Solve for x.

This is hard to read through. It's also bad style.

Some things are best expressed with words. But other things are best expressed with mathematical notation. For instance, it is hard to read:

It follows that x plus two is larger than zero.

Here, mathematical notation is more appropriate.

It follows that $x + 2 > 0$.

Éléments d'analyse 6

1. Le texte examiné est extrait d'un guide de *rédaction* de textes mathématiques. Ce qui y est dit ne vaut pas, en principe, pour la recherche « privée », « personnelle ». En outre, l'exemple développé par l'auteur concerne, non pas l'enchaînement d'opérations, mais la *résolution d'équations*. Cela noté, on peut imaginer que l'auteur *pourrait* accepter, lorsqu'on cherche à calculer la valeur de l'expression 23 + (45 – 2 × 7), que l'on écrive cette *suite d'égalités* :

$$23 + (45 - 2 \times 7) = 23 + (45 - 14) = 23 + 31 = 54$$

Mais au moment de *rédiger*, dans un « papier » destiné à être lu, ce petit calcul mathématique, il demande sa réécriture sous une forme qui lui paraît plus appropriée, par exemple comme ceci :

$$\begin{aligned} 23 + (45 - 2 \times 7) &= 23 + (45 - 14) \\ &= 23 + 31 \\ &= 54 \end{aligned}$$

2. Si l'on appliquait cette distinction *en classe*, l'élève serait invité à effectuer le calcul au brouillon à sa guise, éventuellement « en ligne », mais à le rédiger, dans la copie qu'il remettra ensuite au professeur, « par saut de ligne ». Il y a là une source de confusion entre éléments justificatifs de la la technique – ou plutôt des aspects scripturaux de la technique – qui s'énonceraient en termes de *lisibilité* et éléments justificatifs de nature plus clairement *mathématique* – même si les deux types de considérations ne peuvent pas être complètement séparés.

3. L'opposition entre recherche et rédaction du fruit de la recherche peut être illustrée à partir des exemples donnés par l'auteur. On peut imaginer, que, « en recherche », on écrive par exemple ceci :

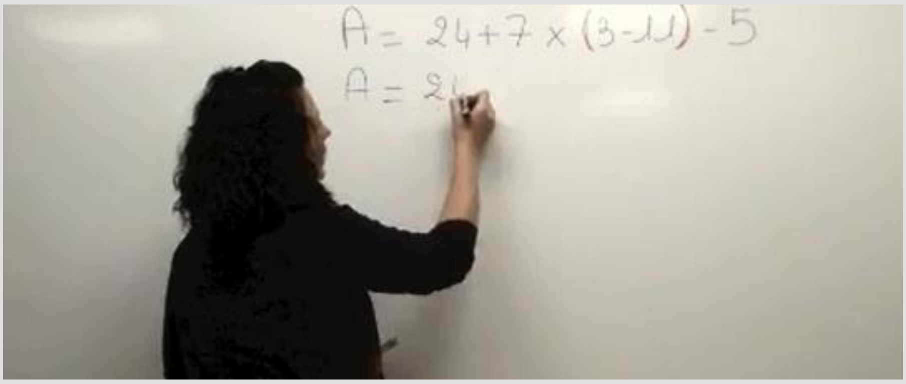
$3^{2x} - 2(3^x) = -1$ {Équation à résoudre} $\Leftrightarrow (3^x)^2 - 2(3^x) + 1 = 0$ {En rassemblant les termes dans le 1^er^ membre} $\Leftrightarrow (3^x - 1)^2 = 0$ {Identité remarquable} $\Leftrightarrow 3^x = 1$ $\{A^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0\}$ $\Leftrightarrow x = 0$ $\{\mathrm{Log}_3\}$.

On notera que cette disposition réalise beaucoup mieux que la rédaction « à deux colonnes » critiquée par l'auteur la condition que la rédaction (pour son rédacteur lui-même) ait « a single flow ». Cela noté, l'auteur du *Guide* préférerait que cette rédaction soit réécrite ainsi :

> We want to solve for x in the equation
>
> $$3^{2x} - 2(3^x) = -1.$$
>
> We can rewrite this equation in terms of 3^x:
>
> $$(3^x)^2 - 2(3^x) + 1 = 0$$
>
> After factoring, this becomes
>
> $$(3^x - 1)^2 = 0$$
>
> and it follows that $3^x = 1$, or $x = 0$.

Le rejet de la notation en deux colonnes est motivé par l'auteur en ces termes : « This is hard to read through. It's also bad style. » Il faut donc bien distinguer la recherche d'une écriture mathématiquement efficace et fiable et celle d'une *réécriture* qui donne le primat à la lisibilité – et au « beau style », si tant est que cela s'entende.

Question 7. L'équipe Ξ_1 a trouvé sur le site Dailymotion une vidéo qui lui paraît intéressante : on la trouvera à l'adresse http://www.dailymotion.com/video/x14lgm8_ch1-op-relatif-iv-enchainement-d-ope-rations_webcam.



Qu’est-ce que l’équipe Ξ_1 peut en tirer pour la recherche en cours ?

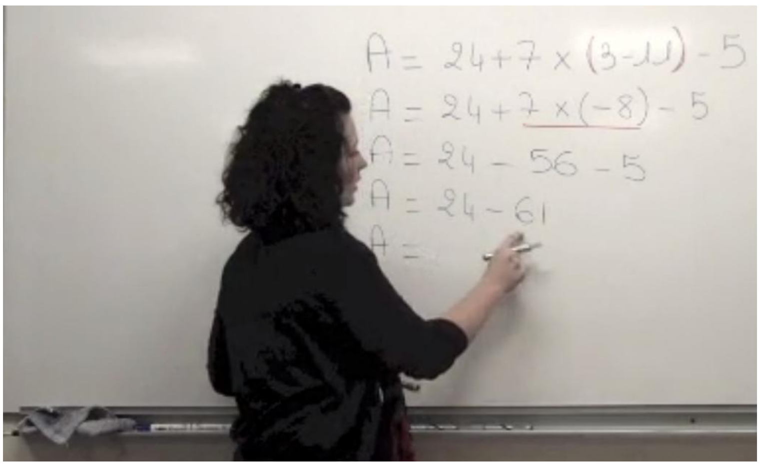
Éléments d’analyse 7

1. La vidéo est présentée sur le site *Dailymotion* sous le titre « Enseignement d’opérations ».

CH1 op relatif IV. Enchainement d'opérations

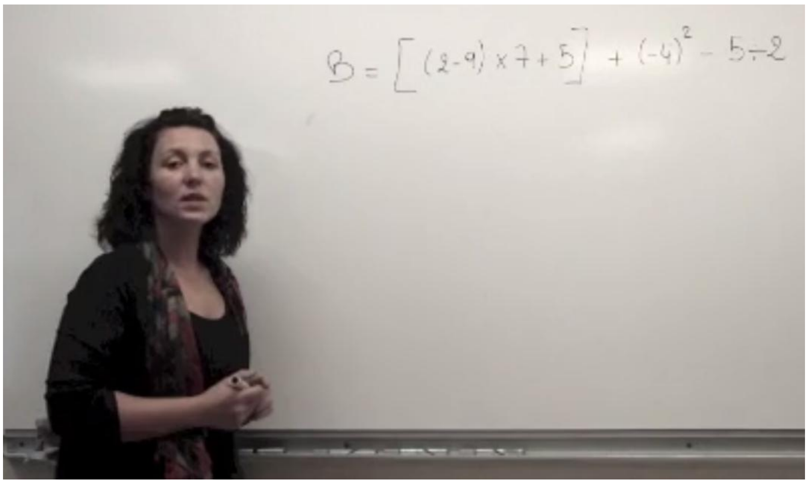
La vidéo a une durée de 6 min 26 s. La « leçon » donnée concerne une classe de 4^{e}. L’exemple travaillé en premier est visible sur la capture d’écran précédente : il s’agit de « calculer » l’expression A = 24 + 7 × (3 – 11) – 5.

2. La capture d’écran ci-après montre clairement que l’enseignante pratique *le saut de ligne avec en-tête « A = »* :

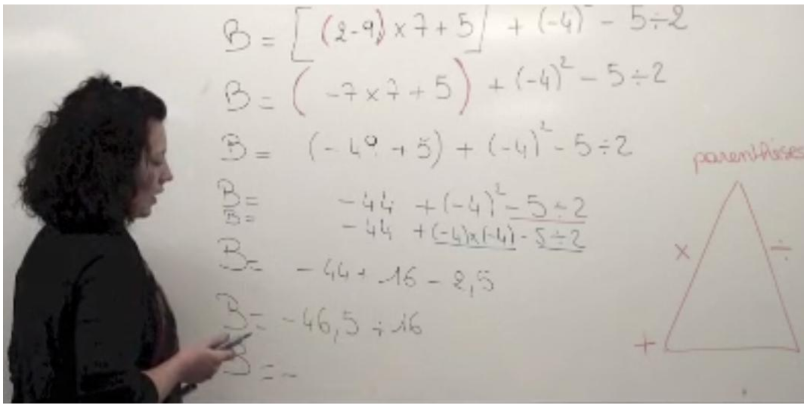


On notera au passage la formulation orale, par l'enseignante, d'énoncés *technologiques*, telles celle-ci : « Attention ! Deux signes en mathématiques ne se suivent jamais ! » On aura noté aussi que le calcul du produit 7 × 8 amène l'enseignante à marquer un temps d'arrêt, à faire mine de solliciter les élèves, à rouler les yeux à la recherche de la réponse – 56 –, avant de lancer aux élèves cette pique gratuite : « On est nuls en tables de multiplication ! »

3. Dans la même vidéo, l'enseignante propose « un deuxième exemple », que montre la capture d'écran suivante :



Comme précédemment, l'enseignante utilise systématiquement *le saut de ligne avec en-têtes,* ainsi qu'on le voit sur la capture d'écran ci-après :



4. Le calcul mené à bien par l'enseignante est accompagné oralement de commentaires technologiques, dont l'unique trace écrite est le triangle dessiné dans le coin inférieur droit du tableau pour représenter la hiérarchie des priorités opératoires. On aura noté la ligne collée à la 4^{e} ligne et écrite en plus petits caractères : il s'agit d'une ligne « auxiliaire » où l'enseignante explicite la signification et le calcul de $(–4)^2$, avant de passer à la ligne suivante.

5. La suite d'égalités précédente peut être représentée ainsi :

$$\begin{aligned} &\mathrm{A} = b \\ &\mathrm{A} = c \\ &\mathrm{A} = d \\ &\mathrm{A} = e \\ &\mathrm{A} = f \end{aligned}$$

Ce qui reste implicite – comme si la disposition des écritures ou la mémoire du travail concrètement accompli pour les produire suffisait à l'impliquer –, c'est le fait que l'on a $b = c$, $c = d$, $d = e$ et $e = f$ ainsi que les conséquences de ces égalités. On peut ainsi se demander s'il est clair pour les élèves que l'on a par exemple $b = e$…

6. Le cas de la « ligne auxiliaire » nous rappelle que l'usage, dans le calcul, d'une égalité auxiliaire, ici l'égalité $(–4)^2 = (–4) \times (–4)$, ne peut guère se faire sous forme écrite qu'au prix (élevé) de l'introduction d'une ligne avec en-tête *entière*, les autres calculs auxiliaires demeurant oraux, comme le montre (par exemple) le calcul de l'expression 24 – 61 : « 24 moins 61, le résultat va être négatif puisque 61 est la plus grande distance à zéro… Dans ma tête, 61 moins 24… Alors 61 moins 20, ça fait 41 ; j'enlève encore 4, ça fait moins 37. » Les écrits restent mais les paroles passent : le mélange des traces écrites et des propos irrémédiablement oraux est une source de difficulté dont le dispositif écrit utilisé ne permet guère de juguler les effets « toxiques » éventuels. Par contraste, on aurait pu avoir le calcul suivant (qui ne cherche pas à être adapté à tel ou tel type de public) :

Calculons l'expression $\mathrm{A} = [(2 – 9) \times 7 + 5] + (–4)^2 – 5 \div 2$. On a d'abord :

$$(2 – 9) \times 7 + 5 = – (9 – 2) \times 7 + 5 = –7 \times 7 + 5 = – 49 + 5 = – (49 – 5) = – 44.$$

Il vient donc : $\mathrm{A} = – 44 + (–4)^2 – 5 \div 2$. On a ensuite :

$$(–4)^2 = (–4) \times (–4) = 4 \times 4 = 16.$$

Il vient alors : $\mathrm{A} = – 44 + 16 – 5 \div 2$. On a enfin : $5 \div 2 = 2{,}5$. Il vient finalement :

$$\mathrm{A} = – 44 + 16 – 2{,}5 = – (44 + 2{,}5) – 16 = – 46{,}5 + 16 = – (46{,}5 – 16) = – 30{,}5.$$

Question 8. L'équipe Ξ_1 a réuni un petit corpus, d'apparence hétéroclite, d'extraits d'ouvrages de mathématiques comportant divers calculs. Que peut-on en dire à partir de la réponse $R_1^{\heartsuit}$ élaborée jusqu'ici à la question Q_∂^1 étudiée ? Ce corpus conduit-il à retoucher Q_∂^1 ? Comment ?

Exposé 8.1

☛ G. Chrystal (1904). *Algebra. An Elementary Text-book*, Vol. 1.
http://djm.cc/library/Algebra_Elementary_Text-Book_Part_I_Chrystal_edited.pdf

§ 6.] Since $+ a - c + c = + a$ by the definition of the mutual relation between addition and subtraction, we have

$$a + b - c = a - c + c + b - c\ ;$$

$$= a - c + b + c - c,$$

by law of commutation for addition ;

$$= a - c + b \qquad (1)$$

by definition of subtraction

Also $\quad a - b - c = a - c + c - b - c,$

by definition ;

$$= a - c - b + c - c,$$

by case (1)

$$= a - c - b \qquad (2)$$

by definition.

Equations (1) and (2) may be regarded as extending the law of commutation to the sign –.* We can now this law fully as follows:—

$$\pm a \pm b = \pm b \pm a\ ;$$

---

* It might be objected here that it has not been shown that $- c$ may come into the first place in the chain of operations. The answer to this would be that $+ a - c - b$ may either be a complete chain in itself or merely the latter part of a longer chain, say $p + a - c - b$. In the second case our proof would show that $p + a - c - b = p - c + a - b$; and the nature of algebraic generality requires that $+ a - c - b$ should not have any property in composition which it has not *per se*. As to all questions of this kind see § 27.

Éléments d'analyse 8.1

1. On voit ici l'usage du saut de ligne *sans en-tête* et avec *commentaires interlinéaires* justifiant le passage d'une ligne à la suivante. On aura noté en outre que l'auteur ne nomme pas l'expression à calculer. Le calcul réalisé peut se représenter ainsi :

$E = E_1$

en vertu de…

$= E_2$

d’après…

$= E_3$

par…

2. La note de bas-de-page contient le principe – fondé sur la notion de *programme de calcul* – utilisé dans la construction des *nombres relatifs* qui a été à l’origine proposée dans le séminaire destiné aux élèves professeurs stagiaires de mathématiques de l’IUFM d’Aix-Marseille en 2000-2001 et a depuis été reprise par plusieurs équipes de recherche.

Exposé 8.2

☛ John D. Lipson (1981). *Elements of Algebra and Algebraic Computing*. Reading, Mass. : Addison-Wesley (p. 40)

Let us examine in detail how our definitions compute $4 + 2$ and $4 \cdot 2$.

$$
\begin{aligned}
4 + 2 &= 4 + 1' && \text{defn. of } ' \\
&= (4 + 1)' && \text{recursion} \\
&= (4 + 0')' && \text{defn. of } ' \\
&= ((4 + 0)')' && \text{recursion} \\
&= ((4)')' && \text{basis} \\
&= (5)' = 6 && \text{defn. of } '. \\
4 \cdot 2 &= 4 \cdot 1' && \text{defn. of } ' \\
&= 4 \cdot 1 + 4 && \text{recursion} \\
&= 4 \cdot 0' + 4 && \text{defn. of } ' \\
&= (4 \cdot 0 + 4) + 4 && \text{recursion} \\
&= (0 + 4) + 4 && \text{basis} \\
&= 4 + 4 = 8 && \text{defn. of addition. } \square
\end{aligned}
$$

Éléments d’analyse 8.2

1. Les calculs reproduits ci-dessous sont ceux des expressions 4 + 2 et 4 × 2, tels qu'on peut les mener à bien de façon justifiée à partir d'une axiomatique des entiers (qu'on n'a pas reproduite ici).

2. Le dispositif calculatoire utilisé est semblable à celui du document précédent, à ceci près que les justifications sont ici *juxtalinéaires*.

Exposé 8.3

☛ Ronald L. Graham, Donald E. Knuth et Oren Patashnik, *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science*, 1989, Reading (Mass.), Addison-Wesley (p. 44)

order to get an equation for $\Box_n$:

$$\begin{aligned}\Box_n + (n+1)^2 &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n}(k+1)^2 = \sum_{0\leqslant k\leqslant n}(k^2+2k+1)\\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n}k^2 + 2\sum_{0\leqslant k\leqslant n}k + \sum_{0\leqslant k\leqslant n}1\\ &= \Box_n \;+\; 2\sum_{0\leqslant k\leqslant n}k \;+\; (n+1)\,.\end{aligned}$$

Oops — the $\Box_n$'s cancel each other. Occasionally, despite our best efforts, the perturbation method produces something like $\Box_n = \Box_n$, so we lose.

On the other hand, this derivation is not a total loss; it does reveal a way to sum the first n integers in closed form,

$$2\sum_{0\leqslant k\leqslant n}k = (n+1)^2 - (n+1)\,,$$

even though we'd hoped to discover the sum of first integers squared. Could it be that if we start with the sum of the integers cubed, which we might call $\boxdot_n$, we will get an expression for the integers squared? Let's try it.

$$\begin{aligned}\boxdot_n + (n+1)^3 &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n}(k+1)^3 = \sum_{0\leqslant k\leqslant n}(k^3+3k^2+3k+1)\\ &= \boxdot_n + 3\Box_n + 3\frac{(n+1)n}{2} + (n+1)\,.\end{aligned}$$

Sure enough, the $\boxdot_n$'s cancel, and we have enough information to determine $\Box_n$ without relying on induction:

$$\begin{aligned}3\Box_n &= (n+1)^3 - 3(n+1)n/2 - (n+1)\\ &= (n+1)(n^2+2n+1-\tfrac{3}{2}n-1) = (n+1)(n+\tfrac{1}{2})n\,.\end{aligned}$$

Éléments d'analyse 8.3

1. Il est utile de savoir que, afin d'établir la formule sommatoire

$$\square_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

soit encore

$$\square_n = \frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}$$

les auteurs cherchent ici une technique qui *ne soit pas* une *démonstration par récurrence* d'une formule qu'on aurait « conjecturée » (ou qui nous serait connue), mais qui permette d'arriver à une équation par rapport à l'inconnue $\square_n$, équation dont la résolution fournira la « valeur » de cette inconnue.

2. Comme on le voit, l'organisation des calculs combine sur la page imprimée les deux schémas *linéaire* et *avec sauts de ligne*. Ainsi, le premier calcul se représente comme suit :

$$\begin{aligned} E = E_1 &= E_2 \\ &= E_3 \\ &= E_4. \end{aligned}$$

On trouve ensuite le schéma suivant :

$$\begin{aligned} E = E_1 &= E_2 \\ &= E_3 \end{aligned}$$

On observe enfin le schéma que voici :

$$\begin{aligned} E &= E_1 \\ &= E_2 = E_3 \end{aligned}$$

Exposé 8.4

☛ Jean-Pierre Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*¸ Grenoble, 1991, PUG (p. 211)

$$
\begin{aligned}
y_n - \widetilde{y}_{n-\frac{1}{2}} &= y_n - \left(\widetilde{y}_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{2}\,\widetilde{p}_{n-2}\right)\\
&= y_n - \left(\widetilde{y}_n - h_{n-1}\widetilde{p}_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{2}\,\widetilde{p}_{n-2}\right)\\
&= h_{n-1}\left(\widetilde{p}_{n-1} - \frac{1}{2}\,\widetilde{p}_{n-2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\,h_{n-1}f(t_n, y_n) + o(h_{n-1});
\end{aligned}
$$

à la troisième ligne on utilise le fait que $y_n = \widetilde{y}_n = z(t_n)$, et à la quatrième le fait que $\widetilde{p}_{n-i} = f(t_{n-i}+h_{n-i}/2, \widetilde{y}_{n-i}+1/2)$ converge vers $f(t_n, y_n)$ pour $i = 1, 2$ lorsque $h_{\max}$ tend vers 0. Grâce à la formule de Taylor pour les fonctions de 2 variables, il vient

$$
\begin{aligned}
f(t_n, y_n) - f\left(t_{n-1} + \frac{h_{n-2}}{2}, \widetilde{y}_{n-\frac{1}{2}}\right)&\\
&= \frac{h_{n-1}}{2}\,f'_t(t_n, y_n) + \frac{1}{2}\,h_{n-1}f(t_n, y_n)f'_y(t_n, y_n) + o(h_{n-1})\\
&= \frac{1}{2}\,h_{n-1}(f'_t + ff'_y)(t_n, y_n) + o(h_{n-1})\\
&= \frac{1}{2}\,h_{n-1}f^{[1]}(t_n, y_n) + o(h_{n-1}),
\end{aligned}
$$

d'où $$y_{n+\frac{1}{2}} - \widetilde{y}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\,h_n h_{n-1}f^{[1]}(t_n, y_n) + o(h_n h_{n-1}).$$

On en déduit finalement

$$
\begin{aligned}
\varepsilon''_n &= h_n f'_y\left(t_n + \frac{h_n}{2}, c_n\right)\left(y_{n+\frac{1}{2}} - \widetilde{y}_{n+\frac{1}{2}}\right)\\
&= \frac{1}{4}\,h_n^2 h_{n-1}\left(f'_y f^{[1]}\right)(t_n, y_n) + o(h_n^2 h_{n-1}),
\end{aligned}
$$

Éléments d'analyse 8.4

On retrouve l'organisation classique d'une suite d'égalités, qu'on peut représenter ainsi :

$$
\begin{aligned}
&E\\
&= E_1\\
&= E_2\\
&= E_3.
\end{aligned}
$$

On note l'organisation suivante :

$$
\begin{aligned}
E &= E_1\\
&= E_2.
\end{aligned}
$$

Exposé 8.5

☛ Christian Houzel, *Analyse mathématique. Cours et exercices*. 1996, Paris, Belin (p. 300)

3.5.2.5 Lorsque h tend vers la valeur critique $2mg\ell$, k tend vers 1 et k' tend vers 0 ; or

$1-k^2\sin^2\varphi = \cos^2\varphi+k'^2\sin^2\varphi \leq \cos^2\varphi+k'^2 \leq (\cos\varphi+k')^2$ pour $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$, donc

$$K \geq \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi+k'} = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2+k'(1+t^2)} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+k'-(1-k')t^2} =$$

$$\frac{1}{k}\int_0^1 \mathrm{d}t\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}-t}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}+t}\right) = \frac{1}{k}\log\frac{k+1-k'}{k-1+k'} = \frac{1}{2k}\log\frac{1+k}{1-k}$$

qui tend vers $+\infty$ pour $k \to 1$. On voit donc que T augmente indéfiniment lorsque h

Éléments d'analyse 8.5

1. On observe ici une suite d'inégalités et d'égalités de la forme :

$$E \geq E_1 = E_2 = E_3 =$$
$$E_4 = E_5 = E_6.$$

2. Notons la présence d'un signe d'égalité à la fin de la première ligne, alors qu'on aurait pu attendre ce signe au début de la ligne suivante, comme suit :

$$E \geq E_1 = E_2 = E_3$$
$$= E_4 = E_5 = E_6.$$

Il semble qu'il y ait là l'effet d'un choix d'écriture systématique chez l'auteur, comme l'illustre par exemple ces trois lignes extraites de la page 179 de son ouvrage :

$$\int_5^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = -\frac{e^{-t}}{t}\Big|_5^{+\infty} - \int_5^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{e^{-5}}{5}+\frac{e^{-t}}{t^2}\Big|_5^{+\infty}+2\int_5^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^3}\mathrm{d}t =$$

$$\frac{e^{-5}}{5}-\frac{e^{-5}}{25}-\frac{2\,e^{-t}}{t^3}\Big|_5^{+\infty}-6\int_5^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^4}\mathrm{d}t = \frac{e^{-5}}{5}(1-\frac{1}{5}+\frac{2}{25})+6\frac{e^{-t}}{t}\Big|_5^{+\infty}+24\int_5^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^5}\mathrm{d}t =$$

$$\frac{e^{-5}}{5}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{2}{25}-\frac{6}{125}\right)+24\int_5^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^5}\mathrm{d}t$$

Exposé 8.6

☛ Cédric Villani, *Théorème vivant*, 2012, Paris, Grasset (p. 161)

Invoking Jensen and Fubini, we also have

$$
\begin{aligned}
&\left\{\int_T^\infty e^{-2\varepsilon t}\left(\int_0^t K_1(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (7.39)\\
&= \left\{\int_T^\infty\left(\int_0^t K_1(t,\tau)\,e^{-\varepsilon(t-\tau)}\,e^{-\varepsilon\tau}\,\varphi(\tau)\,d\tau\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\le \left\{\int_T^\infty\left(\int_0^t K_1(t,\tau)\,e^{-\varepsilon(t-\tau)}\,d\tau\right)\right.\\
&\qquad \times\left.\left(\int_0^t K_1(t,\tau)\,e^{-\varepsilon(t-\tau)}\,e^{-2\varepsilon\tau}\varphi(\tau)^2\,d\tau\right)dt\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\le \left(\sup_{t\ge T}\int_0^t e^{-\varepsilon t}\,K_1(t,\tau)\,e^{\varepsilon\tau}\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\qquad \times\left(\int_T^\infty\int_0^t K_1(t,\tau)\,e^{-\varepsilon(t-\tau)}\,e^{-2\varepsilon\tau}\varphi(\tau)^2\,d\tau\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\sup_{t\ge T}\int_0^t e^{-\varepsilon t}\,K_1(t,\tau)\,e^{\varepsilon\tau}\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\qquad \times\left(\int_0^\infty\int_{\max\{\tau;T\}}^{+\infty} K_1(t,\tau)\,e^{-\varepsilon(t-\tau)}\,e^{-2\varepsilon\tau}\,\varphi(\tau)^2\,dt\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \left(\sup_{t\ge T}\int_0^t e^{-\varepsilon t}\,K_1(t,\tau)\,e^{\varepsilon\tau}\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\qquad \times\left(\sup_{\tau\ge 0}\int_\tau^\infty e^{\varepsilon\tau}\,K_1(t,\tau)\,e^{-\varepsilon t}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\qquad \times\left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon\tau}\,\varphi(\tau)^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

161

Éléments d'analyse 8.6

1. À nouveau, on rencontre ici une suite d'égalités et d'inégalités, en l'espèce de la forme ci-après :

$$
\begin{aligned}
&E\\
&= E_1\\
&\leq E_2\\
&\leq E_3\\
&= E_4\\
&\leq E_5.
\end{aligned}
$$

2. On notera la manière de couper les expressions trop longues pour tenir sur une ligne :

$$
\begin{aligned}
&E\\
&= E_1\\
&\leq \{E_{21}\\
&\quad \times E_{22}\}^{½}\\
&\leq E_{31}\\
&\quad \times E_{32}\\
&= E_{41}\\
&\quad \times E_{42}\\
&\leq E_{51}\\
&\quad \times E_{52}\\
&\quad \times E_{53}
\end{aligned}
$$

Là encore, le signe (de multiplication) est placé au début de la ligne suivante.

Exposé 8.7

☛ WolframMathWorld : http://mathworld.wolfram.com/Equal.html

Equal

DOWNLOAD *Mathematica* Notebook

Two quantities are said to be equal if they are, in some well-defined sense, equivalent. Equality of quantities a and b is written $a = b$. Equal is implemented in *Mathematica* as `Equal`[*A*, *B*, ...], or *A*==*B*==....

Equality of multiple expressions is commonly denoted

$$
\begin{aligned}
a &= b \qquad (1)\\
&= c, \qquad (2)
\end{aligned}
$$

which is equivalent to $a = b = c$. Equality is transitive, so if $a = b$ and $b = c$, then it is also true that $a = c$.

Éléments d'analyse 8.7

Cette brève notice dit l'essentiel de ce qui a été dégagé ci-dessus.

Exposé 8.8

☛ E. W. Dijkstra (1997). The Mathematical Divide. EWD1268 (p. 1) : http://www.cs.utexas.edu/users/EWD/ewd12xx/EWD1268.PDF (manuscrit) et http://www.cs.utexas.edu/users/EWD/transcriptions/EWD12xx/EWD1268.html.

Now we turn to the calculational proof. As usual, we shall exploit the associativity of the addition – i.e. the equality

$(p+q)+r \;=\; p+(q+r)$ for all p,q,r –

implicitly by omitting such semantically redundant parenthesis. Here we go! For any a,b,

$$
\begin{array}{ll}
 & (a+b)^2 \\
= & \{\text{definition of exponentiation}\} \\
 & (a+b)\cdot(a+b) \\
= & \{\text{distribution } p\cdot(q+r) = p\cdot q + p\cdot r\} \\
 & (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b \\
= & \{\text{distribution } (p+q)\cdot r = p\cdot r + q\cdot r\text{, twice}\} \\
 & a\cdot a + b\cdot a + a\cdot b + b\cdot b \\
= & \{\text{symmetry of } \cdot :\ p\cdot q = q\cdot p\} \\
 & a\cdot a + a\cdot b + a\cdot b + b\cdot b \\
= & \{\text{definition of exponentiation twice;} \\
 & \ \text{property of } 2:\ p+p = 2\cdot p\} \\
= & a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad .
\end{array}
$$

Éléments d'analyse 8.8

1. La disposition adoptée peut être schématisée ainsi :

E

= {Justification de l'égalité} E_1

= {Justification de l'égalité} E_2

= …

2. L'origine de cette disposition se trouve sans nul doute dans la pratique d'insérer des *commentaires* dans les *programmes informatiques* (voir là-dessus l'article « Commentaire (informatique) » de *Wikipédia* ou l'article correspondant en anglais, « Comment (computer programming) »). L'auteur de la note manuscrite examinée, *Edsger Wybe Dijkstra* [prononciation : /ˈɛtsxər ˈwibə ˈdɛɪkstra/] (1930-2002), était un mathématicien et informaticien néerlandais considéré comme l'un des plus puissants et inventifs spécialistes de la programmation au XX^e siècle.

Exposé 8.9

☛ Alan M. Turing (1937). On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *2*(42), 230-65 (p. 249) : http://classes.soe.ucsc.edu/cmps210/Winter11/Papers/turing-1936.pdf

> Computing is normally done by writing certain symbols on paper. We may suppose this paper is divided into squares like a child's arithmetic book. In elementary arithmetic the two-dimensional character of the paper is sometimes used. But such a use is always avoidable, and I think that it will be agreed that the two-dimensional character of paper is no essential of computation. I assume then that the computation is carried out on one-dimensional paper, i.e. on a tape divided into squares.

Éléments d'analyse 8.9

1. Le passage mentionné parle de lui-même : en principe, tout calcul peut se dérouler « en ligne ». L'usage des deux dimensions de la page sur laquelle on écrit est une possibilité mais n'est pas strictement nécessaire. Ce sont pourtant ces pratiques d'écriture bidimensionnelles qui sont au cœur de notre enquête.

2. Comme l'indique l'article « Alan Turing » de *Wikipedia*, Alan Mathison Turing [/ˈtjʊərɪŋ/] (1912-1954) est « widely considered to be the father of theoretical computer science and artificial intelligence ». L'article correspondant en français précise :

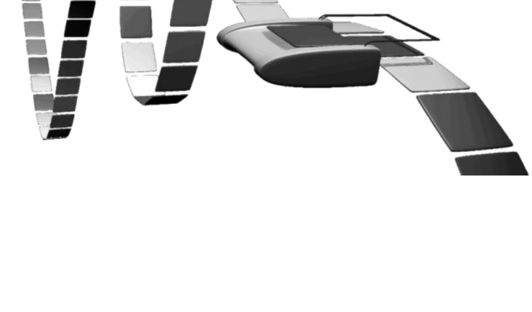
> Il est l'auteur en 1936 d'un article de logique mathématique, qui est devenu plus tard un texte fondateur de la science informatique. Pour résoudre le problème fondamental de la décidabilité

> en arithmétique, il y présente une expérience de pensée, que l'on nommera ensuite machine de Turing et des concepts de programmation et de programme, qui prendront tout leur sens avec la diffusion des ordinateurs, dans la seconde moitié du xx^{e} siècle. Avec d'autres logiciens (Church, Kleene, etc.), Turing est ainsi à l'origine de la formalisation des concepts d'algorithme et de calculabilité qui fonderont cette discipline. Son modèle a contribué à établir définitivement la thèse Church-Turing qui donne une définition mathématique au concept intuitif de fonction calculable.

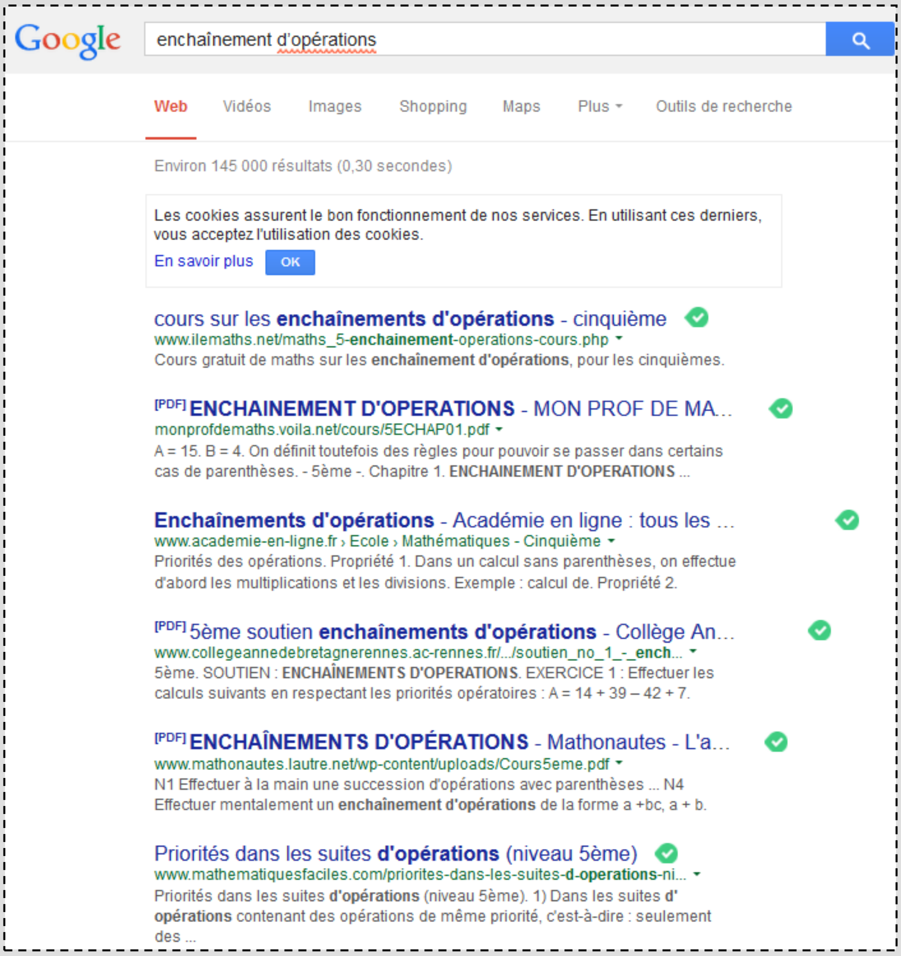
3. S'agissant de l'*Entscheidungsproblem* mentionné dans le titre même de l'article de 1936, le même document indique encore ceci :

> Son remarquable article *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem* (1936) répond à un problème posé par Hilbert dans les théories axiomatiques, le problème de la décision (*Entscheidungsproblem*) : est-il possible de trouver une méthode « effectivement calculable » pour décider si une proposition est démontrable ou non. Pour montrer que cela n'est pas possible, il faut caractériser ce qu'est un procédé effectivement calculable.
>
> Turing le fait en imaginant, non une machine matérielle, mais un « être calculant », qui peut être indifféremment un appareil logique très simple ou un humain bien discipliné appliquant des règles – comme le faisaient les employés des bureaux de calcul à l'époque. Dans le cours de son raisonnement, il démontre que le problème de l'arrêt d'une machines de Turing ne peut être résolu par algorithme : il n'est pas possible de décider avec un algorithme (c'est-à-dire avec une machine de Turing) si une machine de Turing donnée s'arrêtera.

Pour compléter ces informations, on pourra se reporter à l'article « Machine de Turing » de *Wikipédia* ou, pour des développements plus étendus, l'article correspondant en anglais. La « vue d'artiste » ci-après d'une machine de Turing (sans sa table de transition), est extraite de ces articles :



Question 9. Pour enquêter d'une autre manière sur les pratiques des professeurs, l'équipe Ξ_1 décide d'examiner ce qui peut s'en voir sur Internet à travers les documents mis en ligne par certains professeurs. Pour cela, la requête enchaînement d'opérations est présentée au moteur de recherche Google, qui affiche ce que montre la copie d'écran ci-dessous.



Examinez, du point de vue des dispositif de calcul utilisés, les documents correspondants aux 20 premiers résultats affichés par Google.

Éléments d'analyse 9

1. Le premier document (http://monprofdemaths.voila.net/cours/5ECHAP01.pdf) utilise le dispositif avec saut de ligne et en-têtes :

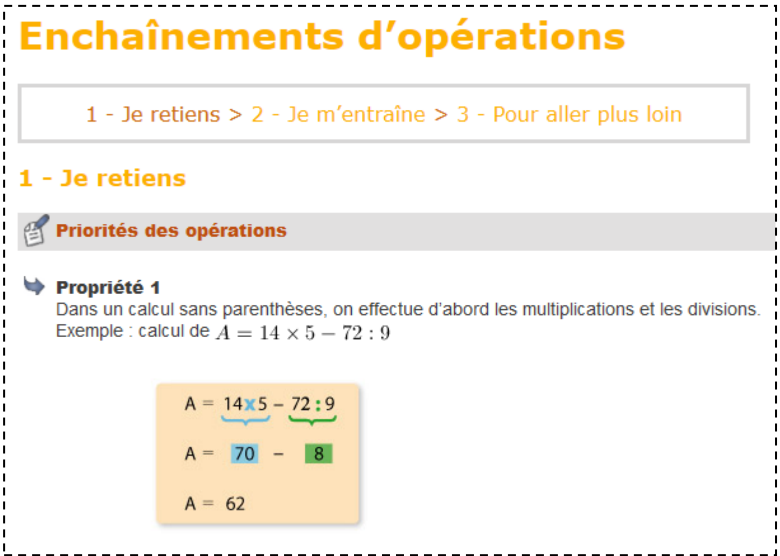
$A = 5 \times (\underline{1+2})$	$B = (\underline{36-20}) \div 4$
$A = \underline{5 \times \quad 3}$	$B = \underline{16 \;\div 4}$
$A = 15$	$B = \quad 4$

2. Il s’agit d’un document – intitulé « Enchaînement d’opérations » – qui vise des élèves de 5^e^. Le dispositif préparé pour l’effectuation des calculs demandés impose sans commentaire le schéma « Saut de ligne avec en-têtes », comme on le verra ci-après.

N° 1. En appliquant la règle, effectuer correctement les calculs.

B = 5 + 7 × 2	C = 7 × 5 – 3	D = 4 + 2 × 5
B =	C =	D =
B =	C =	D =
E = 17 – 2 × 3	F = 8 × 5 – 4	G = 8 + 3 × 5
E =	F =	G =
E =	F =	G =
H = 4 × 3 + 2	I = 9 – 2 × 4	J = 3 × 11 – 7 × 4
H =	I =	J =
H =	I =	J =

3. Le deuxième résultat proposé par Google renvoie en fait au même document à la même adresse. Le troisième résultat renvoie à une page du site officiel intitulé *Académie en ligne* et proposé par le CNED (http://www.academie-en-ligne.fr/Ecole/RessourcesInformatives.aspx?PREFIXE=AL4MA51&CONCEPT=AL4MA51-INTR-197458-1). On y voit ceci :



4. Le quatrième résultat renvoie à une page du site d’un collège breton (à l’adresse http://www.collegeannedebretagnerennes.ac-rennes.fr/sites/collegeannedebretagnerennes.ac-rennes.fr/IMG/pdf/soutien_no_1_-_enchainements_d_operations.pdf). Chose assez rare, cette page utilise le schéma « Saut de ligne sans en-tête » :

5$^{\text{ème}}$ **SOUTIEN : ENCHAÎNEMENTS D'OPERATIONS**

EXERCICE 1 :

Effectuer les calculs suivants en respectant les priorités opératoires :

A = 14 + 39 − 42 + 7

=

=

=

B = 4,5 − 1,5 + 13,2 − 4

=

=

=

5. Le cinquième résultat concerne toujours les classes de 5e (http://www.mathonautes.lautre.net/wp-content/uploads/Cours5eme.pdf). Le document correspondant montre l'utilisation (circonstancielle ?) du *schéma de calcul « en ligne »*. L'extrait ci-après provient de la page 2 :

Compétence N1 : Enchaînements d'opérations avec parenthèses

Règle n°1

Pour calculer une expression avec parenthèses, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses, en commençant par les parenthèses les plus intérieures.

Exemples :

- ► $15 - \underline{(7+5)} = 15 - 12 = 3$
- ► $\underline{(37-19)} \times \underline{(7-5)} = 18 \times 2 = 36$
- ► $34 - [\underline{(7+5)} \times 2] = 34 - \underline{(12 \times 2)} = 34 - 24 = 10$

À la 29e et dernière page du document, on voit de même cette utilisation des calculs en ligne :

Compétence N23 : Simplifier l'écriture d'une somme de relatifs

Règle

Afin d'alléger l'écriture d'une somme de nombres relatifs, on peut :

- supprimer les signes "+" d'addition,
- supprimer les parenthèses,
- supprimer le signe "+" du terme écrit au début, s'il est positif

Exemples :

- $(+5) + (-3) + (+11) = 5 - 3 + 11 = 13$
- $(-3) - (+8) + (+7) - (-1) = (-3) + (-8) + (+7) + (+1) = -3 - 8 + 7 + 1 = -3$

6. Le sixième résultat porte l'adresse http://www.mathematiquesfaciles.com/priorites-dans-les-suites-d-operations-niveau-5eme_2_40412.htm. La page correspondant traite, au niveau de la 5[e], des « Priorités dans les suites d'opérations ». Les calculs se font ici par sauts de ligne avec en-têtes, comme le montre l'extrait suivant :

3) Dans les suites d'opérations contenant des parenthèses, les parenthèses sont prioritaires sur tout le reste

G = 5 + 5 x 4 - (179 + 4 - 4 x 45) + (45 + 75)

On va d'abord calculer ce qu'il y a dans les parenthèses. Si elles contiennent elles-mêmes une suite d'opérations, on applique les règles précédentes.

G = 5 + 5 x 4 - (179 + 4 - 4 x 45) + (45 + 75)

G = 5 + 5 x 4 - (179 + 4 - 180) + 120

G = 5 + 5 x 4 - (183 - 180) + 120

G = 5 + 5 x 4 - 3 + 120

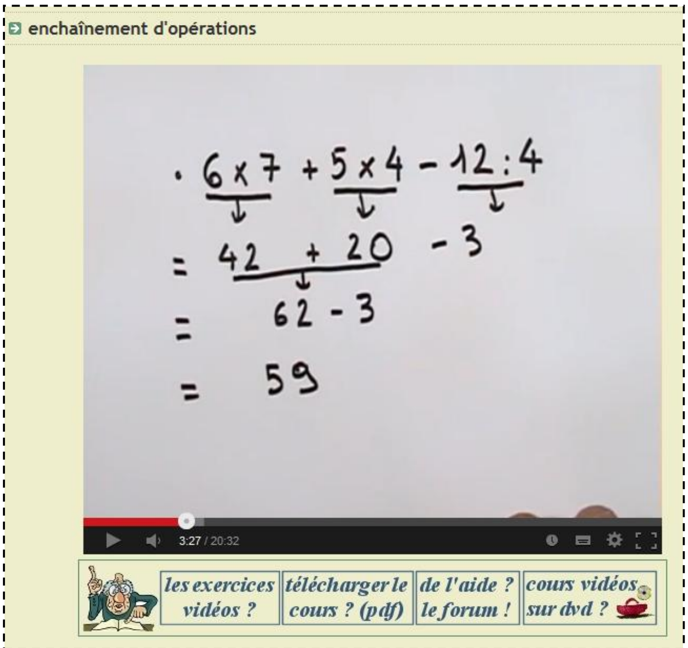
G = 5 + 20 - 3 + 120

G = 25 - 3 + 120

G = 22 + 120

G = 142

7. Le septième résultat porte l'adresse http://cours5eme.blogspot.fr/2006/08/enchanement-doprations-programme-2006.html, qui est celle d'une vidéo. On y voit l'emploi du schéma « avec sauts de ligne sans en-têtes ».



8. Le résultat suivant (http://www.mathsbook.fr/cours-maths-5eme-enchainement-operations) conjugue *calculs en ligne* et *calculs auxiliaires*. C'est ce que l'on pourra notamment voir ci-après (http://www.mathsbook.fr/cours-maths-priorites-operatoires-1-431) :

Exemple : Dans le calcul de A = 2 × [5 + (14 - 6)] on effectuera dans l'ordre :

14 - 6 = 8

5 + 8 = 13

2 × 13 = 26

C'est-à-dire : A = 2 × [5 + (14 - 6)] = 2 × (5 + 8) = 2 × 13 = 26.

Le calcul en ligne est utilisé également dans le cas d'un calcul numéro-littéral, comme on le voit ici (http://www.mathsbook.fr/cours-maths-factorisation-et-developpement-3-433) :

Exemples :
Développer et calculer A = 3(x + 4) et B = 3(x + (3 × 2 + x)):
A = 3(x + 4) = 3 × x + 3 × 4 = 3x + 12

B = 3(x + (3 × 2 + x)) = 3(x + (6 + x)) = 3(x + 6 + x) = 3(2x + 6) = 6x + 18

9. Le résultat qui suit renvoie à la vidéo déjà rencontrée plus haut (7e résultat). Le 10e résultat (qui porte l'adresse http://www.ac-nancy-metz.fr/PRES-ETAB/COLLDEUXSARRESLORQUIN/dokuwiki/ doku2.php?id=maths:5ieme:chapitre_1) use du schéma de calcul *en sauts de ligne avec en-têtes* (on notera que les lignes suivant la première ne sont pas vides mais apportent une aide à l'élève) :

On donne le calcul suivant : A = 4 + 2 × 5

Nous allons effectuer le calcul de deux manières différentes :

En commençant par l'addition	En commençant par la multiplication
A = 4 + 2 × 5 A = ……× 5 A = ……	A = 4 + 2 × 5 A = 4 + …… A = ……

En revanche, les calculs de fractions s'y font en ligne :

Exemples : calculer

- $A = \frac{27+6}{3} = \frac{(27+6)}{3} = \frac{33}{3} = 11$
- $B = \frac{6}{10-8} = \frac{6}{(10-8)} = \frac{6}{2} = 3$
- $C = \frac{11+4}{8-3} = \frac{(11+4)}{(8-3)} = \frac{15}{5} = 3$

10. Le 11e résultat (http://mathematiques.daval.free.fr/IMG/pdf/5_ch2_Enchainements_operations.pdf) use de calculs en ligne sans en-tête initial. Le 12e résultat (http://www.images.hachette-livre.fr/media/contenuNumerique/007/834334502.pdf) use du schéma avec sauts de ligne et en-têtes, comme ci-après :

Énoncé

En écrivant les détails, calculer $B = 228 - (3 + 2 \times 9) \times 7$.

Solution	Commentaires
$B = 228 - (3 + 2 \times 9) \times 7$	← On recopie l'expression.
$B = 228 - (3 + 18) \times 7$	← On calcule d'abord le contenu des parenthèses en commençant par la multiplication.
$B = 228 - 21 \times 7$	← On finit de calculer le contenu des parenthèses.
$B = 228 - 147$	← On effectue la multiplication qui est prioritaire.
$B = 81$	← On termine le calcul.

Mais ce schéma d'écriture est parfois combiné avec des calculs en ligne, comme ci-après :

2 Calculs avec des quotients

Énoncé

Calculer $A = 13 + \dfrac{55 + 5}{140 - 120}$ et $B = 3 + \dfrac{\frac{48}{12}}{2}$.

Solution

$$A = 13 + \left(\frac{(55 + 5)}{(140 - 120)}\right)$$

$$A = 13 + \left(\frac{60}{20}\right)$$

$$A = 13 + 3 = 16$$

$$B = 3 + \left(\frac{\left(\frac{48}{12}\right)}{(2)}\right) = 3 + \left(\frac{4}{2}\right)$$

$$B = 3 + 2 = 5$$

Commentaires

Tout trait de fraction sous-entend trois paires de parenthèses :

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{(A)}{(B)}\right)$$

Avec l'habitude, on ne les écrit pas toujours mais il faut se souvenir de leur présence, en particulier quand on calcule à la machine.

On effectue les calculs dans l'ordre imposé par ces parenthèses, même si elles ne sont pas écrites.

Il semble qu'il y ait comme une « affinité » entre présence de fractions et recours au calcul en ligne !

11. Le résultat suivant (http://lyc71-laprats.ac-dijon.fr/IMG/pdf/CNUM_-_Fractions_enchainement_d_operations.pdf) renvoie à un document qui utilise le schéma avec sauts de ligne, en-tête initial, mais sans en-têtes subséquents. Le document correspondant au 14^{e} résultat (http://fr.scribd.com/doc/36508287/enchainement-d-operations-5eme) présente des calculs avec sauts de ligne mais sans en-tête initial (et, donc, sans en-têtes subséquents) :

Ex : calculer les expressions suivantes

17 – 6 + 4 – 2	24 – 2 x 6 + 20 : 4 x 5	19 – [42 : (3 + 4)]
= 11 + 4 – 2	= 24 – 12 + 25	= 19 – (42 : 7)
= 15 – 2	= 12 + 25	= 19 – 6
= 13	= 37	= 13

Le 15^{e} résultat (http://cms.ac-martinique.fr/etablissement/clgpelage/file/Cours-de-Mathematiques-5eme/ENCHAINEMENT-D-OPERATIONS.pdf) utilise le calcul par sauts de ligne avec en-têtes (initial et subséquents). Il en va de même des 16^{e}, 17^{e}, 18^{e} et 19^{e} résultats (respectivement aux adresses suivantes :

http://www.blaszsite.fr/doc/5%20ch1a.pdf

http://myriam.collenne.free.fr/5_enchainements.htm

http://etab.ac-poitiers.fr/coll-lezay/IMG/pdf/Fiche_D_exercice_1_.pdf

http://vandymath.free.fr/IMG/pdf/prof_ch01_enchainement_operations.pdf

En revanche, le 20^{e} résultat (http://www.modulo-n.fr/courspdf/cinquieme/Enchainements_d_operations.pdf) use de calculs en sauts de ligne, sans en-têtes initial ou subséquents, comme on le verra ci-après :

Exemples :

• $20-(7+48\div 8)$	• $50-((3+7)\times 4)$	• $12+((30-3\times 5)\times 4)$
$=20-(7+6)$	$=50-(10\times 4)$	$=12+((30-15)\times 4)$
$=20-13$	$=50-40$	$=12+(15\times 4)$
$=7$	$=10$	$=12+60$
		$=72$

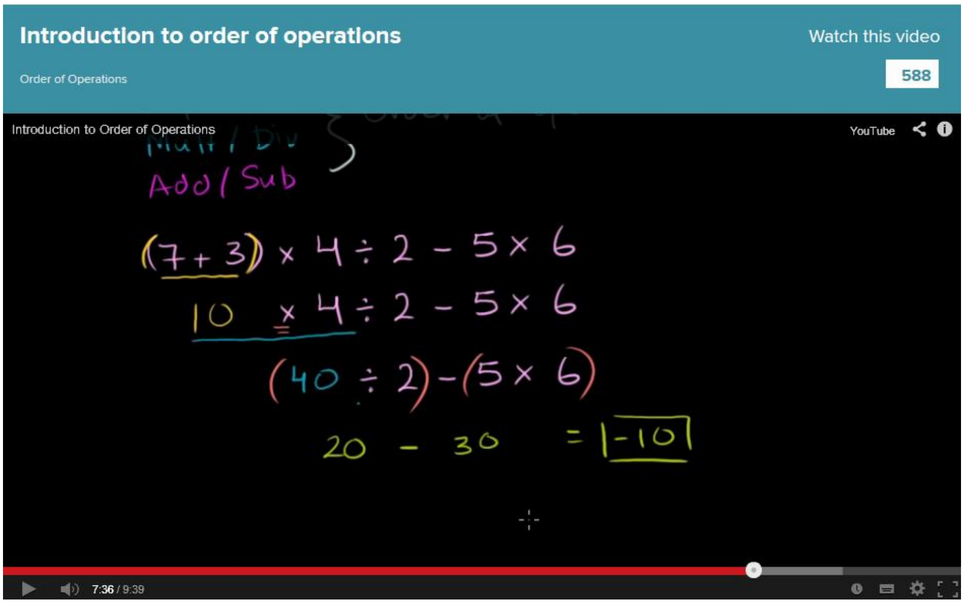
Question 10. Avant d'entreprendre de rédiger un compte rendu de sa recherche, l'équipe Ξ_1 examine un ultime document : la vidéo (en anglais) de la *Khan Academy* qu'on trouvera à l'adresse suivante : https://www.khanacademy.org/math/cc-sixth-grade-math/cc-6th-factors-and-multiples/cc-6th-order-operations/v/introduction-to-order-of-operations. Y trouve-t-on une technique d'écriture des calculs non encore rencontrée ? Si oui, laquelle ?

Éléments d’analyse 10

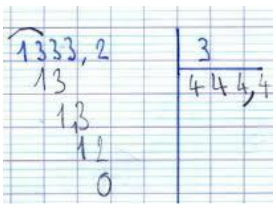
1. Sur l’*Académie Khan*, on pourra prendre connaissance de l’article de l’encyclopédie *Wikipédia* qui lui est consacré (http://fr.wikipedia.org/wiki/Khan_Academy).

2. La vidéo est intitulée « Introduction to order of operations ». Le thème en est donc, officiellement, la question des *priorités opératoires*.

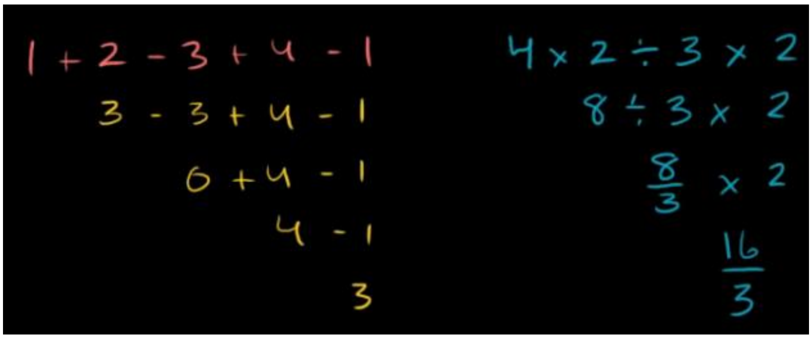
3. La capture d’écran suivante permet de répondre à la question posée :



On voit en effet que le schéma d’écriture du calcul n’utilise même pas le signe d’égalité ! C’est le saut de ligne *qui a la valeur d’une affirmation d’égalité*, comme il en va souvent au collège avec la résolution d’équations (du premier degré à une inconnue), où le saut de ligne a la valeur d’une affirmation d’équivalence. On peut voir là un vestige des pratiques arithmétiques anciennes, qui n’utilisaient pas les signes de l’algèbre, tel le signe d’égalité, et qui, en revanche, utilisaient abondamment les deux dimensions de la feuille de papier, comme on le voit ci-dessous à gauche (pour la division). À droite, on aperçoit une écriture « moderne » : l’emploi des signes de l’algèbre et le calcul « en ligne » sont liés.



4. Le schéma d’écriture sans signe d’égalité mais avec sauts de ligne est utilisé de façon systématique par l’intervenant, comme en témoignent les deux calculs ci-après :



Question 11. L’équipe Ξ_1 envisage d’écrire un projet d’article à propos de la recherche réalisée sur la question $Q_{\hat{O}}^{1}$, en lui donnant la structure IMRAD. En prenant appui sur les données ci-après, rédiger un tel projet d’article.

Données 11.1

☛ American Psychological Association. (2010). *Publication Manuel*. Washington (DC) : auteur (p. 23)

> A title should summarize the main idea of the manuscript simply and, if possible, with style. It should be a concise statement of the main topic and should identify the variables or theoretical issues under investigation and the relationship between them. An example of a good title is “Effect of Transformed Letters on Reading Speed.”
> A title should be fully explanatory when standing alone. Although its principal function is to inform readers about the study, a title is also used as a statement of article content for abstracting and reference purposes in data bases such as APA’s PsycINFO.
> A good title is easily shortened to the running head used within the published article.
> Titles are commonly indexed and compiled in numerous reference works. Therefore, avoid words that serve no useful purpose; they increase length and can mislead indexers.
> For example, the words *method* and *results* do not normally appear in a title, nor should such terms as *A Study of* or *An Experimental Investigation of*. Occasionally a term such as *a research synthesis* or *a meta-analysis* or *fMRI study of* conveys important information for the potential reader and is included in the title. Avoid using abbreviations in a title; spelling out all terms helps ensure accurate, complete indexing of the article. The recommended length for a title is no

more than 12 words.

The title should be typed in uppercase and lowercase letters, centered between the left and right margins, and positioned in the upper half of the page.

Éléments de réponse 11.1

1. On peut songer au titre suivant (qui comporte 11 mots) : *Comment écrire un enchaînement d'opérations ? Usages mathématiques et créations didactiques*. La référence à des créations didactiques renvoie bien sûr aux écritures en sauts de signe avec en-têtes (initial et/ou subséquents).

2. Le titre précédent peut être légèrement resserré, par exemple ainsi : *Enchaîner des opérations. Usages mathématiques et créations didactiques*. Ce dernier titre ne comporte plus que huit mots. On peut alors faire apparaître dans le titre une information utile : *Enchaîner des opérations au collège. Usages mathématiques et créations didactiques*.

3. Le titre ainsi obtenu, qui comporte maintenant 10 mots, peut aussi être écrit à la manière anglo-saxonne : *Enchaîner des opérations au collège : usages mathématiques et créations didactiques*.

Données 11.2

☛ IMRAD. (s. d.). Dans *Wikipedia*. Récupéré le 7 avril 2014 de http://en.wikipedia.org/wiki/IMRAD (§ 1).

The **IMRAD** (/ˈɪmræd/) structure is the most prominent norm for the structure of a scientific journal article of the original research type. *IMRAD* is an acronym for **i**ntroduction, **m**ethods, **r**esults, **a**nd **d**iscussion. Original research articles are typically structured in this basic order:

- **Introduction** – Why was the study undertaken? What was the research question, the tested hypothesis or the purpose of the research?
- **Methods** – When, where, and how was the study done? What materials were used or who was included in the study groups (patients, etc.)?
- **Results** – What answer was found to the research question; what did the study find? Was the tested hypothesis true?
- **and**

• **Discussion** – What might the answer imply and why does it matter? How does it fit in with what other researchers have found? What are the perspectives for future research?

Éléments de réponse 11.2

1. L'*introduction* de l'article doit répondre aux questions suivantes : « Why was the study undertaken? What was the research question, the tested hypothesis or the purpose of the research? » Elle pourrait prendre l'allure suivante :

ENCHAÎNER DES OPÉRATIONS AU COLLÈGE : USAGES MATHÉMATIQUES ET CRÉATIONS DIDACTIQUES

Équipe Ξ_1

M2DDM, Marseille

Introduction

La recherche dont nous rendons compte ci-après est née d'une confidence d'un chercheur en didactique non spécialiste du collège, surpris par l'existence d'une pratique dont il raconte en ces termes la découverte [Note 1. Communication personnelle, 4 janvier 2014] :

> J'avais eu une discussion avec un formateur de mathématiques, ancien professeur de collège, qui me disait que, lorsqu'il enseignait, il refusait à ses élèves le droit d'écrire des suites de signe égal : les équations ne devaient comporter que deux expressions, l'une à droite, l'autre à gauche du signe égal. Autrement dit, il acceptait $a = b$, mais refusait $a = b = c$, cette dernière égalité devant s'écrire en deux lignes. Je lui ai dit que je trouvais cette interdiction curieuse et sans véritable sens, et il n'a pas pu d'ailleurs me donner une raison d'être de cette « coutume ».

L'objet de cet étonnement presque fortuit nous a paru de nature à être examiné de façon plus approfondi. Cela a conduit l'équipe Ξ_1 auteure de cette étude à s'engager dans une recherche portant sur la question Q_1 formulée comme suit :

> Est-il exact que nombre de professeurs de mathématiques interdisent à leurs élèves (ou, du moins, leur déconseillent) d'écrire des suites d'égalités comme par exemple $23 + (45 – 2 \times 7) = 23 + (45 – 14) = 23 + 31 = 54$? Pourquoi cela ? Pour des raisons mathématiques ou pour d'autres raisons ? Lesquelles ?

L'étude de cette question a amené l'équipe Ξ_1 à dégager un modèle mathématique de référence que l'on peut résumer de la façon suivante.

1. Les expressions E « confiées » aux élèves (ou prises pour exemples par l'instance enseignante : professeur, ouvrage, etc.) sont des expressions numériques *bien formées* à coefficients décimaux [Note 2. Sur la définition des expressions bien formées, voir l'annexe A].
2. Chaque expression de ce type a une *valeur numérique*, qui appartient au corps $\mathbb{Q}$ des rationnels (et, souvent, à l'anneau $\mathbb{D}$ des décimaux) et dont elle est un *autre nom*, à savoir le *nom standard* de la valeur numérique en question. Déterminer ce nom standard, c'est *évaluer* l'expression considérée.
3. Le passage d'une telle expression E à sa valeur numérique se fait par une suite étapes de calcul qui conservent la valeur numérique de E et conduisent à passer de E à E_1, puis de E_1 à E_2, etc., jusqu'à ce que l'on arrive à une expression E_n qui soit le *nom standard* e d'un rationnel (écrit sous forme décimale s'il s'agit d'un nombre décimal), en sorte que l'on a
$$E = E_1 \wedge E_1 = E_2 \wedge \ldots \wedge E_{n\text{-}1} = E_n$$
(où $\wedge$ est le connecteur de conjonction) et donc, par transitivité, $E = e$.
4. La technique de calcul permettant de passer d'une expression E_{k-1} à une expression E_k ($1 \leq k \leq n$, avec $E_0 = E$) équivalente (c'est-à-dire ayant même valeur numérique) consiste à modifier formellement l'expression E_{k-1} selon les lois de commutativité et d'associativité, voire de distributivité, qui ne changent pas la valeur de l'expression, ou à effectuer une ou plusieurs des opérations indiquées dans E_{k-1}, l'enchaînement des expressions $E_0 = E$, E_1, E_2, …, E_n ainsi successivement déterminées s'arrêtant lorsqu'il n'y a plus d'opérations à effectuer dans la dernière expression obtenue, laquelle est donc un nom standard de nombre.

Le modèle didactique de référence *général* mobilisé par l'équipe Ξ_1 est celui offert par la *théorie anthropologique du didactique* (TAD). Ce modèle est « paramétré » en fonction de l'objet de cette recherche comme on le précise ci-après :

1. Les praxéologies mathématiques et didactiques à observer et analyser sont relatives à deux types de tâches *coopératives*, T_0 et T_1. Dans chacun de ces types de tâches, le professeur ou, plus généralement, « l'instance enseignante », « fournit » une expression numérique *qui est censée être bien formée*, quoiqu'elle soit en général parenthésée de façon incomplète, les éventuelles ambiguïtés (comme dans l'expression $3 \times 7 + 2^2$) étant à lever par application des règles de priorité opératoires : parenthèses $\succ$ exponentiation $\succ$ multiplication et division $\succ$ addition et soustraction (voir Pegg, s.d. ; et aussi « Ordre des opérations », s.d.). Le fait de garantir le caractère bien formé des expressions à calculer participe du *topos* enseignant (et non du *topos* enseigné : contractuellement, l'élève n'a pas à vérifier qu'il en est bien ainsi).

2. Dans le type de tâches T_0, les calculs d'expressions sont des exemples ou illustrations proposés et garantis par l'instance enseignante, l'instance enseignée ayant seulement à les *lire* (pour les *suivre*). Ces exemples ou illustrations assument généralement la fonction didactique de *première rencontre* avec le type de tâches T_1.
3. Dans le type de tâches T_1, le calcul d'expressions (au sens précisé par le modèle mathématique de référence ci-dessus) appartient au *topos* de l'instance enseignée, à charge pour l'instance enseignante d'en fournir éventuellement un corrigé. Ces calculs d'expressions fournissent leur matériel et leurs matériaux aux autres moments de l'étude.

Étant donné le contenu de la question Q_1 étudiée, nous examinerons essentiellement, dans les praxéologies correspondant aux types de tâches T_0 et T_1, le *dispositif d'écriture* des égalités dont se compose le calcul de la valeur numérique de l'expression considérée. La question, engendrée par l'étude de Q_1, qui apparaît cruciale est celle-ci : le dispositif d'écriture est-il « en ligne », comme il en va dans le schéma de calcul 1 ci-dessous, ou « par sauts de ligne », comme dans le schéma de calcul 2 ci-après ?

$$3 \times 7 + 2^2 = (3 \times 7) + 2^2 = 21 + 4 = 25$$

Schéma de calcul 1

$$\begin{aligned} 3 \times 7 + 2^2 &= (3 \times 7) + 2^2 \\ &= 21 + 4 \\ &= 25. \end{aligned}$$

Schéma de calcul 2

Cette question devra être complétée par plusieurs autres.

2. La section *Méthodes* doit, elle, répondre aux questions suivantes : « When, where, and how was the study done? What materials were used or who was included in the study groups (patients, etc.)? » Elle peut prendre la forme ci-après.

Méthodes

Cette recherche a été menée, au titre des travaux dirigés, dans le cadre d'un enseignement de deuxième année d'un master de didactique des mathématiques, durant le premier trimestre de l'année 2014.

L'hypothèse qu'il s'agit au départ de vérifier, de rejeter ou de nuancer a une forme faible (l'emploi exclusif ou majoritaire *de fait* du dispositif de calcul par sauts de ligne) et une forme forte (l'*interdiction* de l'emploi du dispositif de calcul en ligne au bénéfice du dispositif de calcul par sauts de ligne). Dans les deux cas, les conditions de mise en œuvre de la norme calculatoire adoptée dans telle classe de collège peuvent varier : son observance peut ne concerner que les calculs mis au net et soumis alors à l'évaluation du professeur (dans un cahier d'exercices, dans un devoir en classe ou à la maison, par exemple) et épargner les calculs au brouillon préalables ; elle peut, au contraire, s'étendre, par principe, aux calculs préparatoires eux-mêmes.

La technique qui semble a priori la plus adéquate consisterait à observer l'activité ordinaire de classes de collège, et en particulier des classes de 5^e, pour identifier les dispositifs d'écriture utilisés et leurs conditions usuelles d'utilisation. Étant donné les contraintes sous lesquelles l'équipe Ξ_1 a travaillé, cette technique n'a pas pu être mise en œuvre. Le corpus documentaire sans doute le plus proche du corpus que permettrait de réunir l'observation naturaliste de classes est constitué des vidéos disponibles sur Internet où un enseignant explique comment calculer des expressions numériques, ce qu'illustre par exemple la capture d'écran ci-après (Mercier, 2010).

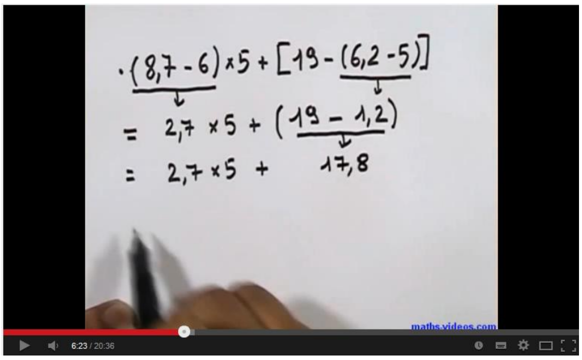
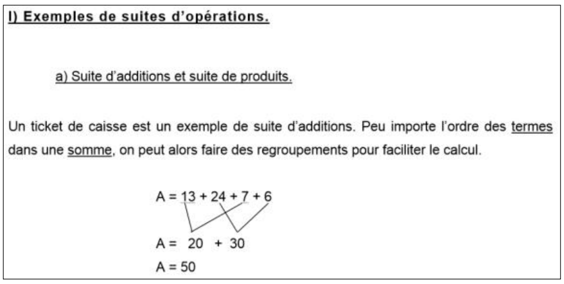


Figure 1

Si l'on suppose, ainsi que nous le ferons ici, que le dispositif d'écriture des calculs utilisé est regardé par le professeur comme une partie clé de la technique enseignée, on doit conclure que ce qui est présenté dans la vidéo n'est pas différent, *à cet égard*, de ce que le même « professeur » ferait dans une classe réelle [Note 3. Au reste, certaines des vidéos disponibles ont pu être filmées dans des classes réelles.].

Un autre corpus documentaire aisément accessible est constitué des documents « parascolaires » mis en ligne sur des sites Web, qu'ils soient celui d'une personne (en général un professeur), d'un collège ou d'une académie par exemple. Dans le premier document ci-après (à gauche : « Enchaînement d'opérations », s.d.), le dispositif en sauts de ligne est utilisé pour montrer à l'élève éventuel la technique de calcul. Il se pourrait donc qu'il soit mobilisé ici uniquement pour accroître la lisibilité des calculs, sans constituer pour cela un « modèle de calcul » imposé à l'élève. En revanche, dans le deuxième document ci-dessous (à droite :

« Soutien : enchaînements », s.d.), le doute n'est plus guère permis : le dispositif adopté est de fait *imposé* à l'élève.


I) Exemples de suites d'opérations.

a) Suite d'additions et suite de produits.

Un ticket de caisse est un exemple de suite d'additions. Peu importe l'ordre des termes dans une somme, on peut alors faire des regroupements pour faciliter le calcul.

A = 13 + 24 + 7 + 6

A = 20 + 30

A = 50

Figure 2

5ème **SOUTIEN : ENCHAÎNEMENTS D'OPERATIONS**

EXERCICE 1 :

Effectuer les calculs suivants en respectant les priorités opératoires :

A = 14 + 39 – 42 + 7

=

=

=

Figure 3

Pour établir les praxéologies dominantes dans le monde mathématique « savant », nous avons sollicité le corpus des ouvrages et autres textes de mathématiques disponibles en bibliothèque et/ou sur Internet, ce qu'illustre la capture d'écran suivante (« Calcul infinitésimal », s.d.).

$$dS = (x+dx).(y+dy)-x.y = y.dx+x.dy+dx.dy = (y,x)\cdot(dx,dy) = \vec{\nabla} S\cdot\overrightarrow{dOM}$$

$$\vec{\nabla} S \cdot \overrightarrow{dOM} = (y\vec{i} + x\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(xy)}{\partial y}\vec{j}\right) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j})$$

Toutes ces égalités sont différentes façons d'écrire... un produit scalaire de deux vecteurs :

$$dS = (x+dx).(y+dy)-x.y = y.dx+x.dy = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(xy)\cdot\overrightarrow{dOM} = \vec{\nabla}(xy)\cdot\overrightarrow{dOM} \text{ où } \overrightarrow{\mathrm{grad}}(xy) = (y,x)$$

Figure 4

Ainsi qu'on le voit, les expressions E, E_1, E_2, …, ne sont pas en général, ici, des expressions seulement *numériques*, bien sûr. Comme précédemment, on peut, dans ce cadre, s'interroger sur la signification de l'emploi de tel ou tel dispositif de calcul en ligne. Est-il adopté surtout pour gagner de l'espace dans une publication ? Ou bien constitue-t-il la forme « normale » d'écriture de calculs dans le monde savant, y compris dans les rédactions préalables à la version préparée pour la publication ?

D'une manière générale, le problème que pose l'observation peut être résumé ainsi. Alors que l'on souhaite analyser certaines praxéologies telles qu'elles apparaissent mises en œuvre sous des contraintes K_0 et dans des conditions C_0 « usuelles », les observations réalisées appréhendent ces praxéologies alors qu'elles se trouvent mises en jeu sous des contraintes K_1 et dans des conditions C_1 différentes des contraintes et conditions « usuelles ». La question clé est alors celle-ci : ce changement (souvent difficile à préciser) dans les conditions et contraintes prévalentes modifie-t-il significativement les éléments praxéologiques que l'on s'efforce d'observer – ici, le dispositif d'écriture utilisé – ou le laisse-t-il inchangé, à des variations inessentielles près ?

La question se pose notamment à propos d'un autre type de corpus de données utilisé dans cette recherche : le corpus des témoignages formulés sur leurs *propres* usages par des professeurs qui enseignent ou ont enseigné au collège. En l'espèce, ces témoignages ont été recueillis, lors de la première séance de travaux dirigés (voir l'*Introduction*, ci-dessus), auprès des six participants aux TD répondant aux caractéristiques indiquées, qui ont bien voulu répondre aux trois questions du questionnaire suivant :

1. a) Favorisez-vous les suites d'écritures du type

$$\begin{array}{lcl} A = 4 \times (2 + 1) & & A = 4 \times (2 + 1) \\ \quad = 4 \times 3 & \text{ou encore} & A = 4 \times 3 \\ \quad = 12 & & A = 12 \end{array}$$

par rapport aux écritures du type $A = 4 \times (2 + 1) = 4 \times 3 = 12$?

b) Quel que soit votre choix, comment le justifieriez-vous ?

2. a) Interdisez-vous les écritures du deuxième type aux élèves ?

b) Quel que soit votre choix, comment le justifieriez-vous ?

3. a) Vous permettez-vous vous-même d'utiliser des écritures du deuxième type, soit au tableau, soit dans des documents rédigés à l'intention des élèves ?

b) Quel que soit votre choix, comment le justifieriez-vous ?

Nous nous trouvons en ce cas devant un problème des plus classiques : déterminer si la perturbation d'un « système » du fait même de l'interaction avec ce système qu'impose son observation change significativement le système observé.

3. La section *Résultats* doit répondre aux questions suivantes : « What answer was found to the research question; what did the study find? Was the tested hypothesis true? » À ces questions, nous pouvons répondre comme suit.

Résultats

Pour éclairer les résultats qui suivent, rappelons deux faits. Le premier est l'exploitation traditionnelle, *en arithmétique*, de la *bidimensionnalité* du support d'écriture, comme l'illustre par exemple le dispositif classique de la division (ci-après).

$$\begin{array}{r|l} 3470 & 137 \\ \cline{2-2} 730 & 25{,}3 \\ 450 & \\ 39 & \end{array}$$

Figure 5

Par contraste, l'écriture algébrique tend vers l'*unidimensionnalité*, et cela – tel est le deuxième fait annoncé – à grand renfort de « signes algébriques » (=, +, ×, etc.), que l'on croit parfois, mais à tort, nés avec l'arithmétique [Note 4. Voir Smith, 1958, p. 395.]. C'est ainsi que la division précédente s'écrira en ligne : 3470 = 137 × 25,3 + 3,9. L'*effectuation* de cette division pourrait aussi se faire *en ligne*, en s'aidant de l'écriture décimale : 3470 = 137 × 20 + 730 = 137 × 25 + 45 = 137 × 25 + 0,1 × 450 = 137 × 25 + 0,1 × (137 × 3 + 39) = 137 × 25,3 + 3,9. Cette suite d'égalités, on l'aura noté, s'étend sur deux lignes successives ; elle peut cependant être « déroulée » et *reste unidimensionnelle*. Dans son fameux article « On computable numbers, with an application to the *Entscheidungsproblem* » (1937), Alan Turing (1912-1954) écrit :

> Computing is normally done by writing certain symbols on paper. We may suppose this paper is divided into squares like a child's arithmetic book. In elementary arithmetic the two-dimensional character of the paper is sometimes used. But such a use is always avoidable, and I think that it will be agreed that the two-dimensional character of paper is no essential of computation. I assume then that the computation is carried out on one-dimensional paper, i.e. on a tape divided into squares. (p. 249)

La tradition arithmétique de l'usage bidimensionnnel du support d'écriture se conserve notamment dans la résolution d'équations au collège, où le signe d'équivalence (⇔) n'est pas officiellement disponible. C'est ce que l'on voit par exemple dans l'extrait suivant d'une vidéo en ligne (Chermak, 2009).

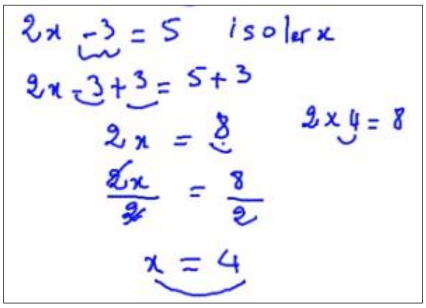


Figure 6

Cet usage du saut de ligne comme indiquant l'équivalence se retrouve parfois dans l'évaluation d'expressions, comme on le voit sur une autre vidéo en ligne (« Introduction to order », s.d.).

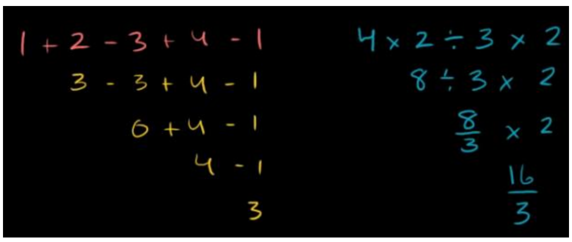


Figure 7

Le point de départ de notre enquête est le résultat suivant : dans l'écriture mathématique « savante », le dispositif d'écriture *de base* semble être le schéma de calcul « en ligne », dans lequel l'énoncé $E = E_1 \wedge E_1 = E_2 \wedge \ldots \wedge E_{n\text{-}1} = E_n$ est écrit $E = E_1 = E_2 = \ldots = E_n$, le passage à la ligne étant pratiqué si la longueur de l'écriture l'exige. C'est ce dispositif en ligne qui apparaît dans l'extrait suivant d'un ouvrage de calcul infinitésimal (Lax, Burstein & Lax, 1976, p. 115), où l'on voit le schéma en ligne (sans passage à la ligne) $E = E_1 = E_2 = E_4$.

We have expressed V as a function of two variables, r and h, but can eliminate one by means of the *constraint* (5.1):

$$h = \frac{A}{2\pi r} - r,$$

so that

$$V = f(r) = \pi r^2\left[\frac{A}{2\pi r} - r\right] = \frac{Ar}{2} - \pi r^3, \qquad r > 0.$$

Figure 8

En bien des cas, le souci de lisibilité des calculs, ou simplement la taille des expressions manipulées, conduit à changer l'écriture en ligne « pure » (avec passage à la ligne) en une écriture *combinant écriture en ligne et sauts de ligne*, comme ci-après (Graham, Knuth & Patashnik, 1989, p. 44).

$$\begin{aligned} \Box_n + (n+1)^2 = \sum_{0\leqslant k\leqslant n}(k+1)^2 &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n}(k^2+2k+1) \\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n}k^2 + 2\sum_{0\leqslant k\leqslant n}k + \sum_{0\leqslant k\leqslant n}1 \\ &= \Box_n \;+\; 2\sum_{0\leqslant k\leqslant n}k \;+\; (n+1)\,. \end{aligned}$$

Oops — the $\Box_n$'s cancel each other. Occasionally, despite our best efforts, the perturbation method produces something like $\Box_n = \Box_n$, so we lose.

On the other hand, this derivation is not a total loss; it does reveal a way to sum the first n integers in closed form,

$$2\sum_{0\leqslant k\leqslant n}k = (n+1)^2 - (n+1)\,,$$

even though we'd hoped to discover the sum of first integers squared. Could it be that if we start with the sum of the integers cubed, which we might call $\boxdot_n$, we will get an expression for the integers squared? Let's try it.

$$\begin{aligned} \boxdot_n + (n+1)^3 = \sum_{0\leqslant k\leqslant n}(k+1)^3 &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n}(k^3+3k^2+3k+1) \\ &= \boxdot_n + 3\Box_n + 3\frac{(n+1)n}{2} + (n+1)\,. \end{aligned}$$

Sure enough, the $\boxdot_n$'s cancel, and we have enough information to determine $\Box_n$ without relying on induction:

$$\begin{aligned} 3\Box_n &= (n+1)^3 - 3(n+1)n/2 - (n+1) \\ &= (n+1)(n^2+2n+1-\tfrac{3}{2}n-1) = (n+1)(n+\tfrac{1}{2})n\,. \end{aligned}$$

Figure 9

On voit ainsi successivement (de haut en bas) les trois schémas d'écriture (de gauche à droite) :

$$\begin{aligned} E &= E_1 = E_2 \\ &= E_3 \\ &= E_4. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} E &= E_1 = E_2 \\ &= E_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} E &= E_1 \\ &= E_2 = E_3 \end{aligned}$$

Notons une variante qui semble rare : certains auteurs placent le signe d'égalité *en bout de ligne* plutôt qu'en début de ligne, ainsi qu'on le voit dans le passage suivant d'un ouvrage d'analyse mathématique (Houzel, 1996, p. 300).

3.5.2.5 Lorsque h tend vers la valeur critique $2mg\ell$, k tend vers 1 et k' tend vers 0 ; or $1-k^2\sin^2\varphi = \cos^2\varphi + k'^2\sin^2\varphi \leq \cos^2\varphi + k'^2 \leq (\cos\varphi + k')^2$ pour $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, donc

$$K \geq \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi + k'} = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2+k'(1+t^2)} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+k'-(1-k')t^2} =$$

$$\frac{1}{k}\int_0^1 \mathrm{d}t \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}-t} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}+t} \right) = \frac{1}{k}\log\frac{k+1-k'}{k-1+k'} = \frac{1}{2k}\log\frac{1+k}{1-k}$$

qui tend vers $+\infty$ pour $k \to 1$. On voit donc que T augmente indéfiniment lorsque h

Figure 10

On observe en effet, ici, une suite d'*inégalités* et d'égalités de la forme

$$\begin{aligned} &E \geq E_1 = E_2 = E_3 = \\ &E_4 = E_5 = E_6 \end{aligned}$$

là où d'autres auteurs recourraient au schéma de calcul suivant :

$$\begin{aligned} &E \geq E_1 = E_2 = E_3 \\ &= E_4 = E_5 = E_6. \end{aligned}$$

On trouve aussi un emploi du saut de ligne qui rejoint ce qui s'observera au collège, comme le montre cet extrait d'un ouvrage d'analyse numérique (Demailly, 1991, p. 211), où est mis en œuvre le dispositif par sauts de ligne *pur*, dans lequel chaque ligne ne comporte qu'*une* expression E_k, comme il en va sur le schéma de calcul suivant :

$$\begin{aligned} &E \\ &= E_1 \\ &= E_2 \\ &= E_3. \end{aligned}$$

On notera également cette autre combinaison d'écritures en ligne et de sauts de ligne :

$$\begin{aligned} E &= E_1 \\ &= E_2. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_n - \widetilde{y}_{n-\frac{1}{2}} &= y_n - \left(\widetilde{y}_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{2}\,\widetilde{p}_{n-2}\right)\\
&= y_n - \left(\widetilde{y}_n - h_{n-1}\widetilde{p}_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{2}\,\widetilde{p}_{n-2}\right)\\
&= h_{n-1}\left(\widetilde{p}_{n-1} - \frac{1}{2}\,\widetilde{p}_{n-2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\,h_{n-1}f(t_n, y_n) + o(h_{n-1});
\end{aligned}
$$

à la troisième ligne on utilise le fait que $y_n = \widetilde{y}_n = z(t_n)$, et à la quatrième le fait que $\widetilde{p}_{n-i} = f(t_{n-i}+h_{n-i}/2, \widetilde{y}_{n-i}+1/2)$ converge vers $f(t_n, y_n)$ pour $i = 1, 2$ lorsque $h_{\max}$ tend vers 0. Grâce à la formule de Taylor pour les fonctions de 2 variables, il vient

$$
\begin{aligned}
f(t_n, y_n) - f\left(t_{n-1} + \frac{h_{n-2}}{2}, \widetilde{y}_{n-\frac{1}{2}}\right)&\\
&= \frac{h_{n-1}}{2}\,f'_t(t_n, y_n) + \frac{1}{2}\,h_{n-1}f(t_n, y_n)f'_y(t_n, y_n) + o(h_{n-1})\\
&= \frac{1}{2}\,h_{n-1}(f'_t + ff'_y)(t_n, y_n) + o(h_{n-1})\\
&= \frac{1}{2}\,h_{n-1}f^{[1]}(t_n, y_n) + o(h_{n-1}),
\end{aligned}
$$

d'où $$y_{n+\frac{1}{2}} - \widetilde{y}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\,h_n h_{n-1}f^{[1]}(t_n, y_n) + o(h_n h_{n-1}).$$

On en déduit finalement

$$
\begin{aligned}
\varepsilon''_n &= h_n f'_y\left(t_n + \frac{h_n}{2}, c_n\right)\left(y_{n+\frac{1}{2}} - \widetilde{y}_{n+\frac{1}{2}}\right)\\
&= \frac{1}{4}\,h_n^2 h_{n-1}\left(f'_y f^{[1]}\right)(t_n, y_n) + o(h_n^2 h_{n-1}),
\end{aligned}
$$

Figure 11

Le dispositif d'écriture par sauts de ligne pur – qui, dans des variantes spécifiques, triomphe au collège – est utilisé lorsque l'auteur entend justifier (au moins partiellement) chacune des égalités écrites. Ces commentaires justificatifs peuvent être *juxtalinéaires*, comme dans l'exemple suivant (Lipson, 1981, p. 40), ce qui est parfois déconseillé comme diminuant la fluence de la lecture (Lee, s.d., pp. 5-6).

Let us examine in detail how our definitions compute $4 + 2$ and $4 \cdot 2$.

$4 + 2 = 4 + 1'$	defn. of $'$
$= (4 + 1)'$	recursion
$= (4 + 0')'$	defn. of $'$
$= ((4 + 0)')'$	recursion
$= ((4)')'$	basis
$= (5)' = 6$	defn. of $'$.

Figure 12

Les commentaires peuvent aussi être *interlinéaires*, comme ci-après (Chrystal, 1904, p. 6).

§ 6.] Since $+a - c + c = +a$ by the definition of the mutual relation between addition and subtraction, we have

$$
\begin{aligned}
a + b - c &= a - c + c + b - c;\\
&= a - c + b + c - c,\\
&\quad \text{by law of commutation for addition;}\\
&= a - c + b \qquad (1),\\
&\quad \text{by definition of subtraction.}
\end{aligned}
$$

Figure 13

De rares auteurs, s'inspirant de la rédaction des programmes informatiques (« Commentaire (informatique) », s.d.), usent aussi de commentaires *intralinéaires*. Ainsi en va-t-il du mathématicien et informaticien *Edsger Wybe Dijkstra* (1930-2002), par exemple dans le passage suivant (Dijkstra, 1997, p. 1).

> Now we turn to the calculational proof. As usual, we shall exploit the associativity of the addition —i.e. the equality
>
> $(p+q)+r = p+(q+r)$ for all p, q, r —
>
> implicitly by omitting such semantically redundant parenthesis. Here we go! For any a, b,
>
> $(a+b)^2$
>
> $=$ { definition of exponentiation }
>
> $(a+b)\cdot(a+b)$
>
> $=$ { distribution $p\cdot(q+r) = p\cdot q + p\cdot r$ }
>
> $(a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b$
>
> $=$ { distribution $(p+q)\cdot r = p\cdot r + q\cdot r$, twice }
>
> $a\cdot a + b\cdot a + a\cdot b + b\cdot b$
>
> $=$ { symmetry of $\cdot$: $p\cdot q = q\cdot p$ }
>
> $a\cdot a + a\cdot b + a\cdot b + b\cdot b$
>
> $=$ { definition of exponentiation twice; property of 2: $p + p = 2\cdot p$ }
>
> $a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$

Figure 14

La documentation concernant le collège mobilise rarement le dispositif de calcul en ligne pur *sans « additifs »*, même si cela n'est pas exclu, ainsi que nous allons le voir. On a examiné un échantillon documentaire constitué par les documents auxquels renvoient les 20 premiers résultats affichés par le moteur de Google [Note 5. Interrogé le 9 avril 2014.] en réponse à la requête enchaînement d'opérations [Note 6. L'annexe B donne la localisation sur l'Internet de ces documents.]. Le calcul en ligne n'en est pas absent, puisqu'il apparaît dans deux documents, dont le n° 5 (ci-après).

> **Compétence N1 : Enchaînements d'opérations avec parenthèses**
>
> **Règle n°1**
>
> Pour calculer une expression avec parenthèses, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses, en commençant par les parenthèses les plus intérieures.
>
> **Exemples :**
>
> ► $15 - (\underline{7+5}) = 15 - 12 = 3$
>
> ► $(\underline{37-19}) \times (\underline{7-5}) = 18 \times 2 = 36$
>
> ► $34 - [(\underline{7+5}) \times 2] = 34 - (\underline{12 \times 2}) = 34 - 24 = 10$

Figure 15

Le document 11 (figure 16) use de même de calculs en ligne « purs », comme on le verra ci-après. Dans ces deux derniers documents, on peut se demander si le recours au dispositif en ligne n'est pas motivé par des raisons de mise en page du contenu proposé au lecteur.

Règle

Dans un calcul, on effectue en priorité les calculs entre parenthèses.

☆ Exemple : $4 \times (2 + 1) = 4 \times 3 = 12.$

Règle

Dans un calcul, lorsqu'il n'y a plus de parenthèses, on effectue en priorité multiplications et divisions.

☆ Exemple : $3 + 4 \times 6 \div 8 \times 3 = 3 + 24 \div 8 \times 3 = 3 + 3 \times 3 = 3 + 9 = 12.$

Règle

Dans un calcul, lorsqu'il n'y a plus de parenthèses, plus de multiplications et plus de divisions, on effectue les opérations dans l'ordre de la gauche vers la droite.

☆ Exemple : $4 + 5 - 3 + 1 = 9 - 3 + 1 = 6 + 1 = 7$

Figure 16

Il en va autrement avec le document 8, qui combine calculs en ligne et *calculs auxiliaires*.

Exemple : Dans le calcul de A = 2 × [5 + (14 - 6)] on effectuera dans l'ordre :

14 - 6 = 8

5 + 8 = 13

2 × 13 = 26

C'est-à-dire : A = 2 × [5 + (14 - 6)] = 2 × (5 + 8) = 2 × 13 = 26.

Figure 17

Il y a là une manière de s'affranchir du « danger » de l'écriture en ligne le plus fréquemment souligné par les professeurs, à savoir un usage anarchique du signe d'égalité résultant de l'intégration dans la même ligne de calcul du calcul d'une expression *E* et de calculs partiels appelés par ce calcul, comme on le voit ici : 2 × [5 + (14 – 6)] = 5 + 8 = 2 × 13 = 26. Il semble cependant que cette « solution » soit rarement adoptée. À cela, ajoutons le document 10, qui montre l'usage du dispositif de calcul en ligne dans le cas où l'expression à évaluer se présente comme une *fraction*. Plus généralement, on peut constater une association récurrente entre calculs de fractions et dispositif en ligne que confirme l'enquête auprès de professeurs.

Exemples : calculer

- $A = \dfrac{27+6}{3} = \dfrac{(27+6)}{3} = \dfrac{33}{3} = 11$
- $B = \dfrac{6}{10-8} = \dfrac{6}{(10-8)} = \dfrac{6}{2} = 3$
- $C = \dfrac{11+4}{8-3} = \dfrac{(11+4)}{(8-3)} = \dfrac{15}{5} = 3$

Figure 18

Alors que le dispositif de calcul en ligne est rarement rencontré, le reste des documents du corpus utilise une forme ou une autre de calcul en sauts de ligne, en pratiquant toujours les sauts de ligne « purs », *non combinés avec du calcul en ligne*. Une première façon de faire est commune aux pratiques savantes et aux pratiques scolaires : comme on le voit ci-après, on la rencontre par exemple dans l'ouvrage déjà cité de Chrystal (1904, p. 8).

On the other hand, if

$$a = 2 \text{ and } b = 3,$$

then by the laws of commutation and association and by the definition of subtraction

$$\begin{aligned} +2-3 &= +2-(+2+1), \\ &= +2-2-1, \\ &= -1+2-2, \\ &= -1. \end{aligned}$$

Figure 19

Dans le corpus examiné ici, on rencontre ce dispositif dans le document 7 (et donc dans le document 9, qui lui est identique), ainsi qu'on le voit ci-après.

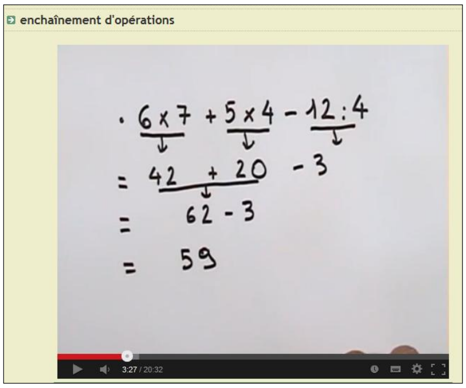


Figure 20

On rencontre encore ce dispositif « nu » dans les documents 14 et 20 (la figure 21 ci-après est extraite du document 14).

Ex : calculer les expressions suivantes

17 – 6 + 4 – 2	**24 – 2 x 6 + 20 : 4 x 5**	**19 – [42 : (3 + 4)]**
= 11 + 4 – 2	= 24 – 12 + 25	= 19 – (42 : 7)
= 15 – 2	= 12 + 25	= 19 – 6
= **13**	= **37**	= **13**

Figure 21

Mais c'est en ce point que deux « ruptures » – mineure, pour la première, majeure, pour la seconde – vont distinguer les pratiques scolaires des pratiques savantes. La première consiste à donner un nom « figé » à l'expression E à calculer. En lieu et place du schéma de calcul

$$\begin{aligned} &E \\ &= E_1 \end{aligned}$$

on voit apparaître le schéma de calcul suivant :

$$\begin{aligned} A &= E \\ &= E_1 \end{aligned}$$

dans lequel on nomme l'expression à calculer par une lettre (A, B, …) qui constitue ce que nous nommerons l'*en-tête* du calcul. Un tel dispositif s'observe dans les documents 4 et 13 (la figure 22 ci-après est extraite du document 4).

5ème — **SOUTIEN : ENCHAÎNEMENTS D'OPERATIONS**

EXERCICE 1 :

Effectuer les calculs suivants en respectant les priorités opératoires :

A = 14 + 39 − 42 + 7
=
=
=

B = 4,5 − 1,5 + 13,2 − 4
=
=
=

Figure 22

Jusqu'ici, la bidimensionnalité de l'écriture « arithmétique » peut être « déroulée » pour retrouver l'unidimensionnalité « algébrique » : le schéma de calcul

$$\begin{aligned} A &= E \\ &= E_1 \\ &= E_2 \\ &= \dots \end{aligned}$$

est en effet le fruit d'une « bidimensionnalisation » du schéma en ligne $A = E_1 = E_2 = \dots$ L'intérêt prêté à cette transformation est, semble-t-il, qu'elle fournirait une technique de calcul *plus fiable* pour cette raison que, au lieu de devoir aller visuellement de gauche à droite – en ligne – pour passer de E_{k-1} à E_k, la personne qui calcule va maintenant de haut en bas – en colonne –, ce qui leur permet peut-être de confronter E_k à E_{k-1} plus facilement et plus sûrement.

C'est alors que se produit la rupture « majeure » annoncée plus haut : elle consiste à répéter l'en-tête initial « A = » *au début de chaque ligne*, comme on peut le voir dans les passages du document 1 reproduit ci-après (figures 23 et 24).

$A = 5 \times (\underline{1 + 2})$	$B = (\underline{36 - 20}) \div 4$
$A = \underline{5 \times \quad 3}$	$B = \underline{16 \div 4}$
$A = 15$	$B = 4$

Figure 23

N° 1. En appliquant la règle, effectuer correctement les calculs.

B = 5 + 7 × 2	C = 7 × 5 − 3	D = 4 + 2 × 5
B =	C =	D =
B =	C =	D =
E = 17 − 2 × 3	F = 8 × 5 − 4	G = 8 + 3 × 5
E =	F =	G =
E =	F =	G =
H = 4 × 3 + 2	I = 9 − 2 × 4	J = 3 × 11 − 7 × 4
H =	I =	J =
H =	I =	J =

Figure 24

Dix des 18 documents examinés adoptent ce dispositif, qui semble ubiquitaire au collège [Note 7. Il s'agit des documents 1, 3, 6, 10, 12, 15, 16, 17, 18, 19.]. Le document 12 fournit de cela une illustration parmi d'autres.

Énoncé

En écrivant les détails, calculer B = 228 − (3 + 2 × 9) × 7 .

Solution

	Commentaires
$B = 228 - (3 + 2 \times 9) \times 7$	← On recopie l'expression.
$B = 228 - (3 + \mathbf{18}) \times 7$	← On calcule d'abord le contenu des parenthèses en commençant par la multiplication.
$B = 228 - \mathbf{21} \times 7$	← On finit de calculer le contenu des parenthèses.
$B = 228 - \mathbf{147}$	← On effectue la multiplication qui est prioritaire.
$B = 81$	← On termine le calcul.

Figure 25

La rupture affirmée tient à la différence brutale entre le schéma de calcul

$$
\begin{aligned}
A &= E \\
&= E_1 \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

qui met en œuvre le dispositif de calcul « par sauts de ligne avec en-tête initial » et le schéma

$$
\begin{aligned}
A &= E \\
A &= E_1 \\
A &= \ldots
\end{aligned}
$$

qui met en jeu le dispositif de calcul « par sauts de ligne avec en-têtes initial *et subséquents* ». Alors que le premier schéma de calcul est un déploiement bidimensionnel d'un calcul fondamentalement unidimensionnel, il n'en est plus de même du second : en le déroulant, on obtiendrait l'étrange suite d'égalités $A = E = A = E_1 = A = \ldots$ Sans doute est-ce cette impossibilité même de revenir à un calcul « en ligne » qui vaut à ce dispositif son succès : l'en-tête « A = » en début de ligne « bloque » le contenu de la ligne dans la position qui lui est donnée ; l'élève doit travailler dans un cadre figé, qui semble diminuer les risques d'erreur de sa part. Il est possible aussi que cela facilite le travail de contrôle et de correction du professeur.

Une justification du choix de ce dispositif avec sauts de ligne et en-tête initial et subséquents est rarement avancée spontanément : l'amuïssement technologique est ici la règle. L'enquête par questionnaire auprès d'un petit nombre de professeurs conforte cette observation. L'attitude rapportée par les enquêtés tend à *écarter* les enchaînements « en ligne » pour favoriser les enchaînements « par sauts de ligne ». Tel enquêté, qui affirme ne pas favoriser l'enchaînement par sauts de ligne, écrit pourtant : « S'il y a de la place pour écrire sur la ligne, on continue à écrire en ligne ; sinon on revient à la ligne en rappelant le signe "=" et le nom de l'expression "*A*" auquel il se rapporte ». Une telle raison n'est cependant pas clairement recevable puisqu'on peut « passer à la ligne » en calculant comme on le fait en écrivant, ce qui donne par exemple ce schéma de calcul :

$$\begin{aligned} E &= E_1 = E_2 \\ &= E_3 = E_4. \end{aligned}$$

Quant à la justification du dispositif de calcul par sauts de ligne, les réponses recueillies invoquent classiquement la non-fiabilité supposée, entre les mains des élèves, du maniement *en ligne* des suites d'égalités. Les rares énoncés technologiques que nous avons pu rencontrer sont toujours peu explicites. Dans une vidéo en ligne (Jonathan, 2013), l'enseignant, Jonathan, s'apprête à calculer l'expression écrite au tableau : 45 : 10 + 3,7 – 5 × 0,1. En fait, ce qui a été préalablement écrit au tableau est exactement : A = 45 : 10 + 3,7 – 5 × 0,1. Jonathan commente : « Alors ici vous voyez que l'expression porte un nom. C'est l'expression A qui est égale à tout ça… » (figure 26).

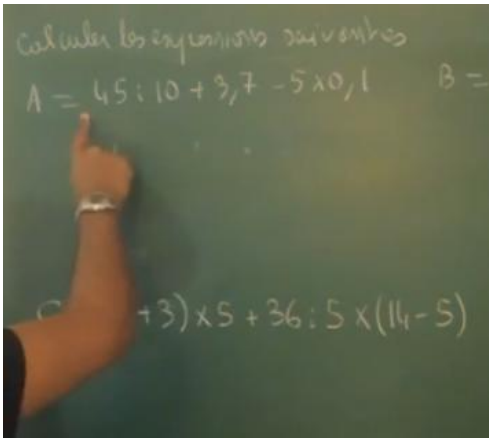


Figure 26

Il poursuit alors : « Dans ce cas, dans ma rédaction, à chaque fois, je dois mettre “A = ”, “A = ”, “A = ”… D’accord ? Pour que les choses soient claires. » En même temps, Jonathan écrit l’en-tête de la deuxième ligne, en suggérant d’un geste que l’on devra procéder ainsi à chaque début de ligne.

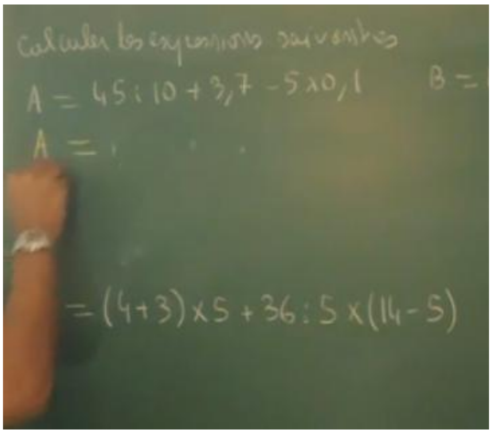


Figure 27

Ce commentaire de Jonathan livre une raison d’être des en-têtes subséquents : ceux-ci sont là « pour que les choses soient claires ». Qu’est-ce qui doit ainsi être rendu clair ? On peut penser que la réponse serait : « Le fait que ce que l’on calcule est bien la valeur de *A*. » En d’autres termes, il s’agirait d’empêcher les élèves d’oublier ce qu’ils sont censés faire, et cela en le leur rappelant en chaque début de ligne. Il y a en tout cela une *création didactique* inspirée par le souci de diriger les élèves dans le travail qu’ils ont à réaliser. Comme souvent, la technologie d’un tel « détail » technique reste implicite ou se trouve traitée avec quelque désinvolture. Selon le témoignage d’un professeur enseignant en collège, un inspecteur lui aurait fait reproche d’utiliser le dispositif avec sauts de ligne mais sans en-têtes subséquents par cette apostrophe « plaisante » : « La nature a horreur du vide ! »

Le choix – majoritaire – du dispositif avec en-têtes subséquents a pourtant contre lui d’être mathématiquement problématique. L’énoncé $A = E = E_1$ équivaut (du fait de la transitivité de l’égalité) à l’énoncé $A = E \wedge E = E_1$; ces deux énoncés peuvent s’écrire sans problème

$$\begin{aligned} A &= E \\ &= E_1 \end{aligned}$$

Mais si l’on interprète la suite de deux énoncés écrits sur deux lignes successives comme désignant la conjonction de ces énoncés, le schéma d’écriture

$$\begin{aligned} A &= E \\ A &= E_1 \end{aligned}$$

renvoie à l'énoncé $A = E \wedge A = E_1$, d'où l'on pourrait déduire que $E = E_1$. Cette conclusion est bien celle vers laquelle on veut aller par exemple dans le cas suivant. Soit $A = \int_1^x 3(t-1)^2\, dt$; on a d'une part (par intégration) $A = E$, où $E = (x-1)^3$ et, d'autre part (par développement puis intégration), $A = \int_1^x (3t^2 - 6t + 3)\, dt = E_1$, avec $E_1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Des égalités $A = E$ et $A = E_1$ on tire alors l'égalité $E = E_1$, à savoir : $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. On voit ainsi que, paradoxalement, le désir de contrôler au plus près le « sens » des gestes que l'élève doit accomplir peut contribuer à diminuer l'intelligibilité de la technique ainsi mise en œuvre. Il n'est par exemple nullement évident que les élèves assujettis au dispositif de calcul avec en-têtes voient clairement que, dans une suite d'égalités du type

$$\begin{aligned} A &= E \\ &= E_1 \\ &= E_2 \\ &= E_3 \\ &= E_4, \end{aligned}$$

si l'on a bien sûr $A = E_4$, on a aussi, par exemple, $E_1 = E_3$, etc.

Ces difficultés soulevées par l'emploi du dispositif de calcul « par sauts de ligne avec en-têtes initial et subséquents » ne semblent pas être véritablement prises en compte. Corrélativement, il apparaît que l'équipement mathématique de la profession de professeur de mathématiques semble, sur ces points, assez léger. Non seulement il ne semble pas que les notions d'expression numérique et de valeur d'une telle expression y reçoivent une attention satisfaisante (voir l'annexe A), mais il n'est pas sûr non plus, par exemple, que la question de l'associativité d'une opération binaire y trouve un développement adéquat, ménageant notamment une place au théorème d'associativité et à sa démonstration, ou permettant de prendre connaissance des surprises que réserve la non-associativité, laquelle ne permet pas, par exemple, de définir ce qu'on note habituellement a^n (voir l'annexe C).

4. La section *Discussion* de l'article doit répondre aux questions suivantes : « What might the answer imply and why does it matter? How does it fit in with what other researchers have found? What are the perspectives for future research? » Cette section pourrait avoir le contenu suivant.

Discussion

La recherche présentée ici a porté sur ce qui est d’abord un *symptôme* : l’emploi dominant d’un certain dispositif de calcul, « par sauts de ligne, avec en-tête initial et en-têtes subséquents ». Le point de départ de la recherche, on l’a précisé, se trouve dans un propos d’un ancien professeur de collège indiquant qu’il « interdisait » à ses élèves de calculer « en ligne ». Cet aveu semble être la face cachée du phénomène étudié ici, du moins si nous nous fions à nos enquêtés, qui n’admettent qu’à demi-mot *imposer* (ou avoir imposé) ce type de dispositif de calcul. La face visible, ainsi que nous l’avons constaté, c’est le fait que le dispositif avec en-têtes semble utilisé quasiment comme allant de soi, sans besoin de justification, sinon sans commentaire. L’étude des phénomènes de création didactique a un intérêt fondamental pour la connaissance du didactique. Elle a aussi, dans chaque cas, un intérêt pour la profession et sa noosphère : de telles créations, souvent poussées en avant par des motifs de confort didactique – pour les élèves et pour les professeurs –, ont aussi leurs désavantages. C’est ainsi que si l’on compare le dispositif avec en-têtes au dispositif du calcul en ligne avec calculs auxiliaires (voir la figure 17), on conçoit que le dispositif avec en-têtes gêne le recours à des calculs partiels, recours qu’il est pourtant censé encadrer : si l’on veut expliciter un détail de calcul, il convient en effet, chaque fois, de *créer une ligne* à cet effet. Dans une vidéo en ligne (Ravel, s.d.) où elle s’adresse à des élèves de 4e, on voit ainsi l’enseignante, parvenue à l’égalité $B = –44 + (–4)^2 – 5 \div 2$ (figure 28, 3e ligne), hésiter avant d’écrire ce qui sera l’égalité $B = –44 + 16 – 5 \div 2$ (5e ligne) et noter sous la ligne qu’elle vient d’écrire une ligne (la 4e de la figure 28) qu’elle n’avait manifestement pas l’intention d’écrire, qu’elle colle d’ailleurs à la ligne précédente (la 3e) comme s’il s’agissait d’une insertion après coup, tout en l’annonçant par ce commentaire : « Alors, sous-entendu… On n’est pas obligé d’écrire cette étape. Vous pouvez la faire dans votre tête… »

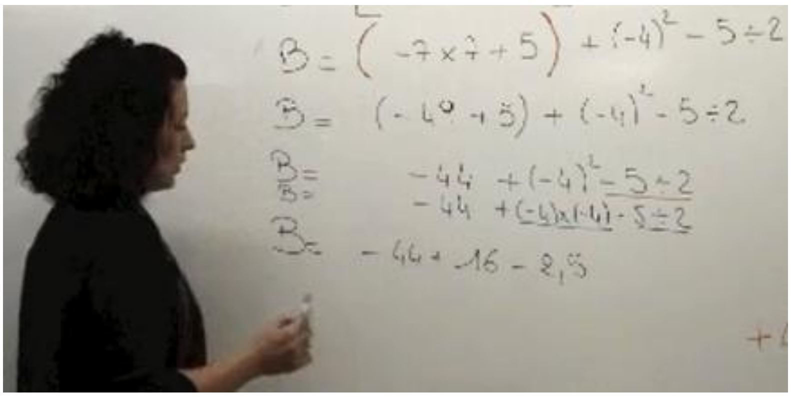


Figure 28

On voit ainsi que, tant du point de vue théorique que pratique, le dispositif de calcul en ligne avec calculs auxiliaires semble plus adéquat. Ce pourrait être l’un des apports de cette recherche que de poser le problème et d'amorcer un débat quant à la pertinence d'une évolution dans ce sens des pratiques dominantes.

La question au point de départ de cette recherche ne semble pas avoir fait l'objet de travaux notables. Cette recherche elle-même pourrait donc attirer l'attention des chercheurs tant sur cette question que sur d'autres de semblable nature, portant sur des dispositifs techniques devenus « figés », adoptés généralement pour la simplification qu'ils apportent au plan pratique, du point de vue mathématique comme du point de vue didactique, mais qui, pourtant, mériteraient d'être réévalués. À cet égard, ce travail doit être regardé comme une contribution à un programme de recherche dont il ne fait qu'esquisser les contours.

5. La section *Références* doit classiquement recenser les références de *tout* ce qui a été cité dans le corps du texte de l'article (ainsi éventuellement que dans les annexes), *et celles-là seulement*. Dans la liste qui suit, on s'est efforcé de satisfaire cette exigence, à ceci près que les documents mentionnés dans l'annexe B ci-après n'y ont pas été repris. Nous nous sommes volontairement abstenus de donner une ou plusieurs références concernant la TAD, mentionnée dans l'*Introduction* de l'article à propos du modèle didactique de référence de l'équipe Ξ_1 : seul le cadre dans lequel cette recherche a été réalisée explique cette « dérogation » aux usages en matière de références.

Références

Calcul infinitésimal. (s.d.). Dans *Wikipédia*. Récupéré le 12 avril 2014 de http://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_infinit%C3%A9simal

Chermak, S. (2009, 16 juillet). *CRPE. Équation du premier degré* [Vidéo]. Récupéré le 13 avril 2014 de http://www.youtube.com/watch?v=eA9T89vxl2s

Chrystal, G. (1904). *Algebra. An Elementary Text-book*, Vol. 1. New York : Chelsea.

Commentaire (informatique). (s.d.). Dans *Wikipédia*. Récupéré le 11 avril 2014 de http://fr.wikipedia.org/wiki/Commentaire_(informatique)

Demailly, J.-P. (1991). *Analyse numérique et équations différentielles*. Grenoble : PUG.

Dijkstra, E. W. (1997). The Mathematical Divide. EWD1268. Récupéré le 12 avril 2014 de http://www.cs.utexas.edu/users/EWD/transcriptions/EWD12xx/EWD1268.html.

Dubreil, P. & Dubreil-Jacotin, M.-L. (1964). *Leçons d'algèbre moderne*. Paris : Dunod.

Enchaînements d'opérations. (s.d.). Récupéré le 12 avril 2014 de http://monprofdemaths.voila.net/cours/5ECHAP01.pdf

Graham, R. L., Knuth, D. E. & Patashnik, O. (1989). *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science*. Reading (Mass.) : Addison-Wesley.

Houzel, C. (1996). *Analyse mathématique. Cours et exercices*. Paris : Belin.

Introduction to order of operations [Vidéo (en anglais)]. (s.d.). Récupéré le 12 avril 2014 de https://www.khanacademy.org/math/cc-sixth-grade-math/cc-6th-factors-and-multiples/cc-6th-order-operations/v/introduction-to-order-of-operations

Jonathan. (2013, 30 juillet). *011 / Enchaînements d'opérations / Calculer une expression avec parenthèses (5)* [Vidéo]. Récupéré le 13 avril 2014 de http://www.youtube.com/watch?v=Ui8QyDbVFZg

Lax, P, Burstein, S. & Lax, A. (1976). *Calculus with Applications and Computing*. New York : Springer-Verlag.

Lee, K. P. (s.d.). *A Guide to Writing Mathematics*. Récupéré le 13 avril 2014 de http://www.cs.ucdavis.edu/~amenta/w10/writingman.pdf

Lentin, A. & Rivaud, J. (1964). *Leçons d'algèbre moderne*. Paris : Vuibert.

Lipson, J. D. (1981). *Elements of Algebra and Algebraic Computing*. Reading (Mass.) : Addison-Wesley.

Lyndon, R. C. (1967). *Notes on Logic*. New Yrok : Van Nostrand.

Mercier, P. (2010, 24 août). *Enchaînement d'opérations (5ème)* [Vidéo]. Récupéré de http://www.youtube.com/watch?v=osqzxW2Hwns

Ordre des opérations. (s.d.). Dans *Wikipédia*. Récupéré le 11 avril 2014 de http://fr.wikipedia.org/wiki/Ordre_des_opérations

Pegg, Ed Jr. (s. d.). Precedence. *MathWorld*. Récupéré le 11 avril 2014 de http://mathworld.wolfram.com/Precedence.html.

Ravel, N. (s.d.). *CH1 op relatif IV. Enchainement d'opérations* [Vidéo]. Récupéré le 14 avril 2014 de http://www.dailymotion.com/video/x14lgm8_ch1-op-relatif-iv-enchainement-d-ope-rations_webcam

Soutien : enchaînement d'opérations. (s.d.). Récupéré le 12 avril 2014 de http://www.collegeannedebretagnerennes.ac-rennes.fr/sites/collegeannedebretagnerennes.ac-rennes.fr/IMG/pdf/soutien_no_1_-_enchainements_d_operations.pdf

Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics*, vol. II. New York : Dover.

Term (logic). (s.d.). Dans *Wikipedia*. Récupéré le 14 avril 2014 de http://en.wikipedia.org/wiki/Term_%28logic%29

Turing, A. M. (1937). On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *2*(42), 230-65.

6. L'*Annexe A* précise les notions (utilisées dans le corps du texte de l'article) d'*expression bien formée* et de *valeur numérique* d'une expression bien formée.

Annexe A

Les expressions numériques et leur évaluation

On considère ici un langage formel $\mathscr{L}$ dont l'alphabet $\mathscr{A}$ comporte

– des symboles de *constante*, à savoir les noms standards des nombres rationnels (fraction irréductible si le nombre n'est pas décimal, expression décimale sinon) ;
– des symboles de *fonction*, qui sont ici des symboles de fonctions *binaires*, à savoir les symboles d'addition (+), de soustraction (–), de multiplication (×), de division (÷) et d'exponentiation (^).

Sur une telle définition, on pourra consulter « Term (logic) », s.d.

On appelle expressions de $\mathscr{L}$ toute suite finie d'éléments de $\mathscr{A}$. On appelle *termes* de $\mathscr{L}$, ou *expressions bien formées* de $\mathscr{L}$, toutes les expressions de $\mathscr{L}$, et seulement celles-là, qui peuvent être obtenues par les règles suivantes :

– tout symbole de constante est un terme ;
– si t_1 et t_2 sont des termes, alors $t_1 * t_2$ est un terme, où * est l'un des symboles de fonction de $\mathscr{L}$.

On démontre qu'un terme est engendré par ces règles d'une façon unique (Lyndon, 1967, pp. 5-11). Des expressions bien formées de $\mathscr{L}$ sont par exemple 8 + 7,2, 6 ÷ 5, (8 + 7,2) × (6 ÷ 5), ((8 + 7,2) × (6 ÷ 5)) – 2^5. Les parenthèses utilisées ici ne font pas partie de l'alphabet de $\mathscr{L}$: elles sont seulement utilisées pour en représenter les termes.

La *valeur numérique* $v(t)$ d'un terme t est définie par les règles suivantes :

– la valeur d'un symbole de constante est le nombre rationnel que ce symbole désigne ;
– la valeur d'un terme $t_1 * t_2$ est égale à $v(t_1) * v(t_2)$.

On a ainsi : $v(((8 + 7{,}2) \times (6 \div 5)) - 2\text{^}5) = v((8 + 7{,}2) \times (6 \div 5)) - v(2\text{^}5) = v(8 + 7{,}2) \times v(6 \div 5) - v(2\text{^}5) = (8 + 7{,}2) \times 1{,}2 - 32 = 15{,}2 \times 1{,}2 - 32 = 18{,}24 - 32 = -13{,}76$.

7. Comme annoncé, l'*Annexe B* recense un corpus de documents (relatifs à l'enchaînement des opérations) examinés dans le corps du texte : ainsi qu'on l'a indiqué, il s'agit des documents correspondants aux 20 premiers résultats affichés, le 9 avril 2014, par le moteur de recherche Google en réponse à la requête enchaînement d'opérations.

Annexe B

Un corpus documentaire sur l'enchaînement d'opérations

On donne ci-après les adresses Internet des documents associés aux 20 premiers résultats affichés (le 9 avril 2014) par Google en réponse à la requête enchaînement d'opérations.

Document 1 : http://monprofdemaths.voila.net/cours/5ECHAP01.pdf

Document 2 : identique au document 1

Document 3 : http://www.academie-en-ligne.fr/Ecole/RessourcesInformatives.aspx?PREFIXE=AL4MA51&CONCEPT=AL4MA51-INTR-197458-1

Document 4 : http://www.collegeannedebretagnerennes.ac-rennes.fr/sites/collegeannedebretagnerennes.ac-rennes.fr/IMG/pdf/soutien_no_1_-_enchainements_d_operations.pdf

Document 5 : http://www.mathonautes.lautre.net/wp-content/uploads/Cours5eme.pdf

Document 6 : http://www.mathematiquesfaciles.com/priorites-dans-les-suites-d-operations-niveau-5eme_2_40412.htm

Document 7 : http://cours5eme.blogspot.fr/2006/08/enchanement-doprations-programme-2006.html

Document 8 : http://www.mathsbook.fr/cours-maths-5eme-enchainement-operations

Document 9 : identique au document 7

Document 10 : http://www.ac-nancy-metz.fr/PRES-ETAB/COLLDEUXSARRESLORQUIN/dokuwiki/doku2.php?id=maths:5ieme:chapitre_1

Document 11 : http://mathematiques.daval.free.fr/IMG/pdf/5_ch2_Enchainements_operations.pdf)

Document 12 : http://www.images.hachette-livre.fr/media/contenuNumerique/007/834334502.pdf

Document 13 : http://lyc71-laprats.ac-dijon.fr/IMG/pdf/CNUM_-_Fractions_enchainement_d_operations.pdf

Document 14 : http://fr.scribd.com/doc/36508287/enchainement-d-operations-5eme

Document 15 : http://cms.ac-martinique.fr/etablissement/clgpelage/file/Cours-de-Mathematiques-5eme/ENCHAINEMENT-D-OPERATIONS.pdf

Document 16 : http://www.blaszsite.fr/doc/5%20ch1a.pdf

Document 17 : http://myriam.collenne.free.fr/5_enchainements.htm

Document 18 : http://etab.ac-poitiers.fr/coll-lezay/IMG/pdf/Fiche_D_exercice_1_.pdf

Document 19 : http://vandymath.free.fr/IMG/pdf/prof_ch01_enchainement_operations.pdf

Document 20 : http://www.modulo-n.fr/courspdf/cinquieme/Enchainements_d_operations .pdf

8. L'*annexe C* donne quelques informations à propos des propriétés d'associativité et de non-associativité.

Annexe C

Associativité et non-associativité

Une opération binaire * est associative si, pour tous a, b, c, on a : $(a * b) * c = a * (b * c)$. Le théorème d'associativité indique que le composé de n éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pris dans cet ordre ne dépend pas des groupements faits au cours du calcul, ce composé s'écrivant alors par convention $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$. Ce théorème est vrai, par hypothèse, pour $n = 3$. Nous reproduisons ici la démonstration proposée par Rivaud et Lentin (1964, pp. 23-24) :

> Supposons-le vrai pour tout ensemble ordonné de n–1 éléments et considérons, pour n éléments, l'un quelconque des composés possibles.
>
> L'étoile indiquant la dernière opération sépare un couple de parenthèses écrit à gauche et un couple analogue écrit à droite ; l'un ou l'autre peut ne comprendre qu'un élément. En tous les cas, chaque couple contient moins de n éléments et, l'hypothèse de récurrence s'y appliquant, on peut y supprimer les parenthèses. On arrive donc
>
> soit à $a_1 * (a_2 * a_8 * \ldots * a_{n-1} * a_n)$ (cas α),
>
> soit à $(a_1 * a_2 * \ldots * a_k) * (a_{k+1} * \ldots * a_{n-1} * a_n)$ (cas β),
>
> soit à $(a_1 * a_2 * \ldots * a_{n-1}) * a_n$ (cas γ),
>
> Le cas γ correspond à la définition naturelle du produit. Montrons que les cas α et β s'y ramènent ; par exemple β donne successivement
>
> $$(a_1 * a_2 * \ldots * a_k) * [(a_{k+1} * \ldots * a_{n-1}) * a_n]$$
>
> par l'hypothèse de récurrence ;
>
> $$[(a_1 * a_2 * \ldots * a_k) * (a_{k+1} * \ldots * a_{n-1})] * a_n$$
>
> par l'axiome d'associativité, et enfin
>
> $$(a_1 * a_2 * \ldots * a_{n-1}) * a_n$$
>
> par l'hypothèse de récurrence. C'est la troisième expression (cas γ).
>
> Démonstration analogue pour le cas α.
>
> Quel que soit le groupement considéré, on obtient donc le même résultat que pour la définition naturelle du produit. Le théorème est vrai pour n éléments.

Que se passe-t-il lorsqu'une loi de composition interne n'est pas associative ? Nous empruntons à Dubreil et Dubreil-Jacotin (1964, pp. 34-36) l'exemple suivant d'une loi non associative donnée par sa table :

$*$	a	b	c
a	b	c	a
b	b	c	a
c	b	c	a

On peut constater que l'on a $(a * a) * a = b * a = b$ et $a * (a * a) = a * b = c$. Il vient encore : $(a * a) * a] * a = b * a = b$, $(a * a) * (a * a) = b * b = c$, $a * [a * (a * a)] = a * c = a$. Il résulte de là que l'on ne peut pas définir l'expression a^3 puisque l'on aurait alors, d'une part, $a^3 = (a * a) * a = b$ et, d'autre part, $a^3 = a * (a * a) = c$. Semblablement, l'expression a^4 aurait *trois* valeurs possibles : $a^4 = [(a * a) * a] * a = b$, $a^4 = (a * a) * (a * a) = c$, $a^4 = a * [a * (a * a)] = a$.